Polarizace

Předpokládejme šíření rovinné harmonické vlny v kladném směru osy z.

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y \tag{1}$$

kde $\vec{i}, \vec{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru osy x respektive y a

$$E_x = E_{0x}\cos\left(\omega t - kz + \varphi_x\right) \tag{2}$$

$$E_y = E_{0y}\cos\left(\omega t - kz + \varphi_y\right) \tag{3}$$

Zvolíme pevné z a sledujme dráhu, kterou opisuje s postupujícím časem koncový bod vektoru $\vec{E}$ v rovině $z = konst.$

Upravíme vztahy (2) a (3)

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos\left(\omega t - kz + \varphi_x\right) = \cos\left(\omega t - kz\right)\cos\varphi_x - \sin\left(\omega t - kz\right)\sin\varphi_x \tag{4}$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos\left(\omega t - kz + \varphi_y\right) = \cos\left(\omega t - kz\right)\cos\varphi_y - \sin\left(\omega t - kz\right)\sin\varphi_y \tag{5}$$

Vztahy (4) a (5) vynásobíme $\sin\varphi_y$ respektive $-\sin\varphi_x$ a sečteme je

$$\frac{E_x}{E_{0x}}\sin\varphi_y - \frac{E_y}{E_{0y}}\sin\varphi_x = -\cos\left(\omega t - kz\right)\sin\left(\varphi_x - \varphi_y\right) \tag{6}$$

a ještě je vynásobíme $\cos\varphi_y$ respektive $-\cos\varphi_x$ a sečteme

$$\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\varphi_y - \frac{E_y}{E_{0y}}\cos\varphi_x = -\sin\left(\omega t - kz\right)\sin\left(\varphi_x - \varphi_y\right) \tag{7}$$

Rovnice (6) a (7) umocníme a sečteme

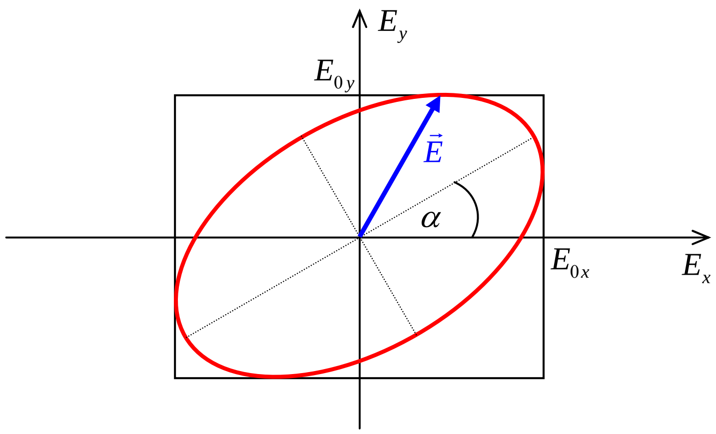
$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos\left(\varphi_x - \varphi_y\right) + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \sin^2\left(\varphi_x - \varphi_y\right) \tag{8}$$

Rovnice (8) je rovnicí elipsy s ***azimutem*** α daným vztahem

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\left(\varphi_x - \varphi_y\right)}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \tag{9}$$

V obecném případě je tedy rovinná harmonická vlna (1) ***elipticky polarizovaná*** (obr. 1) – koncový bod vektoru $\vec{E}$ opisuje v rovině $z = konst.$ elipsu. Smysl otáčení z rovnice (8) nezjistíme, protože jsme při jejím odvozování vyloučili závislost na času.

Tvar elipsy závisí na E_{0x}, E_{0y} a $\left|\varphi_x - \varphi_y\right|$.



Obr. 1. Elipticky polarizované světlo.

1. případ $\varphi_x - \varphi_y = 0 \quad \Rightarrow$ x-ová a y-ová složka jsou tedy ve fázi

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\varphi_x - \varphi_y\right) = 1 \ , \ \sin\left(\varphi_x - \varphi_y\right) = 0$$

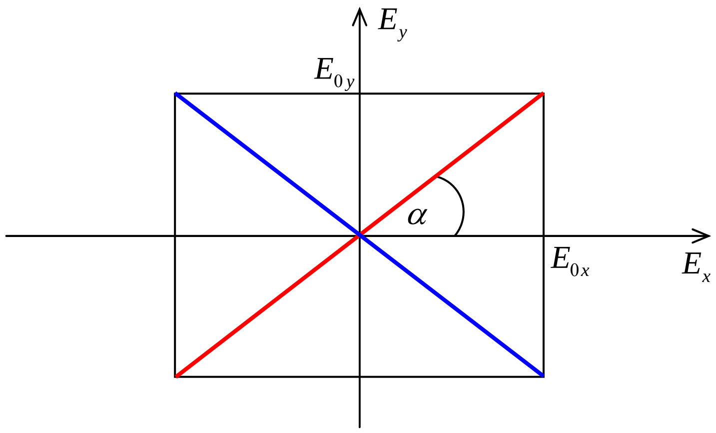
Rovnice (8) se v tomto případě redukuje na tvar

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}} + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_x}{E_{0x}} = \frac{E_y}{E_{0y}} \tag{10}$$

což je rovnice přímky. Světlo je v tomto případě ***lineárně polarizované*** s azimutem

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \tag{11}$$

tj. koncový bod vektoru $\vec{E}$ opisuje v rovině $z = konst.$ úsečku svírající s osou x úhel α (obr. 2).



Obr. 2. Lineárně polarizované světlo pro E_x, E_y ve fázi (červeně) a v protifázi (modře).

2. případ $\varphi_x - \varphi_y = \pi \quad \Rightarrow$ x-ová a y-ová složka jsou tedy v protifázi

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\varphi_x - \varphi_y\right) = -1 \ , \ \sin\left(\varphi_x - \varphi_y\right) = 0$$

Rovnice (8) se v tomto případě redukuje na tvar

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}} + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_x}{E_{0x}} = -\frac{E_y}{E_{0y}} \tag{12}$$

I v tomto případě je světlo ***lineárně polarizované*** (obr. 2).

3. případ $\left|\varphi_x - \varphi_y\right| = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$ x-ová a y-ová složka jsou fázově posunuty o $\pi/2$

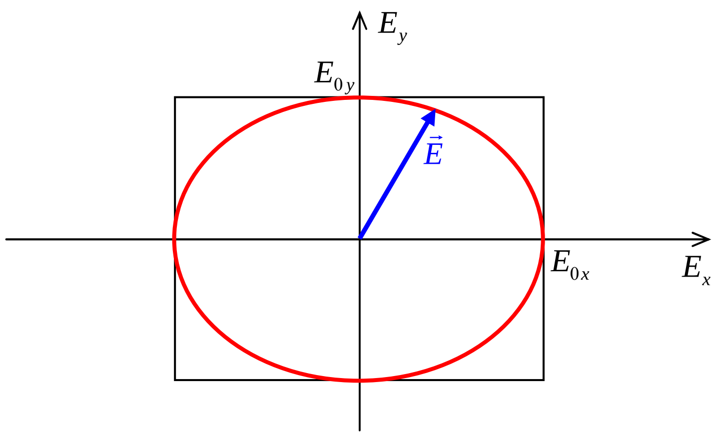
$$\Rightarrow \quad \cos\left(\varphi_x - \varphi_y\right) = 0 \ , \ \left|\sin\left(\varphi_x - \varphi_y\right)\right| = 1$$

Rovnice (8) se v tomto případě redukuje na tvar

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1 \tag{13}$$

což je rovnice elipsy s hlavní a vedlejší poloosou ležící ve směru souřadných os x a y.

Světlo je elipticky polarizované s azimutem 0 (s hlavní poloosou v ose x) nebo 90° (s hlavní poloosou v ose y)



Obr. 3. Elipticky polarizované světlo pro E_x, E_y fázově posunuty o $\pi/2$.

4. případ $\left|\varphi_x - \varphi_y\right| = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$ x-ová a y-ová složka jsou fázově posunuty o $\pi/2$

a navíc $E_{0x} = E_{0y} = E_0$

Rovnice (8) se v tomto případě redukuje na tvar

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \tag{14}$$

což je rovnice kružnice. Vektor $\vec{E}$ má v tomto případě konstantní amplitudu a rotuje v daném bodu prostoru s úhlovou frekvencí ω. Světlo je v tomto případě ***kruhově (cirkulárně) polarizované***

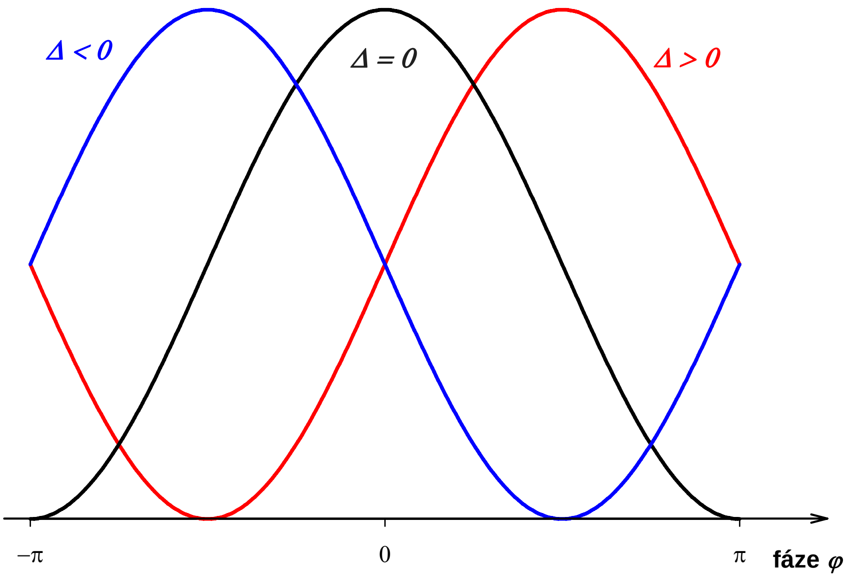
Abychom mohli rozhodnout o smyslu oběhu, definujme

$$\Delta = \varphi_x - \varphi_y \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_y = \varphi_x - \Delta$$

Označme $\varphi = \omega t - kz + \varphi_x$

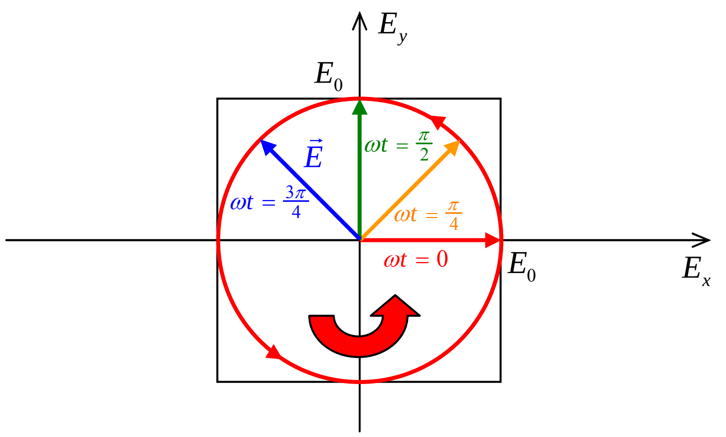
Potom $E_x = E_{0x} \cos\varphi$

$$E_y = E_{0y} \cos(\varphi - \Delta)$$

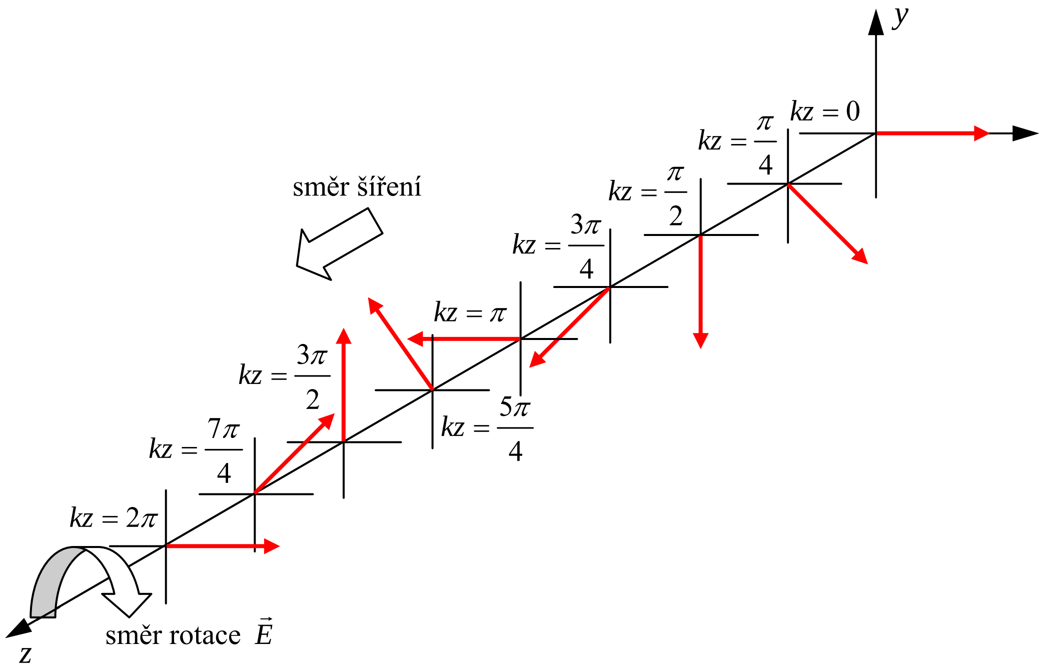


Obr. 4. Závislost $\cos(\varphi - \Delta)$ na φ pro $\Delta = -\pi/2$ (modrá křivka), $\Delta = 0$ (černá) a $\Delta = \pi/2$ (červená).

Je-li $\Delta > 0$, potom E_x předbíhá E_y (nebo E_y se zpožďuje za E_x) o Δ (obr. 4). Koncový bod $\vec{E}$ se otáčí proti směru hodinových ručiček (obr. 5). Takovou polarizaci označujeme za ***levotočivou***.

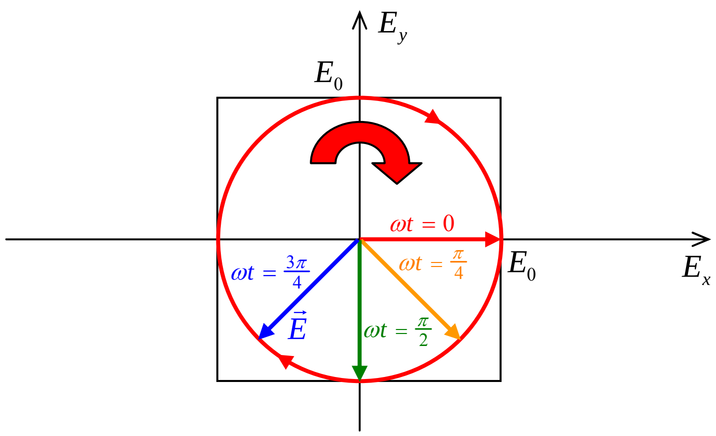


Obr. 5. Levotočivé kruhově polarizované světlo $(\Delta = \pi/2)$. Vektor $\vec{E}$ v daném bodě s rostoucím časem rotuje proti směru hodinových ručiček.



Obr. 6. Průběh vektoru $\vec{E}$ v daném čase t pro levotočivě kruhově polarizované světlo.

Je-li $\Delta < 0$, potom E_y předbíhá E_x o Δ (obr. 4). Koncový bod $\vec{E}$ se otáčí ve směru hodinových ručiček (obr. 7). Takovou polarizaci označujeme za ***pravotočivou***.



Obr. 7. Pravotočivé kruhově polarizované světlo $(\Delta = -\pi/2)$. Vektor $\vec{E}$ s rostoucím *t* rotuje ve směru hodinových ručiček.

V komplexní reprezentaci můžeme vlnu (1) vyjádřit takto

$$\tilde{\vec{E}} = \left(\tilde{\vec{E}}_x + \tilde{\vec{E}}_y\right) e^{i(\omega t - kz)} \tag{15}$$

kde $\tilde{\vec{E}}_x$ a $\tilde{\vec{E}}_y$ jsou komplexní amplitudy

$$\tilde{\vec{E}}_x = \vec{i} E_x e^{i\varphi_x}$$

$$\tilde{\vec{E}}_y = \vec{j} E_y e^{i\varphi_y}$$

Potom

$$\tilde{\vec{E}} = E_x e^{i\varphi_x} \left(\vec{i} + \vec{j} \frac{E_y}{E_x} e^{i(\varphi_y - \varphi_x)} \right) e^{i(\omega t - kz)} \tag{16}$$

což je komplexní reprezentace elipticky polarizované vlny šířící v kladném směru osy z.

Lineárně polarizovaná vlna bude mít tvar

$$\tilde{\vec{E}} = E_x e^{i\varphi_x} \left(\vec{i} \pm \vec{j} \frac{E_y}{E_x} \right) e^{i(\omega t - kz)} \tag{17}$$

a kruhově polarizovaná vlna bude mít tvar

$$\tilde{\vec{E}} = E_x e^{i\varphi_x} \left(\vec{i} \pm i.\vec{j} \right) e^{i(\omega t - kz)}$$

kde znaménko + platí pro pravotočivě kruhově polarizovanou vlnu a znaménko – pro levotočivě kruhově polarizovanou vlnu.

Komplexní amplitudu lze napsat i ve tvaru tzv. ***Jonesova vektoru***

$$\tilde{\vec{E}} = \begin{pmatrix} E_x e^{i\varphi_x} \\ E_y e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Od obecného tvaru Jonesova vektoru (18) lze přejít k normalizovanému tvaru s užitím normalizační podmínky

$$C^2 \tilde{\vec{E}} \tilde{\vec{E}}^* = 1 \tag{19}$$

V normalizovaném tvaru nabývají Jonesovy vektory pro základní polarizační stavy světelné vlny jednoduchého tvaru (tab. 1).

Z tabulky 1 je zřejmé, že existují ortogonální polarizační stavy (popsané vzájemně ortogonálními Jonesovými vektory – dva komplexní vektory $\tilde{\vec{A}}$ a $\tilde{\vec{B}}$ jsou ortogonální, pokud $\tilde{\vec{A}}.\tilde{\vec{B}}^* = 0$), takovou dvojici představuje např. horizontálně a vertikálně lineárně polarizované záření, nebo pravo- a levotočivě kruhově polarizované záření. Libovolný polarizační stav může být popsán pomocí lineární kombinace vektorů tvořících ortonormální soubor.

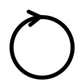
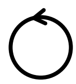
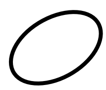
Například horizontálně lineárně polarizované záření lze získat jako součet pravo- a levotočivě kruhově polarizovaného záření stejné intenzity

$$\tilde{\vec{E}}_{rcp} + \tilde{\vec{E}}_{lcp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\vec{E}}_h$$

Vlastnosti polarizačních prvků můžeme popsat pomocí tzv. Jonesovy matice. V Jonesově počtu potom působení polarizačních prvků na světelnou vlnu odpovídá násobení matic. Jako příklad můžeme uvést působení lineárního polarizátoru propouštějícího horizontálně polarizované záření na pravotočivě kruhově polarizovanou vlnu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kde $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je Jonesova matice pro lineární horizontální polarizátor. Výsledkem tedy je horizontálně lineárně polarizovaná vlna.

polarizační stav	Jonesův vektor	Stokesův vektor	grafický symbol
lineární polarizace $\parallel x$ (horizontální)	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
lineární polarizace $\parallel y$ (vertikální)	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
lineární polarizace svírající $\measuredangle 45^o$ s osou x	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	
obecná lineární polarizace s azimutem α	$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \pm\sin\alpha \end{pmatrix}$		
pravotočivá kruhová polarizace (rcp)	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	
levotočivá kruhová polarizace (lcp)	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	
obecná eliptická polazizace	$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha . e^{-i\Delta} \end{pmatrix}$		

Tab. 1. Jonesovy a Stokesovy vektory pro některé polarizační stavy.

Jonesův vektor (a tedy i Jonesův počet) lze použít pouze pro popis plně polarizovaného záření. V praxi se však často setkáváme se zářením částečně polarizovaným či nepolarizovaným. V tomto případě se zavádí pro popis polarizačního stavu záření ***Stokesův vektor*** S definovaný takto

$$S = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \qquad (20)$$

kde

$$I \equiv \text{celková intenzita} = \left\langle E_{0x}^2 \right\rangle + \left\langle E_{0y}^2 \right\rangle \qquad (21a)$$

$$Q = I_0 - I_{90} = \left\langle E_{0x}^2 \right\rangle - \left\langle E_{0y}^2 \right\rangle \qquad (21b)$$

$$U = I_{45} - I_{-45} = \left\langle 2E_{0x}E_{0y}\cos\Delta \right\rangle \qquad (\text{kde } \Delta = \varphi_x - \varphi_y) \qquad (21c)$$

$$V = I_{rcp} - I_{lcp} = \left\langle 2E_{0x}E_{0y}\sin\Delta \right\rangle \qquad (21d)$$

Povšimněte si, že zatímco komponenty Jonesova vektoru jsou ***amplitudy*** intenzity elektrického pole světelné vlny, komponenty Stokesova vektoru odpovídají ***zářivostem*** (***kvadrátům amplitudy*** elektrického pole). Složky Q, U, V odpovídají vždy rozdílu v intenzitě mezi dvěma ortogonálními polarizačními stavy.

Pro ***úplně polarizované světlo*** platí

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \qquad (22)$$

pro ***částečně polarizované světlo***

$$0 < \left(Q^2 + U^2 + V^2\right) < I^2 \qquad (23)$$

a pro ***nepolarizované světlo***

$$Q = U = V = 0 \qquad (24)$$

a tedy Stokesův vektor pro nepolarizované světlo má tvar $S_{nepol} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Složky Stokesova vektoru lze změřit pomocí sady čtyř filtrů, z nichž první je izotropní, tj. propouští všechny polarizační komponenty stejně, druhý je horizontální lineární polarizátor, třetí lineární polarizátor s osou propustnosti 45° a čtvrtý je cirkulární polarizátor propouštějící pravotočivě kruhově polarizované záření. Stokesovy vektory pro některé polarizační stavy jsou rovněž uvedeny v tab. 1.

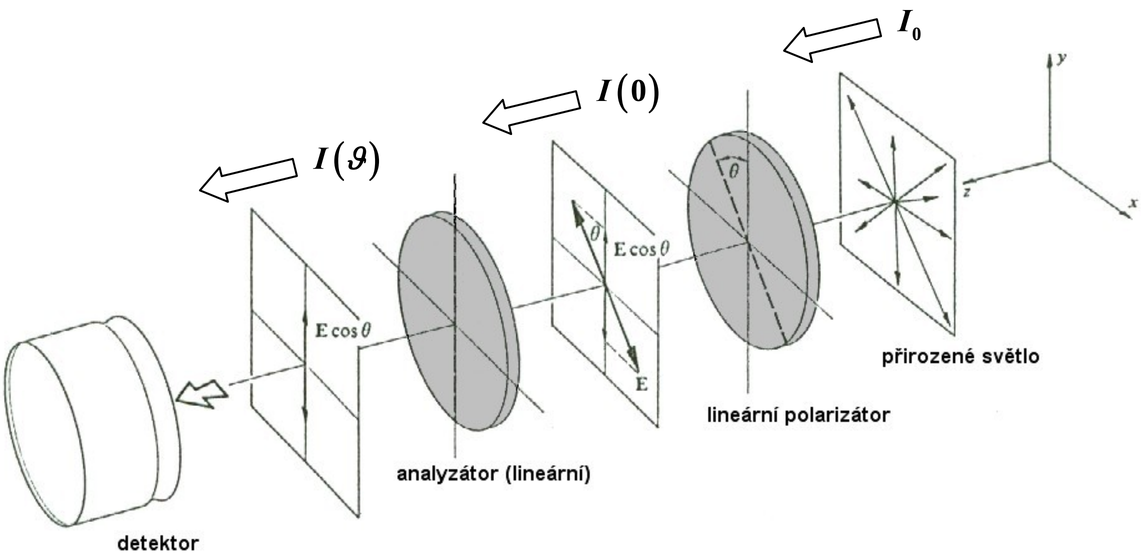
Pro charakterizaci částečně polarizovaného záření, které je vlastně směsí polarizovaného a nepolarizovaného záření se zavádí veličina ***stupeň polarizace*** P definovaná jako podíl intenzity polarizovaného záření I_{pol} k celkové intenzitě $I_{pol} + I_{nepol}$

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{pol} + I_{nepol}} \ . \tag{25}$$

Malusův zákon

Nechť přirozené (nepolarizované) světlo o zářivosti I_0 dopadá na lineární polarizátor, jehož transmisní osa svírá s vertikálním směrem úhel ϑ (obr. 8). Polarizátorem projde pouze lineárně polarizované světlo (elektrická komponenta světelné vlny kmitá v rovině definované směrem šíření a transmisní osou polarizátoru). Vložme do optické dráhy druhý lineární polarizátor (analyzátor) s vertikální transmisní osou. Označíme-li amplitudu světelné vlny prošlé prvním polarizátorem E_0, potom analyzátorem projde a na detektor dopadne pouze složka rovnoběžná s jeho transmisní osou, $E_0 \cos\vartheta$. Zářivost zaznamenaná detektorem potom bude

$$I(\vartheta) = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2\vartheta \ . \tag{26}$$



Obr. 8. Lineární polarizátor a analyzátor – Malusův zákon.

Zářivost v soustavě dvou lineárních polarizátorů na obr. 8 nabývá maxima v případě, že transmisní osy obou polarizátorů budou rovnoběžné, tedy pokud $\vartheta = 0^\circ$

$$I(0) = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2 = I_0 \ .$$

Vztah (26) potom můžeme přepsat do tvaru, který nazýváme ***Malusovým zákonem***

$$I(\vartheta) = I(0)\cos^2\vartheta \ . \tag{27}$$

V případě $\vartheta = 90^\circ$ (tzv. zkřížené polarizátory) bude $I(90^\circ) = 0$. Pomocí Malusova zákona a uspořádání na obr. 8 můžeme určit, zda daný optický prvek je či není lineárním polarizátorem.