Uvažujme rozruch, který se skládá ze dvou rovinných harmonických vln o stejné amplitudě a nulových počátečních fázích

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{01}\cos(\omega_1 t - k_1 x) \\ E_2 &= E_{01}\cos(\omega_2 t - k_2 x) \end{aligned} \tag{1}$$

Výsledná vlna bude (s užitím vztahu $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$)

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_{01}\left[\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)\right] = \\ &= 2E_{01}\cos\frac{1}{2}\left[(\omega_1+\omega_2)t - (k_1+k_2)x\right].\cos\frac{1}{2}\left[(\omega_1-\omega_2)t - (k_1-k_2)x\right] \end{aligned} \tag{2}$$

Definujme veličiny $\bar{\varpi}$ (střední frekvence) a $\bar{k}$ (střední vlnové číslo)

$$\bar{\varpi} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \qquad \bar{k} = (k_1 + k_2) \tag{3}$$

a ω_m (modulační frekvence) a k_m (modulační vlnočet)

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \qquad k_m = (k_1 - k_2)\ . \tag{4}$$

Potom

$$E = 2E_{01}\cos(\omega_m t - k_m t).\cos(\bar{\varpi} - \bar{k}t) \tag{5}$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

modulovaná vlna nosná vlna

což lze považovat za vlnu o frekvenci $\bar{\varpi}$, která má časově proměnnou amplitudu

$$E_0(x,t) = 2E_{01}\cos(\omega_m t - k_m x)\ . \tag{6}$$

Čili

$$E(x,t) = E_0(x,t)\cos(\bar{\varpi} - \bar{k}t) \tag{7}$$

ω_1, ω_2 velké (řádu 10^{14}), $\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow \bar{\varpi} \gg \omega_m$, čili amplituda $E_0(x,t)$ se bude měnit v čase pomalu, zatímco $E(x,t)$ se mění velmi rychle (viz obr. G1).

Zářivost (časová střední hodnota Poyntingova vektoru) je úměrná

$$E_0^2(x,t) = 4E_{01}^2\cos^2(\omega_m t - k_m x) = 2E_{01}^2\left[1 + \cos(2\omega_m t - 2k_m x)\right] \tag{8}$$

a tedy $E_0^2(x,t)$ osciluje kolem hodnoty $2E_{01}^2$ s frekvencí $2\omega_m = \omega_1 - \omega_2$ (rázová frekvence).

E_0 se mění s modulační frekvencí ω_m, zatímco E_0^2 se mění s dvojnásobnou frekvencí.

Předpokládejme na okamžik, že $E_0 = konst.$ (nemodulovaná vlna). Každý pík nosné vlny se šíří směrem doprava (viz. obr. G1) rychlostí

$$v = \frac{\overline{\omega}}{\overline{k}} \qquad \text{(fázová rychlost).}$$

Zřejmě ale existuje ještě jedna rychlost, která odpovídá šíření modulační obálky.

Předpokládejme, že obě složky $E_1(x,t)$ a $E_2(x,t)$ se šíří stejnou fázovou rychlostí $v_1 = v_2$.

Rychlost šíření modulační obálky, kterou nazýváme ***grupovou rychlostí*** v_g, bude rovna fázové rychlosti nosné vlny

$$v_g = v = v_1 = v_2 = \frac{\overline{\omega}}{\overline{k}} \ .$$

Toto platí v nedisperzním prostředí, kde rychlost šíření nezávisí na vlnové délce. Modulační obálka $E_0(x,t) = 2E_{01}\cos(\omega_m t - k_m x)$ se šíří rychlostí

$$v_g = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \ .$$

Avšak v disperzním prostředí $\omega = \omega(k)$. $\Delta\omega$ malé, potom

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \equiv v_g \ . \tag{9}$$

Modulace (signál) se šíří rychlostí v_g, která může být větší, menší a nebo rovna fázové rychlosti nosné vlny

Protože $\omega = kv$, dostáváme z (9)

$$v_g = v + k\frac{dv}{dk} \tag{10}$$

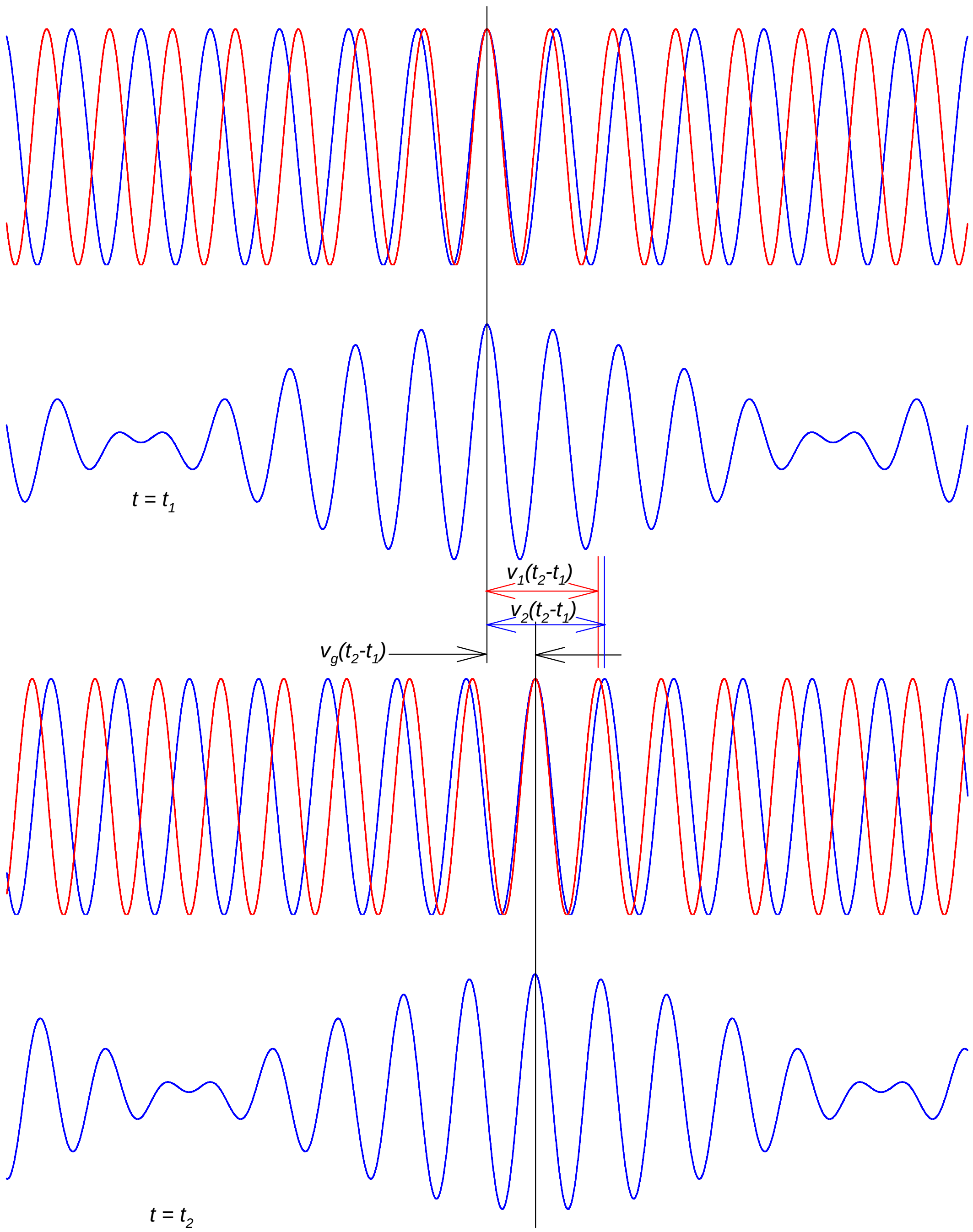
V nedisperzním prostředí, ve kterém v nezávisí na λ, $dv/dk = 0$ a $v_g = v$. Konkrétně ve vakuu $\omega = kc$, $v = c$ a $v_g = c$. V disperzním prostředí ($v_1 \neq v_2$), ve kterém je známa závislost $n(k)$, $\omega = kc/n$, je užitečné vyjádřit v_g jako

$$v_g = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{dk} \tag{11}$$

nebo

$$v_g = v\left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right) . \tag{12}$$

V oblasti normální disperze $\dfrac{dn}{dk} > 0$ bude $v_g < v$.



Obr. G1: Grupová a fázová rychlost. Červeně a modře znázorněná vlna se šíří různými fázovými rychlostmi (v_1 a v_2). Bod koincidence odpovídající maximu modulační obálky se šíří grupovou rychlostí v_g . Na obrázku je znázorněna situace, kdy $v_2 > v_1 > v_g$.