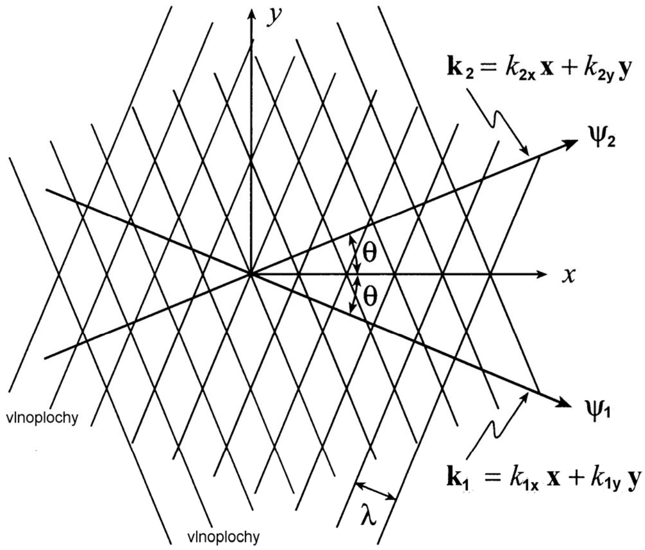
Interference dvou rovinných světelných vln

V této kapitole si ukážeme, jak vznikají interferenční proužky, jestliže se dvě rovinné světelné vlny setkávají v nějakém prostoru. Mějme dvě rovinné vlny popsané následujícími vztahy

$$\vec{E}_1(x,y,t) = \vec{E}_{01}\cos(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r} + \varphi_1)$$

$$\vec{E}_2(x,y,t) = \vec{E}_{02}\cos(\omega t - \vec{k}_2.\vec{r} + \varphi_2)$$

Veličiny φ_1 a φ_2 představují počáteční fázi mezi zdroji dvou vln. Pokud je fázový rozdíl φ_2-φ_1 konstantní, dvě vlny (respektive jejich zdroje) jsou ***navzájem koherentní***.



Obr. I1. Zobrazení dvou rovinných světelných vln v rovině *x-y*.

Složky jejich vlnových vektorů lze vyjádřit jako

$$k_{1x} = k_1\cos\theta \qquad k_{1y} = -k_1\sin\theta$$

$$k_{2x} = k_2\cos\theta \qquad k_{2y} = k_2\sin\theta$$

Jestliže mají obě vlny stejnou vlnovou délku, potom $k_1 = k_2 = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Celková amplituda $\vec{E}$ je dána superpozicí obou vln

$$\vec{E}(x,y,t) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{01}\cos(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r} + \varphi_1) + \vec{E}_{02}\cos(\omega t - \vec{k}_2.\vec{r} + \varphi_2)$$

a časová střední hodnota[1] intenzity (zářivost) $\langle I \rangle$ bude

$$\langle I \rangle = \left\langle \vec{E}^2(x,y,t) \right\rangle = \left\langle (\vec{E}_{01}\cos(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r} + \varphi_1) + \vec{E}_{02}\cos(\omega t - \vec{k}_2.\vec{r} + \varphi_2))^2 \right\rangle =$$

[1] Časová střední hodnota veličiny *f* je definována vztahem $\langle f \rangle = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$. Předpokládáme, že veličiny jsou stacionární, tj. jejich časová střední hodnota je nezávislá na volbě počátku časové škály.

$$=\left\langle \vec{E}_{01}^2\cos^2(\omega t-\vec{k}_1.\vec{r}+\varphi_1)\right\rangle+\left\langle \vec{E}_{02}^2\cos^2(\omega t-\vec{k}_2.\vec{r})+\varphi_1\right\rangle+\left\langle 2\vec{E}_{01}.\vec{E}_{02}\cos(\omega t-\vec{k}_1.\vec{r}+\varphi_1)\cos(\omega t-\vec{k}_2.\vec{r}+\varphi_2)\right\rangle$$

První dva členy představují časové střední hodnoty intenzit každé z rovinných vln v nepřítomnosti vlny druhé:

$$\left\langle \vec{E}_{01}^2\cos^2(\omega t-\vec{k}_1.\vec{r}+\varphi_1)\right\rangle=\frac{\vec{E}_{01}^2}{2}=\left\langle I_1\right\rangle \qquad \text{a} \qquad \left\langle \vec{E}_{02}^2\cos^2(\omega t-\vec{k}_2.\vec{r}+\varphi_2)\right\rangle=\frac{\vec{E}_{02}^2}{2}=\left\langle I_2\right\rangle$$

Třetí člen můžeme upravit s užitím trigonometrické identity

$$\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2=\frac{1}{2}\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)+\frac{1}{2}\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)$$

tak, že

$$\left\langle 2\vec{E}_{01}.\vec{E}_{02}\cos(\omega t-\vec{k}_1.\vec{r}+\varphi_1)\cos(\omega t-\vec{k}_2.\vec{r}+\varphi_2\right\rangle=$$

$$=\left\langle \vec{E}_{01}.\vec{E}_{02}\cos((\vec{k}_2-\vec{k}_1).\vec{r}+(\varphi_1-\varphi_2))\right\rangle+\left\langle \vec{E}_{01}.\vec{E}_{02}\cos(2\omega t-(\vec{k}_1+\vec{k}_2).\vec{r}+(\varphi_1+\varphi_2)\right\rangle$$

Druhý člen je harmonickou funkcí času, a proto je jeho časová střední hodnota rovna nule.
Tedy

$$\left\langle I\right\rangle=\left\langle I_1\right\rangle+\left\langle I_2\right\rangle+2\sqrt{\left\langle I_1\right\rangle\left\langle I_2\right\rangle}\cos\alpha\left\langle\cos((\vec{k}_2-\vec{k}_1).\vec{r}+(\varphi_1-\varphi_2))\right\rangle$$

kde α je úhel, který svírají vektory amplitud vln $\vec{E}_{01}$ a $\vec{E}_{02}$, $\vec{E}_{01}.\vec{E}_{02}=\sqrt{\left\langle I_1\right\rangle\left\langle I_2\right\rangle}\cos\alpha$

Člen $2\sqrt{\left\langle I_1\right\rangle\left\langle I_2\right\rangle}\cos\alpha\left\langle\cos((\vec{k}_2-\vec{k}_1).\vec{r}+(\varphi_1-\varphi_2))\right\rangle$ se nazývá ***interferenční člen*** a určuje, jaká bude výsledná zářivost.

Jestliže vlny spolu fázově nesouvisí, potom se jejich fázový rozdíl $\varphi_1(t)$ - $\varphi_2(t)$ během pozorování náhodně mění, časová střední hodnota $\left\langle\cos((\vec{k}_2-\vec{k}_1).\vec{r}+(\varphi_1-\varphi_2))\right\rangle=0$, potom $\left\langle \boldsymbol{I}\right\rangle=\left\langle \boldsymbol{I}_1\right\rangle+\left\langle \boldsymbol{I}_2\right\rangle$ a interference nenastává (nekoherentní vlny spolu neinterferují).

Jestliže jsou ale vlny fázově vázané, tedy vycházejí ze stejného zdroje, potom je jejich fázový rozdíl $\varphi_1(t)$ - $\varphi_2(t)$ roven na čase nezávislé konstantě a tedy

$$\left\langle\cos((\vec{k}_2-\vec{k}_1).\vec{r}+(\varphi_1-\varphi_2))\right\rangle=\cos((\vec{k}_2-\vec{k}_1).\vec{r}+(\varphi_1-\varphi_2))=\cos(\Delta\varphi)$$

a $$\left\langle I\right\rangle=\left\langle I_1\right\rangle+\left\langle I_2\right\rangle+2\sqrt{\left\langle I_1\right\rangle\left\langle I_2\right\rangle}\cos\alpha\cos(\Delta\varphi)$$

Protože interferenční člen $\cos(\Delta\varphi)$ na závisí $\vec{r}$, pozorujeme periodické změny rozložení intenzity - ***interferenční proužky*** (viz Obr. I2). Takové vlny nazýváme ***koherentní***.

Protože interferenční člen závisí i na polarizaci vln, je zřejmé, že spolu nemohou interferovat vlny se vzájemně ortogonální polarizací, byť by byly koherentní.

Jestliže $\vec{E}_{01} \,//\, \vec{E}_{02}$

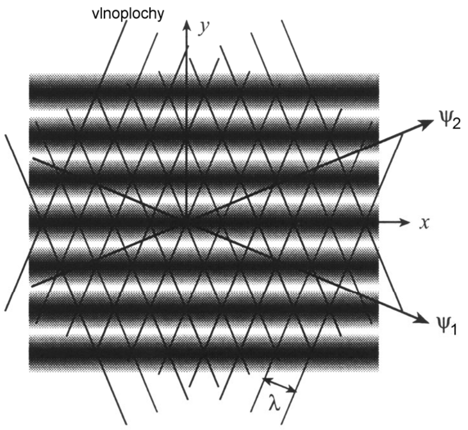
potom intenzita osciluje mezi $\langle \boldsymbol{I} \rangle_{\mathbf{max}}$ a $\langle \boldsymbol{I} \rangle_{\mathbf{min}}$, kde

$$\langle I \rangle_{\max} = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}$$

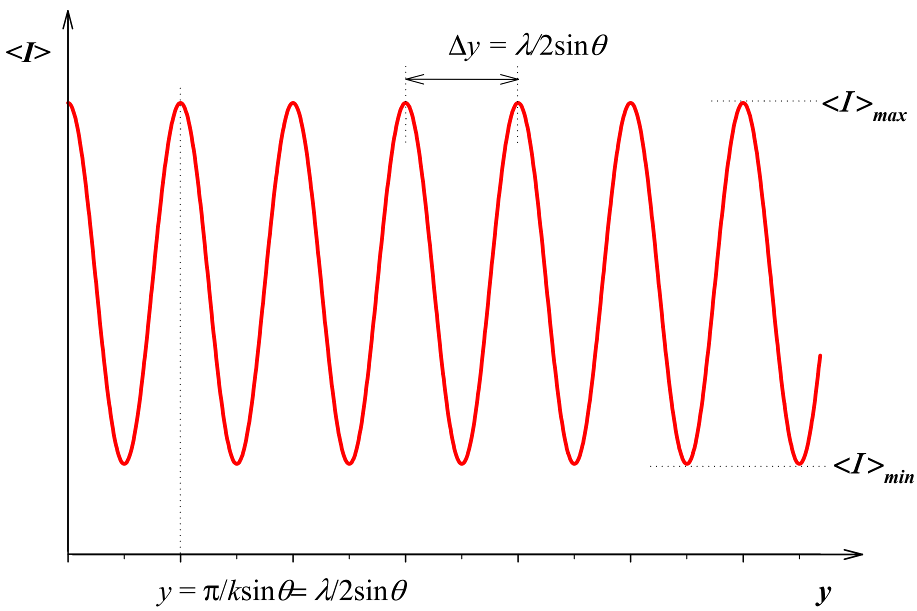
$$\langle I \rangle_{\min} = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle - 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}$$

Pro kvantifikaci interferenčního jevu se zavádí veličina ***kontrast proužků*** V definovaná jako

$$V \equiv \frac{\langle I \rangle_{\max} - \langle I \rangle_{\min}}{\langle I \rangle_{\max} + \langle I \rangle_{\min}} = \frac{2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}}{\langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle}$$



Obr. I2. Interference dvou rovinných vzájemně koherentních vln.



Obr. I3. Rozložení intenzity při dvojsvazkové interferenci

Jestliže $\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle = I_0 \quad \Rightarrow \quad \langle I \rangle_{\min} = 0$ a $V = 1$

a $$I = 2I_0(1+\cos\Delta\varphi) = 4I_0\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}$$

Jestliže $\Delta\varphi = 2m\pi$ $m = 0, 1, 2, \ldots$ potom $I_{max} = 4I_0$

a nastává ***konstruktivní interference*** (světlý proužek). Naopak jestliže

$\Delta\varphi = (2m-1)\pi$ $|m| = 1, 2, 3, \ldots$ potom $I_{min} = 0$

a nastává ***destruktivní interference*** (tmavý proužek).

Protože platí vztah mezi fázovým a dráhovým rozdílem $\Delta\varphi = k\Delta r$

konstruktivní interference nastává pokud bude dráhový rozdíl roven sudému násobku půlvln ($\lambda/2$) a destruktivní interference nastane pokud dráhový rozdíl bude roven lichému násobku půlvln.

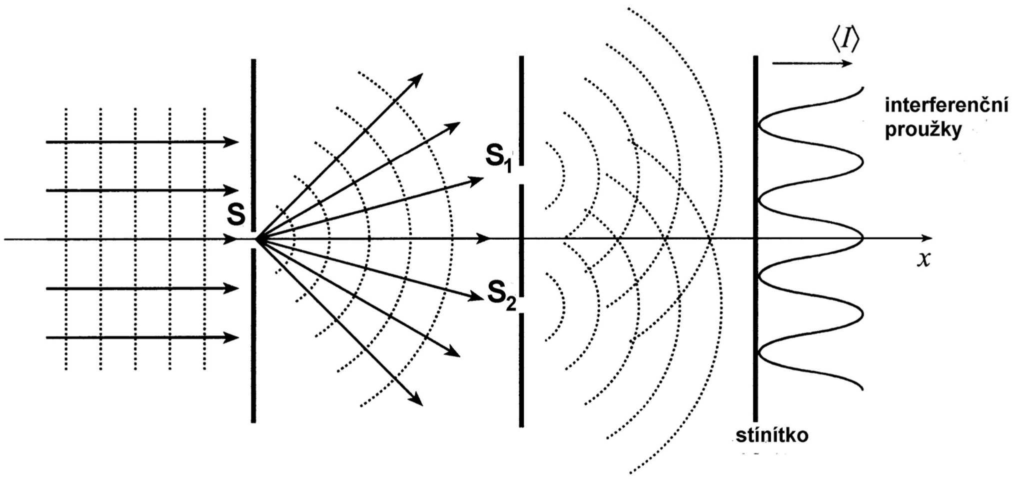
$\Delta\varphi = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad \Delta r = 2m\frac{\lambda}{2}$ konstruktivní interference

$\Delta\varphi = (2m-1)\pi \quad \Rightarrow \quad \Delta r = (2m-1)\frac{\lambda}{2}$ destruktivní interference

Interferenční obraz závisí na vlnové délce. Nepracujeme-li s monochromatickým zářením, na stínítku se překrývají interferenční obrazy různých vlnových délek.

Youngův pokus

Tento klasický experiment demonstrující interferenci světla byl poprvé proveden Thomasem Youngem v roce 1802. Uspořádání experimentu je znázorněno na Obr. I3.



Obr. I3. Schéma Youngova pokusu.

Dráhový rozdíl v bodě P bude

$$\Delta r = \overline{S_1P} - \overline{S_2P} = l_1 - l_2 = \sqrt{l^2 + \left(y+\frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(y-\frac{d}{2}\right)^2} = l\sqrt{1+\left(\frac{y+\frac{d}{2}}{l}\right)^2} - \sqrt{1+\left(\frac{y-\frac{d}{2}}{l}\right)^2}$$

Jelikož $l >> y + \frac{d}{2}$ můžeme použít přibližný vzorec (omezující se na první dva členy mocninné řady) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$

potom dráhový rozdíl bude $$\Delta r = l\left(\frac{y^2 + \frac{d^2}{4}}{2l^2} + \frac{yd}{2l^2} - \frac{y^2 + \frac{d^2}{4}}{2l^2} + \frac{yd}{2l^2}\right) = \frac{yd}{l}$$

a tedy $$y = \frac{l}{d}\Delta r$$

Bude-li dráhový rozdíl roven celistvým násobkům vlnové délky, nastává

konstruktivní interference $\Delta r = 2m\frac{\lambda}{2} = m\lambda$ a $I_{\max} = 4I_0$

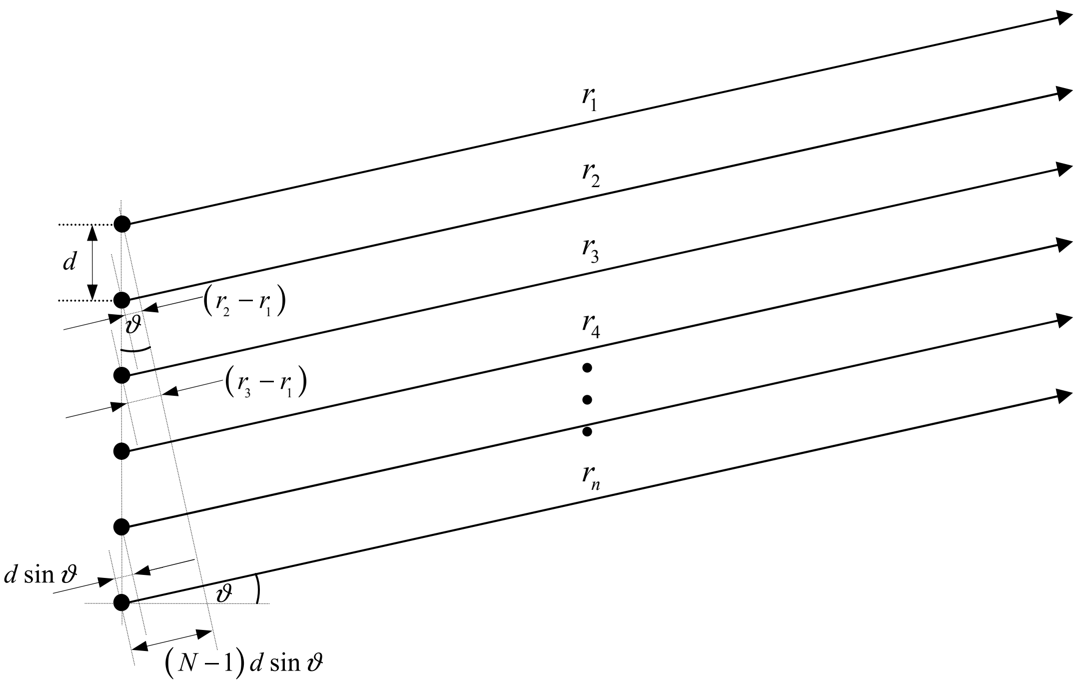
Pokud bude dráhový rozdíl lichým násobkům poloviny vlnové délky, nastává

destruktivní interference $\Delta r = (2m-1)\frac{\lambda}{2}$ a $I_{\min} = 0$

Šířka proužků $$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{l}{d}\left[2(m+1)\frac{\lambda}{2} - 2m\frac{\lambda}{2}\right] = \frac{l}{d}\lambda$$

čili proužky jsou ***ekvidistantní***.

V bílém světle bude střední proužek $(m = 0)$ bílý, ostatní budou zbarvené – vnitřní okraj bude fialový $(\lambda_f \approx 400\ nm)$, vnější bude červený $(\lambda_č \approx 760\ nm)$.



Obr. I4. Lineární pole *N* koherentních oscilátorů ve fázi.

Jako jednoduchý ale logický most mezi studiem interference a difrakce uvažujme uspořádání na Obr. I4. Mějme lineární pole N koherentních bodových zdrojů záření, které jsou identické (včetně polarizace emitovaného záření). Předpokládejme, že oscilátory mají shodnou počáteční fázi. Paprsky na obr. I4 jsou téměř paralelní a setkávají se v nějakém velmi vzdáleném bodě P. Bude-li rozměr pole zdrojů malý ve srovnání se vzdálenostmi do bodu P, potom amplitudy jednotlivých vln v bodě P budou v podstatě shodné, neboť urazí téměř stejnou vzdálenost, tedy

$$E_0(r_1) = E_0(r_2) = \ldots = E_0(r_N) = E_0(r)$$

Výsledné pole v bodě P bude dáno reálnou částí

$$E = E_0(r)e^{i(\omega t - kr_1)} + E_0(r)e^{i(\omega t - kr_2)} + \ldots + E_0(r)e^{i(\omega t - kr_N)} =$$
$$= E_0 e^{i\omega t} e^{-ikr_1}\left[1 + e^{-i(r_2 - r_1)} + e^{-ik(r_3 - r_1)} + \ldots + e^{-ik(r_N - r_1)}\right]$$

Z obrázku je zřejmé, že $r_2 - r_1 = d.\sin\vartheta$, $r_3 - r_1 = 2d.\sin\vartheta$ atd.

Čili $$E = E_0 e^{i\omega t} e^{-ikr_1}\left[1 + e^{-i\delta} + (e^{-i\delta})^2 + .. + (e^{-i\delta})^{N-1}\right]$$

kde $\delta = k(r_2 - r_1)$ $2\delta = k(r_3 - r_1)$ atd.

Výraz v závorce můžeme vyjádřit jako součet N členů geometrické řady

$$\frac{e^{-iN\delta} - 1}{e^{-i\delta} - 1} = \frac{e^{-iN\delta/2}(e^{-iN\delta/2} - e^{iN\delta/2})}{e^{-i\delta/2}(e^{-i\delta/2} - e^{i\delta/2})} = e^{-i(N-1)\delta/2}\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

Definujeme-li R jako vzdálenost ze ***středu řady zdrojů*** do bodu P, potom

$$R = \tfrac{1}{2}(N-1)d\sin\vartheta + r_1$$

a výsledné pole v bodě P tedy můžeme vyjádřit jako

$$E = E_0(r)e^{i(\omega t - kR)}\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

Rozložení intenzity záření ($I \sim \frac{1}{2}EE^*$) od N identických, koherentních, vzdálených bodových zdrojů potom bude

$$I = I_0\frac{\sin^2\frac{N\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}} = I_0\frac{\sin^2(N\frac{kd}{2}\sin\vartheta)}{\sin^2(\frac{kd}{2}\sin\vartheta)}$$

kde I_0 je intenzita záření jednoho ze zdrojů v bodě P.

Pro $\boldsymbol{N = 2}$

$$I = I_0\frac{\sin^2\delta}{\sin^2\frac{\delta}{2}} = I_0\frac{4\sin^2\frac{\delta}{2}\cos^2\frac{\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}} = 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2} \quad ,$$

což je vztah odvozený pro Youngův pokus.

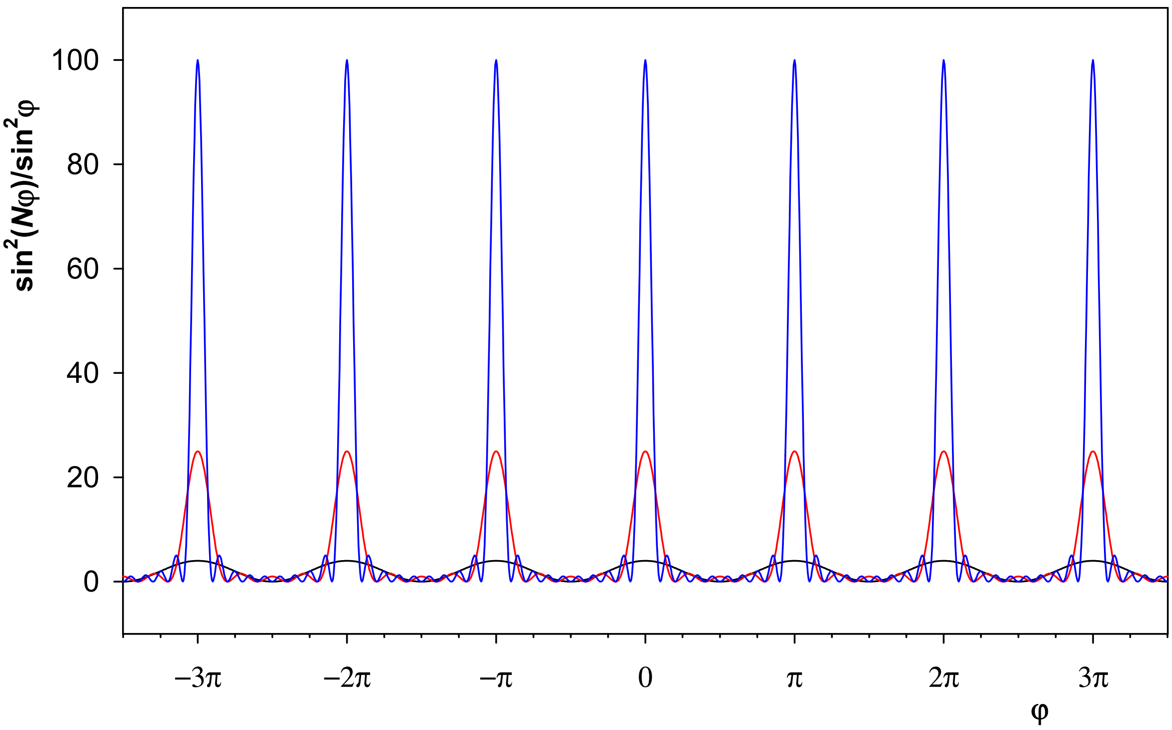
Protože

$$\lim_{\delta \to m\pi} \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} = N^2 \qquad ,$$

tzv. ***hlavní maxima*** nastávají pro $\frac{\delta}{2} = \frac{kd}{2}\sin\vartheta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\vartheta = m\pi$

a odtud $d\sin\vartheta_m = m\lambda$

a nabývají hodnoty $I_{\max} = N^2 I_0$



Obr. I5. Průběh funkce $f(\varphi) = \frac{\sin^2 N\varphi}{\sin^2 \varphi}$ pro $N = 2$ (černá), $N = 5$ (červená) a $N = 10$ (modrá).