

Einsteinovo odvození Planckova zákona

Představme si dutinu vyplněnou plynem při nějaké teplotě T . Bude-li teplota dostatečně nízká, většina atomů bude základním stavu, ale některé budou ve stavu vzbuzeném (excitovaném). Klasické Maxwell-Boltzmannovo rozdělení nám říká, v průměru kolik atomů v jednotce objemu bude ve stavu charakterizovaném energií E_i

$$N_i = N_0 e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad (1)$$

kde N_0 je konstanta. Protože nás zajímají atomů přechody mezi stavy s různou energií, uvažujme j -tý stav s energií $E_j > E_i$. Relativní obsazení obou stavů bude dáno výrazem

$$\frac{N_j}{N_i} = \frac{e^{-\frac{E_j}{kT}}}{e^{-\frac{E_i}{kT}}} \quad (2)$$

a tedy

$$N_j = N_i e^{-\frac{E_j - E_i}{kT}} = N_i e^{-\frac{h\nu_{ji}}{kT}}$$

kde přechod z j -tého (vyššího) do i -tého (nižšího) stavu je doprovázen emisí kvanta energie

$$h\nu_{ji} = E_j - E_i \quad (3)$$

V roce 1916 Einstein navrhl elegantní a poměrně jednoduché odvození pro dynamickou rovnováhu mezi absorbujícím a emitujícím prostředím ponořeným v elektromagnetickém záření. Tato analýza nejen že potvrdila platnost Planckova vyzařovacího zákona, ale navíc vytvořila teoretické základy, na nichž pracuje laser.

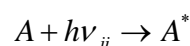
Přechody atomu při interakci s kvantem záření o vhodné energii:

absorpce (pohlcení) kvanta energie doprovázené přechodem do stavu s vyšší energií, $E_i \rightarrow E_j$

Označíme-li B_{ij} pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j za jednotku času, bude počet přechodů záviset také na hustotě energie záření $u_\nu = u(\nu_{ji})$, tedy

$$\left(\frac{dN_i}{dt} \right)_{abs} = -B_{ij} N_i u_\nu \quad \text{stimulovaná absorpce} \quad (4)$$

Schematicky lze proces (stimulované) absorpce znázornit takto:



kde jsme hvězdičkou označili atom ve vzbuzeném (excitovaném) stavu.

Označíme-li A_{ji} pravděpodobnost **spontánního** přechodu ze stavu j do stavu i za jednotku času, potom

$$\left(\frac{dN_j}{dt}\right)_{\text{spont}} = -A_{ji}N_j \quad \text{spontánní emise} \quad (5)$$

schematicky

$$A^* \rightarrow A + h\nu_{ji}$$

Kromě spontánní emise Einstein postuloval ještě existenci třetího procesu - *stimulované* (vynucené) *emise*

$$\left(\frac{dN_j}{dt}\right)_{\text{stimul}} = -B_{ji}N_j u_\nu \quad \text{stimulovaná emise} \quad (6)$$

schematicky

$$A^* + h\nu_{ji} \rightarrow A + 2h\nu_{ji}$$

Konstanty A_{ji} , B_{ji} , B_{ij} jsou tzv. **Einsteinovy koeficienty** spontánní emise, stimulované emise a absorpce.

Předpokládejme, že

1. atomy a pole záření jsou v termodynamické rovnováze při libovolné teplotě T
2. hustota energie má charakteristiky záření absolutně černého tělesa teploty T
3. obsazení stavů je ve shodě s Maxwell-Boltzmannovým rozdělením

V rovnováze musí být počet přechodů do vyššího stavu $i \rightarrow j$ (procesem stimulované absorpce) roven počtu přechodů do nižšího stavu $j \rightarrow i$ (procesy stimulované a spontánní emise), tedy

$$B_{ij}N_i u_\nu = B_{ji}N_j u_\nu + A_{ji}N_j \quad (7)$$

a odtud

$$\frac{N_j}{N_i} = \frac{B_{ij}u_\nu}{A_{ji} + B_{ji}u_\nu}$$

Dosazením z (2) a (3)

$$A_{ji} + B_{ji}u_\nu = B_{ij}u_\nu e^{\frac{h\nu_{ji}}{kT}}$$

V limitě vysoké teploty, $kT \gg h\nu_{ji} \Rightarrow \frac{h\nu_{ji}}{kT} \rightarrow 0$ a tedy $e^{\frac{h\nu_{ji}}{kT}} \approx 1$

S teplotou ale roste i u_ν v dutině, takže pro $T \rightarrow \infty$ bude A_{ji} zanedbatelné vůči $B_{ji}u_\nu$ a tedy v této limitě musí platit

$$B_{ji} = B_{ij}$$

Protože koeficienty jsou teplotně nezávislé, bude tato rovnost platit obecně. Potom

$$u_\nu = \frac{A_{ji}}{B_{ji}} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{ji}}{kT}} - 1}$$

což je tvar ekvivalentní Planckovu zákonu.

Jako poslední krok musíme srovnat spektrální hustotu záření u_ν v dutině se spektrální emisivitou $M_{0\nu}$

$$M_{0\nu} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \quad (7)$$

$M_{0\nu}$ odpovídá toku energie jednotkovou plochou (kolmou ke směru toku!). Víme, že energii S přenesenou za jednotku času (a tedy výkon) přes jednotkovou plochu lze vyjádřit jako

$$S = cu \text{ (viz vztah (11) v kapitole Maxwellovy rovnice).}$$

V dutině ovšem ne všechny fotony přispívající k u budou přispívat k emisivitě v daném směru. Bez odvození budeme postulovat vztah mezi spektrální hustotou energie u_ν a spektrální emisivitou $M_{0\nu}$

$$M_{0\nu} = \frac{c}{4} u_\nu \quad (8)$$

Potom bude

$$\frac{A_{ji}}{B_{ji}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad (9)$$

Podle tohoto vztahu se poměr pravděpodobnosti spontánní a stimulované emise mění s třetí mocninou frekvence záření.

Jaký je relativní počet aktů stimulované a spontánní emise za jednotku času?

$$R \equiv \frac{\text{počet stimulovaných emisí za sekundu}}{\text{počet spontánních emisí za sekundu}} = \frac{B_{ji}u_\nu}{A_{ji}} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

vlnová délka	vlnčet (cm^{-1})	frekvence (Hz)	R	
			T = 300 K	T = 1000 K
1 mm	10	$3,0 \cdot 10^{11}$	20,3	69,0
25 μm	400	$1,2 \cdot 10^{13}$	0,17	1,29
2,5 μm	4000	$1,2 \cdot 10^{14}$	$5 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-3}$
780 nm	12820	$3,84 \cdot 10^{14}$	$2 \cdot 10^{-27}$	$1 \cdot 10^{-8}$
500 nm	20000	$6,00 \cdot 10^{14}$	$2 \cdot 10^{-42}$	$3 \cdot 10^{-13}$
390 nm	25641	$7,69 \cdot 10^{14}$	$4 \cdot 10^{-54}$	$1 \cdot 10^{-16}$

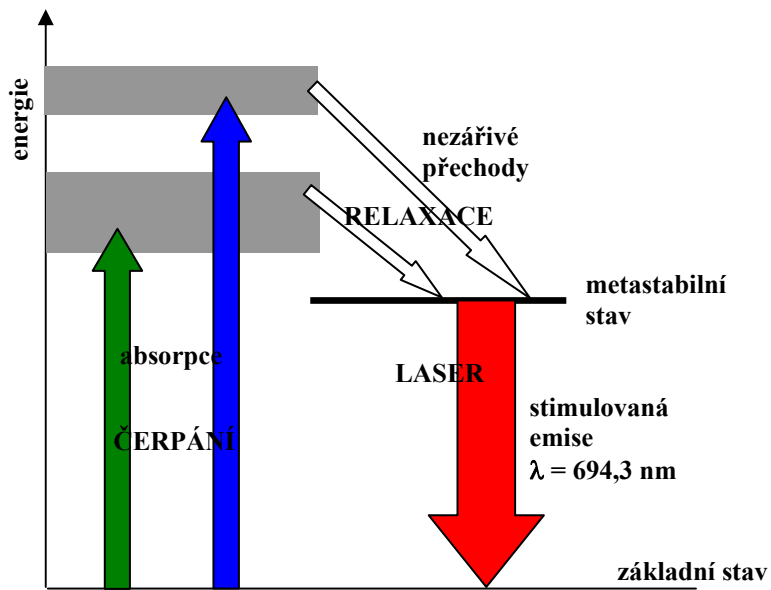
Tab. 1. Relativní počet aktů stimulované a spontánní emise pro různé obory vlnových délek.

Z tabulky je zřejmé, že za normálních podmínek v oboru viditelného záření dominují spontánní přechody. Klíčový rozdíl mezi stimulovanou a spontánní emisí tkví v tom, že stimulovaná emise vzrůstá s hustotou záření, zatímco spontánní ne. Vysokých hodnot spektrální hustoty energie u_ν lze dosáhnout v rezonanční dutině (rezonátor).

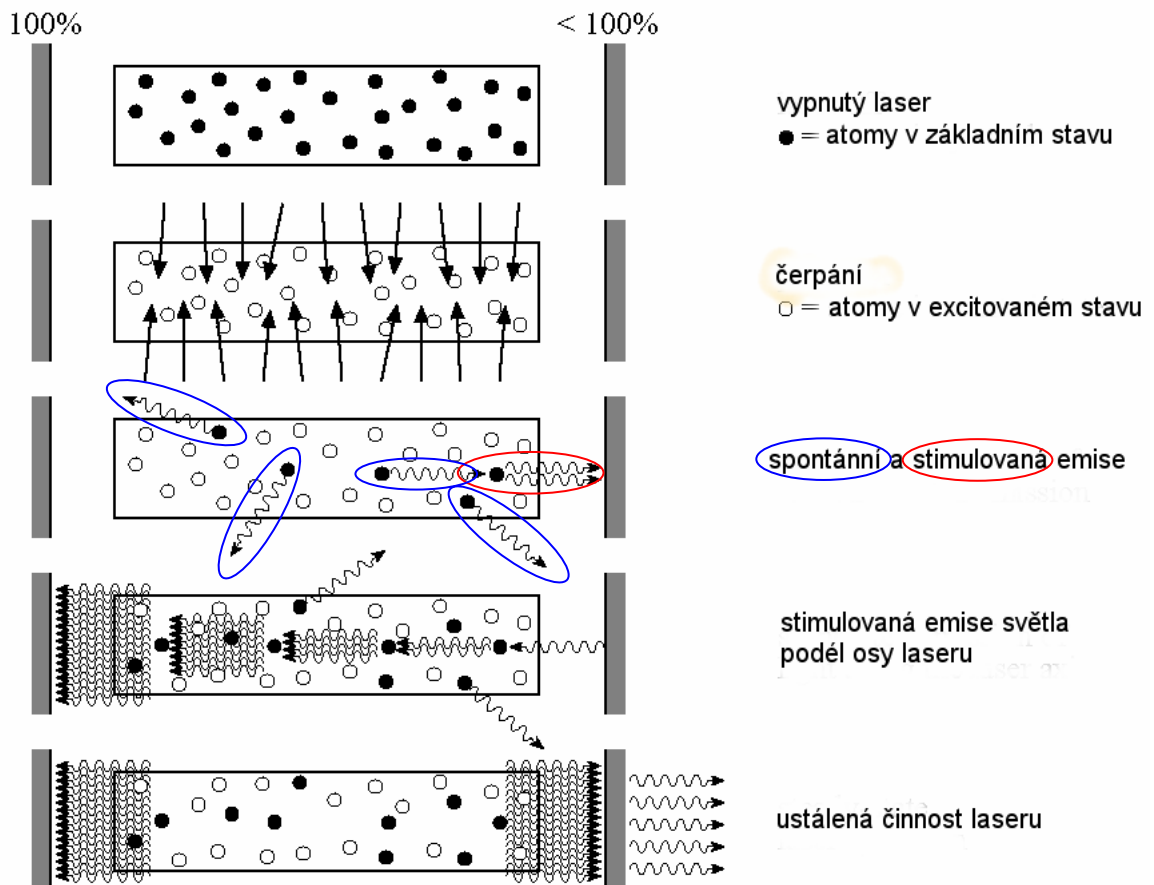
Einsteinovo odvození Planckova zákona ukazuje, že pro udržení termodynamické rovnováhy je nutný proces stimulované emise. Za normálních podmínek dominuje proces absorpce, protože na nižší energetické hladině je více atomů ($N_i > N_j$) \Rightarrow je více přechodů na vyšší hladinu a látka absorbuje záření. Předpokládejme ale, že $N_i < N_j$ ($E_j > E_i$), tedy že vyšší energetická hladina je více obsazena (populována) \Rightarrow při dopadu záření o frekvenci ν_{ji} převáží stimulovaná emise a počet fotonů o této energii při průchodu látkou vzrůstá **a tedy dopadající záření je zesilováno!** Stav kdy $N_i < N_j$ ($E_j > E_i$), který nazýváme **inverzní populace**, tedy vede k zesílení dopadajícího záření. Látku, ve které jsme dosáhli inverzní populace, nazýváme **aktivní prostředí**. Důležitým rysem stimulované emise je fakt, že emitovaný foton je shodný se stimulujícím fotonem, jsou tzv. fázově koherentní, tj. mají nejen stejnou energii, ale šíří se ve stejném směru a mají i shodnou polarizaci. Stimulující foton o vhodné energii může spustit lavinu stimulovaných fázově koherentních fotonů, za předpokladu neexistence dominantních kompetitivních procesů (např. rozptylu) a udržení populační inverze dodáváním energie tzv. čerpáním.

Důležitá poznámka: populační inverze nelze dosáhnout v jednoduchém dvouhladinovém systému, neboť čistý počet absorpcí za jednotku času bude $B_{12}u_\nu(N_1 - N_2)$, kde N_1 a N_2 označují obsazení nižší a vyšší energetické hladiny. S rostoucím N_2 totiž $N_1 - N_2 \rightarrow 0$ (neboť celkový počet atomů $N_1 + N_2$ je konstantní). Je-li $N_1 = N_2$, nedochází k další absorpci a látka se stává průhlednou; nastává tzv. saturace absorpce.

Prakticky to bylo realizováno nejprve pro mikrovlnné záření na přechodech v molekule amoniaku \Rightarrow **MASER** (**M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation) a v roce 1964 za to byla Basovovi, Prochorovovi a Townesovi udělena Nobelova cena za fyziku. První **LASER** (**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation) zkonstruovaný Maimanem byl rubínový – aktivním prostředím byl rubínový krystal (Al_2O_3 dopovaný cca 0,05% Cr_2O_3). Čela krystalu (navzájem paralelní a kolmá k ose tyčky) byla postříbřena (jedno pouze částečně) tak, aby tvořila rezonanční dutinu. Krystal byl umístěn v ose pulsní výbojky (optické čerpání).



Obr. 1. Energetické schéma rubínového laseru (tříhladinový systém). Populační inverze se vytváří mezi metastabilním stavem a základním stavem. Čerpání probíhá do vyšších excitovaných stavů s následnou nezářivou relaxací do metastabilního stavu.



Obr. 2. Schematické znázornění činnosti laseru.

Laser – optický kvantový generátor

Zdroj koherentního záření v IČ, VIS nebo UV oblasti spektra využívající jevu stimulované emise elektromagnetického záření aktivních částic (atomů, molekul, iontů, elektronů) buzených vnějším zdrojem energie.

Nezbytným předpokladem generace laserového záření je dosažení inverze populace mezi dvěma energetickými hladinami aktivního prostředí.

Charakteristickým rysem stimulovaného záření je úzká spektrální čára, časová a prostorová koherence, vysoká směrovost a velká hustota záření.

Laser se skládá z

- aktivního prostředí (pevná látka – sklo, krystal nebo polovodič, plyn nebo směs plynů, kapalina)
- optického rezonátoru (dvě či více zrcadel, alespoň jedno částečně propustné sloužící k vývodu energie z rezonátoru)
- zdroje budící energie (výbojka, elektrický výboj v plynu, chemická reakce, ...)

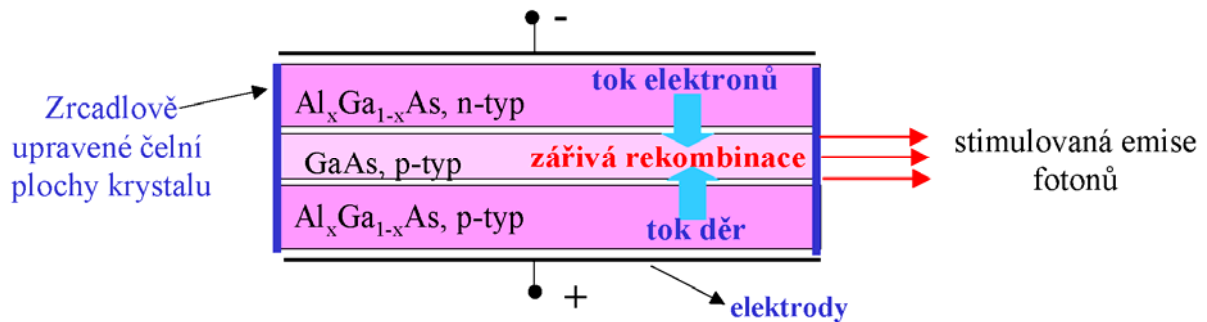
Základní přednosti laserů ve srovnání s klasickými zdroji záření:

- generované záření je zpravidla monochromatické (vysoká spektrální a prostorová hustota)
- koherence
- nízká divergence svazku

Rozdělení laserů je možné podle

- vlnových délek emise (viditelné, infračervené, ultrafialové)
- časového režimu provozu (kontinuální (cw, continuous wave), impulsní)
- typu buzení (lasery buzené opticky, elektrickým výbojem, chemicky, mechanicky (srážkami částic), injekcí nosičů náboje, ...)
- typu aktivního prostředí (pevnolátkové, kapalinové (barvivové), plynové, iontové, excimerové, polovodičové (diodové), ...)
- délky generovaného pulsu (nanosekundové, pikosekundové, femtosekundové, ...) – čím je kratší doba trvání pulsu, tím je při stejné vyzářené energii dosaženo vyššího výkonu

laditelný laser – umožňuje změnu frekvence v širokých mezích, např. volbou aktivního prostředí se širokým emisním pásem a výběrem frekvence generace spektrálně selektivním prvkem (mřížka, hranol, ...) umístěným v rezonátoru.



Obr. 3. Schéma polovodičového laseru.

laser (aktivní médium)	vlnová délka (μm)	střední výkon	režim	poznámka
rubínový	0,6943	1 W	impulsní	pevnolátkový
Nd:YAG (YAG=ytrito- hlinitý granát $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$)	1,064	150 W	cw, impulsní	blízká IČ pevnolátkový
GaAs (polovodičový)	0,840	0,01 W	cw	blízká IČ
He-Ne (plynový)	0,6328; 1,15; 3,39		cw	
He-Cd (plynový)	0,325; 0,442		cw	
argonový (Ar^+) (iontový)	0,480; 0,5145		cw	iontový, řada čar
kryptonový (Kr^+)	0,647			iontový, řada čar
CO_2 (plynový)	10,6		cw	IČ
dusíkový (plynový)	0,337		impulsní	UV
XeF (excimerový)	0,351		impulsní	UV
rhodamin 6G (roztok)	0,570-0,650			barvivový, laditelný
Ti:safir	0,700-1,1			krystal, laditelný
polovodičové (GaAlAs)	0,750-0,900			

Tab. 2. Přehled parametrů vybraných laserů.