Anharmonické periodické vlny – Fourierova analýza

Fourierův teorém: Funkce $f(x)$ **s prostorovou periodou** λ může být rozvinuta do řady harmonických funkcí s vlnovými délkami $\lambda, \lambda/2, \lambda/3, \lambda/4, \ldots$ etc.

$$f(x) = C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varepsilon_1\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda/2}x + \varepsilon_2\right) + C_3 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda/3}x + \varepsilon_3\right) + \ldots \qquad (1)$$

kde veličiny C_i jsou konstanty.

Je vhodné upravit (1) pomocí trigonometrické identity

$$C_m \cos(mkx + \varepsilon_m) = A_m \cos(mkx) + B_m \sin(mkx)$$

kde $k = 2\pi/\lambda$, $A_m = C_m \cos\varepsilon_m$ a $B_m = -C_m \sin\varepsilon_m$. Potom

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(mkx) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(mkx) \qquad (2)$$

kde jsme první člen napsali jako $A_0/2$ z důvodů, které budou zřejmé později. Proces určování koeficientů A_0, A_m a B_m pro danou periodickou funkci $f(x)$ se nazývá ***Fourierova analýza***.

Odvoďme nyní výrazy pro tyto koeficienty. Integrujme nejprve obě strany vztahu (2) na libovolném intervalu rovnému λ, například od 0 do λ nebo od $-\lambda/2$ do $+\lambda/2$ nebo obecně od x' do $x' + \lambda$. Protože na takovémto intervalu bude

$$\int_0^\lambda \sin(mkx).dx = \int_0^\lambda \cos(mkx).dx = 0$$

a pouze jeden člen bude nenulový, a to

$$\int_0^\lambda f(x).dx = \int_0^\lambda \frac{A_0}{2}.dx = A_0\frac{\lambda}{2}$$

a tedy

$$A_0 = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(x).dx$$

Abychom nalezli A_m a B_m, budeme muset použít ortogonality sinusodiálních funkcí, tj.

$$\int_0^\lambda \sin akx \cos bkx.dx = 0$$

$$\int_0^\lambda \cos akx \cos bkx.dx = \frac{\lambda}{2}\delta_{ab}$$

$$\int_0^\lambda \sin akx \sin bkx.dx = \frac{\lambda}{2}\delta_{ab}$$

kde a a b jsou nenulová celá kladná čísla a δ_{ab} je Kronekerovo delta, které je rovno nule pokud $a \neq b$ rovno 1 pokud $a = b$. Abychom určili A_m, vynásobme nyní obě strany vztahu (2) $\cos lkx$, kde l je kladné celé číslo, a potom integrujme přes prostorovou periodu. Pouze jeden člen bude nenulový, a to člen z první sumy, který odpovídá $l = m$

levá strana: $\int_0^{\lambda} f(x)\cos lkx.dx$

pravá strana:

$$\frac{A_0}{2}\int_0^{\lambda}\cos lkx.dx + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^{\lambda}\cos mkx.\cos lkx.dx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \int_0^{\lambda}\sin mkx.\cos lkx.dx = \frac{\lambda}{2}A_m\delta_{lm} = A_l\frac{\lambda}{2}$$

Tedy

$$A_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cos mkx.dx\,.$$

Podobně vynásobíme-li vztah (2) $\sin lkx$ a prointegrujeme, dostaneme

$$B_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\sin mkx.dx$$

Periodickou funkci $f(x)$ s periodou λ lze tedy rozvést do Fourierovy řady

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mkx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mkx \qquad (2)$$

kde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (vlnové číslo, ***prostorová frekvence***)

a kde jsou koeficienty rozvoje A_0, A_m a B_m definovány vztahy

$$A_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x).\cos mkx.dx \qquad (3)$$

$$B_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x).\sin mkx.dx \qquad (4)$$

$$A_0 = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)dx\quad . \qquad (5)$$

Je zřejmé, že bude-li $f(x)$ sudá funkce, tj. $f(-x) = f(x)$, potom $B_m = 0\ \ \forall m$ a Fourierův rozvoj bude obsahovat pouze kosinové členy.

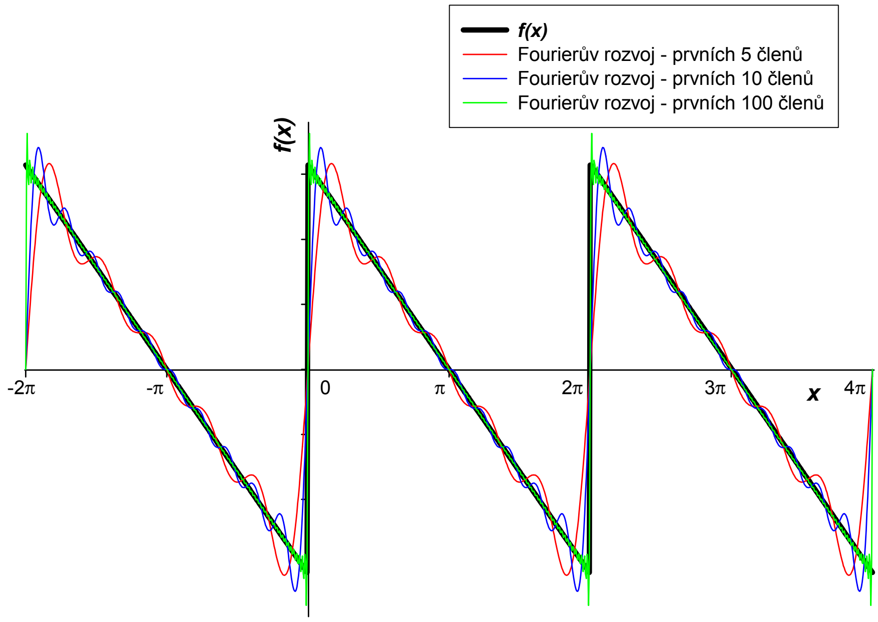
Bude-li naopak $f(x)$ lichá funkce, tj. $f(-x) = -f(x)$, potom $A_m = 0 \ \ \forall m$, $A_0 = 0$ a Fourierův rozvoj bude obsahovat pouze sinové členy.

Příklad 1:

Rozvoj liché funkce

$f(x) = \pi - x$ definované na intervalu <0,2π)

s periodou $\lambda = 2\pi$ $\quad (\Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1) \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$



Obr. 1. Funkce $f(x) = \pi - x$, definovaná na intervalu <0,2π), s periodou $\lambda = 2\pi$, $f(x + 2\pi) = f(x)$, a její rozvoj do prvních pěti, deseti a sta členů Fourierovy řady.

$$A_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}(\pi x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$A_m = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\cos mx.dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\pi\cos mx.dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x.\cos mx.dx =$$

$$= \frac{1}{m}\sin mx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}(\frac{\cos mx}{m^2} + \frac{x.\sin mx}{m})\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$B_m = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\sin mx.dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\pi\sin mx.dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x.\sin mx.dx =$$

$$= \frac{1}{m}\cos mx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}(\frac{\sin mx}{m^2} + \frac{x.\cos mx}{m})\Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{m}$$

čili $$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m}\sin mx = 2(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+...)$$

Příklad 2:

Rozvoj sudé funkce definované na intervalu $\left\langle -\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$

$f(x)=1$ pro $|x|\le\frac{\lambda}{a}$ kde a je kladné celé číslo

$f(x)=0$ pro $\frac{\lambda}{a}<|x|$

s periodickým rozšířením $f(x+\lambda)=f(x)$

$$A_0=\frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)dx=\frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{a}}^{\frac{\lambda}{a}}dx=\frac{2}{\lambda}x\Big|_{-\frac{\lambda}{a}}^{\frac{\lambda}{a}}=\frac{4}{a}$$

$$A_m=\frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)\cos mkx.dx=\frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{a}}^{\frac{\lambda}{a}}\cos mkx.dx=\frac{2\lambda}{2\pi\lambda m}\sin\left(m\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\Big|_{-\frac{\lambda}{a}}^{\frac{\lambda}{a}}=\frac{2}{\pi m}\sin\left(m\frac{2\pi}{a}\right)=\frac{4}{a}\frac{\sin\left(m\frac{2\pi}{a}\right)}{m\frac{2\pi}{a}}$$

$$B_m=\frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)\sin mkx.dx=\frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{a}}^{\frac{\lambda}{a}}\sin mkx.dx=-\frac{2\lambda}{2\pi\lambda m}\cos\frac{2\pi mx}{\lambda}\Big|_{-\frac{\lambda}{a}}^{\frac{\lambda}{a}}=-\frac{1}{\pi m}\left(\cos\frac{2\pi m}{a}-\cos\frac{-2\pi m}{a}\right)=0$$

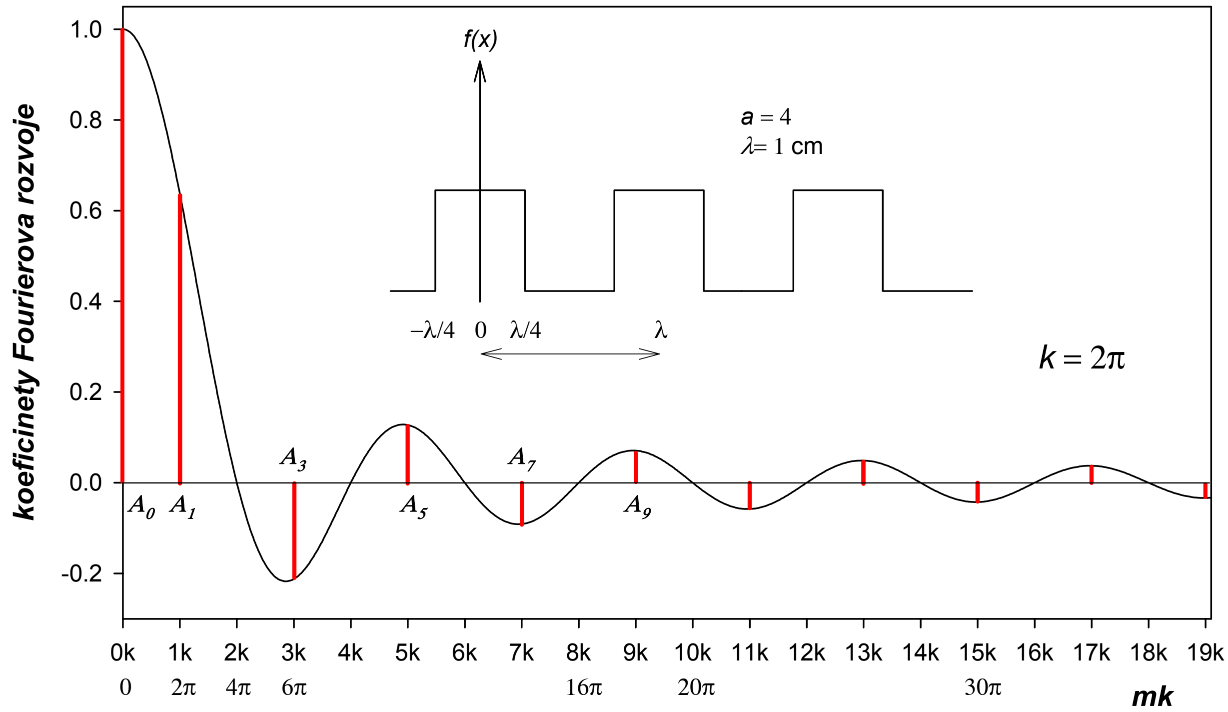
Čili $$f(x)=\frac{2}{a}+\frac{4}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(m\frac{2\pi}{a})}{m\frac{2\pi}{a}}.\cos mkx$$

kde koeficienty rozvoje jsou

$$A_m=\frac{4}{a}\frac{\sin(m\frac{2\pi}{a})}{m\frac{2\pi}{a}}$$

Konkrétně například pro $a = 4$, $\lambda = 1$ (cm) bude $k = 2\pi$ a rozvoj nabude tvaru (viz. obr. 2a)

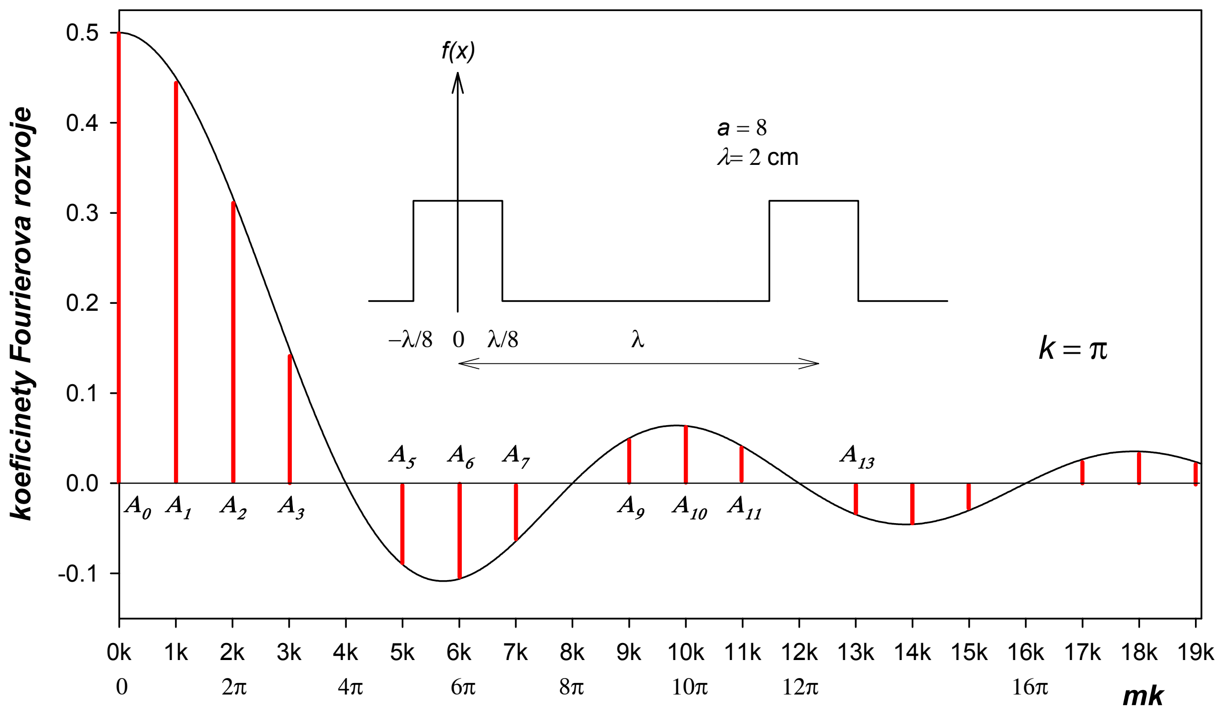
$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos kx-\frac{1}{3}\cos 3kx+\frac{1}{5}\cos 5kx-...\right)$$



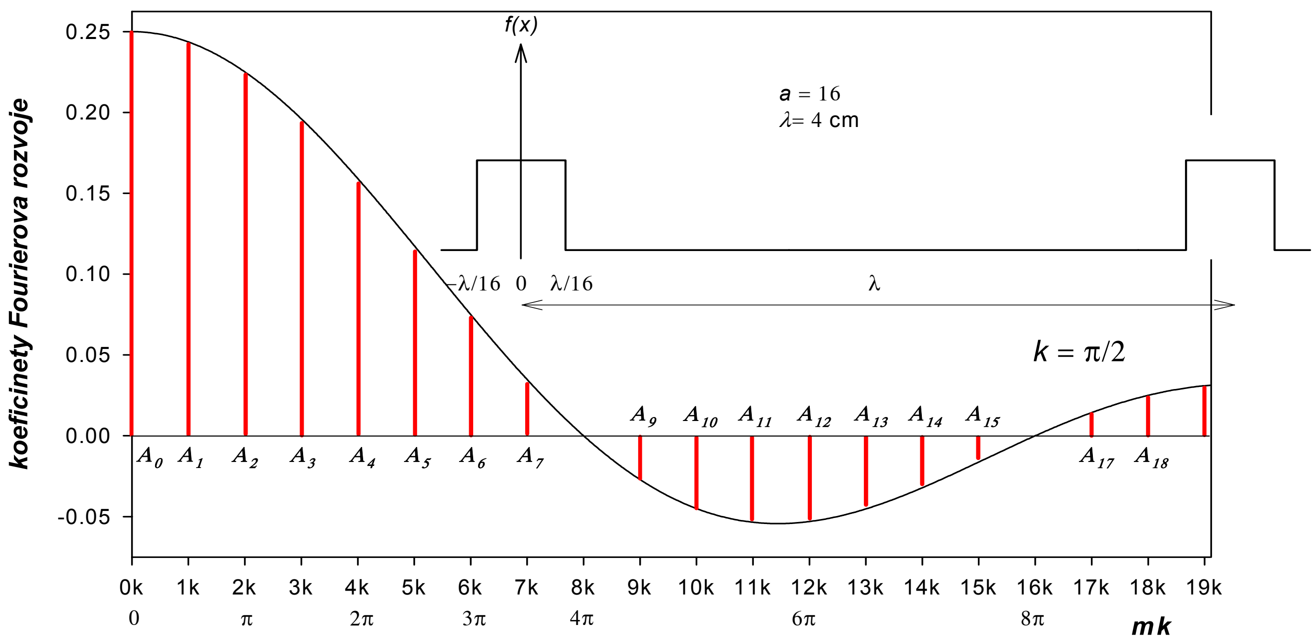
Obr. 2a. Obdélníkový puls jako limitní případ, $a = 4$, $\lambda = 1$ (cm).

a pro $a = 8$, $\lambda = 2$ (cm) bude $k = \pi$ a rozvoj nabude tvaru (viz. obr. 2b)

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{2}\cos kx + \cos 2kx + \frac{\sqrt{2}}{3}\cos 3kx - \frac{\sqrt{2}}{5}\cos 5kx - \frac{1}{3}\cos 6kx - \frac{\sqrt{2}}{7}\cos 7kx + \frac{\sqrt{2}}{9}\cos 9kx + \ldots\right)$$



Obr. 2b. Obdélníkový puls jako limitní případ, $a = 8$, $\lambda = 2$ (cm).



Obr. 2c. Obdélníkový puls jako limitní případ, a = 16, λ = 4 (cm).

Fourierova řada v komplexním tvaru:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mkx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mkx = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m \frac{e^{imkx} + e^{-imkx}}{2} + B_m \frac{e^{imkx} - e^{-imkx}}{2i} \right\} =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m - iB_m).e^{imkx} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + iB_m).e^{-imkx}$$

Potom

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imkx} \tag{6}$$

kde $a_m = \frac{1}{2}(A_m - iB_m)$ pro $m > 0$ (7)

$$a_0 = \frac{A_0}{2} \tag{8}$$

$$a_m = \frac{1}{2}(A_{-m} + iB_{-m}) \quad \text{pro } m < 0 \tag{9}$$

Zřejmě $a_{-m} = a_m^*$ (a_m pro $m < 0$ je komplexně sdružené k a_m pro $m > 0$), proto je *f(x)* vždy reálné.

Koeficienty a_m rozvoje řady funkce *f(x)* nazýváme ***spektrum*** funkce *f(x)*.

Zobecnění:

S rostoucí periodou se hustota komponent podél osy ***mk*** na Obr. 2 zvyšuje, zatímco tvar obálkové funkce se nemění. S rostoucím periodou se vzdálenost jednotlivých komponent *A(mk)* zmenšuje, až při $\lambda \to \infty$ přestanou být jednotlivé komponenty rozlišitelné. Jak se s rostoucím λ zmenšuje k, musí růst i m, aby hodnota mk nabývala znatelných hodnot. Jestliže mk nahradíme k_m (nabývající diskrétních hodnot), jež se v limitě $\lambda \to \infty$ transformuje na k (tj. spojitou distribuci frekvencí).
V limitě se tedy $A(k_m)$ stane obálkovou funkcí uvedenou na Obr. 2. Vzrůst periody nade všechny meze prakticky znamená, že naše funkce *f(x)* představuje jediný obdélníkový puls a je tedy ***neperiodická***.
Integrál je vlastně limitním případem součtu nekonečného počtu infinitezimálních elementů.
V limitním případě periody rostoucí nade všechny meze tedy musí být Fourierova řada nahrazena Fourierovým integrálem

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty A(k)\cos kx dk + \int_0^\infty B(k)\sin kx dk\right] \tag{10}$$

za předpokladu že

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos kx dx \qquad \text{a} \qquad B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin kx dx \tag{11}$$

Podobnost s Fourierovou řadou je zřejmá. Veličiny *A(k)* a *B(k)* jsou interpretovány jako kosinové a sinové příspěvky s prostorovou frekvencí mezi k a $k+dk$. Obecně hovoříme o Fourierově sinové či kosinové transformaci.
V případě obdélníkového pulsu ukážeme, že je to kosinová transformace a že *A(k)* odpovídá obálkové funkci z obr. 2.
Mějme obdélníkový puls popsaný funkcí

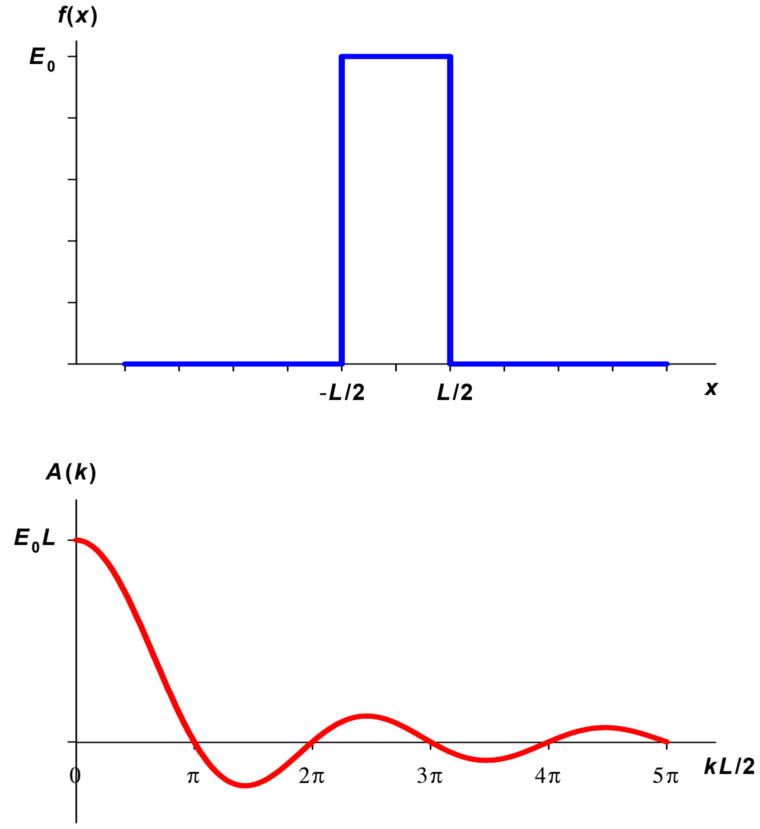
$$f(x) = \begin{cases} E_0 & \text{pro } |\mathrm{x}| < L/2 \\ 0 & \text{pro } |\mathrm{x}| > L/2 \end{cases}$$

Protože $f(x)$ je sudá funkce, sinová transformace, $B(k)$ bude nulová a

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos kx\, dx = \int_{-L/2}^{L/2} E_0 \cos kx\, dx = \frac{E_0}{k}\sin kx\Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{2E_0}{k}\sin\frac{kL}{2}$$

a po vynásobení čitatele i jmenovatele L dostáváme

$$A(k) = E_0 L \frac{\sin kL/2}{kL/2}$$



Obr. 3. Obdélníkový puls a jeho transformace.

Dosaďme (11) do rovnice (10)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty A(k)\cos kx dk + \int_0^\infty B(k)\sin kx dk\right] = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos kx \int_{-\infty}^\infty f(x')\cos kx'\, dx' dk + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin kx \int_{-\infty}^\infty f(x')\sin kx'\, dx' dk \end{aligned} \tag{12}$$

Protože $\cos k(x'-x) = \cos kx' \cos kx + \sin kx' \sin kx$ můžeme vztah (11) upravit do tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(x')\cos k(x'-x)\, dx'\right] dk \tag{13}$$

Veličina v hranaté závorce je sudou funkcí k, a proto změna integračních mezí vnějšího integrálu vede na

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(x')\cos k(x'-x)\, dx'\right] dk \tag{14}$$

Zřejmě platí (integrujeme lichou funkci k)

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(x')\sin k(x'-x)\, dx'\right] dk = 0 \tag{15}$$

a proto můžeme vztah (14) s uvážením (15) a Eulerova vzorce vyjádřit jako komplexní tvar Fourierova integrálu

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{ikx'}dx'\right]e^{-ikx}dk \tag{16}$$

Potom

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{-ikx}dk} \tag{17}$$

kde (při náhradě integrační proměnné $x' = x$)

$$\boxed{F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx} \tag{18}$$

O funkci $F(k)$ říkáme, že je ***Fourierovou transformací (obrazem)*** funkce $f(x)$, což se symbolicky vyjadřuje vztahem

$$F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} \tag{19}$$

Všimněte si, že $A(k)$ je reálnou částí $F(k)$ a $B(k)$ její imaginární částí, tedy

$$F(k) = A(k) + iB(k) \tag{20}$$

Komplexní veličinu $F(k)$ můžeme také vyjádřit ve tvaru

$$F(k) = |F(k)|e^{i\phi(k)} \tag{21}$$

kde $|F(k)|$ je tzv. spektrum reálných amplitud (***amplitudové spektrum***) a $\phi(k)$ reálná fáze (***fázové spektrum***).

Jako je $F(k)$ přímou Fourierovou transformací $f(x)$, je $f(x)$ ***inverzní Fourierovou transformací*** $F(k)$, což lze symbolicky vyjádřit jako

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} \tag{22}$$

a o funkcích $f(x)$ a $F(k)$ hovoříme jako o funkcích ***fourierovsky sdružených*** (***Fourierův pár***).

Je-li funkce f funkcí času namísto prostorové souřadnice, potom ve vztazích výše zaměníme x za t a k, prostorovou frekvenci ($k = 2\pi/x$) za ω, úhlovou frekvenci. Potom bude

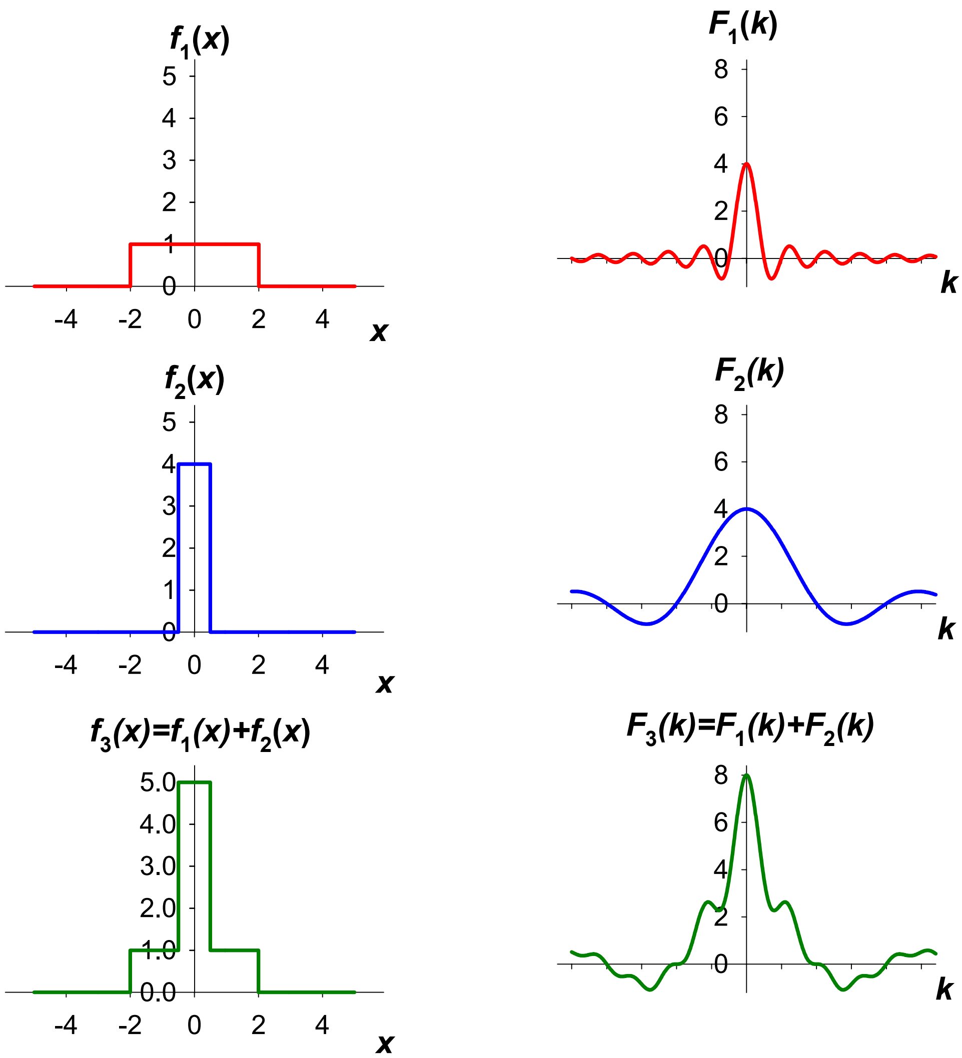
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega t}d\omega \tag{23}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \tag{24}$$

Je dobré poznamenat, že pokud funkci $f(x)$ můžeme vyjádřit jako součet funkcí, její Fourierova transformace (18) bude součtem transformací jednotlivých složek (jako ilustraci viz obr. 4).
Je-li tedy

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

potom $$F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{f_1(x)\} + \mathcal{F}\{f_2(x)\} = F_1(k) + F_2(k)$$



Obr. 4. Fourierova transformace součtu funkcí.

Dvojdimenzionální Fourierova transformace

Dosud jsme se omezili pouze na jednodimenzionální funkce (funkce jedné proměnné), ale v optice se často zabýváme dvojdimenzionálními funkcemi popisujícími například rozložení pole na apertuře a nebo rozložení hustoty toku energie (intenzity) na stínítku. Fourierovský pár může být zobecněn pro dvojdimenzionální funkce takto

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(k_x,k_y)e^{-i(k_x x+k_y y)}dk_x dk_y \tag{25}$$

a

$$F(k_x,k_y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{i(k_x x+k_y y)}dx\,dy \tag{26}$$

Zabývejme se ještě funkcí popisující časově omezenou monochromatickou vlnu (puls trvání 2τ) o frekvenci ω_0

$$E(t)=\begin{cases}E_0 e^{-i\omega_0 t} & \text{pro } |t|\le\tau\\ 0 & \text{pro } |t|>\tau\end{cases} \tag{27}$$

Vlnu můžeme vyjádřit pomocí (23) jako

$$E(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{-i\omega t}d\omega$$

kde

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt$$

je rozdělovací funkce amplitud monochromatických složek podle frekvence ω. Potom

$$F(\omega)=E_0\int_{-\tau}^{\tau}e^{i(\omega-\omega_0)t}dt=E_0\left.\frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{i(\omega-\omega_0)}\right|_{-\tau}^{\tau}=E_0\frac{e^{i(\omega-\omega_0)\tau}-e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}}{i(\omega-\omega_0)}=2E_0\frac{\sin(\omega-\omega_0)\tau}{(\omega-\omega_0)}$$

a po úpravě

$$F(\omega)=2E_0\tau\frac{\sin(\omega-\omega_0)\tau}{(\omega-\omega_0)\tau} \tag{28}$$

Funkce

$$|F(\omega)|^2=4\tau^2E_0^2\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\tau}{(\omega-\omega_0)\tau}\right]^2 \tag{29}$$

určuje spektrální rozdělení energie vlnění neboli výkonové spektrum (viz obr. 5).

Funkce $\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\tau}{(\omega-\omega_0)\tau}\right]^2$ nabývá hlavního maxima pro $\omega=\omega_0$ a minima pro

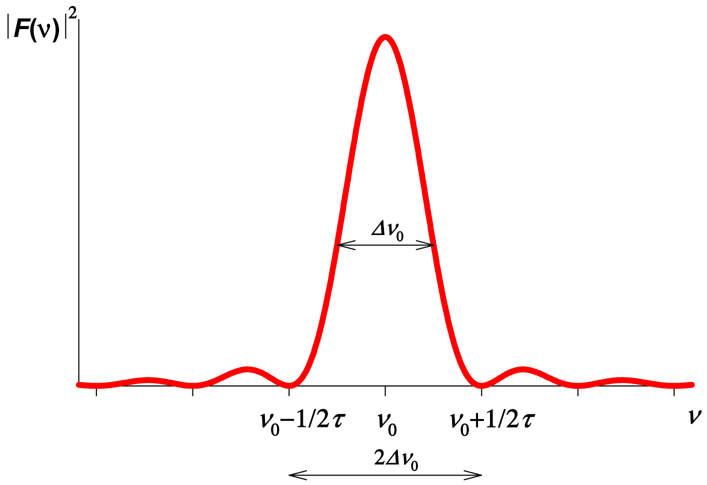
$$(\omega-\omega_0)\tau=m\pi \qquad |m|=1,2,3...$$

Hlavní maximum je ohraničeno prvním a minus prvním minimem, a tedy má pološířku

$$(\omega-\omega_0)\tau = 2\pi(\nu-\nu_0)\tau = \pi \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\nu = \nu-\nu_0 = \frac{1}{2\tau} \tag{30}$$

Vidíme tedy, že pološířka centrálního maxima je nepřímo úměrná délce pulsu. Čím je puls delší, tím je jeho výkonové spektrum užší a tím méně se puls liší od monochromatické vlny. Časově ohraničený puls již tedy nelze považovat za monochromatickou (harmonickou) vlnu, ale za kvazimonochromatický "balík" vln o spektrální pološířce nepřímo úměrné době trvání pulsu.
Z (30) je zřejmé, že součin délky trvání pulsu $\Delta t = 2\tau$ a frekvenční šířky $\Delta\nu$ je konstantní

$$\Delta\nu.\Delta t = 1 \tag{31}$$



Obr. 5. Spektrální rozdělení energie pulsu délky 2τ.