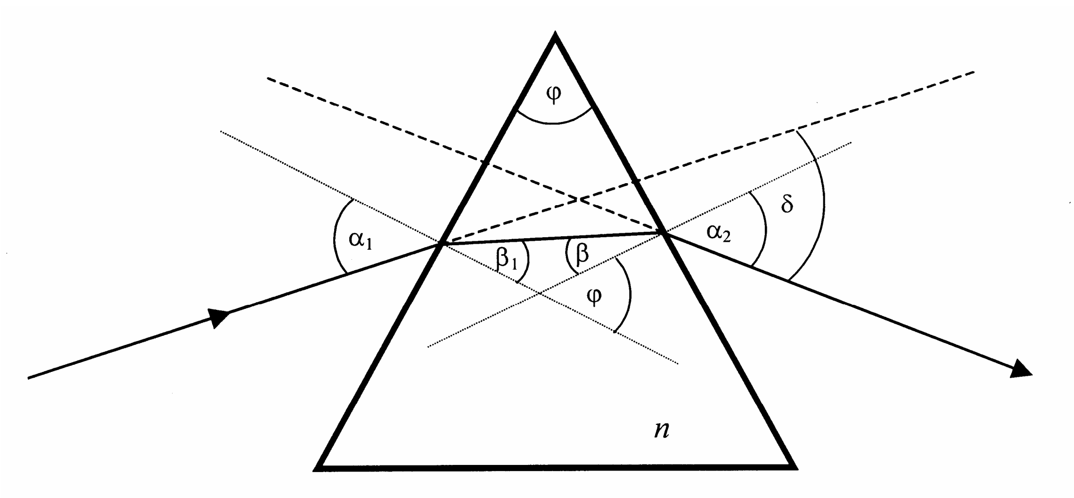
Lom hranolem

lámavé stěny

lámavá hrana

lámavý úhel φ

deviace δ úhel, o který je po výstupu z hranolu vychýlen světelný paprsek ležící v rovině kolmé k lámavé hraně (v tzv. hlavním řezu hranolu), který se láma na obou lámavých stěnách



Obr. LH1. Hlavní řez lámavého hranolu.

Z obrázku je zřejmé, že platí

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi \tag{1}$$

$$\varphi = \beta_1 + \beta_2 \tag{2}$$

čili $$\delta = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2) \tag{3}$$

Zákon lomu pro první a druhé rozhraní

$$\sin\alpha_1 = n \sin\beta_1 \tag{4a}$$

$$\sin\alpha_2 = n \sin\beta_2 \tag{4b}$$

Aby světlo hranolem vůbec prošlo, musí být úhel dopadu na druhé rozhraní β_2 menší než mezní úhel β_M, tj. z (4b) a (2) plyne

$$\sin\beta_2 = \sin(\varphi - \beta_1) < \frac{1}{n} = \sin\beta_M \qquad \text{a tedy} \qquad \beta_1 > \varphi - \beta_M \quad .$$

Ze (4a) potom vyplyne podmínka pro úhel dopadu na rozhraní α_1

$$1 \geq \sin\alpha_1 \geq \sin\alpha_0 = n \sin(\varphi - \beta_M)$$

kde α_0 je úhel dopadu na první rozhraní, při kterém bude $\beta_2 = \beta_M$

Z nerovnosti

$$n\sin(\varphi-\beta_M)\le 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sin(\varphi-\beta_M)\le \frac{1}{n}=\sin\beta_M$$

vyplývá omezující podmínka pro lámavý úhel

$$\varphi \le 2\beta_M \tag{5}$$

a ze vztahu

$$\sin\alpha_1 \ge \sin\alpha_0 = n\sin(\varphi-\beta_M)$$

dostáváme omezující podmínku pro úhel dopadu na první rozhraní

$$\alpha_1 \ge \alpha_0 = \arcsin(n\sin(\varphi-\beta_M)) \tag{6}$$

Protože lámavý úhel hranolu musí být menší než dvojnásobek mezního úhlu, dopadající a prošlé paprsky jsou charakterizovány následujícími podmínkami:

$$\alpha_0 < \alpha_1 < 90° \qquad 90° > \alpha_2 > \alpha_0$$

V závislosti na velikosti lámavého úhlu mohou nastat čtyři případy:

1. $\varphi = 2\beta_M$, potom ze vztahu (??) vyplývá, že $\sin\alpha_1 = 1$, tedy $\alpha_1 = \alpha_2 = 90°$ a žádný paprsek hranolem neprojde.
2. $\beta_M < \varphi < 2\beta_M$, potom úhel φ - β_M nabývá hodnot mezi 0 a β_M a $0 < n\sin(\varphi-\beta_M) < 1$, a tedy úhel dopadu α_1 může nabývat hodnot mezi α_0 a 90° a úhel α_2 mezi 90° a α_0 ($\alpha_0 > 0$).
3. $\varphi = \beta_M$, potom $\alpha_0 = 0$ a všechny paprsky s úhlem dopadu v intervalu $\langle 0°, 90°\rangle$ hranolem procházejí.
4. $0 < \varphi < \beta_M$, potom α_0 je záporné a všechny paprsky s úhlem dopadu v intervalu $\langle \alpha_0, 90°\rangle$ hranolem procházejí.

Ze (4b) s užitím (2) a (4a) lze vyjádřit úhel α_2

$$\alpha_2 = \arcsin(n\sin\beta_2) = \arcsin[n\sin(\varphi-\beta_1)] = \arcsin[n(\sin\varphi\cos\beta_1 - \sin\beta_1\cos\varphi)] =$$
$$= \arcsin\left(\sin\varphi\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1} - \sin\alpha_1\cos\varphi\right)$$

a dosazením do (1) vyjádřit deviaci jako funkci úhlu dopadu α_1

$$\delta = \alpha_1 + \arcsin\left(\sin\varphi\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1} - \sin\alpha_1\cos\varphi\right) - \varphi \tag{7}$$

Závislost deviace δ na úhlu dopadu α_1 pro hranol s lámavým úhlem $\varphi = 60°$ a indexem lomu $n = 1{,}5$ je znázorněna na Obr. LH2.

Sečteme-li (4a) a (4b)

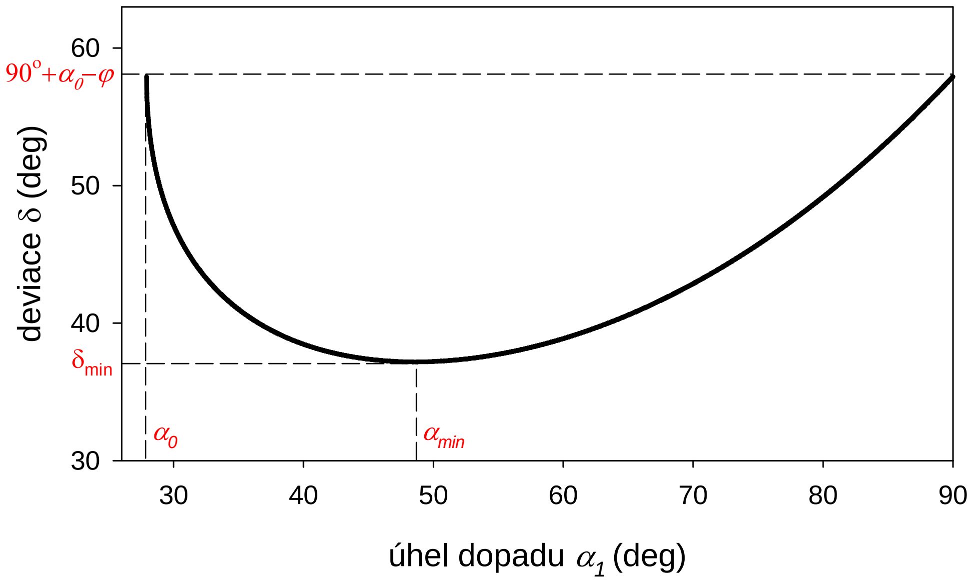
$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 = n(\sin\beta_1 + \sin\beta_2)$$

upravíme

$$2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} = n.2\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$$

a dosazením z (1) a (2) nakonec odvodíme vztah

$$\frac{\sin\frac{\delta+\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}}{\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}} \tag{8}$$



Obr. LH2. Závislost deviace na úhlu dopadu pro hranol s lámavým úhlem $\varphi = 60°$ a indexem lomu $n = 1,5$.

Minimální deviaci δ_{min} určíme z podmínky

$$\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 0 \tag{9}$$

Z (1) v případě minimální deviace (podmínka (9)) dostáváme

$$\left(\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right) = -1 \tag{10}$$

a diferencováním (3) a (4) dostáváme

$$\frac{d\beta_1}{d\alpha_1} = -\frac{d\beta_2}{d\alpha_1}$$

ze (4a) $$\cos\alpha_1 = n\cos\beta_1 \frac{d\beta_1}{d\alpha_1}$$

ze (4b) $$\cos\alpha_2 \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = n\cos\beta_2 \frac{d\beta_2}{d\alpha_1}$$

a odtud $$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = -\frac{\cos\alpha_1 \cos\beta_2}{\cos\alpha_2 \cos\beta_1} \tag{11}$$

Z (7) a (8) pro minimální deviaci získáme podmínku

$$\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 1 - \frac{\cos\alpha_1 \cos\beta_2}{\cos\alpha_2 \cos\beta_1} = 0 \tag{12}$$

Umocněním a dosazením z (4) nakonec dojdeme k rovnici

$$\frac{1 - n^2 \sin^2\beta_1}{\cos^2\beta_1} = \frac{1 - n^2 \sin^2\beta_2}{\cos^2\beta_2} \quad ,$$

která bude splněna pokud $\beta_1 = \beta_2 \equiv \beta$ a tedy $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$

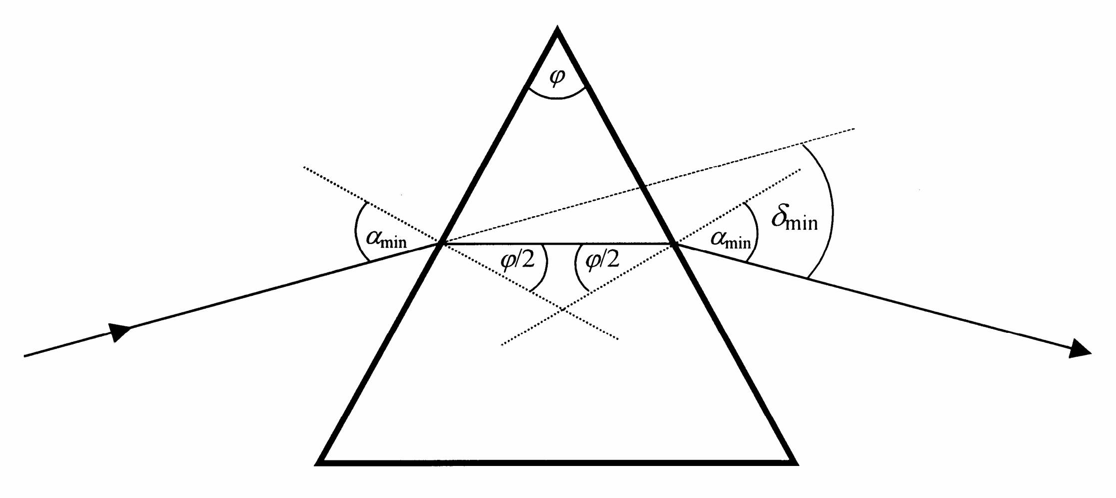
(druhý kořen rovnice výše, $\beta_1 = -\beta_2$, implikuje $\varphi = 0$ a nemá tudíž fyzikální smysl). To, že se jedná o minimum lze ukázat výpočtem druhé derivace. Jednodušeji to lze ukázat z průběhu deviace jako funkce úhlu dopadu v intervalu $\langle \alpha_0, 90° \rangle$:

- pro $\alpha_1 = \alpha_0$ $\Rightarrow$ $\alpha_2 = 90°$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha_2 = 0$ $\Rightarrow$ z (10) $\frac{d\delta}{d\alpha_1} = -\infty$
- pro $\alpha_1 = 90°$ $\Rightarrow$ $\alpha_2 = \alpha_0$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha_1 = 0$ $\Rightarrow$ z (10) $\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 1$,

čili derivace deviace podle úhlu dopadu je na intervalu $\langle \alpha_0, 90° \rangle$ rostoucí funkcí a tudíž funkce $\delta = \delta(\alpha_1)$ na tomto intervalu prochází minimem.

Při minimální deviaci tedy nastává symetrický chod světelného paprsku hranolem, neboť ze vztahů (1) a (2) vyplývá

$$\delta_{\min} = 2\alpha - \varphi \qquad \text{a} \qquad \varphi = 2\beta$$



Obr. LH3: Symetrický chod paprsků hranolem při minimální deviaci.

Dosazením do (4b) potom dostáváme podmínku pro úhel dopadu při minimální deviaci α_{min}

$$\alpha_{\min} = \arcsin\left(n \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

V případě minimální deviace potom z (6) vyplývá známý vztah

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\dfrac{\varphi+\delta_{\min}}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}} \quad , \qquad (13)$$

který je používán pro určování indexu lomu skla. Změříme-li minimální deviaci δ_{min} a lámavý úhel φ pomocí hranolového spektrometru, můžeme ze vztahu (13) stanovit pro danou vlnovou délku index lomu hranolu n.

lámavý úhel φ	minimální úhel dopadu α_0	minimální deviace δ_{min}	úhel dopadu při minimální deviaci α_{min}
30°	-17°53′	15°41′	22°50′
40°	-2°43′	21°44′	30°52′
50°	12°20′	28°41′	39°22′
60°	27°55′	37°11′	48°35′
70°	45°7′	48°43′	59°21′
80°	68°2′	69°14′	74°37′
83°	81°3′	84°22′	83°41′

Tab. LH1: Minimální úhel dopadu, minimální deviace a úhel dopadu při minimální deviaci pro různé lámavé úhly. Hodnoty uvedené v tabulce byly vypočteny pro hranol s indexem lomu n = 1,5. Z hodnoty mezního úhlu (β_M =arcsin(1/n) ≈ 41°49′) vyplývá omezující podmínka pro lámavý úhel $\varphi < 2\beta_M \approx 83°37'$. Záporné hodnoty úhlu dopadu znamenají, že dopadající paprsek leží vpravo od kolmice dopadu (úhel měříme od kolmice k paprsku).

Disperze hranolu

Index lomu hranolu je funkcí vlnové délky λ (obr. LH4)

$$n = n(\lambda)$$

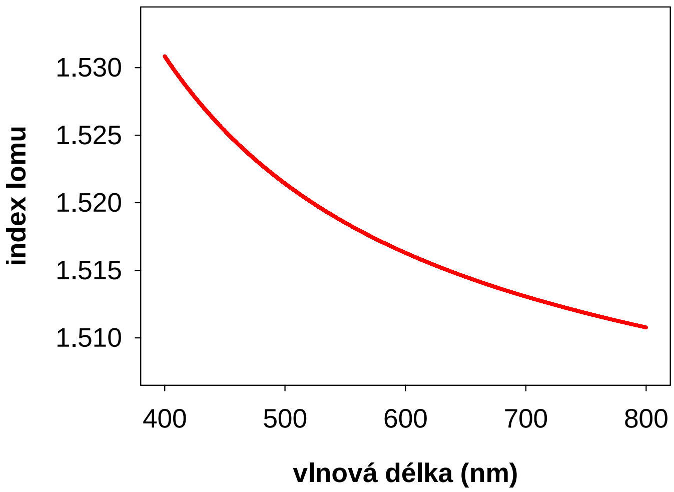
a proto i deviace δ bude záviset na λ

$$\delta = \delta(\lambda)$$

Úhlovou disperzi definujeme vztahem

$$D_\alpha \equiv \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn}\frac{dn}{d\lambda} \tag{14}$$

Zatímco první faktor na pravé straně vztahu (14) zcela závisí na geometrickém uspořádání, druhý charakterizuje disperzi materiálu, z něhož je hranol vyroben. Protože úhel dopadu α_1



Obr. LH4: Závislost indexu lomu na vlnové délce pro sklo BK7 (Schott).

nezávisí na vlnové délce světla (předpokládáme, že na lámavou stěnu hranolu dopadá kolimovaný svazek a úhel dopadu je tudíž stejný pro všechny vlnové délky), dostáváme diferencováním (3) a (2)

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{d\alpha_2}{dn} \qquad\qquad \frac{d\beta_1}{dn} = -\frac{d\beta_2}{dn}$$

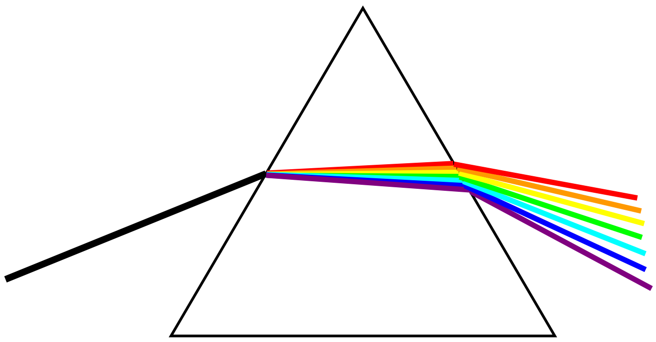
a z (4)

$$\sin\beta_1 + n\cos\beta_1 \frac{d\beta_1}{dn} = 0$$

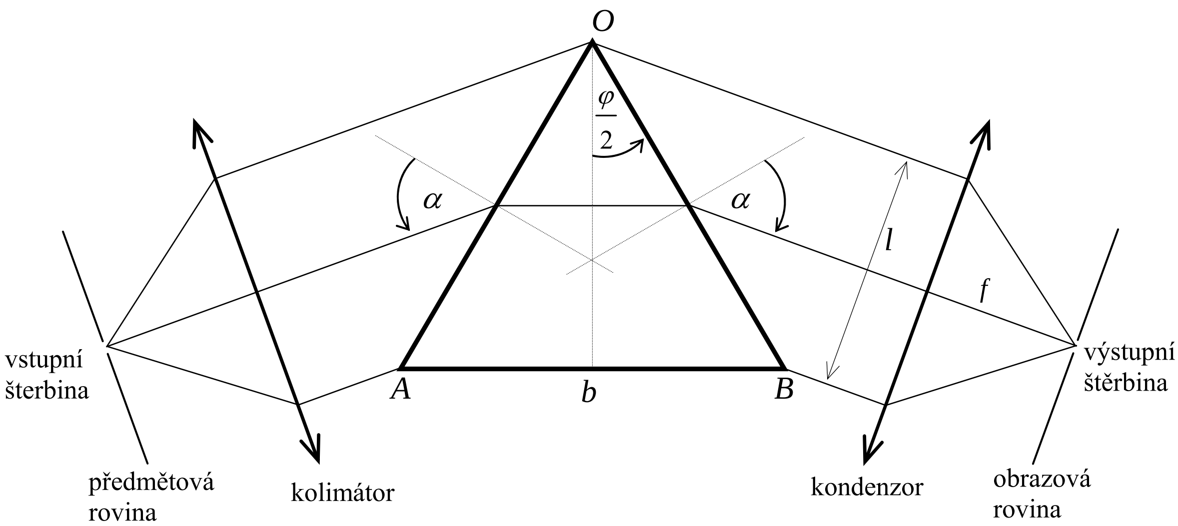
$$\cos\alpha_2 \frac{d\alpha_2}{dn} = \sin\beta_2 + n\cos\beta_2 \frac{d\beta_2}{dn}$$

a odtud eliminujeme

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2)}{\cos\alpha_2 \cos\beta_1} = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha_2 \cos\beta_1} \tag{15}$$



Obr. LH5: Rozklad světla hranolem.



Obr. LH6: Schéma hranolového spektrografu (průchod světla při minimální deviaci).

Za podmínky minimální deviace bude mít vztah (15) tvar

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha_2 \cos\beta_1} = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha \cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\alpha\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2OB\sin\frac{\varphi}{2}}{OB\cos\alpha} = \frac{b}{l} \tag{16}$$

kde l označuje příčný rozměr světelného svazku a b rozměr základny hranolu (viz obr. LH6).

Dosazením do vztahu (14) potom dostáváme pro úhlovou disperzi hranolu vztah

$$D_\alpha = \frac{b}{l}\frac{dn}{d\lambda} \tag{17}$$

S užitím (17) potom můžeme vyjádřit změnu deviace $\Delta\delta$ při změně vlnové délky λ o $\Delta\lambda$

$$\Delta\delta = \frac{b}{l}\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda \tag{18}$$

Lineární disperzi hranolového spektrometru na obr. LH6 potom můžeme vyjádřit jako

$$D_l \equiv fD_\alpha = f\,\frac{b}{l}\frac{dn}{d\lambda} \tag{19}$$

kde f je ohnisková vzdálenost kondenzoru.

Pro $b = 4$ cm, $\frac{dn}{d\lambda} = 10^{-4}\,\text{nm}^{-1}$, $l = 2$ cm a $f = 20$ cm bude $D_\alpha = 2.10^{-4}\,\text{rad/nm}$ a

$D_l = 4.10^{-5}\,\text{m/nm}$. Reciproká lineární disperze p tom bude $D_r = 1/D_l = 25$ nm/mm, tedy na 1 mm v obrazové rovině spektrometru padne interval vlnových délek široký 25 nm.

Pokud jde o rozlišovací schopnost hranolového spektrometru, podle Rayleighova kritéria musí být (omezený příčný rozměr svazku představuje šířku "štěrbiny") úhlová vzdálenost centrálních ohybových maxim vlnové délky λ a $\lambda + \Delta\lambda$ alespoň

$$\Delta\delta = \frac{\lambda}{l} \tag{20}$$

S užitím vztahu (18) dostáváme

$$\Delta\delta = \frac{b}{l}\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda = \frac{\lambda}{l} \tag{21}$$

Odtud snadno získáme vztah pro rozlišovací schopnost (***R****esolving* ***P****ower*)

$$R.P. \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b\frac{dn}{d\lambda} \tag{22}$$

Pro výše uvedený příklad bude $R.P. = 4$ cm . $10^{-4}\text{nm}^{-1} = 4.10^3 = 4000$. To znamená, že pro $\lambda = 500$ nm jsme schopni rozlišit dvě vlnové délky lišící se o $\Delta\lambda = \frac{500\text{ nm}}{4000} = 0{,}125$ nm.