Teplotní záření a Planckův vyzařovací zákon

Intenzita vyzařování (***emisivita***) M_e v daném místě na povrchu zdroje je definována jako podíl zářivého toku $d\Phi_e$, který vychází z elementární plošky dS na povrchu zdroje v tomto místě, a plošky dS

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dS} \qquad \left[\mathrm{W.m^{-2}}\right] \tag{1}$$

Monochromatické vyzařování (spektrální hustota vyzařování, spektrální emisivita) v elementárním oboru vlnových délek ($\lambda, \lambda+\Delta\lambda$) se rovná podílu části dM_e emisivity, která připadá na vlnové délky záření v tomto oboru, a šířky oboru $d\lambda$:

$$M_\lambda = \frac{dM_e}{d\lambda} \tag{2}$$

Známe-li u vyšetřovaného zdroje závislost spektrální emisivity M_λ na vlnové délce, určíme emisivitu M_e ze vztahu

$$M_e = \int_0^\infty M_\lambda d\lambda \tag{3}$$

Těleso záření nejen vysílá, ale také může pohlcovat (absorbovat) záření, které na něj dopadá. Každá látka záření částečně odráží, částečně propouští a zbytek pohlcuje. Toto pohlcené záření se mění v tělese hlavně v tepelnou energii, někdy může dojít k vyzáření pohlcené energie, jako (luminiscence).

Při vyzařování těleso ztrácí energii, proto musíme zářícímu tělesu energii dodávat. Nejjednodušším způsobem dodání energie je zahřívání. Jestliže soustavně nahrazujeme vyzařovanou energii energií tepelnou, záření tělesa se s časem nemění – toto ***tepelné záření*** má rovnovážný charakter. Základní veličinou charakterizující rovnovážné tepelné záření tělesa je teplota.

Kirchhoffův zákon – poměr intenzity vyzařování M_e (emisivity) k absorptanci (pohltivosti) α závisí pouze na absolutní teplotě tělesa. Pro úhrnné záření ho lze vyjádřit vztahem

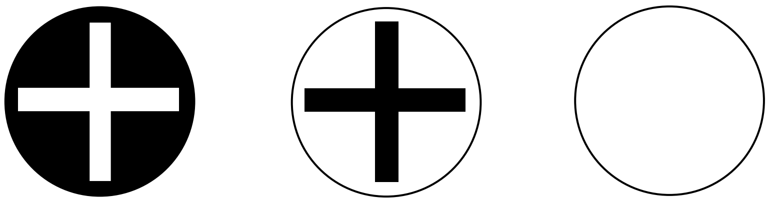
$$\frac{M_e}{\alpha} = f(T), \tag{4}$$

který říká, že tento podíl je funkcí jediné proměnné T a je tudíž ***nezávislý*** na vlastnostech tělesa (chemické složení, povrchová úprava apod.).

Tento zákon platí i pro každou vlnovou délku zvlášť, tedy i pro monochromatické vyzařování M_λ a monochromatickou absorptanci α, s tím rozdílem, že podíl M_λ/α závisí též na vlnové délce λ vybrané z celkového záření. ***Kirchhoffův zákon pro monochromatické záření*** má proto tvar

$$\frac{M_\lambda}{\alpha_\lambda} = F(T,\lambda), \tag{5}$$

kde F značí funkci dvou proměnných T a λ a kde M_λ a α_λ jsou spektrální emisivita a spektrální absorptance pro záření vlnové délky λ. Kirchhoffův zákon vyjadřuje velmi důležitou skutečnost, že ***každá látka pohlcuje nejsilněji záření těch vlnových délek, které nejsilněji vyzařuje***.



(a) (b) (c)

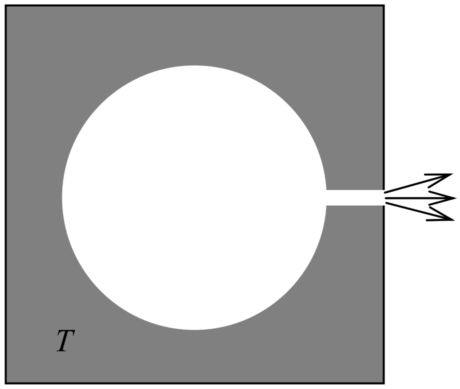
Obr. 1. Demonstrace vztahu mezi emisivitou a pohltivostí. Bílá keramická deska s černým křížem uprostřed (a) v temné místnosti zahřátá na 1000°C – více emituje začerněná část, (b) vychladlá deska za pokojové teploty, (c) zahřátá deska na světle.

Zavedeme si pojem ***absolutně*** (dokonale) ***černého tělesa***, které (z definice) pohlcuje veškeré záření dopadající na jeho povrch nezávisle na vlnové délce a pro které je tudíž absorptance $\alpha \equiv \alpha_0 = 1$ a spektrální absorptance $\alpha_\lambda \equiv \alpha_{0\lambda} = 1$ (pro všechna λ)

Jako absolutně černé těleso se chová otvor dutiny s černě zabarvenými matnými stěnami. Záření vstupující do dutiny se opakovanými odrazy prakticky úplně pohlcuje a záření vystupující z otvoru má potom vlastnosti rovnovážného záření vysílaného absolutně černým tělesem s teplotou rovnající se teplotě stěn dutiny.

Běžně pozorujeme takový jev u otevřených oken, díváme-li se na ně z ulice. Je-li velikost okna malá proti rozměrům místnosti, pak se opakovaným odrazem i na dosti dobře odrážejících stěnách místnosti z velké části pohltí zářivý tok vstupující do místnosti. Z okna vystupuje jen malá část vstupujícího toku záření, takže okno se nám zvenčí jeví jako tmavá až černá plocha bez ohledu na barvu stěn místnosti.

Mají-li stěny dutiny teplotu T, září vzhledem ke Kirchhoffově zákonu otvor dutiny s největší intenzitou, jaká je při teplotě T možná ($\alpha \to 1$) a záření vystupující otvorem z dutiny je proto prakticky stejné jako záření absolutně černého tělesa.



Obr. 2. Realizace absolutně černého tělesa (otvor dutiny zahřáté na teplotu *T*).

Označíme-li M_0 emisivitu absolutně černého tělesa, dostáváme Kirchhoffův zákon ve tvaru

$$M_0 = f(T) \tag{6}$$

(neboť z definice $\alpha_0 = \alpha_{0\lambda} = 1$) tj. emisivita absolutně černého tělesa závisí pouze na jeho absolutní teplotě. Pro monochromatické záření absolutně černého tělesa má Kirchhoffův zákon tvar

$$M_{0\lambda} = F(T, \lambda) \tag{7}$$

Určení neznámých funkcí $f(T)$ a $F(T, \lambda)$ bylo předmětem intenzivního experimentálního a teoretického bádání v druhé polovině 19. století.

Stefan-Boltzmannův zákon (pro emisivitu absolutně černého tělesa)

$$M_0 = \sigma T^4, \tag{8}$$

kde $\sigma = 5{,}669.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$ je tzv. Stefan-Boltzmannova konstanta. Teoreticky ho odvodil Boltzmann a experimentálně potvrdil Stefan.

Stefan-Boltzmannův zákon neřeší problém záření černého tělesa úplně. K tomu je třeba ještě určit neznámou funkci $F(T, \lambda)$, která říká, že spektrální emisivita černého tělesa je funkcí dvou proměnných: absolutní teploty T a vlnové délky λ. Na základě termodynamických úvah se podařilo Wienovi zjistit, že hledaná funkce má tvar

$$M_{0\lambda} = \frac{1}{\lambda^5}\varphi(\lambda T), \tag{9}$$

kde φ je funkce pouze jediné proměnné – součinu λT. I tento neúplný výsledek vedl k řešení otázky, kterou vlnovou délku vyzařuje černé těleso při dané teplotě nejsilněji, tj. které vlnové délce ve spojitém spektru černého tělesa přísluší nejvyšší spektrální emisivita. To je dáno podmínkou

$$\frac{\partial M_{0\lambda}}{\partial \lambda} = 0\,, \tag{10}$$

která vede na rovnici

$$-\frac{5}{\lambda^6}\varphi(\lambda T) + \frac{1}{\lambda^5}\varphi'(\lambda T).T = 0\ . \tag{11}$$

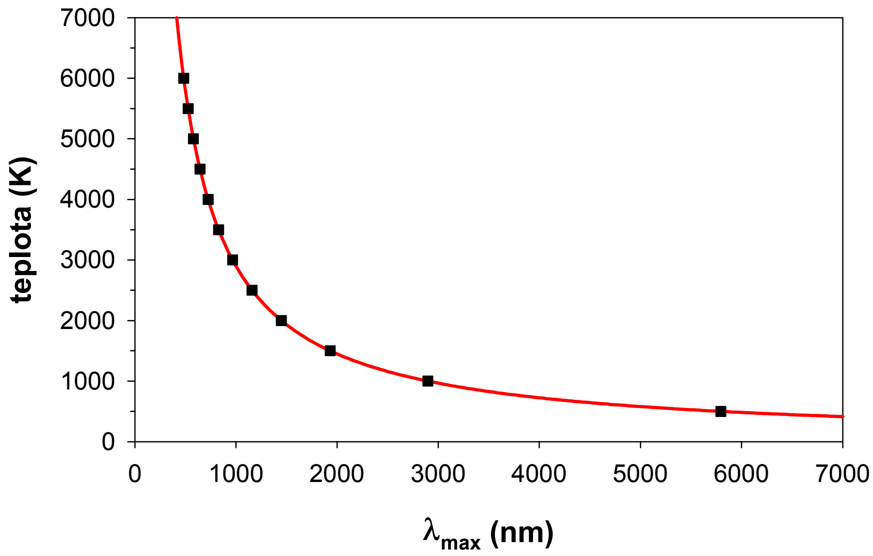
Po úpravě dostáváme

$$\lambda T.\varphi'(\lambda T) - 5\varphi(\lambda T) = 0\ , \tag{12}$$

kde φ' značí derivaci funkce φ podle λ. I když neznáme funkci φ, můžeme určit vlnovou délku λ_{max}, které přísluší maximální spektrální emisivita, předpokládáme-li, že známe alespoň jeden reálný kořen poslední rovnice pro součin λT. Označíme-li tento kořen b, bude

$$\lambda_{\max} T = b\ \ , \tag{13}$$

kde b = 2,898.10^{-3} $m.K$ (tato hodnota konstanty b vychází výpočtem z Planckova zákona – viz níže). Odvozená rovnice vyjadřuje tzv. ***Wienův posunovací zákon***, neboť z ní plyne, že maximum spektrální emisivity se s rostoucí absolutní teplotou posouvá ke kratším vlnovým délkám. Tento zákon je v souladu se známou zkušeností, že tělesa vyzařují při zvyšování teploty nejprve jen dlouhovlnné tepelné záření, které přechází asi při 525°C do tmavorudé barvy. Se stoupající teplotou přechází barva žhavého tělesa od červené ke žluté, která se stává stále bělejší, až se barva světla při několika tisících stupňů jen málo liší od barvy bílého „slunečního“ světla, v jehož spektru je nejsilněji zastoupena žlutozelená barva s délkou vlny $\lambda_{max} \approx 0{,}5$ µm.



Obr. 3. Wienův posunovací zákon.

teplota (K)	zdroj	λ_{max}	oblast spektra
310	člověk	9,3 μm	střední IČ
500	vařič	5,8 μm	střední IČ
2000	vlákno žárovky	1,45 μm	blízká IČ
5300	Slunce	550 nm	zelenožlutá

Tab. 1. Tabulka ilustrující Wienův posunovací zákon.

Wien se rovněž pokoušel odvodit tvar funkce $\varphi(\lambda T)$. Vycházeje z klasické statistiky odvodil závislost zvanou ***Wienův zákon***

$$\varphi(\lambda T) = c_1 e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \quad , \qquad \text{kde } c_1 \text{ a } c_2 \text{ jsou konstanty.} \tag{14}$$

Tato závislost je ve shodě s experimentálně určeným rozložením energie ve spektru pokud součin λT nabývá malých hodnot, tedy jen pro kratší vlnové délky, tj. pro viditelný a ultrafialový obor spektra vyzařovaný černým tělesem při dostatečně nízkých teplotách.
V dlouhovlnné části spektra se průběh monochromatického vyzařování absolutně černého tělesa podařilo uspokojivě vyjádřit funkcí

$$\varphi(\lambda T) = c_3 \lambda T \qquad \text{(kde } c_3 \text{ je konstanta),} \tag{15}$$

kterou teoreticky odvodili Rayleigh a Jeans (tzv. ***Rayleigh-Jeansův zákon***). Tato závislost ale vede k tzv. ultrafialové katastrofě, neboť se snižující se vlnovou délkou vede k neomezenému nárůstu intenzity vyzařování, neboť

$$M_{0\lambda} = \frac{c_3 T}{\lambda^4} \, . \tag{16}$$

Problém vyřešil Planck, který ukázal, že Wienův i Rayleigh-Jeansův zákon jdou spojit do jediné formule přijmeme-li pro funkci $\varphi(\lambda T)$ tvar (***Planckův zákon***)

$$\varphi(\lambda T) = \frac{c_1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \, . \tag{17}$$

Pro malé hodnoty součinu λT bude

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} \gg 1 \; ,$$

a proto můžeme jedničku ve jmenovateli zanedbat, čímž dojdeme k výrazu pro Wienův zákon. Naopak pro velké hodnoty součinu λT se můžeme v rozvoji omezit jen na první dva členy

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} \approx 1 + \frac{c_2}{\lambda T}$$

a tedy

$$\varphi(\lambda T)=\frac{c_1}{1+\frac{c_2}{\lambda T}-1}=\frac{c_1}{c_2}\lambda T$$

Stačí položit $c_3 = c_1/c_2$, abychom došli k Rayleigh-Jeansovu zákonu. Tak dospěl Planck k výrazu, který dobře vyhovoval v celém oboru vlnových délek a pro všechny teploty. Avšak bylo velmi obtížné zdůvodnit ho teoreticky.

Model – kmitající harmonické oscilátory různých frekvencí – každý oscilátor září a naopak každý může absorbovat dopadající záření (zvláště záření jehož frekvence je v rezonanci s vlastní frekvencí oscilátoru) – takový oscilátor má dva platné stupně volnosti určené potenciální a kinetickou energií – podle ekvipartičního teorému na každý připadá střední energie $\frac{1}{2}kT$, takže střední hodnota energie všech oscilátorů by podle klasické statistiky měla být $\langle w\rangle = kT$.

Tento výsledek však vede k Rayleigh-Jeansovu zákonu, který nevyhovuje v celém oboru teplot a pro všechny vlnové délky.

Planck vyslovil hypotézu, že ***emise a absorpce zářivé energie se může dít pouze po celistvých násobcích „kvanta“***, $\varepsilon_0 = h\nu$, kde ν je vlastní frekvence oscilátoru a h je tzv. účinkové kvantum (***Planckova konstanta***), $h = 6{,}626.10^{-34}$ Js.

Neplatí tedy klasický předpoklad, že střední energie všech zářičů jsou stejné a rovné součinu kT.

Ve skutečnosti střední energie zářičů závisí na jejich frekvenci podle vztahu $\langle w\rangle = \dfrac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$, který plyne Planckovy kvantové hypotézy (odvození viz níže). Položíme-li $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, kde c je rychlost světla ve vakuu, dostáváme pro konstanty c_1 a c_2 v Planckově zákoně vztahy

$$c_1 = 2\pi hc^2 \qquad\qquad c_2 = \frac{hc}{k},$$

kde k je Boltzmannova konstanta ($k = 1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$).

Planckův zákon spektrálního rozdělení monochromatického vyzařování černého tělesa má tedy tvar

$$\boxed{M_{0\lambda}=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}.\frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1}} \qquad . \tag{18}$$

Zavedeme-li namísto spektrální emisivity M_λ spektrální emisivitu M_ν, kde

$$M_e = \int_0^\infty M_\nu d\nu \tag{19}$$

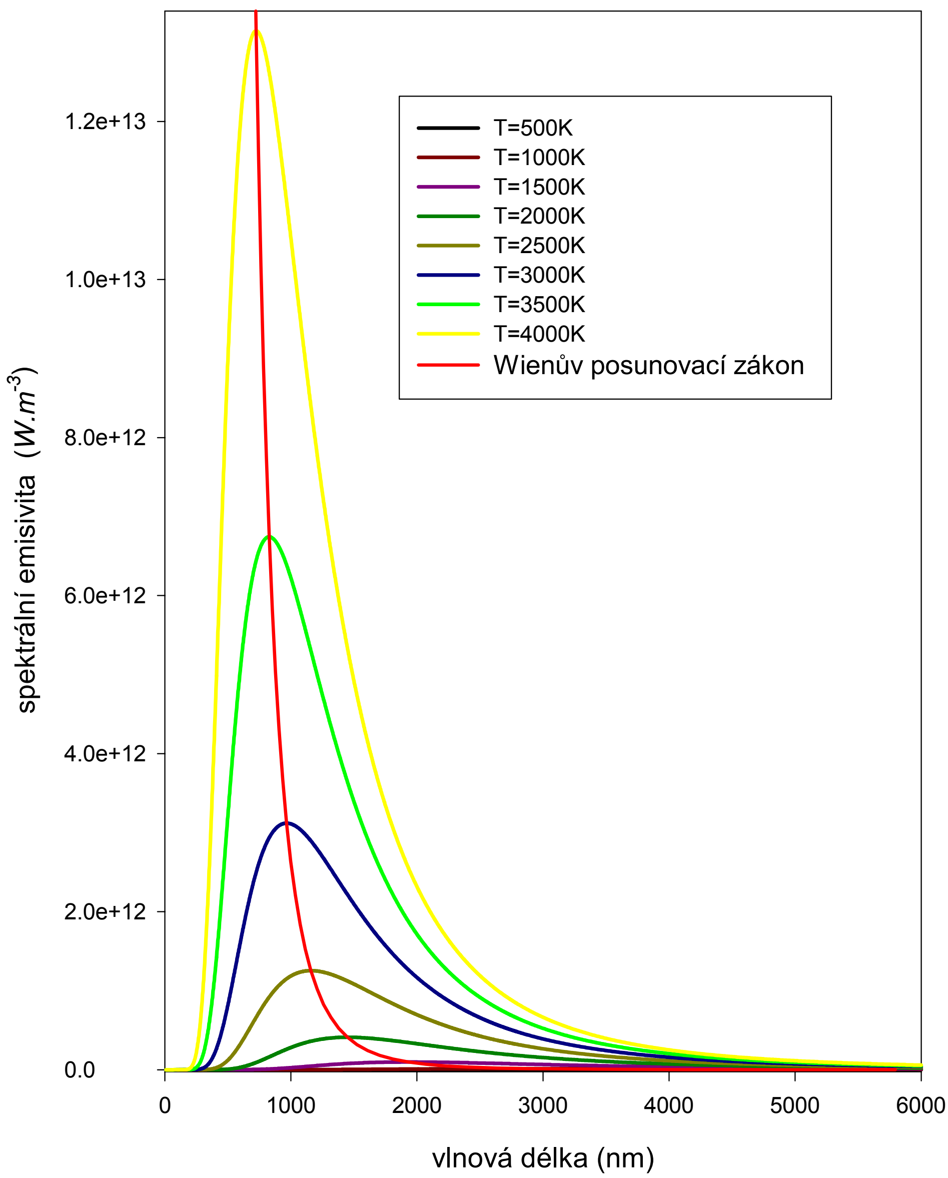
potom mezi M_λ a M_ν platí vztah

$$M_\nu = \frac{c}{\nu^2} M_\lambda \qquad \text{respektive} \qquad M_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} M_\nu \tag{20}$$

a Planckův zákon lze vyjádřit ve tvaru

$$M_{0\nu} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{21}$$

kde $\hbar = h/2\pi$.



Obr. 4. Planckův vyzařovací zákon

Odvození střední hodnoty energie pro kvantový systém:

$\varepsilon_0 = h\nu$ elementární kvantum energie,

$\varepsilon_n = n\varepsilon_0$, $n = 1, 2, \dots$,

$P_n = Ce^{-\frac{n\varepsilon_0}{kT}} = Ce^{-\frac{nh\nu}{kT}}$ pravděpodobnost obsazení n-té energetické hladiny.

Označme $x = \dfrac{\varepsilon_0}{kT}$, potom $P_n = Ce^{-nx}$

a konstanta C je určena normalizační podmínkou $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$,

$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = C\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{C} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$ (součet geometrické řady s kvocientem e^{-x})

a tedy $C = 1 - e^{-x}$.

Střední hodnotu energie lze potom vyjádřit jako $\langle w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n P_n = C\varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-\frac{n\varepsilon_0}{kT}}$.

Už víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$.

Derivací tohoto vztahu dostaneme $\dfrac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} -ne^{-nx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{1-e^{-x}}\right) = \dfrac{-e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}$,

a odtud $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = \dfrac{e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}$.

Dosazením potom dostáváme $\langle w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n P_n = C\varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = \dfrac{\varepsilon_0\left(1-e^{-x}\right).e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2} = \dfrac{\varepsilon_0}{e^{x}-1}$

Střední hodnota energie v Planckově modelu diskrétních energetických hladin je tedy dána

vztahem $\langle w \rangle = \dfrac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} = \dfrac{hc}{\lambda}\cdot\dfrac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1} \neq kT$

V případě, že $h\nu \ll kT$ (tj. pro $\varepsilon_0 \to 0$ – energetické kontinuum) lze exponencielu rozvinout v řadu a omezíme-li se pouze na první dva členy rozvoje ($e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \dfrac{h\nu}{kT}$)

dostaneme klasický výsledek, tj. $\langle w \rangle = kT$

Odvození Stefan-Boltzmannova zákona z Planckova zákona:

$$M_0 = \int_0^\infty M_{0\lambda} d\lambda = 2\pi hc^2 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1 \right)} d\lambda = 2\pi hc^2 \left(\frac{kT}{hc} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} T^4$$

neboť $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ a použili jsme substituci $x = \frac{hc}{k\lambda T}$.

Odtud získáme vyjádření pro Stefan-Boltzmannovu konstantu

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5{,}67032.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$$

Na počátku 20. století byly konstanty σ, k, c známy, proto s užitím tohoto vztahu byla získána první hodnota Planckovy konstanty h.

Z Planckova zákona lze též odvodit Wienův posunovací zákon:

Podmínka $$\frac{\partial M_{0\lambda}}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} \right) = 0$$

vede na rovnici $\frac{xe^x}{e^x - 1} = 5$, kde $x = \frac{hc}{k\lambda_{\max} T}$.

Řešení této rovnice, které lze nalézt numericky nebo graficky, dává kořen $x = 4{,}965$

a tedy $$T.\lambda_{\max} = \frac{hc}{4{,}965.k} = 2{,}89779.10^{-3} m.K$$

Závěrečné poznámky:

pro malá ν taková, že $h\nu \ll kT$

- $\Rightarrow$ kvantování nehraje roli, protože počet energetických hladin (energií) ležících v intervalu řádu kT je velmi velký,
- $\Rightarrow$ sumace je dobře aproximovatelná integrací přes energetické kontinuum,
- $\Rightarrow$ platí klasická Rayleigh-Jeansova formule.

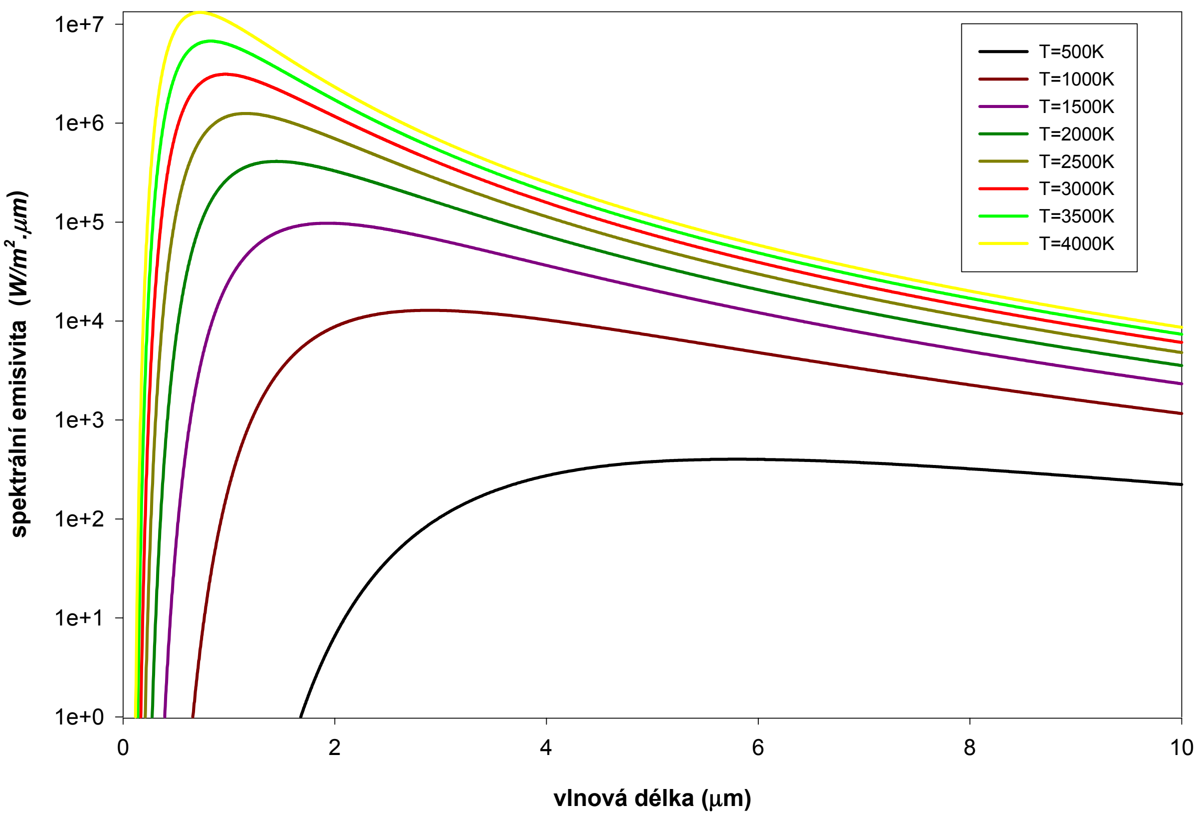
naopak pro taková ν, pro něž je $h\nu \approx kT$

⇒ konečná vzdálenost mezi energetickými hladinami je klíčová; je-li např. $h\nu = 5kT$, potom Boltzmannův faktor $e^{-\frac{h\nu}{kT}} = e^{-5} \approx \frac{1}{150}$,

⇒ nejpravděpodobnější je obsazení nejnižší energetické hladiny a pravděpodobnost termální excitace je minimální,

⇒ s rostoucím ν klesá pravděpodobnost obsazení $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ a tak je vyřešena ultrafialová katastrofa.

Obecně jsou kvantové efekty zanedbatelné, je-li $h\nu \ll kT$, kde ν je charakteristická frekvence a $h\nu$ charakteristická energie systému. Při $h\nu \approx kT$ se kvantové efekty projevují a nelze je zanedbat.



Obr. 5. Planckův vyzařovací zákon (semilogaritmický graf)

Pyrometrie

- praktické využití zákonů platících pro tepelné záření vysílané z povrchu měřeného tělesa
- způsob bezkontaktního určování teploty ohřátých objektů založený na měření optického záření jimi vyzařovaného. Používá se pro měření teplot v rozsahu 10^3 až 10^4 K.
- příslušný přístroj – ***pyrometr*** (radiační teploměr)