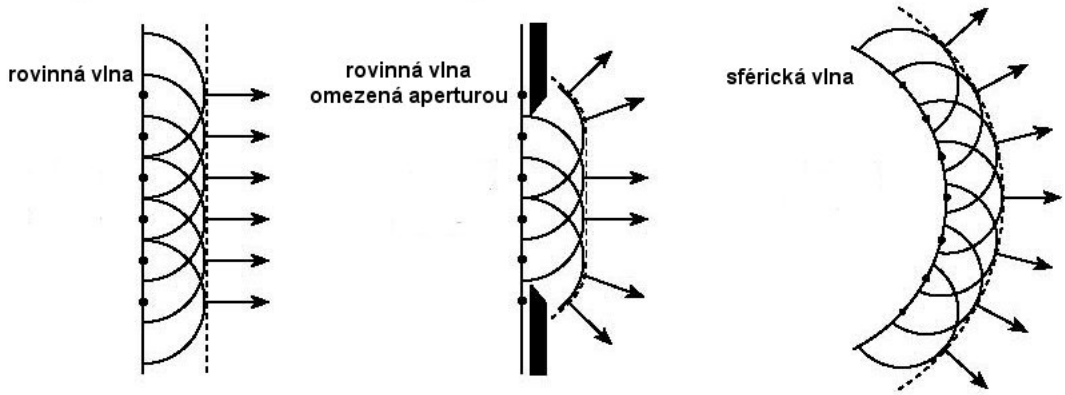
Difrakce (ohyb) světla

Christian Huygens ukázal, že přímočaré šíření vlnoplochy lze vysvětlit jako superpozici sekundárních sférických vln vyzářených ze všech částí vlnoplochy. Jestliže nějaká překážka brání vyzáření sekundárních vln v nějakých částech vlnoplochy, mění se tvar čela vlny v následujícím okamžiku. Difrakce označuje ty interferenční jevy, které jsou způsobeny přítomností štěrbiny nebo překážky jiného tvaru ve směru postupu vlny. V takových případech mohou být sekundární vlny vyzářeny jen z některých částí vlnoplochy a v důsledku toho dochází k odchylkám od přímočarého šíření. Hovoří se též o ohybu vln na překážkách. Podle Fresnela lze difrakční obrazec vysvětlit vzájemnou interferencí Huygensových elementárních vln vyzářených ze všech částí vlnoplochy, které nejsou zastaveny překážkou. ***Huygens-Fresnelův princip*** lze tedy zformulovat takto: každý nezacloněný bod vlnoplochy v daném časovém okamžiku je zdrojem sférických sekundárních vln (se stejnou frekvencí jako je frekvence primární vlny). Amplituda optického pole v libovolném bodě za překážkou je výsledkem superpozice těchto elementárních vln (s uvážením jejich amplitudy a relativní fáze).

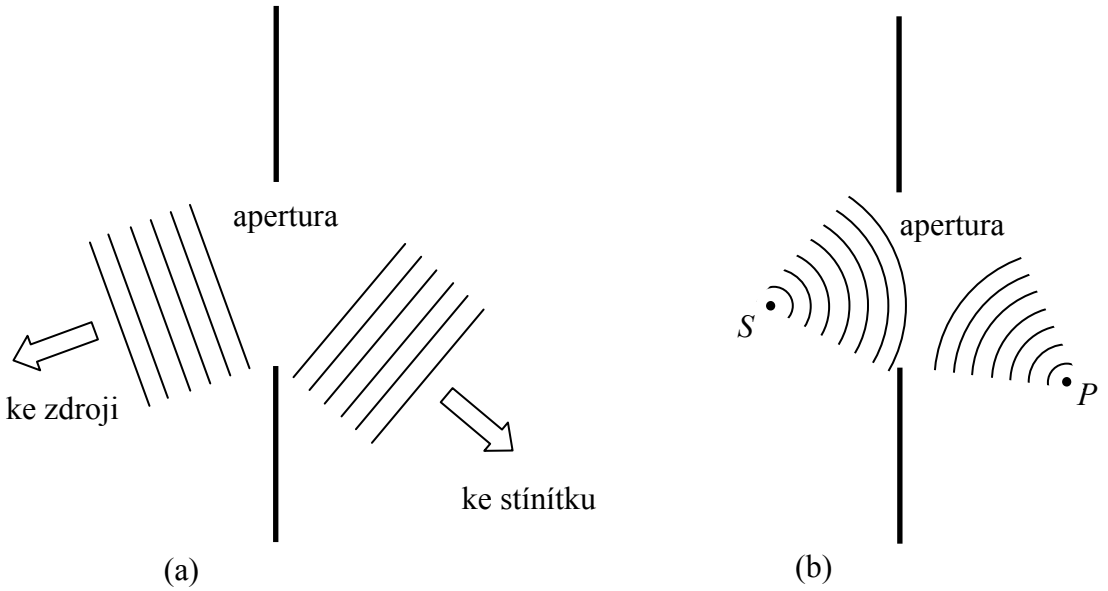


Obr. DF-1. Šíření vlnoplochy podle Huygensova principu.

Dopadá-li na štěrbinu svazek rovnoběžných paprsků, dává po průchodu ostrý obraz na stínítku za předpokladu, že stínítko je dostatečně blízko. Při jeho vzdalování od štěrbiny se na okrajích obrazu začínají objevovat proužky bez výraznějšího zkreslení obrazu. Tento jev se nazývá ***Fresnelova difrakce*** (ve sbíhavém svazku, v blízkém poli - malé vzdálenosti od překážky vzniká obraz překážky lemovaný světlými a tmavými proužky). Při dalším vzdalování stínítka až do vzdáleností, kdy paprsky na něj dopadající jsou prakticky rovnoběžné, dostáváme ***Fraunhoferovu difrakci*** (v rovnoběžném svazku, ve vzdáleném poli - tvar ohybového jevu se určuje z tvaru a rozměrů překážky a již nepřipomíná tvar překážky, s dalším vzdalováním stínítka se již jeho tvar nemění, mění se pouze jeho velikost).

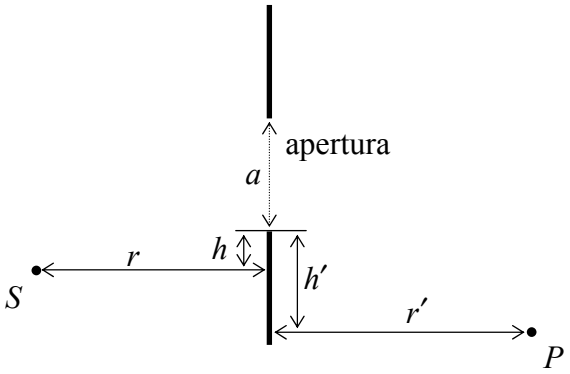
Mezi Fresnelovou a Fraunhoferovou difrakcí neexistuje ostrá hranice, při vzdalování stínítka postupně jedna přechází v druhou. difrakční jevy kladou jistá absolutní omezení na

rozlišovací schopnost optických přístrojů v důsledku jejich konečné apertury, tj. konečného průřezu svazku paprsků. Takové systémy jsou totiž schopné přijmout pouze část dopadající vlnoplochy. Difrakční jevy spojené s konečnou aperturou potom vedou k degradaci obrazu vytvořeného optickým systémem.



Obr. DF-2. Difrakce na štěrbině. (a) Fraunhoferova; (b) Fresnelova.

Uvažujme bodový zdroj S a bod pozorování P. Jsou-li oba dostatečně vzdáleny od překážky s malou aperturou Σ, můžeme jak vlny dopadající na překážku tak vlny přicházející po průchodu překážkou do bodu P považovat za rovinné. V tomto případě nastává Fraunhoferova difrakce. Je třeba si uvědomit, že fáze každého příspěvku v bodě P, díky dráhovým rozdílům, bude pro stanovení výsledného pole určující. Lze-li ale vlny dopadající na překážku a přicházející do bodu P považovat za rovinné, potom tyto dráhové rozdíly budou lineární funkcí aperturní proměnné (proměnných). Lineární závislost na aperturní proměnné je rozhodujícím matematickým kritériem Fraunhoferovy difrakce.



Obr. DF-3. Geometrické parametry určující klasifikaci difrakčních jevů.

r – vzdálenost zdroje *S* od překážky *Σ*, r´- vzdálenost bodu *P* překážky *Σ*, *h, h´*- příčné vzdálenosti bodů *S* a *P*, *a* – šířka štěrbiny (rozměr apertury)

Potom lze změnu *Δ* veličiny (r + r´) od jednoho okraje štěrbiny na druhý vyjádřit jako

$$\Delta = \sqrt{r^2 + (h+a)^2} + \sqrt{r'^2 + (h'+a)^2} - \sqrt{r^2 + h^2} - \sqrt{r'^2 + h'^2} = (\frac{h}{r} + \frac{h'}{r'})a + \frac{1}{2}(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'})a^2 + \ldots$$

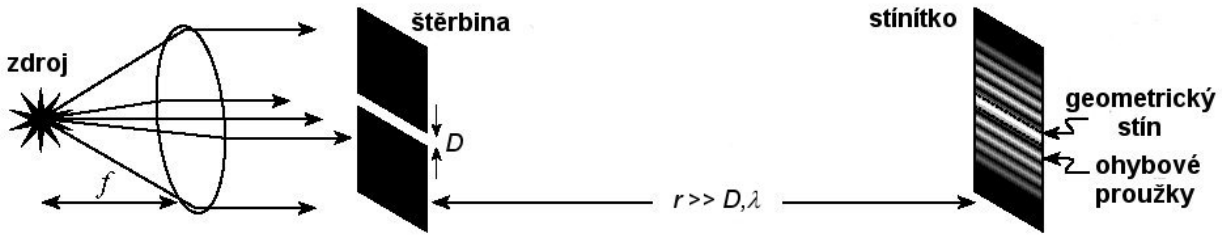
Vlnu lze považovat za planární (přes rozměr apertury), jestliže kvadratický člen v rozvoji výše je zanedbatelně malý vzhledem k vlnové délce záření, tj. pokud je splněna podmínka

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'})d^2 << \lambda$$

Obvykle se tato podmínka vyjadřuje ve tvaru $\frac{a^2}{\lambda} << r$, kde *a* je největší rozměr apertury a *r* je menší ze vzdáleností zdroj-překážka, překážka-stínítko.

Fraunhoferova difrakce na štěrbině

Uvažujeme rovinnou vlnu dopadající na horizontální štěrbinu výšky *D* a nekonečné délky ve směru kolmém k nákresně.



Obr. DF-4. Fraunhoferova difrakce na štěrbině.

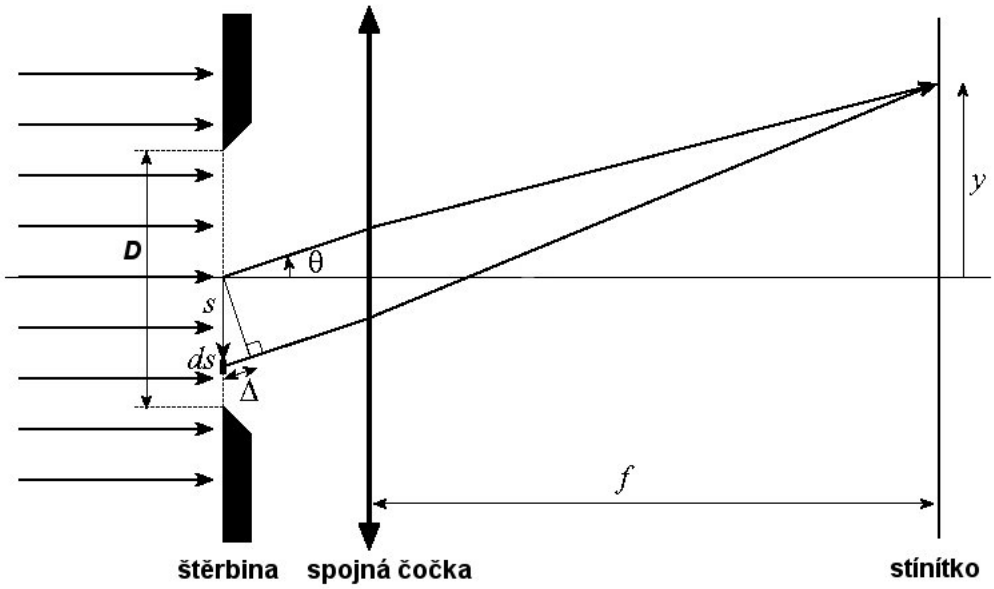
Štěrbinu rozdělíme na horizontální pásy infinitezimální šířky *ds*. Podle Fresnela předpokládáme, že amplituda sekundární vlny je úměrná ploše vlnoplochy, z níž je vyzářena. Je-li tedy amplituda pole dopadající vlny E_0 , potom můžeme sekundární vlně vyzářené z pásku šířky *ds* přisoudit amplitudu

$$dE = E_0 \frac{ds}{D}$$

Uvažujme sekundární vlnu vyzářenou ze středu štěrbiny, kterou zvolíme jako referenci. Její faktor šíření bude $e^{i(\omega t - kr)}$, kde r je optická dráha od středu štěrbiny do bodu *P*. Vlna přicházející do *P* z bodu vzdáleném *s* = *x* od středu štěrbiny bude potom mít fázi

$$\omega t - k(r - x\sin\vartheta)$$

Výsledná amplituda pole světelné vlny v bodě *P* bude



Obr. DF-5. Fraunhoferova difrakce na štěrbině

$$E = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{E_0}{D} e^{i(\omega t - k(r - x\sin\vartheta)} dx = \frac{E_0}{D} e^{i(\omega t - kr)} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{ikx\sin\vartheta} dx = \frac{E_0}{D} e^{i(\omega t - kr)} \frac{e^{ikx\sin\vartheta}}{ik\sin\vartheta}\Bigg|_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} = \frac{E_0}{D} e^{i(\omega t - kr)} \frac{e^{ik\frac{D}{2}\sin\vartheta} - e^{-ik\frac{D}{2}\sin\vartheta}}{ik\sin\vartheta} =$$

$$= E_0 e^{i(\omega t - kr)} \frac{\sin(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta)}{\frac{1}{2}kD\sin\vartheta}$$

Difrakční obrazec v libovolném bodě P stínítka (ve směru ϑ) bude určen intenzitou

$$I^\circ \sim \langle EE^* \rangle = I_0 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta)}{(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta)^2}$$

Funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ má limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

minima nastávají pro $\sin(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta) = 0$

tedy $\frac{1}{2}kD\sin\vartheta = m\pi$, kde $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

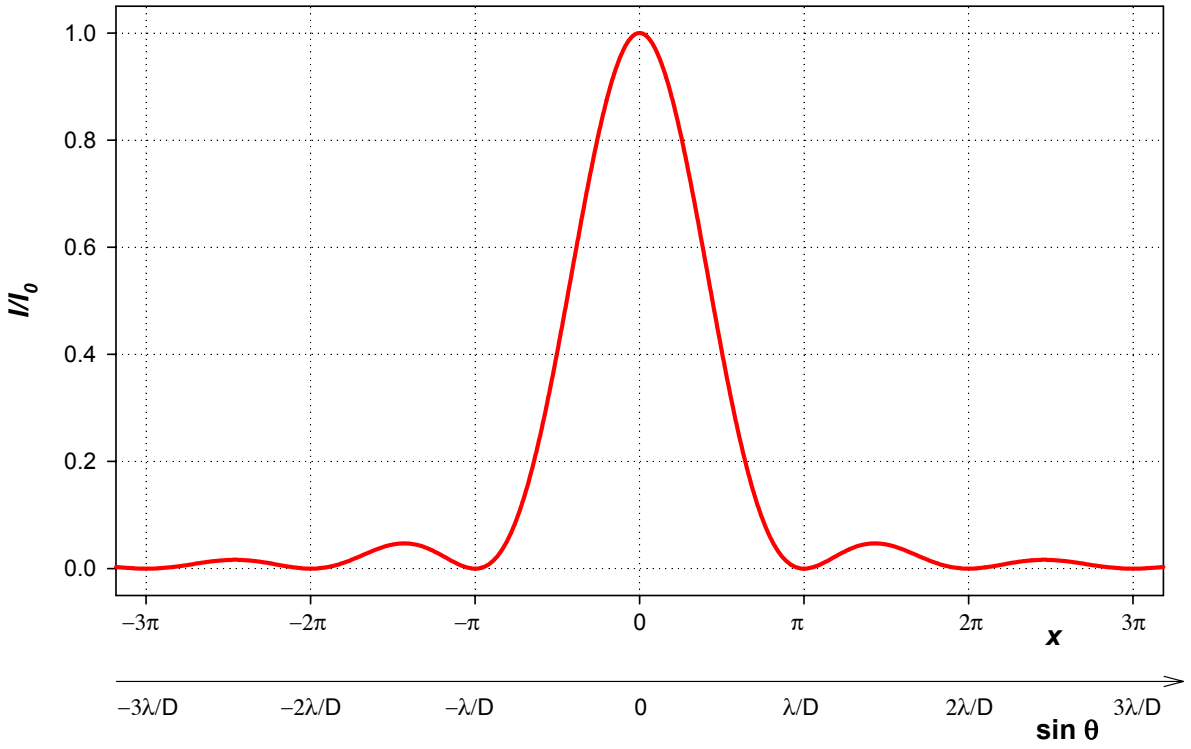
a odtud $\dfrac{1}{2}kD\sin\vartheta = \dfrac{1}{2}\dfrac{2\pi}{\lambda}D\sin\vartheta = m\pi \quad \Rightarrow \quad \sin\vartheta = m\dfrac{\lambda}{D}$, m = ±1, ±2, …

Všimněte si, že podmínka pro minima závisí na vlnové délce – je přímo úměrná λ - čili úhlová šířka hlavního maxima (vymezená hodnotami $-\lambda/D$ a λ/D) se bude pro světlo různých vlnových délek lišit. Centrální maximum difrakčního obrazce leží u $\vartheta = 0$, první minimum při $\sin\vartheta = \lambda/D$. Pro $D >> \lambda$ je ***úhlová položířka centrálního maxima***

$$\vartheta_1 \cong \sin\vartheta_1 = \frac{\lambda}{D}$$

Nepřímá úměrnost vůči šířce štěrbiny D znamená, že při zužování štěrbiny úhlová šířka hlavního maxima vzrůstá. Je-li $D = \lambda$, potom $\sin\vartheta_1 = \frac{\lambda}{D} = 1 \quad \Rightarrow \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$

V tomto případě je šířka hlavního maxima neohraničená a hlavní maximum pokrývá celé stínítko.



Obr. DF-6. Rozložení intenzity světla v případě Fraunhoferovy difrakce na štěrbině šířky D

Srovnání s mnohasvazkovou interferencí

difrakce $I^\circ = I_0 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta)}{(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta)^2}$, kde D je šířka štěrbiny

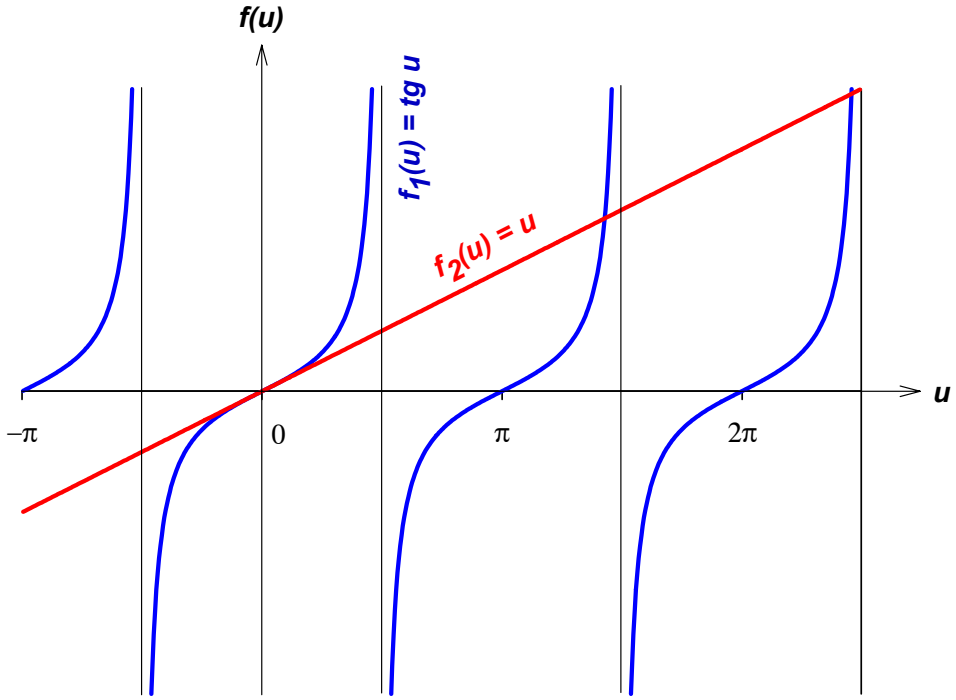
interference N stejných koherentních zdrojů $I^\circ = I_0 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}Nkd\sin\vartheta)}{\sin^2(\frac{1}{2}kd\sin\vartheta)^2}$,

kde d je vzdálenost zdrojů (štěrbin).

Interferenční obrazec závisí na vzdálenosti zdrojů (štěrbin), nikoli na šířce štěrbiny, zatímco difrakční obrazec je určen šířkou jediné štěrbiny. Hlavní maxima interferenčního obrazce se pravidelně opakují a jejich intenzita nezávisí na řádu m. Difrakční obrazec má jedno centrální maximum, sekundární maxima leží v polohách daných podmínkou

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sin^2 u}{u^2}\right) = \frac{2u^2\sin u.\cos u - 2u\sin^2 u}{u^4} = \frac{2u\sin u(u\cos u - \sin u)}{u^4} = 0$$

$\Rightarrow \quad u = \tan u \quad \Rightarrow$ grafické řešení (viz obr. DF-7).



Obr. DF-7. Průsečíky funkcí $f_1(u) = \mathrm{tg}\, u$ a $f_2(u) = u$ jsou řešením rovnice $u = \tan u$.

přibližné řešení: $\frac{1}{2} kD \sin\vartheta = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\vartheta = (m+\tfrac{1}{2})\frac{\lambda}{D}$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Intenzita v sekundárních maximech s rostoucím m klesá, jak je vidět z

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\lambda} D(m+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{D}\right]}{\left[\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\lambda} D(m+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{D}\right]^2} = I_0 \frac{\sin^2\left[(m+\frac{1}{2})\pi\right]}{\pi^2(m+\frac{1}{2})^2} = \frac{I_0}{\pi^2(m+\frac{1}{2})^2}$$

Fraunhoferův ohyb na pravoúhlém otvoru

Obecně pro dvoudimenzionální aperturu

$$dE = \left(\frac{E_A}{r}\right) e^{i(\omega t - kr)} dS$$

vzdálenost od dS k $P(X,Y,Z)$ $\qquad r = \sqrt{X^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}$

(kde y, z jsou souřadnice v rovině apertury a X, Y, Z jsou souřadnice bodu na stínítku)

vzdálenost OP $\qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ (bod O je ve středu pravoúhlého otvoru)

potom

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 - 2Yy - 2Zz + y^2 + z^2} = R\sqrt{1 - \frac{2(Yz+Zz)}{R^2} + \frac{y^2+z^2}{R^2}} \cong R\sqrt{1 - \frac{2(Yz+Zz)}{R^2}}$$

když jsme zanedbali kvadratický člen pod odmocninou (Fraunhoferova difrakce)

a s použitím binomického rozvoje ($\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x$) bude

$$r = R\left[1 - \frac{Yy + Zz}{R^2}\right]$$

a tedy výsledná amplituda pole světelné vlny v bodě *P* bude

$$E = \frac{E_A}{R} e^{i(\omega t - kR)} \iint_{apertura} e^{ik(Yy+Zz)/R} dS$$

Konkrétně pro obdélníkovou aperturu o rozměrech *A* x *B*

$$E = \frac{E_A}{R} e^{i(\omega t - kR)} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} e^{ikYy/R} dy \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e^{ikZz/R} dz \qquad \text{kde } dS = dx.dz$$

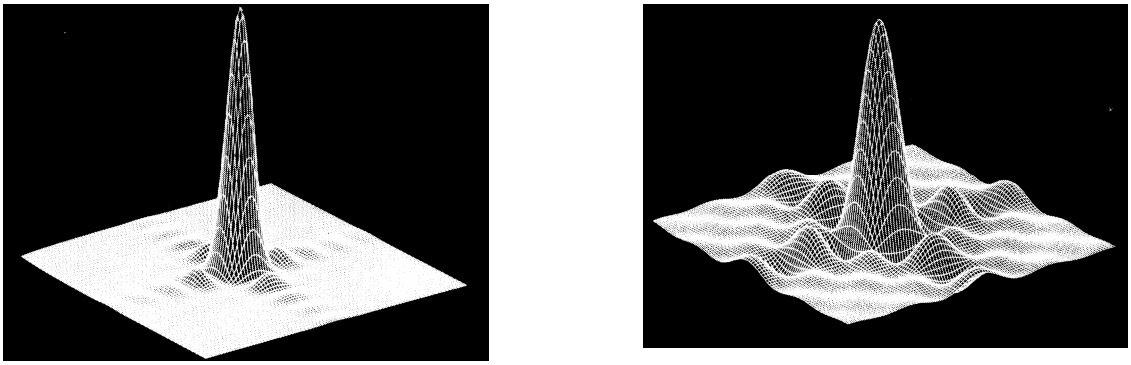
$$E = \frac{E_A}{R} e^{i(\omega t - kR)} \left[\frac{e^{ikAY/2R} - e^{-ikAY/2R}}{ikY/R}\right] \cdot \left[\frac{e^{ikBZ/2R} - e^{-ikBZ/2R}}{ikZ/R}\right] = \frac{ABE_A}{R} e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin u}{u} \frac{\sin v}{v}$$

kde jsme označili $u = \frac{kAY}{2R} = \frac{1}{2} kA \sin\vartheta_1$; $v = \frac{kBZ}{2R} = \frac{1}{2} kB \sin\vartheta_2$, což je tvar analogický jednodimenzionálnímu případu – nekonečně dlouhé štěrbině (viz výše).

Rozložení intenzity světla na stínítku je potom dáno vztahem

$$I(Y,Z) = I(0)\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2$$, kde $I(0)$ je intenzita v bodě P_0, tj. kde Y = 0 a Z = 0.

Úhlová pološirka hlavního maxima bude $\vartheta_1 = \frac{\lambda}{A}$; $\vartheta_2 = \frac{\lambda}{B}$



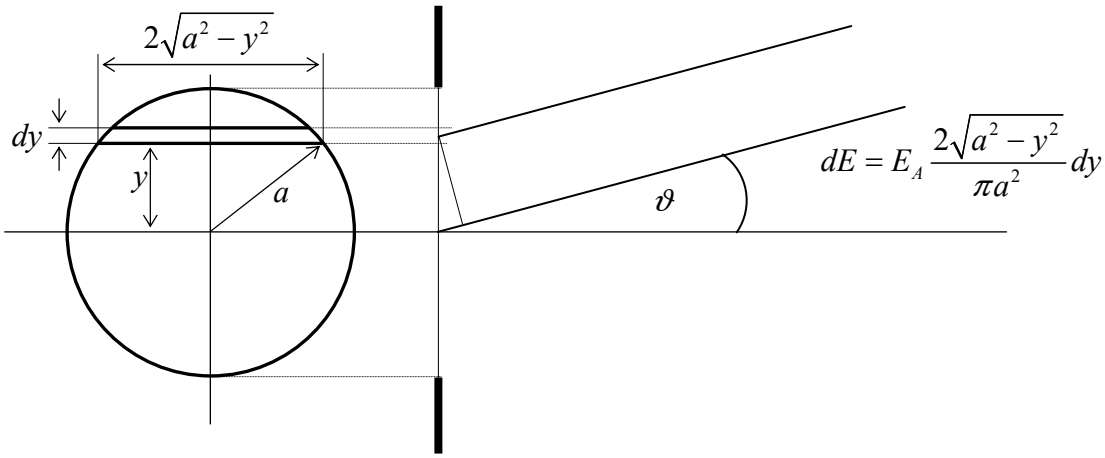
Obr. DF-8. Rozložení zářivosti (vlevo) a intenzity elektrického pole (vpravo) při Fraunhoferově difrakci na čtvercovém otvoru.

Fraunhoferův ohyb na kruhovém otvoru

Kruhovou aperturu rozdělíme na proužky o šířce *dy* a délce $2\sqrt{a^2 - y^2}$, kde *a* je poloměr apertury (viz Obr. DF-9).

Potom amplituda pole bude $E = \frac{2E_A}{\pi a^2} e^{i(\omega t - kR)} \int_{-a}^{a} e^{iky\sin\vartheta} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy$

Zavedeme veličiny u a ρ definované jako $u = y/a \Rightarrow a.du = dy\,;\ \rho = ka\sin\vartheta$



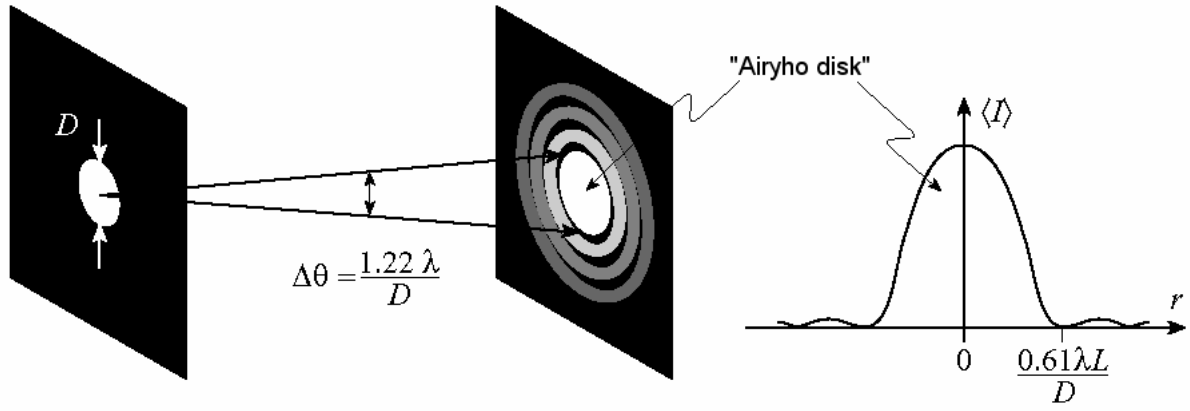
Obr. DF-9. Geometrie Fraunhoferova ohybu na kruhovém otvoru.

potom $$\int_{-a}^{a} e^{iky\sin\vartheta}\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \int_{-1}^{1} e^{i\rho u}\sqrt{1-u^2}\,du$$

Toto je standardní integrál, jehož hodnota je $\pi J_1(\rho)/\rho$, kde J_1 je Besselova funkce prvního druhu, prvního řádu

Tedy $I = I_0\left[\dfrac{J_1(\rho)}{\rho}\right]^2$, kde $\rho = ka\sin\vartheta = \dfrac{1}{2}kD\sin\vartheta$ ($D = 2a$ je průměr kruhové apertury)

První minimum pro $\sin\vartheta = 1{,}22\dfrac{\lambda}{D}$, další pro $\sin\vartheta = 2{,}23\dfrac{\lambda}{D}$, $3{,}24\dfrac{\lambda}{D}$, …



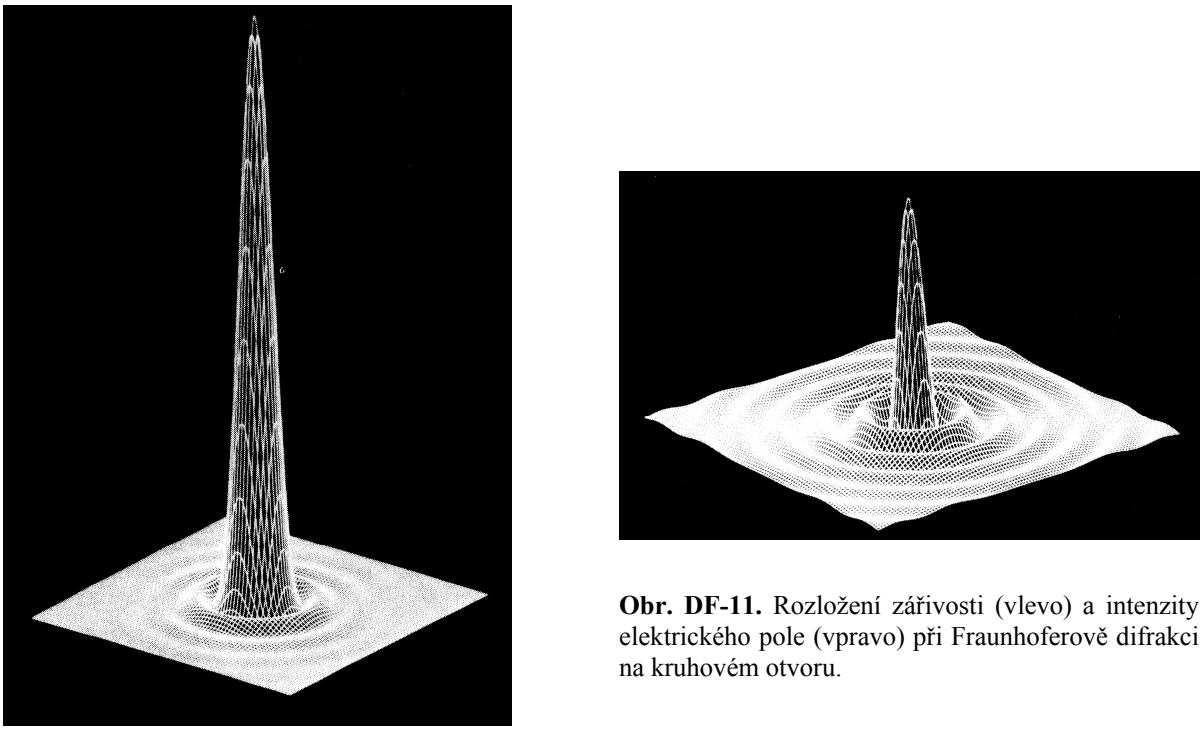
Obr. DF-10. Fraunhoferův ohyb kruhovém otvoru.

Střední světlý kruh – tzv. ***Airyho disk*** (Sir George Biddell Airy byl astronom)

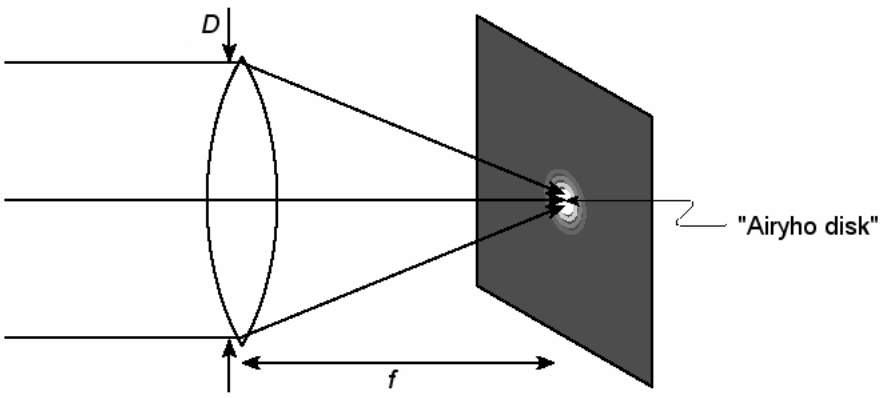
Vztah

$$\vartheta \approx \sin\vartheta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

má mimořádnou důležitost v teorii optických přístrojů. Konečný poloměr centrálního ohybového maxima totiž určuje minimální rozměr "obrazu" bodového zdroje vytvořeného přístrojem s aperturou o průměru D. Větší apertura D potom znamená větší rozlišení. Kruhový okraj čočky teleskopu (nebo okraj zrcadla) působí jako apertura a jsou to právě rozměry soustavy ohybových kroužků dvou blízkých hvězd, které určují zda mohou či nemohou být rozlišeny.



Obr. DF-11. Rozložení zářivosti (vlevo) a intenzity elektrického pole (vpravo) při Fraunhoferově difrakci na kruhovém otvoru.



Obr. DF-12. Vliv konečné apertury čočky na zobrazení.

Rayleighovo kritérium

V geometrické optice předpokládáme, že ideální čočka (tj. čočka bez aberací) fokusuje svazek paralelních paprsků do ohniska. Tak tomu ve skutečnosti není, protože konečný průměr čočky působí jako apertura omezující vlnoplochu. V důsledku ohybu pozorujeme v ohniskové rovině čočky místo bodu Airyho disk, jehož velikost je závisí na ohniskové dálce čočky f a na jejím průměru D.

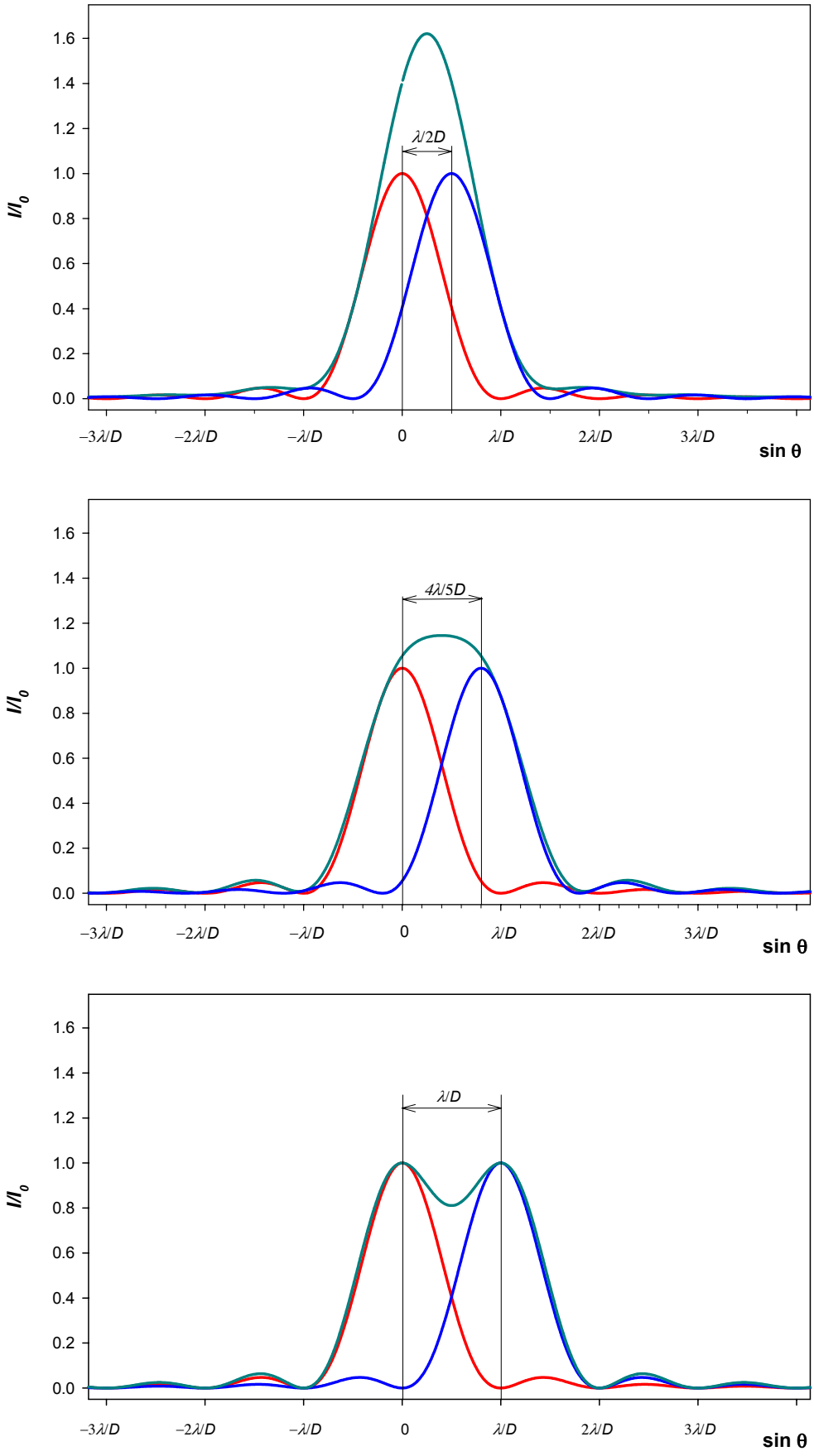
Dopadá-li na štěrbinu rovinná vlna z dalšího zdroje s vlnovým vektorem pod úhlem $\Delta\vartheta = \lambda / D$ vůči první vlně, bude její centrální maximum ležet v poloze prvního minima první vlny. Průběh intenzity na stínítku je na obr. DF-13 dole.

Na tom je založeno ***Rayleighovo kritérium*** – dva obrazy jsou právě rozlišitelné, jestliže centrální maximum difrakčního obrazce prvního leží v poloze prvního minima druhého.

V případě kruhové apertury, která je v optických přístrojích nejběžnější, je minimální rozlišitelná úhlová vzdálenost čili úhlový limit rozlišení dán výrazem $(\Delta\varphi)_{\min} = \Delta\vartheta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}$

Šířka w Airyho disku v ohnisku čočky je potom dána vztahem $w = 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}\,f$

V případě, že zobrazovací vady optického systému jsou kompenzovány takovým způsobem, že všechny paprsky vycházející z daného předmětového bodu dopadnou dovnitř Airyho disku odpovídajícího obrazového bodu, potom takové zobrazení nazýváme difrakčně omezené a je to to nejlepší zobrazení, jehož lze pro čočku konečného průměru dosáhnout.



Obr. DF-13. Ilustrace Rayleighova kritéria rozlišovací schopnosti pro ohyb na štěrbině.

Fraunhoferův ohyb na dvojštěrbině

D je šířka štěrbin, a je vzdálenost středů šterbin

$$E = \frac{E_0}{D} e^{i(\omega t - kr)} \left\{ \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{ikx\sin\vartheta} dx + \int_{a-\frac{D}{2}}^{a+\frac{D}{2}} e^{ikx\sin\vartheta} dx \right\} = \frac{E_0}{D} e^{i(\omega t - kr)} \left\{ \frac{e^{ik\frac{D}{2}\sin\vartheta} - e^{-ik\frac{D}{2}\sin\vartheta}}{ik\sin\vartheta} + \frac{e^{ik(a+\frac{D}{2})\sin\vartheta} - e^{-ik(a-\frac{D}{2})\sin\vartheta}}{ik\sin\vartheta} \right\} =$$

$$= E_0 e^{i(\omega t - kr)} \frac{e^{ik\frac{D}{2}\sin\vartheta} - e^{-ik\frac{D}{2}\sin\vartheta}}{ik\sin\vartheta} (1 + e^{ika\sin\vartheta}) = E_0 e^{i(\omega t - kr)} \frac{\sin(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta)}{\frac{1}{2}kD\sin\vartheta} \left(1 + e^{ika\sin\vartheta}\right)$$

a $I = 4I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cos^2\alpha$, kde $u = \frac{1}{2}kD\sin\vartheta$ a $\alpha = \frac{1}{2}ka\sin\vartheta$

člen $\frac{\sin^2 u}{u^2}$ je difrakční člen, $\cos^2\alpha$ je interferenční člen

$\vartheta = 0 \Rightarrow I = 4I_0$

$kD \to 0$ (velmi úzká štěrbina) $\Rightarrow \frac{\sin u}{u} \approx 1 \Rightarrow I = 4I_0 \cos^2\alpha$ (výsledek odvozený pro Youngův experiment)

interferenční člen je modulován difrakčním členem

Optická mřížka

mřížková konstanta d (vzdálenost středů sousedních vrypů)

šířka vrypu D (= šířka štěrbiny)

potom $$I = I_0 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta)}{\frac{1}{2}kD\sin\vartheta} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}Nkd\sin\vartheta)}{\sin^2(\frac{1}{2}kd\sin\vartheta)} = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin(Nud/D)}{nud/D}\right)^2$$

kde jsme označili $u = \frac{1}{2}kD\sin\vartheta$ a $\Rightarrow \frac{u}{D} = \frac{k\sin\vartheta}{2}$

dráhový rozdíl: $\Delta = d\sin\vartheta \Rightarrow$ fázový rozdíl: $\varphi = kd\sin\vartheta$

čili interferenční člen má známý tvar $\left(\frac{\sin\frac{1}{2}N\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)^2$

hlavní maxima (interferenční) nastávají pro $\varphi = 2m\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\vartheta = 2m\pi$

$$d\sin\vartheta = m\lambda$$

což je tak zvaná ***mřížková rovnice*** udávající podmínku pro hlavní maxima

m – ***řád difrakce***, $|m| = 0, 1, 2, \ldots$

Čím menší je mřížková konstanta, tím menší bude počet pozorovaných řádů, neboť

$\vartheta \to 90° \Rightarrow \sin\vartheta \to 1$ a tedy $m_{\max} = \dfrac{d}{\lambda}$

interferenční minima $\varphi = u\dfrac{d}{D} = q\dfrac{\pi}{N} + m\pi \Rightarrow d\sin\vartheta = \lambda(m + \dfrac{q}{N})$ $q = 1, 2, \ldots, N-1$

ohybová minima $u = m\pi \Rightarrow b\sin\vartheta = m\lambda$ $|m| = 1, 2, \ldots$

diferencujme mřížkovou rovnici $d\sin\vartheta = m\lambda \Rightarrow d\cos\vartheta d\vartheta = md\lambda$

a odtud $D_\vartheta \equiv \dfrac{d\vartheta}{d\lambda} = \dfrac{m}{d\cos\vartheta}$

Veličina D_ϑ je tzv. ***úhlová disperze*** udávající úhlovou vzdálenost dvou maxim lišících se o jednotkovou vlnovou délku. Úhlová disperze charakterizuje mřížku.

Pro charakterizaci spektrálních zařízení se ještě zavádí ***lineární disperze*** D_L definovaná jako

$$D_L \equiv \frac{dy}{d\lambda} = fD_\vartheta$$

kde f je ohnisková dálka spektrografu. Lineární disperze udává lineární vzdálenost spektrálních čar v ohniskové rovině spektrografu lišící se o jednotkovou vlnovou délku (např. D_L = 10 mm/nm). V praxi se ale častěji používá ***reciproká lineární disperze*** $1/D_L$

$$\frac{1}{D_L} \equiv \frac{d\lambda}{dy}$$

udávající, jak široký spektrální interval připadá na jednotkovou délku (např. $1/D_L$ = 0,1 nm/mm)

rozlišovací schopnost (resolving power) je definována jako $RP \equiv \dfrac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}}$

kde $(\Delta\lambda)_{min}$ udává minimální rozlišitelný interval vlnových délek.

Mějme vlnové délky λ_1 a λ_2

m-té maximum λ_1 vznikne ve směru $d\sin\vartheta_1 = m\lambda_1$

1. minimum vlnové délky λ_2 vznikne ve směru $d\sin\vartheta_{m,1} = (m + \dfrac{1}{N})\lambda_2$ (N – počet vrypů)

Rayleighovo kritérium $\Rightarrow$ $m\lambda_1 = (m + \dfrac{1}{N})\lambda_2 \Rightarrow m(\lambda_1 - \lambda_2) = \dfrac{\lambda_2}{N} \Rightarrow \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = mN$

čili $RP \equiv \dfrac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} = mN$

U mřížky je velmi vysoký počet vrypů $\Rightarrow$ i v nízkých řádech difrakce lze dosáhnout vysoké rozlišovací schopnosti

oblast disperze G – určuje maximální interval vlnových délek, který je možno analyzovat daným spektrálním zařízením. U mřížky je oblast disperze omezena překrýváním řádů.

Hledáme takové $\Delta\lambda$, pro které ještě překrytí řádů nenastane

pro $\lambda + \Delta\lambda$ $\quad d \sin \vartheta_m = m(\lambda + \Delta\lambda)$ $\quad$ m-tý řád difrakce

pro λ $\quad d \sin \vartheta'_{m+1} = (m+1)\lambda$ $\quad$ $m+1$ řád difrakce

$$\text{překryv} \Rightarrow \vartheta'_{m+1} = \vartheta_m \Rightarrow m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \Rightarrow G \equiv \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

Protože $d \sin \vartheta = m\lambda = 2m\frac{\lambda}{2} = 3m\frac{\lambda}{3} = \ldots$, je zřejmé, že maximum v 1. řádu difrakce pro danou vlnovou délku (například 600 nm) nastane ve stejném směru jako maximum v 2. řádu difrakce pro poloviční vlnovou délku (300 nm) nebo maximum ve 3. řádu difrakce pro třetinovou vlnovou délku (200 nm) atd.

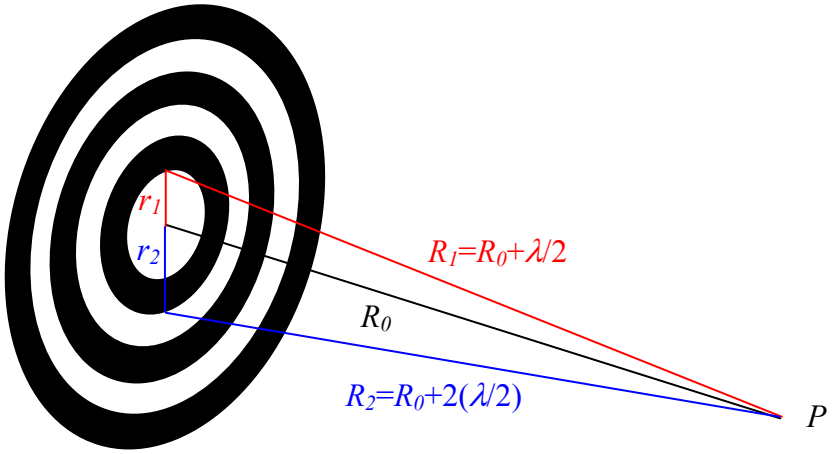
Pro šikmý dopad rovinné vlny na mřížku pod úhlem ϑ_i nabývá mřížková rovnice tvaru.

$$d\left(\sin \vartheta_m - \sin \vartheta_i\right) = m\lambda$$

Fresnelova difrakce

Jak jsme již uvedli k Fraunhoferově difrakci dochází v případě, kdy jsou rozměry difraktující apertury mnohem menší, než je vzdálenost stínítka. Sekundární vlny lze potom pokládat za rovinné a paprsky vycházející z různých bodů apertury za paralelní.

V případě, že vzdálenost stínítka od apertury není dostatečně velká (relativně k rozměru apertury), musíme sekundární vlny pokládat za sférické a paprsky přicházejí do nějakého bodu stínítka P už nebudou rovnoběžné. To je případ Fresnelovy difrakce. Lze jej řešit metodou navrženou Fresnelem, při níž je dopadající vlnoplocha rozdělena na tak zvané Fresnelovy nebo $\lambda/2$ zóny. Každou z těchto zón pokládáme za zdroj sekundárních sférických vln, z nichž konstruujeme vlnoplochu postupující za aperturou. Předpokládáme, že vzdálenost stínítka od středu apertury $\overline{OP} = R >> \lambda$



Obr. DF-14. K definici Fresnelových zón viděných z osového bodu P.

Ve Fresnelově metodě zakreslíme paprsek ⊥ na rovinu konstantní fáze vycházející z bodu O (střed soustředných zón) do P. Vnější poloměry zón jsou zvoleny tak, aby paprsky vystupující z vnější hranice zóny byly fázově posunuty o π vůči paprskům vystupujícím z vnější hranice zóny předcházející. Jinými slovy, vzdálenost R_n k P po sobě jsoucích zón se liší o $\lambda/2$

$$R_n = R_0 + n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

a tedy pro poloměry zón bude platit (obr. DF-14)

$$r_n^2 = R_n^2 - R_0^2 = R_0 n\lambda + \left(\frac{n\lambda}{2}\right)^2 \approx nR_0\lambda \tag{21}$$

(zanedbáváme člen s λ^2 neboť $\lambda << R_0$ a zóny, pro něž $n\lambda \approx R_0$ jsou tak daleko od O, že jejich vliv je vůči zónám blízkým O zanedbatelný). Je-li E_n amplituda elektrického pole vlny v bodě P od n-té zóny, bude celková amplituda v P

$$E_0 = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \ldots \tag{22}$$

(střídající se znaménka jsou důsledkem fázového posuvu mezi sousedními zónami o π)
Výše jsme vyslovili předpoklad, že amplituda sekundární vlny je úměrná ploše, z níž je vyzařována. Navíc amplituda sférické vlny klesá se vzdáleností jako $1/r$. Poměr plochy A_n n-té Fresnelovy zóny k její střední vzdálenosti $\overline{R_n} = (R_n + R_{n-1})/2$ od P zůstává konstantní

$$\frac{A_n}{\overline{R_n}} = \frac{\pi\left(r_n^2 - r_{n-1}^2\right)}{\frac{1}{2}\left(R_n + R_{n-1}\right)} = 2\pi\frac{R_n^2 - R_{n-1}^2}{R_n + R_{n-1}} = 2\pi\left(R_n - R_{n-1}\right) = \pi\lambda << R_0$$

Mohlo by se zdát, že amplitudy sekundárních vln přicházejících do P jsou od všech zón stejné. Tak tomu ale není. Fresnel zjistil, že se musí uvážit tak zvaný inklinační faktor, který redukuje amplitudu v závislosti na úhlu ϑ_n mezi R_n a normálou k primární vlnoploše. Úplnou matematickou teorii později zpracoval Kirchhoff, který vyjádřil tento faktor výrazem

$$K(\vartheta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\vartheta)$$

Oprávněnost tohoto faktoru je zřejmá z neexistence zpětné vlny, která jinak z Huyghens-Fresnelova principu vyplývá. Zřejmě $K(0) = 1$ (maximum amplitudy sekundární vlny v přímém směru) a $K(\pi) = 0$ (nulová amplituda sekundární vlny ve zpětném směru).
Připojíme tedy inklinační faktor s $\vartheta = \vartheta_{n-1}$ (úhel ϑ_{n-1} svírá paprsek vycházející z vnitřního poloměru n-té zóny).

Tedy $$E_n = \frac{1}{2}E_1\left(1 + \cos\vartheta_{n-1}\right) = \frac{1}{2}E_1\left(1 + \frac{R_0}{R_{n-1}}\right)$$, specielně $$E_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 0\right) = E_1$$

Dosazením za R_n, R_{n-1} a R_{n-2} ze vztahu (20) se dá ukázat, že při zanedbání členů s λ^2

$$E_n \approx \frac{1}{2}\left(E_{n+1} + E_{n-1}\right)$$

Nově můžeme uspořádat (22) takto

$$E_0 = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}(E_1 - 2E_2 + E_3) + \frac{1}{2}(E_3 - 2E_4 + E_5) + \ldots$$

Členy v závorce vymizí a pro amplitudu neomezované rovinné vlny v *P* dostáváme

$$E_0 = \frac{1}{2}E_1 \qquad (22)$$

(je rovna polovině amplitudy první Fresnelovy zóny)

Fresnelův ohyb na kruhové apertuře

Budeme se zabývat pouze zářivostí v bodech na ose. Při vyšetřování Fraunhoferovy difrakce jsme používali souřadný systém s počátkem ve středu štěrbiny. U Fresnelovy difrakce volíme systém s počátkem v bodě pozorování *P*. Aperturu potom můžeme pokládat za jakési okno, které odkrývá nebo zakrývá různé plochy rozdělené na zóny. Předpokládejme, že senzor v bodě *P* "vidí" celistvý počet zón, *m*, vyplňujících kruhovou aperturu. Bude-li m sudé, potom

$$E_P = (E_1 - E_2) + (E_3 - E_4) + \ldots + (E_{m-1} - E_m)$$

Protože příspěvky od dvou sousedních zón jsou přibližně stejné, výsledná amplituda v *P* bude $E_P \approx 0$ a tedy i zářivost $I_P \approx 0$.

Naopak, pokud bude *m* liché, potom

$$E_P = E_1 - (E_2 - E_3) - (E_4 - E_5) - \ldots - (E_{m-1} - E_m)$$

a výsledná amplituda v *P* bude $E_P \approx E_1 = 2E_0$

což je přibližně dvojnásobek amplitudy od neomezované vlny (a zářivost I_P bude čtyřnásobkem zářivosti od neomezované vlny). Amplituda v osovém bodě *P* je tedy dána výsledným polem aperturou neblokovaných Fresnelových zón. Obecně platí, že pokud kruhový otvor obsahuje lichý počet zón, bude v osovém bodě P jasná skvrna a při sudém počtu skvrna temná.

Pokud je poloměr apertury roven poloměru první Fresnelovy zóny

$$r = r_1 = \sqrt{R_0\lambda}\,, \qquad \text{bude} \quad E_P = E_1 = 2E_0 \quad ,$$

pokud je poloměr apertury roven poloměru druhé Fresnelovy zóny

$$r = r_2 = \sqrt{2R_0\lambda}\,, \qquad \text{bude} \quad E_P = E_1 - E_2 = \frac{1}{2}E_1\left(1 - \frac{R_0}{R_1}\right) \approx \frac{\lambda}{2R_0}E_1 << E_0$$

a v případě tří zón $r = r_2 = \sqrt{3R_0\lambda}$

$$E_P = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}\left(E_1 - 2E_2 + E_3\right) + \frac{1}{2}E_3 = \frac{1}{2}\left(E_1 + E_3\right) = \frac{1}{2}E_1\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{R_0}{R_2}\right)\right] \approx E_1 = 2E_0$$

Fresnelův ohyb na kruhové překážce

V roce 1818 Fresnel předložil do soutěže vyhlášené Francouzskou akademií práci věnované teorii ohybu světla a zvítězil. Porota se skládala ze známých fyziků (Laplace, Biot, Poisson, Arago, Gay-Lussac. Fresnel ve své teorii ukázal, že ve středu stínu kruhové překážky bude vidět světlá skvrna, což Poisson považoval za absurdní předpověď zasazující smrtelnou ránu vlnové teorii světla. Brzy poté však byla existence skvrny potvrzena experimentálně – a dodnes je skvrna nazývaná skvrnou Poissonovou (Poisson spot). Paradoxně tato skvrna byla pozorována již dříve v roce 1723 Maraldim, ale jeho práce upadla v zapomnění …

Jestliže kruhová překážka zacloní prvních l zón, potom

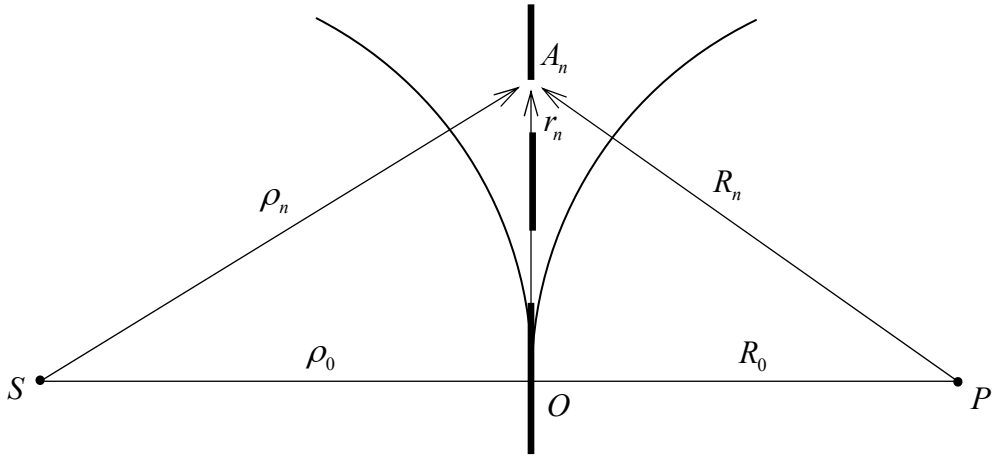
$$E_P = E_{l+1} - E_{l+2} + E_{l+3} - \ldots \approx \frac{1}{2} E_{l+1}$$

a zářivost v bodě P bude jen o málo menší než zářivost od neomezované vlny ($E_0 = \frac{1}{2} E_1$). Pouze v těsné blízkosti překážky, kdy vzrůstá úhel ϑ a s ním inklinační faktor $K_{l+1}(\vartheta) \to 0$, zářivost klesá k nule.

Fresnelova zónová destička

V předchozích úvahách jsme využívali fakt, že příspěvky od sousedních Fresnelových zón se přibližně vyruší. To naznačuje, že bychom měli pozorovat obrovský nárůst zářivosti v osovém bodě P, jestliže odstraníme buď všechny liché a nebo všechny sudé zóny. Přesně tomuto účelu slouží tzv. ***zónová destička***.

Zónová destička je soustava ostře ohraničených propustných a nepropustných mezikruží, která systematicky zakrývají sudé (liché) a odkrývají liché(sudé) Fresnelovy zóny.



Obr. DF-15. Geometrie zónové destičky.

Poloměry zón jsou dány vztahem (21) $r_n^2 = R_n^2 - R_0^2 = R_0 n\lambda + \left(\frac{n\lambda}{2}\right)^2 \approx nR_0\lambda$

z definice plyne, že vlna probíhající dráhu SA_nP musí přijít fázově posunuta o $n\lambda/2$ vůči vlně probíhající dráhu SOP, tedy

$$(\rho_n + R_n) - (\rho_0 + R_0) = n\frac{\lambda}{2} \qquad (25)$$

z obrázku je zřejmé, že $\rho_n = \sqrt{\rho_0^2 + r_n^2} = \rho_0\sqrt{1 + \frac{r_n^2}{\rho_0^2}} \approx \rho_0 + \frac{r_n^2}{2\rho_0}$

$$R_n = \sqrt{R_0^2 + r_n^2} = R_0\sqrt{1 + \frac{r_n^2}{R_0^2}} \approx R_0 + \frac{r_n^2}{2R_0}$$

neboť $r_n << \rho_0, R_0$

Dosazením do (25) dostáváme

$$\rho_0 + \frac{r_n^2}{2\rho_0} + R_0 + \frac{r_n^2}{2R_0} - \rho_0 - R_0 = \frac{r_n^2}{2}\left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{R_0}\right) = n\frac{\lambda}{2}$$

a tedy $$\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{R_0} = \frac{n\lambda}{r_n^2} \qquad (26)$$

Rovnice (26) má tvar zobrazovací rovnice tenké čočky, což není náhoda, neboť zónová destička působí (pokud se týká bodů na ose) jako čočka o primární ohniskové vzdálenosti $f_1 = \frac{r_n^2}{n\lambda}$

(ale čočka s výraznou chromatickou vadou, protože $f_1 \sim \frac{1}{\lambda}$) zobrazující bod S sbíhavým difraktovaným světlem do bodu P.

Uvažujme zónovou destičku propouštějící prvních 20 lichých Fresnelových zón a blokující sudé zóny. Potom

$$E_P = E_1 + E_3 + E_5 + \ldots + E_{39}$$

Všechny příspěvky jsou přibližně stejné a ve fázi (proto mají stejné znaménko). Bez zónové destičky bude výsledné pole v bodě P

$$E_P = \frac{1}{2}E_1$$

Se zónovou destičkou bude výsledné pole v bodě P

$$E_P \approx 20E_1$$

čili zářivost bude 1600x vyšší ($E_1^2/4$ versus $400E_1^2$) !

Stejný výsledek získáme, zakryjeme-li liché zóny a odkryjeme zóny sudé. Další body s výraznou zářivostí najdeme v polohách $f_1/3$, $f_1/5$, atd.

Destičky s velkým počtem zón se připravují buď fotografickým zmenšením zvětšené verze a nebo přímo fotografováním Newtonových kroužků v kolimovaném kvazimonochromatickém světle. Pro jejich poloměr totiž platí vztah analogický rovnici (21).

Fourierova transformace a Fraunhoferova difrakce

Vraťme se ke vztahu pro rozdělení intenzity pole v rovině stínítka při Fraunhoferově difrakci na apertuře libovolného tvaru

$$E(Y,Z) = \frac{E_A}{R} e^{i(\omega t - kR)} \iint_{apertura} e^{ik(Yy+Zz)/R} dydz$$

kde R je vzdálenost bodu $P(X,Y,Z)$ na stínítku od středu apertury O, k je vlnové číslo a E_A je amplituda pole vztažená na jednotku plochy apertury (předpokládali jsme, že E_A je přes rozměry apertury konstantní). Tento omezující předpoklad můžeme zobecnit zavedením tak zvané aperturní funkce $g(y,z)$

$$g(y,z) = g_0(y,z) e^{i\phi(y,z)}$$

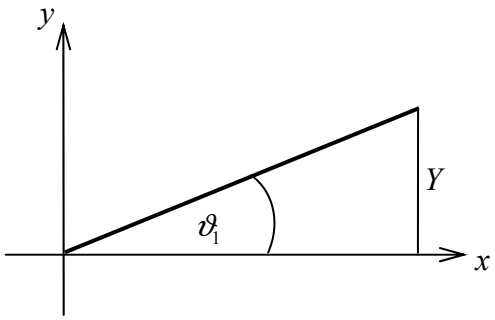
kde rozložení amplitudy popisuje funkce $g_0(y,z)$, zatímco exponenciální faktor představuje změny fáze přes aperturu. Potom $g(y,z)dydz$ je úměrné difraktovanému poli vycházejícímu z elementu plochy apertury $dydz$ a tedy výsledné pole v bodě (Y,Z) stínítka bude

$$E(Y,Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) e^{ik(Yy+Zz)/R} dydz$$

Limity integrálu je možné rozšířit do ±∞, neboť aperturní funkce je nenulová pouze v oblasti apertury.

Definujme ***prostorové frekvence*** $k_Y = k\frac{Y}{R} = k\sin\vartheta_1$ a $k_Z = k\frac{Z}{R} = k\sin\vartheta_2$

kde ϑ_1 představuje úhel v rovině xy a ϑ_2 úhel v rovině xz.



Ke každému bodu (y,z) obrazové roviny (rovina stínítka) existují odpovídající prostorové frekvence (k_Y,k_Z). Difraktované pole nyní můžeme vyjádřit jako

$$E(k_Y,k_Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(y,z)e^{i(k_Y y+k_Z z)}dydz$$

a tak se dostáváme ke klíčovému bodu: ***rozložení pole na stínítku při Fraunhoferově difrakci je Fourierovým obrazem rozložení pole přes aperturu (aperturní funkce)***, tedy vyjádřeno symbolicky

$$E(k_Y,k_Z)=\mathbb{F}\{g(y,z)\}$$

Jinak řečeno distribuce pole v obrazové rovině je spektrem prostorových frekvencí aperturní funkce. Inverzní transformace potom bude

$$g(y,z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E(k_Y,k_Z)e^{-i(k_Y y+k_Z z)}dk_Y dk_Z$$

a tedy symbolicky $g(y,z)=\mathbb{F}^{-1}\{E(\mu,\nu)\}$.

Jak jsem již viděli, čím více je lokalizován signál, tím rozšířenější je jeho transformace – to platí i pro dvojdimenzionální transformaci. Čím menší bude difraktující apertura, tím větší bude úhlová šířka difrakčního svazku, nebo jinak - tím širší bude odpovídající pásmo prostorových frekvencí.