***Světlo v izotropním látkovém prostředí***

Maxwellovy rovnice v izotropním látkovém prostředí:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}\left(\vec{r}, t\right)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho\left(\vec{r}, t\right)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

a materiálové vztahy $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$

pro dielektrika $\vec{j} = 0$ $\rho = 0$ (nepřítomnost volných nábojů)

nemagnetické látky $\mu = \mu_0$

polarizace $\vec{P}$ - objemová hustota elektrických dipólů

$$\vec{P} = \left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)\vec{E} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \quad , \tag{3}$$

kde $\chi$ je elektrická susceptibilita $\chi = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1$

Potom $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

V izotropním prostředí je $\chi$ skalární veličina nabývající stejných hodnot pro libovolný směr přiloženého elektrického pole. V neizotropním prostředí se velikost polarizace mění v závislosti na směru přiloženého pole a $\chi$ je tenzorovou veličinou.

V nevodivém izotropním prostředí jsou elektrony vázány k atomům tvořících prostředí bez nějakého preferenčního směru. Předpokládejme, že každý elektron s nábojem $-e$ je v dielektriku vychýlen na vzdálenost $\vec{r}$ z rovnovážné polohy. Výsledná makroskopická polarizace $\vec{P}$ prostředí je vyjádřena jako

$$\vec{P} = -eN\vec{r} \tag{4}$$

kde $N$ je počet elektronů v jednotce objemu. Je-li vychýlení elektronu z rovnovážné polohy výsledkem působení statického vnějšího elektrického pole $\vec{E}$ a je-li elektron pružně vázán k rovnovážné poloze silovou konstantou $K$, potom platí

$$-e\vec{E} = K\vec{r} \tag{5}$$

***Statická*** polarizace potom bude dána s užitím (5) vztahem

$$\vec{P} = \frac{Ne^2}{K}\vec{E} \tag{6}$$

Bude-li ale přiložené vnější pole časově proměnné, vztah (6) nebude platit. Abychom správně vyjádřili polarizaci v tomto dynamickém případě, musíme vzít do úvahy vlastní pohyb elektronů. Pro popis pohybu vázaného elektronu v časově proměnném vnějším poli použijeme model klasického tlumeného oscilátoru. Diferenciální pohybová rovnice nabývá tvar

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m\gamma\frac{d\vec{r}}{dt} + K\vec{r} = -e\vec{E} \tag{7}$$

Člen $m\gamma\frac{d\vec{r}}{dt}$ představuje tlumící sílu úměrnou rychlosti elektronu s konstantou úměrnosti $m\gamma$, člen $-e\vec{E}$ je vynucující síla.

Předpokládejme, že přiložené vnější pole je harmonické; jeho časová závislost je popsána faktorem $e^{i\omega t}$. Předpokládáme-li, že se pohyb elektronu řídí stejnou harmonickou časovou závislostí, tj. $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$, potom

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_0 i\omega e^{i\omega t} = i\omega\vec{r}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}_0 (i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2\vec{r}$$

čili dosazením do (7) dostáváme

$$\left(-m\omega^2 + i\omega m\gamma + K\right)\vec{r} = -e\vec{E} \tag{8}$$

a dosazením do (4) dostáváme výraz pro ***dynamickou*** polarizaci

$$\vec{P} = \frac{Ne^2}{-m\omega^2 + i\omega m\gamma + K}\vec{E} \tag{9}$$

Pro $\omega = 0$ se rovnice (9) redukuje na rovnici (6) pro statickou polarizaci.

Pro danou amplitudu vnějšího elektrického pole se velikost polarizace mění s frekvencí. Imaginární člen ve jmenovateli znamená, že fáze $\vec{P}$ vůči $\vec{E}$ rovněž závisí na frekvenci.

Zavedeme-li ***vlastní rezonanční frekvenci*** vázaného elektronu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{10}$$

můžeme vztah (9) upravit do tvaru

$$\vec{P} = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}\vec{E} \tag{11}$$

Z tvaru výrazu (11) pro polarizaci je zřejmé, že můžeme očekávat ***rezonanční chování pro frekvence světla v blízkosti vlastní frekvence*** $\omega_0$.

Abychom ukázali, jak polarizace ovlivňuje šíření světla v dielektriku, musíme se vrátit k obecné vlnové rovnici odvozené z Maxwellových rovnic

$$\mathrm{rot\,rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \tag{12}$$

kde na pravé straně se objevil (na rozdíl od vlnové rovnice ve vakuu) zdrojový člen $-\mu_0 \dfrac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$.

Dosazením z (11) do (12) dostaneme

$$\mathrm{rot\,rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\mu_0 N e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{13}$$

kde $1/c^2 = \mu_0\varepsilon_0$

Z lineárního vztahu mezi $\vec{E}$ a $\vec{P}$ plyne, že $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ a tedy $\mathrm{rot\,rot}\,\vec{E} = -\Delta\vec{E}$ a rovnice (13) se redukuje na poněkud jednodušší tvar

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}\right)\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{14}$$

Hledejme řešení této rovnice ve tvaru homogenní rovinné harmonické vlny šířící se podél osy z

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \hat{\mathcal{K}} z\right)} \tag{15}$$

Derivujme (15)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \vec{E}_0\left(-i\hat{\mathcal{K}}\right)e^{i\left(\omega t - \hat{\mathcal{K}} z\right)} = -i\hat{\mathcal{K}}\vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \vec{E}_0\left(-i\hat{\mathcal{K}}\right)^2 e^{i\left(\omega t - \hat{\mathcal{K}} z\right)} = -\hat{\mathcal{K}}^2\vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{E}_0\left(i\omega\right)e^{i\left(\omega t - \hat{\mathcal{K}} z\right)} = i\omega\vec{E} \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{E}_0\left(i\omega\right)^2 e^{i\left(\omega t - \hat{\mathcal{K}} z\right)} = -\omega^2\vec{E}$$

Dosazení do (14) ukazuje, že homogenní rovinná harmonická vlna je řešením vlnové rovnice (14) pokud

$$\hat{\mathcal{K}}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}\right) \tag{16}$$

Přítomnost imaginárního členu ve jmenovateli znamená, že vlnové číslo musí být komplexní veličina, tedy

$$\hat{\mathcal{K}} = k - i\alpha$$

(záporné znaménko před imaginární částí jsme použili proto, že potom $\alpha$ vychází kladné)

Analogicky můžeme zavést komplexní index lomu $\hat{\mathcal{N}}$

$$\hat{\mathcal{N}} = n - i\kappa$$

kde $$\hat{\mathcal{K}} = \frac{\omega}{c}\hat{\mathcal{N}} \qquad \text{(v analogii ke } k = \frac{\omega}{c}n\text{)} \tag{17}$$

Řešení rovnice (15) lze potom vyjádřit ve tvaru

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \hat{\mathcal{K}} z\right)} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i\left(\omega t - kz\right)} \tag{18}$$

Faktor $e^{-\alpha z}$ ukazuje, že amplituda vlny exponenciálně klesá se vzdáleností. To znamená, že jak se vlna šíří, energie vlny je prostředím absorbována. Protože energie vlny je úměrná $\left|\vec{E}\right|^2$, mění se energie vlny se vzdáleností jako $e^{-2\alpha z}$. Tudíž veličina $2\alpha$ představuje ***koeficient absorpce*** prostředí. Imaginární část $\kappa$ komplexního indexu lomu je známa jako ***extinkční koeficient***. Vztah mezi $\alpha$ a $\kappa$ vyjadřuje rovnice

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\kappa \tag{19}$$

Fázový faktor v (18) ukazuje, že máme harmonickou vlnu šířice se fázovou rychlostí $v$

$$v = \frac{\omega}{k}n = \frac{c}{n} \tag{20}$$

Z rovnic (16) a (17) dostáváme

$$\hat{\mathcal{N}}^2 = \left(n - i\kappa\right)^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \tag{21}$$

a odtud získáváme vztahy

$$\mathcal{R}e\left(\hat{\mathcal{N}}^2\right) = n^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \tag{22a}$$

$$Im\left(\hat{\mathcal{N}}^2\right) = 2n\kappa = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \tag{22b}$$

ze kterých lze určit optické parametry $n$ a $\kappa$.

Předpokládejme tak slabou absorpci, že ve vztahu (22a) můžeme zanedbat $\kappa^2$ vůči $n^2$, a úzkou oblast absorpce, takže můžeme položit

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \left(\omega_0 + \omega\right)\left(\omega_0 - \omega\right) \approx 2\omega_0\left(\omega_0 - \omega\right) = 2\omega_0\Delta\omega$$

Potom při uvážení, že

$$\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{4\omega_0\gamma} \ll 1$$

dostáváme z (22a)

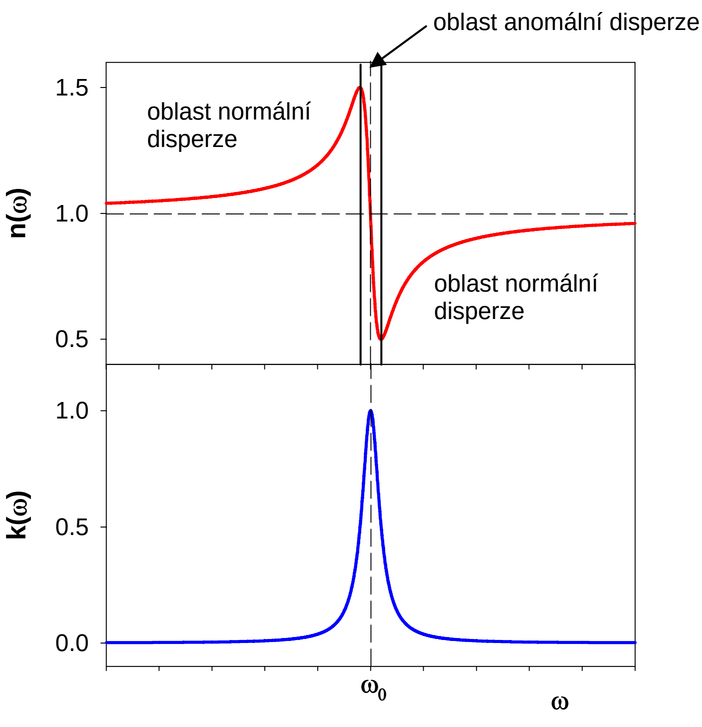
$$n(\omega) \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0}\frac{2\Delta\omega}{4(\Delta\omega)^2+\gamma^2} = 1 + \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0\gamma}\frac{2\Delta\omega/\gamma}{(2\Delta\omega/\gamma)^2+1} = C\frac{u}{u^2+1} \qquad (23a)$$

$$\kappa(\omega) \approx \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0}\frac{\gamma\omega_0}{4\omega_0^2(\Delta\omega)^2+\omega_0^2\gamma^2} = \frac{Ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0\gamma}\frac{1}{(2\Delta\omega/\gamma)^2+1} = \frac{C}{u^2+1} \qquad (23b)$$

kde konstanta $C$ je dána výrazem $\quad C = \dfrac{Ne^2}{2m\varepsilon_0\omega_0\gamma}$

a proměnná $u$ výrazem $\quad u = 2\Delta\omega/\gamma$

Průběh $n$ a $\kappa$ v závislosti na frekvenci $\omega$ je znázorněn na obr. DI-1.




**Obr. DI-1.** Průběh indexu lomu $n$ a extinkčního koeficientu $\kappa$ na frekvenci $\omega$

Nejsilnější absorpce nastává v okolí rezonanční frekvence $\omega_0$. Index lomu je pro nízké frekvence větší než 1 a s rostoucí frekvencí vzrůstá $\dfrac{dn}{d\omega} > 0$. To je oblast tzv. ***normální disperze***, kterou vykazuje většina transparentních látek ve viditelném oboru spektra. Pro tyto látky rezonanční frekvence leží v ultrafialové oblasti spektra. V oblasti rezonanční frekvence se ale disperze stává ***anomální*** – v tom smyslu, že s rostoucí frekvencí index lomu v oblasti anomální disperze ***klesá***, tedy $\frac{dn}{d\omega} < 0$

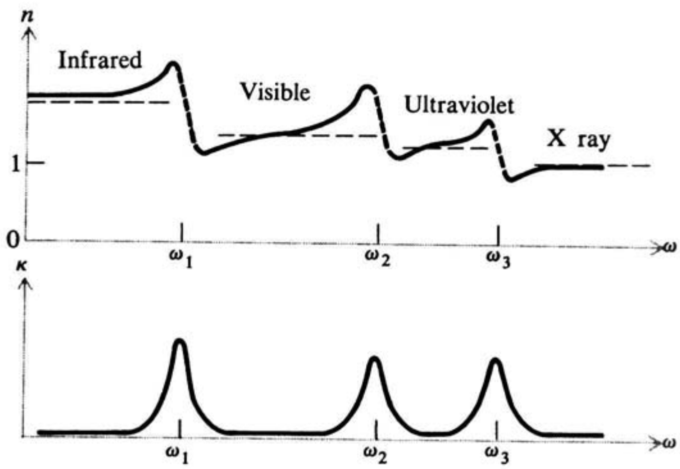
V odvození výše jsme pro jednoduchost předpokládali existenci pouze jedné rezonanční frekvence $\omega_0$. Ve skutečnosti mohou být různé elektrony vázány rozdílně a můžeme proto předpokládat, že jistá část $f_1$ má rezonanční frekvenci $\omega_1$, frakce $f_2$ má rezonanční frekvenci $\omega_2$ a tak dále. Vztah (21) lze pro tento případ zobecnit

$$\hat{\mathcal{N}}^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \sum_j \left( \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j} \right) \tag{24}$$

kde sčítáme přes všechny druhy elektronů (sčítací index *j*). Veličina $f_j$ (nazývaná síla oscilátoru) je faktor, který určuje jak silně se projevuje rezonanční frekvence $\omega_j$.
Ve statické limitě $\omega = 0$ výraz (24) pro kvadrát indexu lomu nabývá hodnoty

$$1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \sum_j \left( \frac{f_j}{\omega_j^2} \right),$$

což je statická dielektrická konstanta prostředí.




**Obr. DI-2.** Průběh indexu lomu $n$ a extinkčního koeficientu $\kappa$ na frekvenci $\omega$ pro látku s několika rezonančními frekvencemi (viz vztah (24)).

Jsou-li tlumící konstanty $\gamma_j$ dostatečně malé, aby bylo možno v rovnici (24) zanedbat člen $\gamma_j\omega$ proti $\omega_j^2 - \omega^2$, potom bude index lomu v podstatě reálný a jeho kvadrát bude dán vztahem

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\sum_j\left(\frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}\right) \tag{25}$$

Vztah (25) dobře platí pro plyny. Avšak v kondenzované fází na elektron nepůsobí vnější pole $\vec{E}$ nýbrž v důsledku polarizace dielektrika pole lokální $\vec{E}_L$, které má v případě izotropního dielektrika hodnotu

$$\vec{E}_L = \vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \tag{26}$$

S uvážením lokálního pole lze odvodit vztah (***Lorentzův-Lorenzův***)

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 m}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2} \quad . \tag{27}$$