Vlny

Matematický popis vlnění

vlna - rozruch šířící se prostředím zachovávající svůj tvar (profil)

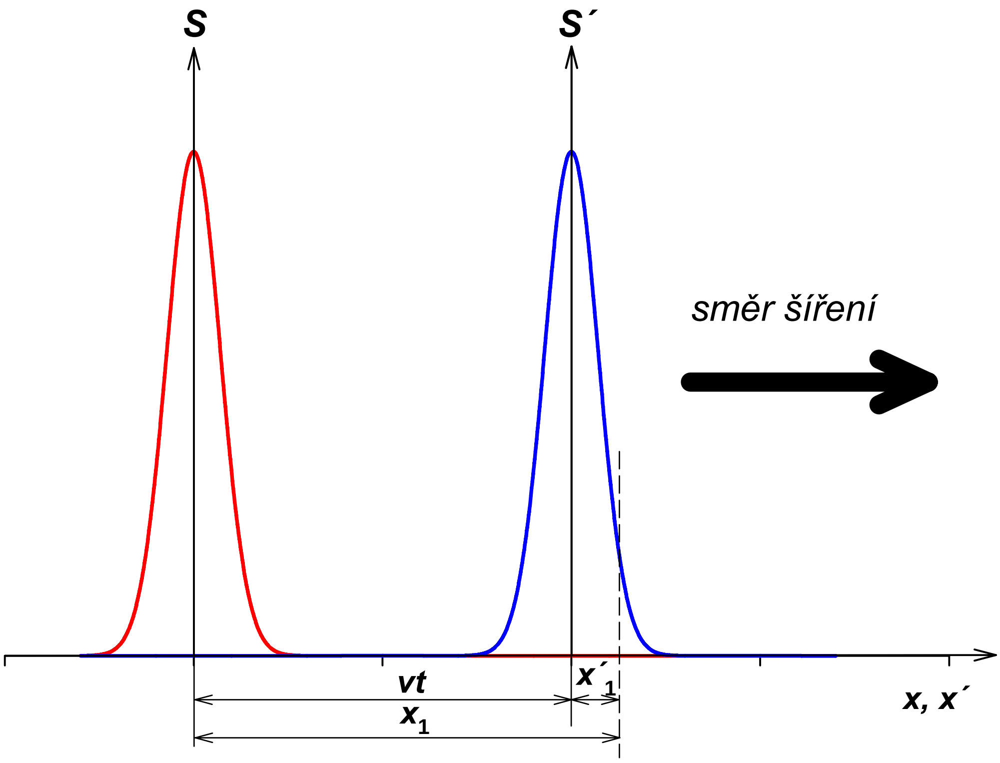
Pro jednoduchost začneme s jednodimenzionální vlnou – protože rozruch se pohybuje rychlostí v, musí být funkcí jak polohy tak i času

$$\psi = f(x,t) \tag{1}$$

Tvar rozruchu v libovolném okamžiku, řekněme $t = 0$, můžeme vyjádřit jako vlnu v daném časovém okamžiku

$$\psi(x,t)\big|_{t=0} = f(x,0) = f(x) \tag{2}$$

Například funkce $f(x) = e^{-ax^2}$, kde a je konstanta, popisuje rozruch Gaussovou funkcí ("zvonovitý" tvar) – viz obr. 1.



Obr. 1. Rozruch v pevném (S) a pohybujícím ($S´$) se souřadném systému.

Označme S' souřadný systém pohybující se s rozruchem, jež má v čase $t = 0$ společný počátek s nepohyblivým systémem S. V systému S' $\psi = f(x')$ nezávisí na čase. Z obr. 1 je zřejmý transformační vztah

$$x' = x - vt \ , \tag{3}$$

takže ψ můžeme vyjádřit pomocí souřadnic spojených se stacionárním systémem S takto

$$\boxed{\psi(x,t) = f(x - vt)} \tag{4}$$

Tento výraz je nejobecnějším vyjádřením jednodimenzionální vlnové funkce popisující vlnu daného tvaru šířící se v kladném směru osy x. Tedy v případě Gaussova tvaru bude $\psi(x,t) = e^{-a(x-vt)^2}$. Zkoumejme, jak bude vypadat ψ v časech t a $t + \Delta t$:

$$\psi(x + v\Delta t, t + \Delta t) = f\left[(x + v\Delta t) - v(t + \Delta t)\right] = f(x - vt) \ ,$$

čili profil vlny se s časem nemění.

Pro vlnu šířící se rychlostí $v > 0$ v opačném (tedy záporném) směru lze odvodit tvar

$$\psi = f(x + vt). \tag{5}$$

Často se používají formálně jiné tvary zápisu vlnové funkce:

$$f(x - vt) = F\left(-\frac{x - vt}{v}\right) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{6}$$

Nyní odvodíme vlnovou rovnici. Budeme derivovat vlnovou funkci ψ podle prostorové a časové proměnné (s uvážením transformačního vztahu (3))

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \qquad \text{neboť} \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial t} \qquad \text{neboť} \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -v$$

a tedy
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -v\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f}{\partial x'}\right) = -v\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \tag{8}$$

A ze vztahů (7) a (8) dostáváme tzv. vlnovou rovnici (v tomto případě jednodimenzionální)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{9}$$

Snadno lze ukázat, že jsou-li funkce ψ_1 a ψ_2 řešeními vlnové rovnice (9), bude jejím řešením i jejich lineární kombinace, což je tak zvaný ***princip superpozice***.

Harmonické vlny

Jednu z nejjednodušších vln představuje harmonická vlna. Její důležitost spočívá v tom, že vlnu libovolného tvaru lze vyjádřit jako superpozici harmonických vln.

Zvolme jako profil vlny harmonickou funkci tvaru

$$\psi(x,t) = A_0 \sin\left[k(vt - x)\right] \tag{10}$$

která je řešením vlnové rovnice (9). Veličina A_0 udávající maximální hodnotu funkce ψ se nazývá ***amplituda vlny***.

Ať držíme x či t konstantní, v obou případech dostaneme sinusový rozruch; vlna je tedy periodická jak v prostoru tak v času. Prostorová perioda se nazývá ***vlnová délka***, označuje se λ a v optice se udává zpravidla v nanometrech (nm, 1 nm = 10^{-9}m) nebo v mikrometrech (μm, 1 μm = 10^{-6}m). Změna proměnné x o λ nemění funkci ψ, musí tedy platit

$$\psi(x,t) = \psi(x \pm \lambda, t) \ .$$

V případě harmonické vlny (10) dostáváme

$$\sin\left[k(vt - x)\right] = \sin\left[k(vt - (x \pm \lambda))\right] = \sin\left[k(vt - x) \pm 2\pi\right]$$

a odtud

$$|k\lambda| = 2\pi \quad .$$

Protože k i λ jsou kladné, dostáváme vztah pro ***vlnové číslo*** k

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{11}$$

Zcela analogicky postupujeme v případě ***časové periody*** τ .

$$\psi(x,t) = \psi(x, t \pm \tau)$$

$$\sin\left[k(vt - x)\right] = \sin\left[k(v(t \pm \tau) - x)\right] = \sin\left[k(vt - x) \pm 2\pi\right]$$

$$kv\tau = 2\pi$$

S užitím (11) dostáváme pro časovou periodu τ

$$\tau = \frac{\lambda}{v} \tag{12}$$

respektive pro ***frekvenci*** ν

$$\nu \equiv \frac{1}{\tau} = \frac{v}{\lambda} \tag{13}$$

odkud plyne vztah pro rychlost šíření v

$$v = \lambda\nu \tag{14}$$

Často se užívá ***úhlová frekvence*** ω

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{(rad/s)}\,. \tag{15}$$

S uvážením vztahů (11) až (15) můžeme postupnou harmonickou vlnu psát ještě v jiných ekvivalentních tvarech

$$\psi(x,t) = A_0 \sin(\omega t - kx) \tag{10a}$$

$$\psi(x,t) = A_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{10b}$$

Fáze a fázová rychlost

Celý argument funkce sinus v harmonické vlně (10) se nazývá ***fáze vlny*** φ

$$\varphi(x,t) = \omega t - kx$$

nebo zcela obecně

$$\varphi(x,t) = \omega t - kx + \varphi_0 \tag{16}$$

kde φ_0 je počáteční fáze vlny (konstantní příspěvek k fázi vlny vznikající na zdroji a nezávislý na čase i na vzdálenosti).

Výraz

$$\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_x\right| = \omega$$

udává rychlost změny fáze s časem,

podobně výraz

$$\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_t\right| = k$$

udává rychlost změny fáze se vzdáleností.

Výraz

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\varphi = \frac{\left(\partial\varphi/\partial t\right)_x}{-\left(\partial\varphi/\partial x\right)_t} = \pm\frac{\omega}{k} = \pm v \tag{17}$$

udává rychlost šíření konstantní fáze, čili ***fázovou rychlost***, kde znaménko + platí pro šíření ve směru rostoucí souřadnice x a znaménko – pro směr opačný.

Má-li být splněna podmínka

$$\varphi = \omega t - kx = konst.$$

potom s rostoucím t musí růst také x .

Bez odvození uvedeme třídimenzionální vlnovou rovnici, kterou musí splňovat vlnová funkce $\psi(\vec{r},t)$

$$\boxed{\Delta\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0} \qquad (18)$$

kde $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ je Laplaceův operátor.

Rovinná vlna

Nejjednodušším příkladem třídimenzionální harmonické vlny je rovinná vlna

$$\psi(\vec{r},t) = A_0 \sin\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right) \qquad (19)$$

- plochy konstantní fáze jsou roviny

$\vec{k}$ je ***vlnový vektor***

$$\vec{k} = k\vec{s} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{s}$$ kde $\vec{s}$ je jednotkový vektor ve směru šíření vlny

Matematicky je rovina kolmá na vektor $\vec{k}$ procházející bodem daným polohovým vektorem $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ definována podmínkou

$$\vec{k}.(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Tedy

$$k_x(x - x_0) + k_y(y - y_0) + k_z(z - z_0) = 0$$

$$k_x x + k_y y + k_z z = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 = konst.$$

$$\vec{k}.\vec{r} = konst. \qquad (20)$$

Rovina je geometrické místo bodů, jejichž polohové vektory mají stejný průmět do směru vektoru $\vec{k}$.

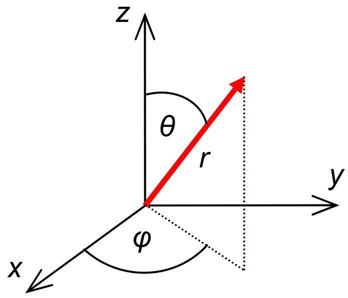
Kulová (sférická) vlna

Uvažujme ideální bodový zdroj světla vyzařující rovnoměrně do všech směrů (izotropní zdroj). Vlnoplochy vyzařované takovým izotropním zdrojem budou soustředné sféry o vrůstajícím poloměru. V tomto případě je vhodnější namísto kartézských souřadnic (x, y, z) využít souřadnice sférické (r, θ, ϕ) definovaných transformačními vztahy

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta \ .$$



Ve sférických souřadnicích má Laplaceův operátor tvar

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Díky své symetrii sférická vlna nebude záviset na úhlových souřadnicích θ a ϕ, tedy

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r,\theta,\phi) = \psi(r) \tag{21}$$

V tomto případě se Laplaceův operátor redukuje na

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \tag{22}$$

Teď odvodíme přechod od kartézských ke sférickým souřadnicím:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \tag{23a}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \qquad \text{(derivace součinu)} \tag{23b}$$

Protože $\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

bude $\quad \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)$$

a dosazením do (23b)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r} \ . \tag{24}$$

Analogicky postupujeme i pro derivace podle souřadnic y a z.

Sečtením potom dostaneme

$$\Delta\psi(r)=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\left(3-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$$

Vlnová rovnice (18) potom nabývá tvar

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

a po vynásobení obou stran rovnice r dostaneme

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) \tag{25}$$

Rovnice (25) má tvar jednodimenzionální vlnové rovnice (9) s prostorovou proměnnou r a vlnovou funkcí $r\psi$, tedy podle (4)

$$r\psi(r,t)=f(r-vt)$$

a odtud
$$\psi(r,t)=\frac{1}{r}f(r-vt)\ . \tag{26}$$

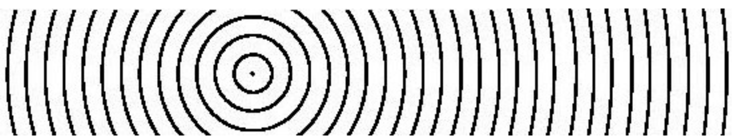
Tato vlnová funkce popisuje sférickou vlnu šířící se radiálně od zdroje konstantní rychlostí v.
Harmonickou sférickou vlnu můžeme napsat ve tvaru

$$\psi(r,t)=\frac{\mathcal{A}}{r}\cos k(vt-r) \tag{27}$$

kde konstanta $\mathcal{A}$ představuje "sílu zdroje".
Plochami konstantní váze jsou sféry dané podmínkou

$$kr = konst.$$

Povšimněte si, že amplituda sférické vlny závisí na $1/r$ a tedy se vzrůstající vzdáleností od zdroje (na rozdíl od rovinné vlny) klesá. V dostatečně velké vzdálenosti od bodového izotropního zdroje můžeme malou část kulové vlnoplochy dobře aproximovat rovinou.



Obr. 2. Zplošťování sférických vln se vzdáleností.

Komplexní reprezentace

Komplexní reprezentace nabízí alternativní a z hlediska matematických operací jednodušší popis vln.
Nejprve trochu opakování:

Komplexní číslo z má tvar

$$z = x + iy \quad ,$$

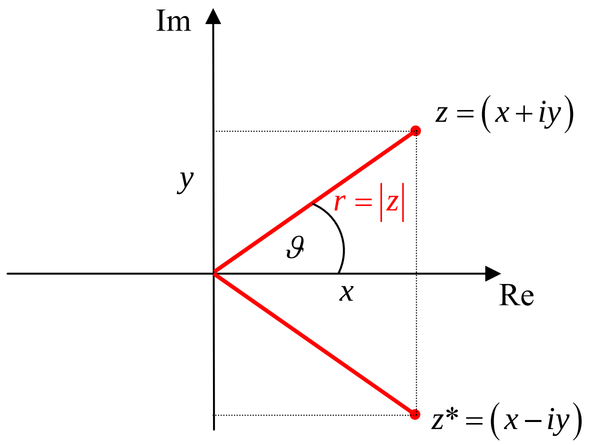
kde $i = \sqrt{-1}$ a x, y jsou reálná čísla reprezentující reálnou a imaginární část komplexního čísla. Komplexní číslo může být znázorněno v komplexní rovině (obr. 3).

$$x = r\cos\vartheta \qquad\qquad y = r\sin\vartheta$$

kde $r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je modul komplexního čísla

Dále $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{i\vartheta}$ (kde $\vartheta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ je fáze (fázový úhel))

což je Eulerův vzorec spojující exponenciální funkci imaginárního argumentu s trigonometrickými funkcemi.



Obr. 3. Zobrazení komplexních čísel v komplexní rovině.

Číslo $z^* = x - iy = e^{-i\vartheta}$ je komplexně sdružené číslo k z.

Zřejmě $|z| = \sqrt{zz^*} = r$

Libovolné komplexní číslo může být napsáno ve tvaru

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) \quad ,$$

kde $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + z^*) = r\cos\vartheta \qquad \operatorname{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - z^*) = r\sin\vartheta$

Aritmetické operace s komplexními čísly:

sčítání a odečítání $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

násobení $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$

dělení $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$

$$\cos 2\pi = 1,\ \sin 2\pi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^{i2\pi} = 1$$

$$\cos(\pm\pi) = -1,\ \sin(\pm\pi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^{\pm i\pi} = -1$$

$$\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1 \qquad \Rightarrow \qquad e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$$

Periodická funkce $\qquad e^{z+i2\pi} = e^z e^{i2\pi} = e^z$

Harmonickou vlnu můžeme v komplexní reprezentaci vyjádřit jako

$$\psi(\vec{r},t) = A_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right)} = A_0 e^{i\varphi(\vec{r},t)} \quad , \tag{28}$$

kde A_0 je reálná amplituda. Zřejmě

$$\mathrm{Re}(\psi) = A_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right) \qquad \mathrm{Im}(\psi) = A_0 \sin\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right) \tag{29}$$

Při výpočtech používáme komplexní reprezentaci a až dojdeme k výsledku, musíme vzít jeho reálnou část, která má fyzikální smysl (volba reálné části je přijatá konvence, stejně tak bychom mohli užívat i imaginární část).
V některých případech je výhodné vyjádřit harmonickou vlnu v komplexní reprezentaci takto

$$\psi(\vec{r},t) = A_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right)} = A_0 e^{i\varphi_0} e^{i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)} = \tilde{A}_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)} \tag{30}$$

kde jsme zavedli ***komplexní amplitudu*** $\tilde{A}_0$ vlny

$$\tilde{A}_0 = A_0 e^{i\varphi_0} \quad .$$