Maxwellovy rovnice v obecném tvaru

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}\left(\vec{r},t\right) \qquad \text{Ampérův zákon} \qquad (1a)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{zákon elektromagnetické indukce} \qquad (1b)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho\left(\vec{r},t\right) \qquad \text{Gaussův zákon} \qquad (1c)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \text{zákon o neexistenci magnetických nábojů} \qquad (1d)$$

kde $\vec{E},\vec{H}$ jsou intenzity elektrického respektive magnetického pole, $\vec{D},\vec{B}$ jsou elektrická respektive magnetická indukce, $\vec{j}$ je hustota volných proudů a ρ je objemová hustota volných nábojů

Maxwellovy rovnice doplňujeme materiálovými vztahy

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad (2a)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \qquad (2b)$$

kde ε je permitivita prostředí a μ je permeabilita prostředí

Soustava rovnic (1) představuje celkem 8 rovnic pro 12 proměnných $\vec{E},\vec{D},\vec{B},\vec{H}$

Např. rovnice (1b) reprezentuje 3 vztahy pro složky vektorů $\vec{E}$ a $\vec{B}$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

a rovnice (1d) rozepsaná do složek

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Co nám Maxwellovy rovnice říkají: časově proměnné pole $\vec{E}$ generuje pole $\vec{B}$ a naopak časově proměnné pole $\vec{B}$ generuje pole $\vec{E}$.

V případě nepohyblivého náboje bude pole $\vec{E}$ radiální a stacionární. Jestliže se náboj začne pohybovat, dochází ke změně pole $\vec{E}$ v blízkosti náboje a tato změna se bude šířit prostorem nějakou konečnou rychlostí. Časově proměnné elektrické pole indukuje magnetické pole

(Ampérův zákon). Pro zrychlující se náboj $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ nebude konstantní a indukované pole $\vec{B}$ potom také bude časově proměnné. Časově proměnné pole $\vec{B}$ generuje pole $\vec{E}$ (zákon elektromagnetické indukce) a celý proces pokračuje v nekonečném cyklu. Pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou spřáhnuty a je nejvhodnější považovat je za dva aspekty jednoho fyzikálního jevu – elektromagnetického pole – jehož zdrojem je pohybující se náboj. Jednou vygenerovaný vzruch se od zdroje šíří ve formě vlny nezávisle na něm. Časově proměnné elektrické a magnetické pole se regenerují navzájem v nekonečném cyklu.

Ve vakuu, kde nejsou přítomny elektrické náboje a proudy a kde platí

$\varepsilon = \varepsilon_0$ kde ε_0 je permitivita vakua

$\mu = \mu_0$ kde μ_0 je permeabilita vakua

nabývají Maxwellovy rovnice (1) tvar

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3a}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3b}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = 0 \tag{3c}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \tag{3d}$$

Aplikujeme-li na obě strany rovnice (3b) operaci rot, potom dostáváme pro levou stranu s užitím identity

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}\ ,\ \text{kde} \qquad \Delta \equiv \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,,$$

a vztahu (3c)

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

a pro pravou stranu s užitím rovnice (3a)

$$\mathrm{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Odtud potom získáváme ***vlnovou rovnici*** pro $\vec{E}$

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \tag{4a}$$

kde jsme označili

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{5}$$

Analogickým postupem lze ze vztahu (3a) odvodit vlnovou rovnici pro $\vec{B}$

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad .} \tag{4b}$$

Každý ze vztahů (4) reprezentuje 3 rovnice pro 3 složky vektoru $\vec{E}$ respektive $\vec{B}$, například (4a) lze rozepsat takto

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad .$$

Dosadíme-li do (5) číselné hodnoty pro permitivitu a permeabilitu vakua,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\left(8,85.10^{-12}\,\mathrm{s^2 C^2 m^{-3} kg}\right)\left(4\pi.10^{-7}\,\mathrm{m\,kg\,C^{-2}}\right)}} \approx 3.10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

vidíme, že rychlost šíření elektromagnetických vln ve vakuu je v pozoruhodné shodě se změřenou rychlostí světla (v Maxwellově době to byla hodnota 315.300 km/h určená Fizeauem v roce 1849). Tedy řečeno samotným Maxwellem

> This velocity [i.e., his theoretical prediction] is so nearly that of light, that it seems we have strong reason to conclude that light itself (including that of radiant heat, and other radiations if any) is an electromagnetic disturbance in the form of waves propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws.

V roce 1983 přijala 17. Conférence Générale des Poids et Mesures v Paříži novou definici metru, a stanovila hodnotu rychlosti světla ve vakuu (jako jedné ze základních fyzikálních konstant) na

$$c = 2,99792458.10^8\,\mathrm{m/s} \quad .$$

Jedním z řešení vlnové rovnice (4a) je tzv. ***rovinná harmonická vlna*** ve tvaru

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right) \tag{6}$$

kde $\vec{E}_0$ je ***amplituda vlny***, $\varphi(\vec{r},t) = \omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0$ je ***fáze vlny*** a $\vec{k}$ je ***vlnový vektor***

$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{s} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{s}$, kde $\vec{s}$ je jednotkový vektor udávající směr šíření vlny.

Derivujme

$$\frac{\partial E_j}{\partial r_i} = E_{0j}\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\cos\varphi\left(\vec{r},t\right)\right) = E_{0j}\left(-\sin\varphi\right)\frac{\partial\varphi}{\partial r_i} = E_{0j}\left(-\sin\varphi\right)\left(-k_i\right) = E_{0j}k_i\sin\varphi$$

Dosadíme-li řešení (6) do rovnice (3c), dostaneme

$$\operatorname{div}\vec{D} = \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = \varepsilon_0\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial E_j}{\partial r_j} = \varepsilon_0\sum_{j=1}^{3}E_{0j}k_j\sin\varphi = \varepsilon_0\sin\varphi\sum_{j=1}^{3}E_{0j}k_j = \varepsilon_0\sin\varphi\left(\vec{E}_0.\vec{k}\right) = 0$$

a tedy $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$.

Vezměme rovnici (3b). Pro x-ovou složku její levé strany dostáváme

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = E_{0z}k_y\sin\varphi - E_{0y}k_z\sin\varphi = \sin\varphi\left(E_{0z}k_y - E_{0y}k_z\right) = \sin\varphi\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right)_x$$

a tedy $\operatorname{rot}\vec{E} = \sin\varphi\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)$.

Potom

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E} = -\sin\varphi\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right)$$

a integrací (kde integrační konstantu, reprezentující časově nezávislé pole, položíme rovnou nule)

$$\vec{B} = -\int\sin\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right)\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right)dt = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right)\cos\varphi = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\left(\vec{s}\times\vec{E}_0\right)\cos\varphi = \vec{B}_0\cos\varphi$$

kde jsem označili $\vec{B}_0 = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\left(\vec{s}\times\vec{E}_0\right) = \frac{1}{c}\left(\vec{s}\times\vec{E}_0\right)$ amplitudu magnetické indukce.

Zřejmě $\left|\vec{B}\right| = \frac{1}{c}\left|\vec{E}\right| \qquad \left|\vec{H}\right| = \mu_0\frac{1}{c}\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{Z_0}\left|\vec{E}\right|$ (7)

kde veličina $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\Omega$ se nazývá ***impedance vakua***.

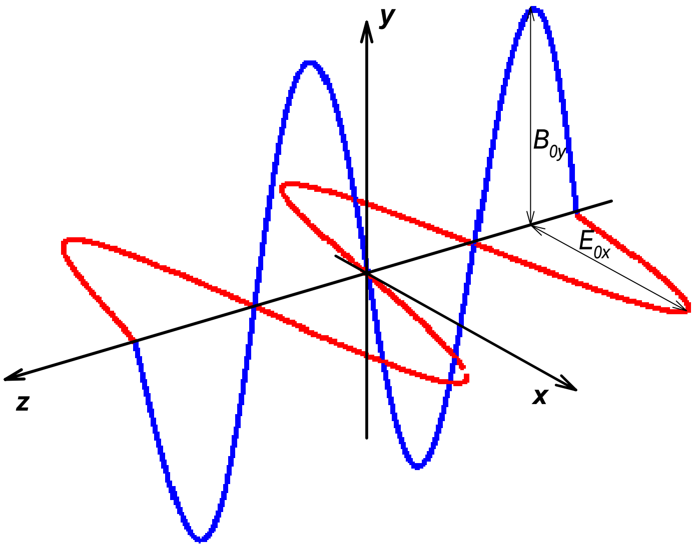
Čili shrnuto $\vec{E}_0 \perp \vec{s}\left(\vec{k}\right)$, $\vec{B}_0 \perp \vec{s}\left(\vec{k}\right),\vec{E}_0$ a vektory $\vec{s}\left(\vec{k}\right),\vec{E},\vec{B}$ tvoří pravotočivý systém. Navíc $\vec{E}$ a $\vec{B}$ kmitají ***ve fázi*** (v každém bodu prostoru). Jedná se tedy o ***vlnění příčné***; vektorový součin $\vec{E}\times\vec{B}$ udává směr šíření vlny.

Jako příklad uvažujme rovinnou harmonickou vlnu šířící se ve směru osy z. V tom případě bude $\vec{s} = \left(0,0,1\right)$. Protože

$$\vec{s}.\vec{E}_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_{0z} = 0\,,$$

$$\vec{s}.\vec{B}_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_{0z} = 0\ .$$

Bude-li $\vec{E}_0 \parallel x \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B}_0 \parallel y$ (obr. M1).



Obr. M1. Ortogonalita polí $\vec{E}$ a $\vec{B}$ v rovinné harmonické vlně.

Energie a moment

Jednou z nejdůležitějších vlastností elektromagnetických vln je, že přenášejí energii. Existuje-li v určité části prostoru elektromagnetické pole, je přirozené uvažovat o zářivé energii připadající na jednotku objemu, tj. o ***objemové hustotě energie*** u . Pro samotné elektrické pole bude hustota energie (například mezi deskami kondenzátoru)

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \ . \tag{8a}$$

Podobně pro magnetické pole (například toroidu) bude

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{8b}$$

Protože ale vztah $E = cB$ (7) odvozený pro rovinnou harmonickou vlnu platí zcela obecně, je zřejmé že

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{c^2} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

a tedy

$$u_E = u_B \ . \tag{9}$$

Energie proudící prostorem ve formě elektromagnetické vlny je sdílena mezi elektrickou a magnetickou složkou pole. Proto celková hustota energie (okamžitá hodnota) pole bude

$$u = u_E + u_B = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 \ . \tag{10}$$

Abychom mohli vyjádřit tok elektromagnetické energie, nechť S představuje energii přenesenou za jednotku času (tedy výkon) přes jednotkovou plochu (v SI soustavě bude taková veličina vyjádřena v jednotkách $\mathrm{Wm^{-2}}$). Elektromagnetická vlna se šíří rychlostí c přes plochu o obsahu A. Během časového intervalu Δt projde touto plochou energie obsažená ve válcovém objemu $(c.\Delta t.A)$, tedy

$$S = \frac{u.(c.\Delta t.A)}{\Delta t.A} = u.c = \varepsilon_0 c E^2 = \varepsilon_0 c^2 EB = \frac{1}{\mu_0} EB \tag{11}$$

V izotropních prostředích energie teče ve směru šíření vlny, a proto můžeme zavést vektor hustoty toku energie (***Poyntingův vektor***)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = c^2 \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \tag{12}$$

Veličina $\left|\vec{S}\right|$ udává výkon na jednotku plochy, jejíž normála je $\parallel \vec{S}$.

Pro rovinnou harmonickou lineárně polarizovanou vlnu šířící se prostorem ve směru $\vec{k}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)$$

bude

$$\vec{S} = c^2 \varepsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right) = c^2 \varepsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \frac{1 + \cos 2\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)}{2} \ .$$

Vidíme, že $\vec{S}$ je rychle se měnící funkcí času. Avšak frekvence optických vln jsou velmi vysoké (řádově 10^{14} Hz). Okamžitá hodnota $\vec{S}$ se mění s dvojnásobnou frekvencí a je v praxi neměřitelná (žádný detektor není dostatečně rychlý, aby mohl sledovat změny $\vec{S}$). Proto se zavádí ***časová střední hodnota*** velikosti Poyntingova vektoru – tzv. ***zářivost*** (irradiance).

Protože $$\left\langle \cos^2\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)\right\rangle = \left\langle \frac{1+\cos 2\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)}{2}\right\rangle = \frac{1}{2}$$ [1]

dostáváme pro zářivost výraz

$$\boxed{I \equiv \langle S\rangle = \frac{1}{2}c^2\varepsilon_0\left|\vec{E}_0\times\vec{B}_0\right| = \frac{c\varepsilon_0}{2}E_0^2 = \frac{c}{2\mu_0}B_0^2} \quad . \tag{13}$$

Toto je důležitý výsledek, který nám říká, že ***zářivost (intenzita) je úměrná čtverci amplitudy*** elektromagnetické vlny, $\boxed{I \equiv \langle S\rangle \sim E_0^2\,;\; I \equiv \langle S\rangle \sim B_0^2\,.}$

Sférická vlna přestavuje takové řešení vlnové rovnice, kdy se amplituda vlny mění úměrně $1/r$. Zkoumejme nyní, jak to je z hlediska zákona zachování energie. Uvažujme izotropní bodový zdroj záření ve vakuu rovnoměrně ve všech směrech (tedy zdroj generující sférické vlny). Obklopme takový zdroj dvěma koncentrickými kulovými plochami o poloměrech r_1 a r_2. Nechť $E_0(r_1)$ a $E_0(r_2)$ jsou amplitudy těchto vln na první respektive druhé kulové ploše. Má-li být zachována energie, musí být celkové toky energie těmito plochami za jednotku času stejné, tedy

$$\frac{1}{2}c^2\varepsilon_0 E_0^2(r_1)4\pi r_1^2 = \frac{1}{2}c^2\varepsilon_0 E_0^2(r_2)4\pi r_2^2$$

$$E_0(r_1).r_1 = E_0(r_2).r_2$$

čili $$E_0(r).r = konst.$$

Amplituda tedy musí klesat jako $1/r$ a zářivost (úměrná kvadrátu amplitudy) jako $1/r^2$.

Již v roce 1619 Johannes Kepler navrhl vysvětlení, proč ocas komety míří od Slunce, jako důsledek tlaku slunečního záření. To sloužilo jako jeden z podpůrných argumentů korpuskulární teorie světla. Avšak Maxwell v roce 1873 teoreticky ukázal, že radiační tlak je roven energii v jednotce objemu (hustotě energie) elektromagnetické vlny

$$\mathcal{P} = u = u_E + u_B = \frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2 + \frac{1}{2\mu_0}B_0^2 \; .$$

Nebo jinak s užitím vztahu $S = uc$

[1] Středování přes čas $t \gg \tau$ (perioda vlny)

$\langle f\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$, u stacionární veličiny časová střední hodnota nezávisí na volbě počátku časové škály

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{S}{c}\ .} \tag{14}$$

Toto je okamžitý tlak působící na dokonale absorbující povrch kolmý k dopadajícímu záření. Protože se pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$ rychle mění s časem, praktický význam má střední tlak záření (radiační tlak)

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{I}{c}\ . \tag{15}$$

Označíme-li p hybnost, potom změna hybnosti je rovna impulsu síly, tedy

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = A\mathcal{P} \tag{16}$$

kde A je obsah povrchu, na který záření dopadá. Označíme-li p_V objemovou hustotu hybnosti záření, potom $\Delta p = p_V\left(c.\Delta t.A\right)$ a tedy

$$A\mathcal{P} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_V\left(c.\Delta t.A\right)}{\Delta t} = A\frac{S}{c}\ . \tag{17}$$

Odtud potom získáme výraz pro objemovou hustotu elektromagnetické hybnosti

$$p_V = \frac{S}{c^2}\ . \tag{18}$$

V případě dokonale odrážejícího povrchu, dochází při kolmém dopadu ke změně rychlosti z $+c$ (dopadající vlna) na $-c$ (odražená vlna). To odpovídá dvojnásobné změně hybnosti oproti dokonale pohlcujícímu povrchu, tedy

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{2\langle S \rangle}{c}\ . \tag{19}$$