Poznámky k Fourierově transformaci

V těchto poznámkách jsou uvedeny základní vlastnosti jednorozměrné Fourierovy transformace a její aplikace na jednoduché modelové případy. Pro určitost jsou sdružené proměnné označeny jako t (čas) a ω (kruhová frekvence), případně τ (časové zpoždění) a ω.

Snadno dostupný zdroj poučení o Fourierově transformaci je pojednání Prof. Jiří Komrska „Fourierovské metody v teorii difrakce a strukturní analýze"
http://physics.fme.vutbr.cz/files/opory/pdf/Fourier/Main.pdf (obsah)
http://physics.fme.vutbr.cz/files/opory/pdf/Fourier/KapFxx.pdf (jednotlivé kapitoly)
kde xx=00 až 20.

V našem pojednání budeme užívat pro „přímou" FT (vše za podmínky, že příslušné integrály existují)

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t)\, dt\,,$$

a pro „zpětnou" transformaci

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega\,.$$

V následujících poznámkách jsou uvedeny příklady FT jednoduchých modelových tvarů pulzů. Pro tyto transformace postačí znalost integrace typu

$$\int_{x1}^{x2} \exp[(a+ib)x]\, dx = \frac{1}{a+ib}\left\{\exp[(a+ib)x_2] - \exp[(a+ib)x_1]\right\},$$

případně pro gaussovské pulzy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a^2x^2 + bx\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\exp\left(\frac{b^2}{4a^2}\right), \qquad a > 0, \quad b \text{ může být komplexní.}$$

V některých případech jsou ukázány i výpočty „zpětné" Fourierovy transformace. Potřebné integrály je výhodné počítat pomocí reziduové věty či využitím Hilbertovy transformace, což je náplní prvních částí těchto poznámek. Pro „zpětnou" transformaci funkcí spojených s tlumeným oscilátorem je užitečné

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega - \omega_0 + i\gamma}\, d\omega &= -2\pi i \exp(-\gamma t)\exp(-i\omega t) \quad &\text{pro} \quad t > 0 \\ &= 0 &\text{pro} \quad t < 0\end{aligned}$$

Poté následuje část o obených vlastnostech FT, její aplikace na pulzy obdélníkové, trojúhelníkové, gaussovské a tlumené oscilace. Na těchto typech pulzů je ilustrována nepřímá úměrnost mezi dobou trvání pulzu a příslušnou spektrální šířkou.

Pro optickou spektroskopii je důležitá energetická spektrální hustota, což je kvadrát absolutní hodnoty Fourierova obrazu pulzu $\left|f_\omega(\omega)\right|^2$, který je úměrný Fourierově obrazu autokorelační funkce pulzu. To je ukázáno jak obecně pro kvadraticky integrabilní $f(t)$, tak ilustrováno na příkladech tlumené oscilace a gaussovského pulzu.

Poslední část je věnována Fourierově transformaci δ-funkce a Heavisideova schodu. Vlastností Heavisideova schodu lze využít při odvození Kramersových – Kronigových relací, které lze alternativně odvodit též za pomoci reziduové věty.

Obsah:

Použití reziduové věty k výpočtu integrálů

holomorfní (regulární, analytická) funkce
v nějaké části komplexní roviny $z = x + iy$

$f(z) = u(x+iy) + i\,v(x+iy)$

má derivace (má smysl $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$,
h komplexní, běží k z z různých stran),
které splňují Cauchyovy–Riemannovy podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Jednoduché příklady:

- $f(z) = z = x + iy$
  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ JE holomorfní
- $f(z) = z^* = x - iy$
  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$ NENÍ holomorfní
- $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$
  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$ JE holomorfní
- $f(z) = z \cdot z^* = x^2 + y^2$
  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ NENÍ holomorfní
- $f(z) =$ KONSTANTA, všechny derivace 0 JE holomorfní

- $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y\cdot(-2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

JE holomorfní s výjimkou singulárního bodu (pólu) v $z=0$, tj $x=0$, $y=0$

- $f(z) = \frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{x+iy-x_0-iy_0} = \frac{(x-x_0)-i(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

obdobně jako předchozí případ $x \to x-x_0$, $y \to y-y_0$

např.:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \frac{2(x-x_0)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^2} = \dots = \frac{(y-y_0)^2-(x-x_0)^2}{[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]^2}$$

atd.

JE holomorfní s výjimkou singulárního bodu $z=z_0$

- $f(z) = e^{i\alpha z} = e^{-\alpha y}(\cos\alpha x + i\sin\alpha x)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-\alpha y}\cdot\alpha\cdot\sin\alpha x\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha e^{-\alpha y}\cdot\cos\alpha x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\alpha e^{-\alpha y}\cdot\sin\alpha x \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{-\alpha y}\cdot\alpha\cdot\cos\alpha x$$

JE holomorfní v celé komplexní rovině

• Součin dvou holomorfních funkcí $f(z) = u + iv =$
$= (u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2) = u_1 u_2 - v_1 v_2 + i v_1 u_2 + i u_1 v_2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} u_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x} v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x} v_1 =$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x} u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y} v_2 + \frac{\partial u_2}{\partial y} v_1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial y} u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial y} v_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial y} \cdot u_1$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x} u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial y} v_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y} v_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x} u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} v_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} u_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \cdot u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial y} u_1 - \frac{\partial v_1}{\partial y} v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial y} v_1$$

$$= -\frac{\partial v_1}{\partial x} u_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x} u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x} v_2 - \frac{\partial u_2}{\partial x} v_1 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Součin dvou holomorfních funkcí je holomorfní funkce

• Složky u, v holomorfní funkce splňují Laplaceovu rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

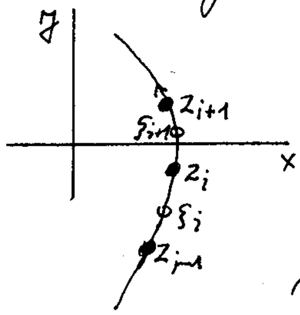
Tj $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

podobně

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

• Polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ JE holomorfní v celé kompl. rovině

Křivkový integrál: body $z_i, z_{i+1}, \dots$ na křivce C ji dělí na hodně obloučků c_i délky l_i



součet $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(z_i - z_{i-1})$

Když pro každou posloupnost dělení d_n vyjde stejná limita $\lim_{n\to\infty} \sigma(d_n) = I$

označíme ji jako integrál

$$\int_C f(z)\,dz = I$$

Zkusme několik integrálů po kružnici:

$$z = x + iy = r\cdot e^{i\varphi} \qquad dz = e^{i\varphi}dr + i r e^{i\varphi} d\varphi$$

integrace po kružnici kolem $z=0$ r konstanta

$C \equiv$ kružnice střed v $z=0$, poloměr r

- $f(z) = z^2$ $\quad \oint_C z^2 dz = \int_0^{2\pi} r^2 e^{2i\varphi}\cdot i r e^{i\varphi} d\varphi = i r^3 \left[\frac{e^{3i\varphi}}{3i}\right]_0^{2\pi} =$

$$= \frac{r^3}{3}(\cos 6\pi + i \sin 6\pi - 1 - i0) = 0$$

- $f(z) = z$ $\quad \oint_C z\,dz = \int_0^{2\pi} r\cdot e^{i\varphi}\cdot i r e^{i\varphi} d\varphi = i r^2 \left[\frac{e^{2i\varphi}}{2i}\right]_0^{2\pi} = 0$

- $f(z) = z^*$ NENÍ holomorfní;

$$\oint_C z^* dz = \int_0^{2\pi} r\cdot e^{-i\varphi}\cdot i r e^{i\varphi} d\varphi = i r^2 \cdot 2\pi = 2\pi i r^2$$

- $f(z) = 1$ $\quad \oint_C dz = \int_0^{2\pi} i r e^{i\varphi} d\varphi = i r \left[\frac{e^{i\varphi}}{i}\right]_0^{2\pi} = 0$

• $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad \oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ir e^{i\varphi}}{r \cdot e^{i\varphi}} d\varphi = 2\pi i$

• $f(z) = \frac{1}{z^2}$ $\quad \oint_C \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{ir e^{i\varphi}}{r^2 e^{2i\varphi}} d\varphi = \frac{i}{r} \int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} d\varphi =$

$$= \frac{i}{r}\left[\frac{e^{-i\varphi}}{-i}\right]_0^{2\pi} = \frac{-1}{r}\left(\cos 2\pi - i\sin 2\pi - 1 + i0\right) = 0$$

• $f(z) = \frac{1}{zz^*}$ NENÍ holomorfní, integrál vyjde stejně

$$\oint \frac{dz}{z \cdot z^*} = \int_0^{2\pi} \frac{ir e^{i\varphi} d\varphi}{r^2} = \frac{i}{r}\left[\frac{e^{i\varphi}}{i}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Pro HOLOMORFNÍ (regulární, analytické) funkce:
integrál po uzavřené křivce je 0

$$\oint f(z)\, dz = 0$$

Pro funkce, které jsou holomorfní s výjimkou několika bodů UVNITŘ uzavřené křivky

$$\boxed{\oint f(z)\, dz = 2\pi i \sum_n rez_n = 2\pi i \sum_n a_{-1}^{(n)}}$$

rez_n reziduum; je to koeficient $a_{-1}^{(n)}$ v rozvoji kolem pólu (singulárního bodu) z_n

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}^{(n)}}{(z-z_n)^2} + \frac{a_{-1}^{(n)}}{(z-z_n)} + a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(z-z_n) + a_2^{(n)}(z-z_n)^2 + \ldots$$

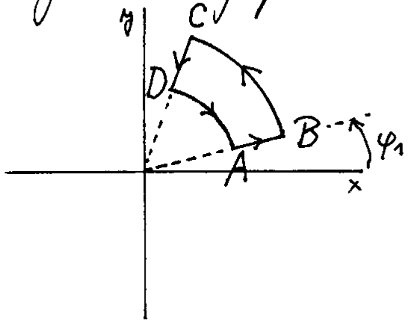
$\Longrightarrow$ důležitý člen pro rez_n,
ostatní členy k $\oint$ nepřispívají.

V případě $f(z) = \frac{1}{z}$ je $a_{-1} = 1$, jiný pól $f(z)$ nemá

tedy $\oint\limits_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$ pokud se uvnitř C nachází $z_1 = 0$ (pól)

Pokud se tam pól nenachází, tj uvnitř křivky je funkce všude holomorfní, je $\oint f(z)\,dz = 0$.

Jednoduchý příklad:



$f(z) = \frac{1}{z}$

křivka složená z úseků

AB $r = r_1 \to r_2$, φ_1

BC r_2, $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$

CD $r = r_2 \to r_1$, φ_2

DA r_1, $\varphi = \varphi_2 \to \varphi_1$

$z = r \cdot e^{i\varphi}$ $\qquad dz = e^{i\varphi} dr + i r e^{i\varphi} d\varphi$

v části AB $d\varphi = 0$

v části BC $dr = 0$

$$\oint\limits_{ABCDA} \frac{dz}{z} = \int\limits_{AB} \frac{e^{i\varphi} dr}{r \cdot e^{i\varphi}} + \int\limits_{BC} \frac{i r e^{i\varphi} d\varphi}{r \cdot e^{i\varphi}} + \int\limits_{CD} \frac{e^{i\varphi} dr}{r \cdot e^{i\varphi}} +$$

$$+ \int\limits_{DA} \frac{i r e^{i\varphi} d\varphi}{r \cdot e^{i\varphi}} = \ln \frac{r_2}{r_1} + i(\varphi_2 - \varphi_1) + \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\varphi_1 - \varphi_2) =$$

$= 0$ když uvnitř ABCDA není pól

Laurentův rozvoj kolem bodu z_0

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{hlavní část řady}} + a_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{regulární část řady}}$$

hlavní část řady (funkce) (principal part) $n = 1, 2, \ldots$

regulární část řady

Konvergence: hlavní část vně nějaké kružnice
$|z-z_0| > r_1$
regulární část uvnitř jiné kružnice
$|z-z_0| < r_2$

V mezikruží mezi r_1 a r_2: řada určuje holomorfní funkci.

Důležité případy: rozvoj kolem izolovaného singulárního bodu.

Když $a_{-l} = 0$ pro všechna $l > k$: $f(z)$ má v z_0 pól
$a_{-k} \neq 0$ k-tého řádu

$k = 1$ jednoduchý pól

Pro nás důležité funkce s několika jednoduchými póly, např.:

$$\frac{1}{z^2+bz+c} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}, \quad \text{póly } z_1, z_2$$

pro $b^2 > 4ac$ reálná $z_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}$ zde $a = 1$

pro $b^2 < 4ac$ komplexní $z_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm i\sqrt{ac - \frac{b^2}{4}}$

Reziduové věty použijeme např. k výpočtu integrálu typu Fourierovy transformace $FT\{f_\omega(\omega)\} \to f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0+i\gamma}\,d\omega$$

zde ω reálné, pro příklad $\omega_0, \gamma > 0$

Rozšíříme do komplexní roviny $\omega \to z = \omega + iy$

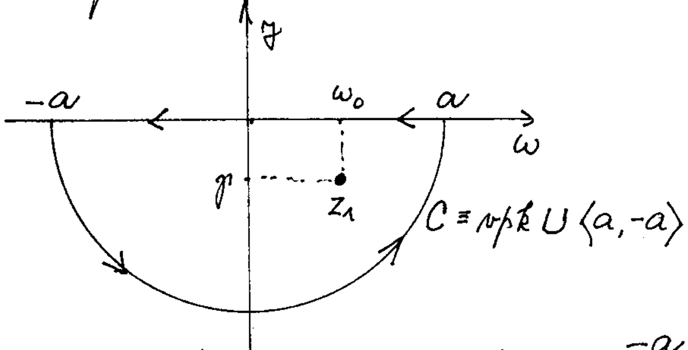
Pól $z_1 = \omega_0 - i\gamma$ leží v dolní komplexní polorovině $y<0$

$$\oint_C \frac{e^{-izt}}{z-\omega_0+i\gamma}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{rez}(z_1)\,; \quad e^{-izt} = e^{-i\omega t}\cdot e^{yt}$$

$$\mathrm{rez}(z_1) = \frac{e^{-izt}}{z-z_1}\cdot(z-z_1)\Big|_{z=z_1} = e^{-iz_1 t} = e^{-i\omega_0 t}\cdot e^{-\gamma t}$$

Aby bylo možno reziduovou větu použít i pro velké $|z|$, potřebujeme, aby integrand klesal při $|z|\to\infty$.
To je možné jen při $e^{yt} \to 0$, tedy $t>0$, $y<0$
Pak odhad integrálu na velké půlkružnici vpk

$$\int_{vpk} \frac{e^{-izt}}{z-\omega_0+i\gamma}\,dz \approx \underset{\text{délka}}{\pi|z|}\cdot\frac{e^{yt}}{|z|} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0 \quad \text{při } t>0,\ y<0$$



$$\oint_C \frac{e^{-izt}}{z-z_1}\,dz = \int_{vpk}\frac{e^{-izt}}{z-z_1}\,dz + \int_a^{-a}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0+i\gamma}\,d\omega = 2\pi i\, e^{-\gamma t} e^{-i\omega_0 t}$$

pro $t>0$

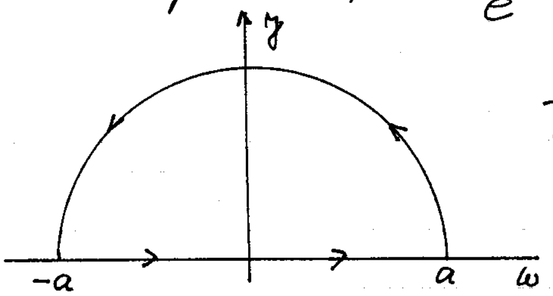
V limitě $a \to \infty$ (a je zároveň poloměr velké půlkružnice)

$$\int \frac{e^{-izt}}{z-z_1}\,dz \longrightarrow 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0+i\gamma}\,d\omega \longrightarrow -2\pi i\, e^{-\gamma t} e^{-i\omega_0 t} \qquad t>0$$

Pro případ $t<0$ je vhodné se obrátit k horní komplexní polorovině, kde $e^{-izt} = e^{-i\omega t}\cdot e^{yt} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$

Tam žádný pól není.



$$\oint \frac{e^{-izt}}{z-z_1}\,dz = 0$$

$$\int_{vpk} \frac{e^{-izt}}{z-z_1}\,dz \longrightarrow 0 \quad \text{pro } t<0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0+i\gamma}\,d\omega = 0 \quad \text{pro } t<0$$

Cauchyova integrální formule

$f(z)$ holomorfní uvnitř C, z_0 uvnitř C

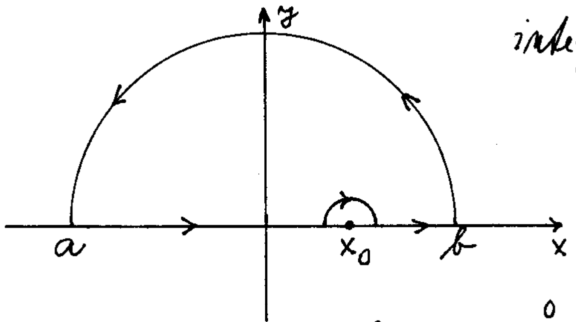
$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ holomorfní kromě bodu z_0, kde je jednoduchý pól

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

Co když je z_0 na integrační křivce?

Vezměme speciálně: část integrační křivky je částí reálné osy, $z_0 = x_0$ leží na reálné ose

$$g(z) = \frac{a_{-1}}{z - x_0} + a_0 + a_1 (z - x_0) + \dots$$



integrační křivka:
2 části reálné osy
malá půlkružnice
velká půlkružnice

malá půlkružnice $\int_m g(z)\, dz = \int_\pi^0 \underbrace{\frac{a_{-1}}{r \cdot e^{i\varphi}}}_{g(z)} \cdot \underbrace{i r e^{i\varphi}\, d\varphi}_{dz} =$

na ní $g(z) \doteq \frac{a_{-1}}{z - x_0} = \frac{a_{-1}}{r \cdot e^{i\varphi}}$

$$= -i a_{-1} \int_0^\pi d\varphi = -i a_{-1} \pi = \frac{-1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{res}(x_0)$$

celý integrál po uzavřené křivce

$$\oint g(z)dz = \underset{\substack{\text{velká}\\ \text{půlkr.}}}{\int} g(z)\,dz + \underset{\substack{\text{1. část}\\ \text{reálné osy}}}{\int_a^{x_0-\varepsilon}} g(x)\,dx + \underset{\substack{\text{malá}\\ \text{půlkruž.}}}{\int_m} g(z)\,dz + \underset{\substack{\text{2. část}\\ \text{reálné osy}}}{\int_{x_0+\varepsilon}^{b}} g(x)\,dx$$

$$\int_a^{x_0-\varepsilon} g(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} g(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathbb{P}\int_a^b g(x)\,dx$$

Cauchyova hlavní hodnota integrálu

Pokud $g(z)$ ubývá při $|z|\to\infty$ dostatečně rychle tak, že $\int_v g(z)\,dz \leq \pi\cdot R\cdot \mathrm{Max}\{g(R)\}$

např. $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}\ g(z) \leq \frac{1}{R^2}$ při $R\to\infty$

je $\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = -\int_m g(z)\,dz = i\pi f(x_0)$

Porovnat Re a Im části

$$\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\{f(x)\}}{x-x_0}\,dx = -\pi\,\mathrm{Im}\{f(x_0)\}$$

$$\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\{f(x)\}}{x-x_0}\,dx = \pi\cdot\mathrm{Re}\{f(x_0)\}$$

což aplikováno na $f(x)$ důležité při popisu elmag vln (reálná a imaginární část susceptibility, reálná a imaginární část indexu lomu atp.) jsou nazývány Kramersovy-Kronigovy relace.

Důležité: $f(z)$ je v některé komplexní polorovině regulární, tj. bez singularit; (zde v horní polorovině)

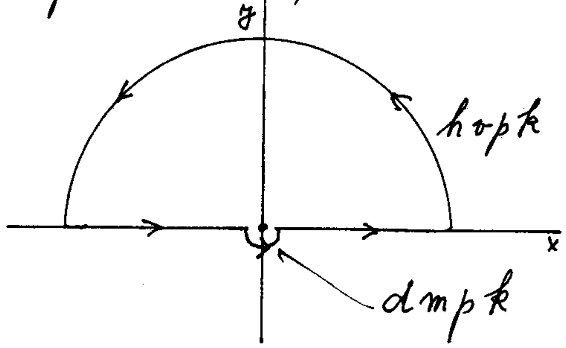
Výpočet $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$

(12)

A) pomocí reziduové věty

- $\int \frac{e^{imz}}{z}\, dz \qquad m>0$, rozvoj $e^{imz} = 1 - imz - \frac{m^2 z^2}{2} + \dots$

pól v $z=0$, reziduum 1 $\Rightarrow \oint\limits_{\substack{\text{kolem}\\ z_0=0}} \frac{e^{imz}}{z}\, dz = 2\pi i$



hopk horní velká polokružnice

dmpk dolní malá polokružnice

$|z| \to \infty: \quad \frac{e^{imx}\cdot e^{-my}}{r\cdot e^{i\varphi}} \cdot \underbrace{\pi r}_{\text{délka polokružnice}} \longrightarrow \frac{e^{imx}}{e^{i\varphi}} \cdot \pi \cdot e^{-my} \longrightarrow 0$ pro $y>0$

$\int\limits_{\text{hopk}} \frac{e^{imz}}{z}\, dz \longrightarrow 0$

pro $|z| \to 0 \quad \int\limits_{\text{dmpk}} \frac{e^{imz}}{z}\, dz = \pi i$

Po uzavřené křivce

$$\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{imx}}{x}\, dx + \int\limits_{\text{dmpk}} \frac{e^{imz}}{z}\, dz + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x}\, dx + \int\limits_{\text{hopk}} \frac{e^{imz}}{z}\, dz = 2\pi i$$

$$\mathcal{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x}\, dx + \pi i + 0 = 2\pi i$$

$$\mathcal{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x}\, dx = \pi i \quad \text{pro } m>0$$

• $m=0$: $\int \frac{1}{z}\,dz$ odpadá příjemný člen e^{-my}

$$\int\limits_{hvpk} \frac{1}{z}\,dz = \pi i \qquad \int\limits_{dmpk} \frac{1}{z}\,dz = \pi i$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \pi i + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx + \pi i = 2\pi i$$

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = 0$$ jak lze u liché funkce očekávat

• $m<0$ jednoduše substituce $z'=-z$

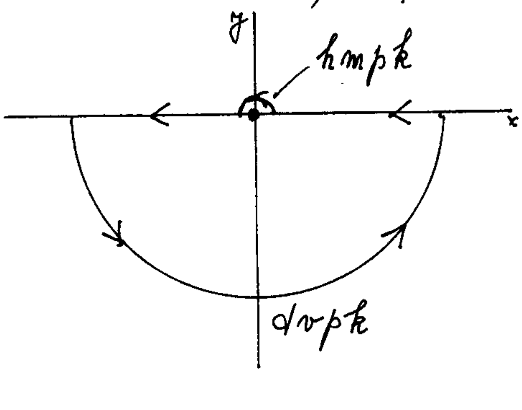
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imz}}{z}\,dz = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{-imz'}}{-z'}\,dz' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-imz'}}{-z'}\,dz' =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{im'z'}}{z'}\,dz' = -\pi i \qquad m'=-m>0$$

Totéž přes reziduovou větu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-im'z}}{z}\,dz \qquad m'>0 \qquad e^{-im'z} = 1 + im'z - \frac{m'^2 z^2}{2} + \dots$$

pól v $z=0$ reziduum 1

$$|z| \to \infty \qquad \frac{e^{-im'x}\cdot e^{m'y}}{r\cdot e^{i\varphi}}\cdot \pi \cdot r \longrightarrow 0$$ v dolní polorovině $y<0$



$$\int\limits_{dvpk} \frac{e^{-im'z}}{z}\,dz \longrightarrow 0$$

$$\int\limits_{hmpk} \frac{e^{-im'z}}{z}\,dz = \pi i$$

$$\underbrace{\int_{\text{dvpk}} \frac{e^{-im'z}}{z}\,dz}_{0} + \underbrace{\int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{e^{-im'x}}{x}\,dx}_{-\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-im'x}}{x}\,dx} + \underbrace{\int_{\text{hmpk}} \frac{e^{-im'z}}{z}\,dz}_{\pi i} + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{e^{-im'x}}{x}\,dx}_{-\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{-im'x}}{x}\,dx} = 2\pi i$$

$$\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-imx}}{x}\,dx = -\pi i \quad \text{pro } m>0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$$

B) Alternativní využití Hilbertovy transformace

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\,ds = \frac{-1}{x}\left[e^{-sx}\right]_0^{\infty} = \frac{-1}{x}(0-1) = \frac{1}{x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} e^{-sx}\,ds\right]\cdot \sin x\,dx =$$

$$= 2\cdot\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-sx}\sin x\,dx\,ds$$

„vnitřní" integrál

$$\frac{1}{2i}\int (e^{ix}-e^{-ix})e^{-sx}\,dx = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix}e^{-sx}}{-s+i} - \frac{e^{-ix}e^{-sx}}{-s-i}\right) =$$

$$= \frac{e^{-sx}}{2}\left(\frac{e^{ix}}{-1-is} - \frac{e^{-ix}}{1-is}\right) = \frac{-e^{-sx}}{2}\;\frac{(1-is)e^{ix}+(1+is)e^{-ix}}{(1+is)(1-is)} =$$

$$= -\frac{e^{-sx}}{2}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{1+s^2} - is\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{1+s^2}\right) =$$

$$= \frac{-e^{sx}}{1+s^2}\left(\cos x + s\cdot\sin x\right) + (+\ \text{integrační konst})$$

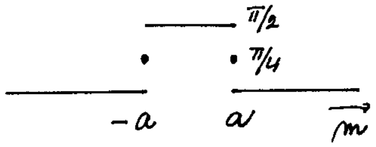
$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\sin x\,dx = -\left[\frac{e^{-sx}}{1+s^2}(\cos x + s\sin x)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+s^2} - 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{1+s^2}\,ds = 2\cdot\left[\operatorname{arctg} s\right]_0^{\infty} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

Podobně lze převodem na dvojný integrál spočítat integrál, který se objeví při zpětné Fourierově transformaci obdélníkové funkce

$$I(m)=\int_0^\infty \frac{1}{x}\sin ax \cos mx \, dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{pro } a>m>0 \text{ a pro } a>0>m>-a$$

vše pro $a>0$



$$= \frac{\pi}{4} \quad \text{pro } a=m>0 \text{ a pro } a=-m>0$$

$$= 0 \quad \text{pro } m>a>0 \text{ a pro } a>0>-a>m$$

Užijeme

$$\sin ax = \frac{1}{2i}\left(e^{iax}-e^{-iax}\right)$$

$$\cos mx = \frac{1}{2}\left(e^{imx}+e^{-imx}\right)$$

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-sx}\, ds$$

$$\sin ax \cdot \cos mx = \frac{1}{4i}\left[e^{i(a+m)x}+e^{i(a-m)x}-e^{i(m-a)x}-e^{-i(a+m)x}\right]$$

$$I(m) = I_1+I_2+I_3+I_4$$

$$I_1 = \frac{1}{4i}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{x(-s+ia+im)}\,dx\,ds = \frac{1}{4i}\int_0^\infty \frac{0-1}{-s+ia+im}\,ds$$

$$I_2 = \frac{1}{4i}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{x(-s+ia-im)}\,dx\,ds = \frac{1}{4i}\int_0^\infty \frac{0-1}{-s+ia-im}\,ds$$

$$I_3 = \frac{-1}{4i}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{x(-s-ia+im)}\,dx\,ds = \frac{-1}{4i}\int_0^\infty \frac{0-1}{-s-ia+im}\,ds$$

$$I_4 = \frac{-1}{4i}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{x(-s-ia-im)}\,dx\,ds = \frac{-1}{4i}\int_0^\infty \frac{0-1}{-s-ia-im}\,ds$$

$$I_1+I_4 = \int_0^\infty \frac{1}{4i}\left[\frac{1}{-s-ia-im}-\frac{1}{-s+ia+im}\right]ds =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{4}\left[\frac{1}{a+m-is}+\frac{1}{a+m+is}\right]ds =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{4}\,\frac{a+m+is+a+m-is}{(a+m)^2+s^2}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{a+m}{(a+m)^2+s^2}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\frac{a+m}{(a+m)^2}}{\frac{(a+m)^2}{(a+m)^2}+\frac{s^2}{(a+m)^2}}\,ds$$

• pro $a+m>0$

substituce $t = \frac{s}{a+m}$

$ds = (a+m)\,dt$

$\int_0^\infty \to \int_0^\infty$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg} t\Big]_0^\infty$$

$$I_1+I_4 = \pi/4$$

• pro $a+m=0$ $\quad a=-m \quad I_1+I_4=0$

• pro $a+m<0$ $\quad t=\frac{-s}{a+m} \quad ds = \underbrace{-(a+m)}_{>0}\,dt \quad \int_0^\infty \to \int_0^{-\infty}$

$$I_1+I_4 = -\pi/4$$

Integrály $I_2+I_3 = \frac{1}{4i}\int_0^\infty \left[\frac{1}{-s-ia+im} - \frac{1}{-s+ia-im}\right] ds =$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty \left[\frac{1}{a-m-is} + \frac{1}{a-m+is}\right] ds = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{a-m}{(a-m)^2+s^2}\,ds$$

• pro $a-m>0$ $\quad I_2+I_3 = \pi/4$

• pro $a-m=0$ $\quad I_2+I_3 = 0$

• pro $a-m<0$ $\quad I_2+I_3 = -\pi/4$

Souhrn pro $I(m) = I_1+I_2+I_3+I_4 \quad (a>0)$

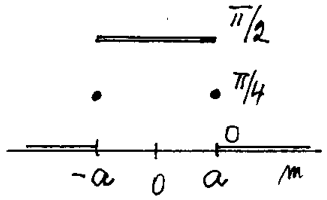
$a+m>0,\ a-m>0 \qquad I = \pi/4+\pi/4 = \pi/2$

$a+m>0,\ a-m=0 \qquad I = \pi/4+0 = \pi/4$

$a+m=0,\ a-m>0 \qquad I = 0+\pi/4 = \pi/4$

$a+m<0,\ a-m>0 \qquad I = -\pi/4+\pi/4 = 0$

$a+m>0,\ a-m<0 \qquad I = \pi/4-\pi/4 = 0$



Další využití převodu na dvojný integrál

$$\int_0^\infty s\cdot e^{-sx}\,ds = \left[s\cdot\frac{e^{-sx}}{-x}\right]_{s=0}^{s=\infty} - \int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{-x}\,ds$$

per partes $u=s \quad u'=1$

$v'=e^{-sx}$

$v=\frac{e^{-sx}}{-x}$

$$\int uv' = [uv]-\int u'v$$

$$s\cdot\frac{e^{-sx}}{x}\longrightarrow 0 \quad \text{při } s\to\infty$$

$$\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-sx}\,ds = \frac{1}{x}\left[\frac{e^{-sx}}{-x}\right]_{s=0}^{s=\infty} = \frac{1}{x^2}$$

Výpočet $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ (hodí se např. pro ověření Parsevalova teorému pro obdélník)

$$\sin^2 x = \left[\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)$$

$$\frac{1}{x^2}=\int_0^\infty s\,e^{-sx}\,ds$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(s\cdot e^{-sx}\cdot e^{2ix}-2se^{-sx}+se^{-sx-2ix}\right)dx\,ds =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^\infty\left[\frac{s}{2i-s}\left[e^{(2i-s)x}\right]_{x=0}^{x=\infty}-\frac{2s}{-s}\left[e^{-sx}\right]_0^\infty+\frac{s}{-2i-s}\left[e^{-(2i+s)x}\right]_0^\infty\right]ds$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^\infty\left[\frac{-s}{2i-s}-2+\frac{s}{2i+s}\right]ds = \frac{1}{4}\int_0^\infty\left(\frac{-s}{s-2i}+2-\frac{s}{s+2i}\right)ds$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty\frac{-s^2-2is+2s^2+8-s^2+2is}{s^2+4}\,ds$$

$$= 2\int_0^\infty\frac{ds}{s^2+4} = 2\int_0^\infty\frac{\frac{ds}{4}}{\frac{s^2}{4}+1} \qquad t=\frac{s}{2} \quad ds=2\,dt$$

$$= 2\int_0^\infty\frac{\frac{1}{2}\,dt}{t^2+1} = \int_0^\infty\frac{dt}{t^2+1} = \left[\operatorname{arctg} t\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

Výpočet $I(m) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2} \sin^2 ax \cdot \cos mx \, dx$; $a > 0$

(hodí se pro zpětnou Fourierovu transformaci trojúhelníku)

$$\frac{1}{x^2} = \int\limits_0^\infty s\, e^{-sx} ds \qquad \sin^2 ax = \left[\frac{1}{2i}\left(e^{iax} - e^{-iax}\right)\right]^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{2iax} - 2 + e^{-2iax}\right)$$

$$\cos mx = \frac{1}{2}\left(e^{imx} + e^{-imx}\right)$$

$$I(m) = \frac{-1}{8} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Big(s\, e^{x(-s+2ia+im)} + s\, e^{x(-s+2ia-im)} +$$

$$+ s\, e^{x(-s-2ia+im)} + s\, e^{x(-s-2ia-im)} - 2s\, e^{x(-s+im)} -$$

$$- 2s\, e^{x(-s-im)} \Big) dx\, ds =$$

$$= \frac{-1}{8} \int\limits_0^\infty \left(\frac{-s}{-s+2ia+im} + \frac{-s}{-s+2ia-im} + \frac{-s}{-s-2ia+im} + \frac{-s}{-s-2ia-im} \right.$$

$$\left. + \frac{2s}{-s+im} + \frac{2s}{-s-im} \right) ds$$

$$\frac{-s}{-s+2ia+im} + \frac{s}{s+2ia+im} = \frac{s}{s-i(2a+m)} + \frac{s}{s+i(2a+m)} =$$

$$= \frac{s^2 + is(2a+m) + s^2 - is(2a+m)}{s^2 + (2a+m)^2} = \frac{2s^2}{s^2 + (2a+m)^2}$$

$$\frac{-s}{-s+2ia-im} + \frac{s}{s+2ia-im} = \frac{s}{s-i(2a-m)} + \frac{s}{s+i(2a+m)} =$$

$$= \frac{s^2 + is(2a-m) + s^2 - is(2a-m)}{s^2 + (2a-m)^2} = \frac{2s^2}{s^2 + (2a-m)^2}$$

$$\frac{-2s}{im+s} - \frac{2s}{s-im} = \frac{-2s^2 + 2sim - 2s^2 - 2sim}{s^2 + m^2} = \frac{-4s^2}{s^2 + m^2}$$

$$I(m) = \frac{-1}{8} \int\limits_0^\infty \left(\frac{2s^2}{s^2 + (2a+m)^2} + \frac{2s^2}{s^2 + (2a-m)^2} - \frac{4s^2}{s^2 + m^2} \right) ds$$

Integrály typu $\int_0^\infty \frac{s^2}{s^2+A^2}\,ds = \int_0^\infty \left(1-\frac{A^2}{s^2+A^2}\right) ds =$

$$= \int_0^\infty ds - \int_0^\infty \frac{A^3\,dt}{t^2A^2+A^2} = \int_0^\infty ds - \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = -\left[\operatorname{arctg} t\right]_0^\infty + \int_0^\infty ds$$

$$= \int_0^\infty ds - \frac{\pi}{2}\cdot|A|$$

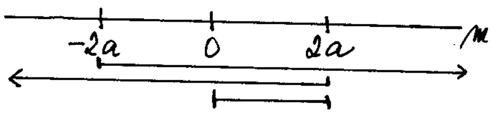
kde $A = 2a+m$
$2a-m$
m

$$I(m) = -\frac{1}{4}\int_0^\infty ds + \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot|2a+m| - \frac{1}{4}\int_0^\infty ds + \frac{\pi}{8}|2a-m| +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty ds - \frac{\pi}{4}\cdot|m| -$$

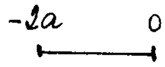
$$= \frac{\pi}{8}\left(|2a+m| + |2a-m| - 2|m|\right) \qquad a>0$$

1) $2a+m>0$
$2a-m>0$
$m>0$



$$I(m) = \frac{\pi}{8}(4a-2m) = \frac{\pi}{4}(2a-m)$$

2) $2a+m>0$
$2a-m>0$
$m<0$



$$I(m) = \frac{\pi}{8}(4a+2m) = \frac{\pi}{4}(2a-|m|)$$

1) ∪ 2) $I(m) = \frac{\pi}{4}(2a-|m|)$ pro $-2a<m<2a$

3) $m>2a>0$ $\quad 2a+m>0$
$2a-m<0$

$$I(m) = \frac{\pi}{8}(2a+m-2a+m-2m) = 0$$

4) $m<-2a<0$ $\quad 2a+m<0$
$2a-m>0$

$$I(m) = \frac{\pi}{8}(-2a-m+2a-m+2m) = 0$$

Souhrn:

Některé přítečné integrály

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+bx}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{b^2/4a^2}$$ viz str. 47

$$\int_0^\infty \frac{1}{\omega}\sin a\omega \cdot \cos \omega t\, d\omega = \frac{\pi}{2} \quad \text{pro } a>t>0$$
$$\frac{\pi}{4} \quad \text{pro } a=t>0$$
$$0 \quad \text{pro } t>a>0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0+i\gamma}\, d\omega = -2\pi i e^{-\gamma t} e^{i\omega_0 t} \quad \text{pro } t>0$$
$$= 0 \quad \text{pro } t<0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0+i\gamma}\, d\omega = -2\pi i\, e^{-\gamma t} e^{-i\omega_0 t} \quad \text{pro } t>0$$
$$= 0 \quad \text{pro } t<0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0-i\gamma}\, d\omega = 0 \quad \text{pro } t>0$$
$$= 2\pi i\, e^{\gamma t} e^{i\omega_0 t} \quad \text{pro } t<0$$

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x}\, dx = i\pi \quad \text{pro } m>0$$
$$0 \quad \text{pro } m=0$$
$$-i\pi \quad \text{pro } m<0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi \;, \quad \int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \quad m>0$$
$$= 0 \quad m=0$$
$$= -\frac{\pi}{2} \quad m<0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\sin^2 ax \cdot \cos mx\, dx = \frac{\pi}{4}\left(2a-|m|\right) \quad \text{pro } -2a<m<2a$$
$$= 0 \quad m<-2a,\; m>2a$$

Poznámky k Fourierově transformaci

rešerka česky:

http://physics.fme.vutbr.cz/files/opory/pdf/Fourier/KapFxx.pdf

autor Prof. Jiří Komrska $xx = 00$ až 20

obsah na …/Fourier/Main.pdf

jednodušeji základy: Peatross Ware, odd. 0.4

zde: pro jednoduchost jednorozměrná FT

pro přehled předsta[v] sdružené proměnné $\omega \leftrightarrow t$ (kruh. frek. čas)

1) rozvoj periodických funkcí $\omega_n = n \cdot \Delta\omega > 0$ kladné frekvence

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t \right), \quad \text{perioda } \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

$$f(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) \qquad a_0 \text{ význam konstantní složky}$$

sudá funkce $f(-t) = f(t) \Rightarrow b_n = 0$ jen kosinová řada

lichá funkce $f(-t) = -f(t) \Rightarrow a_n = 0$ jen sinová řada

$$\cos \omega_n t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}\right)$$

$$\sin \omega_n t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}\right)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2}\left(e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}\right) \right]$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - i b_n) e^{i\omega_n t} + \frac{1}{2}(a_n + i b_n) e^{-i\omega_n t} \right]$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-i\omega_n t} + \underbrace{\sum_{n'=1}^{\infty} c_{n'} e^{+i\omega_{n'} t}}$$

změnit pojmenování sčítacího indexu $n' = -n$

$$-\omega_{n'} = -n' \cdot \Delta\omega < 0$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n>0}\, e^{-i\omega_n t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{n<0}\, e^{-i\omega_n t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{-i\omega_n t} \qquad \text{kde } c_n = \tfrac{1}{2}(a_n + i b_n) \text{ pro } n>0$$

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \tfrac{1}{2}(a_{-n} - i b_{-n}) \quad n<0$$

(a dále vystačíme s a_n, b_n určenými pro $n>0$)

Tak lze přejmenováním sčítacího indexu zavést záporné frekvence do fourierovských výrazů.
Volba znaménka souvisí s úmluvou: monochromatická vlna v komplexním popisu $E_0\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$.
Úmluvu je potřeba systematicky dodržovat.

2) Určení koeficientů c_n:
proveďme časovou integraci přes 1 periodu výrazu $f(t)\cdot e^{+i\omega_m t}$

$$\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(t)\cdot e^{i m\cdot\Delta\omega\cdot t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} e^{i(m-n)\cdot\Delta\omega\cdot t}\, dt$$

$$\int_{\dots} = \left[\frac{e^{i(m-n)\Delta\omega\cdot t}}{i(m-n)\Delta\omega}\right]_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} = \frac{e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}}{i(m-n)\Delta\omega} =$$

$$= \frac{2i\sin(m-n)\pi}{i(m-n)\cdot\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\,\frac{\sin(m-n)\pi}{(m-n)\cdot\pi} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\cdot\delta_{mn}$$

celý výraz $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\frac{2\pi}{\Delta\omega}\cdot\delta_{mn} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\cdot c_m$

tj. $c_m = \underbrace{\frac{\Delta\omega}{2\pi}}_{1/T \text{ perioda}} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(t') \, e^{i m \Delta\omega t'} \, dt'$

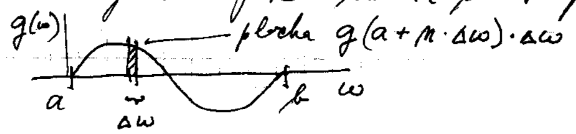
volba znaménka opačná než v rozvoji $f(t) = \sum c_m e^{-i\omega_m t}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(t') \, e^{i n \Delta\omega t'} dt' \right] e^{-i n \cdot \Delta\omega t}$$

3) neperiodické funkce $T \to \infty$, $\Delta\omega \to 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Delta\omega \cdot e^{-i n \Delta\omega t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \, e^{+i n \Delta\omega t'} dt' \right]$$

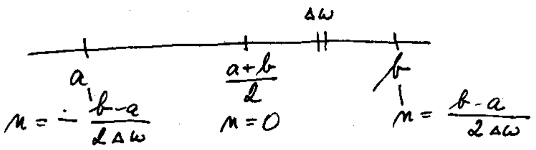
Riemannovo zavedení integrálu jako limita součtu ploch obdélníčků



$$\int_a^b g(\omega) \, d\omega = \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=0}^{\frac{b-a}{\Delta\omega}} g(a + \underbrace{n \cdot \Delta\omega}) \cdot \Delta\omega$$

zesymetrizování kolem středu intervalu $\langle a, b \rangle$

$$\int_a^b g(\omega) d\omega = \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\frac{b-a}{2\Delta\omega}}^{n=\frac{b-a}{2\Delta\omega}} g\left(\frac{a+b}{2} + n \cdot \Delta\omega\right) \cdot \Delta\omega$$



$a \to -\infty$, $b \to \infty$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \, d\omega = \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n \cdot \Delta\omega) \cdot \Delta\omega$

což výše uvedený tvar pro $f(t)$ obsahuje

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{i\omega t'} dt' \right] e^{-i\omega t} d\omega$$

rozdělení koeficientu $\frac{1}{2\pi}$ dáno úmluvou, např. "symetricky"

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega$$

kde $$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{i\omega t'} dt'$$

$f_\omega(\omega)$ velikost a fáze! příspěvků monochromatických vln k celkovému poli

- Vyjádření přes frekvence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\omega = 2\pi\nu$$
$$d\omega = 2\pi\, d\nu$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{2\pi i\nu t'} dt' \right] e^{-2\pi i\nu t} \cdot 2\pi \cdot d\nu$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{2\pi i\nu t'} dt' \right] e^{-2\pi i\nu t} d\nu$$

Kosinová a sinová Fourierova transformace reálné funkce

$f(t)$ reálná $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ existuje

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{+i\omega t'} dt' = \underbrace{f_\omega^R}_{\text{reálná}} + i \underbrace{f_\omega^I}_{\text{imaginární část}}$$

$$f_\omega^R(-\omega) = f_\omega^R(\omega) \qquad f_\omega^I(-\omega) = -f_\omega^I(\omega)$$

$$\cos(-\omega t) = \cos \omega t \qquad \sin(-\omega t) = -\sin \omega t$$

Takže pro reálnou $f(t)$ je celá informace o Fourierově rozkladu obsažena v $f_\omega(\omega)$ pro $\omega \geq 0$

$$\sqrt{2\pi} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_\omega^R + i f_\omega^I)(\cos \omega t - i \sin \omega t)\, d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f_\omega^R \cos \omega t\, d\omega + \int_{0}^{\infty} f_\omega^R \cos \omega t\, d\omega +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} i f_\omega^I \cos \omega t\, d\omega + \int_{0}^{\infty} i f_\omega^I \cos \omega t\, d\omega -$$

$$- \int_{-\infty}^{0} i f_\omega^R \sin \omega t\, d\omega - \int_{0}^{\infty} i f_\omega^R \sin \omega t\, d\omega +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} f_\omega^I \sin \omega t\, d\omega + \int_{0}^{\infty} f_\omega^I \sin \omega t\, d\omega =$$

$$= \int_{0}^{\infty} f_\omega^R \cos \omega t\, d\omega + \int_{0}^{\infty} f_\omega^R \cos \omega t\, d\omega - \int_{0}^{\infty} i f_\omega^I \cos \omega t\, d\omega +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} i f_\omega^I \cos \omega t\, d\omega + \int_{0}^{\infty} i f_\omega^R \sin \omega t\, d\omega - \int_{0}^{\infty} i f_\omega^R \sin \omega t\, d\omega +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} f_\omega^I \sin \omega t\, d\omega + \int_{0}^{\infty} f_\omega^I \sin \omega t\, d\omega =$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} f_\omega^R \cos \omega t\, d\omega + 2 \int_{0}^{\infty} f_\omega^I \sin \omega t\, d\omega$$

tj $f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^\infty f_\omega^R \cos\omega t \, d\omega + \int_0^\infty f_\omega^I \sin\omega t \, d\omega \right)$

Rovněž pomocí frekvencí $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

$$f(t) = 2 \int_0^\infty \left[A(\nu) \cos(2\pi\nu t) + B(\nu) \sin(2\pi\nu t) \right] d\nu$$

kde $A(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cos(2\pi\nu t') \, dt' \qquad \nu \geq 0$

$$B(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \sin(2\pi\nu t') \, dt'$$

Funkce $f(t)$ může obsahovat periodickou složku. Pak

$f_\omega, A_\nu, B_\nu \to \infty$ jako δ-funkce

Nebo řešit jako součet periodické a neperiodické komponenty

$$f(t) = f_P(t) + f_N(t)$$

$$f_P(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\Delta\omega \cdot t) + b_n \sin(n \cdot \Delta\omega \cdot t) \right) \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') \cos(n \cdot \Delta\omega \cdot t') \, dt'$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') \sin(n \cdot \Delta\omega \, t') \, dt'$$

$$f_N(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^\infty f_N^R(\omega) \cos\omega t \, d\omega + \int_0^\infty f_N^I(\omega) \sin\omega t \, d\omega \right)$$

Základní vlastnosti $\mathcal{F}\{f(t)\} \equiv f_\omega(\omega)$

a) lineární superposice $f(t) = a\cdot g(t) + b\cdot h(t)$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = a\cdot\mathcal{F}\{g(t)\} + b\cdot\mathcal{F}\{h(t)\}$$

b) škálování (násobení argumentu)

$$\mathcal{F}\{f(a\cdot t)\} = \frac{1}{|a|}\cdot f_\omega\left(\frac{\omega}{a}\right) \qquad f_\omega(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

c) posuv počátku proměnné t

$$\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = f_\omega(\omega)\cdot e^{i\omega\tau}$$

d) modulace

$$\mathcal{F}\{f(t)\cdot e^{-i\omega_0 t}\} = f_\omega(\omega-\omega_0)$$

e) konvoluce $f(t) = g(t) * h(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(t')\cdot h(t-t')\,dt'$

$$\mathcal{F}\{g(t)*h(t)\} = \sqrt{2\pi}\cdot g_\omega(\omega)\cdot h_\omega(\omega)$$

f) součin $f(t) = g(t)\cdot h(t)$

$$f_\omega(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\cdot h(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g_\omega(\omega')\cdot h(\omega-\omega')\,d\omega'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, g_\omega * h_\omega$$

g) autokorelace $F_A = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot f^*(t-\tau)\,dt$

$$\mathcal{F}\{F_A(\tau)\} = \sqrt{2\pi}\cdot|f_\omega(\omega)|^2$$

ad a) $\mathcal{F}\{a\cdot g(t) + b\cdot h(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left[a\cdot g(t) + b\cdot h(t)\right]\cdot e^{i\omega t}\,dt =$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{i\omega t}\,dt + \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{i\omega t}\,dt = a\cdot g_\omega(\omega) + b\cdot h_\omega(\omega) =$$

$$= a\cdot\mathcal{F}\{g(t)\} + b\cdot\mathcal{F}\{h(t)\}$$

b) Teorém o škálování (vliv násobení argumentu)

$$\mathcal{F}\{f(a\cdot t)\} = \frac{1}{|a|}\cdot f_\omega\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(at)\cdot e^{i\omega t}\,dt \qquad \text{substituce } \mu = at \quad t = \frac{\mu}{a}$$

$$dt = \frac{d\mu}{a}$$

$$\text{pro } a>0 \quad \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\, e^{i\frac{\omega\cdot\mu}{a}}\,d\mu = \frac{1}{a} f_\omega\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\text{pro } a<0 \quad \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} f(\mu)\, e^{i\frac{\omega\cdot\mu}{a}}\,d\mu = \frac{-1}{a} f_\omega\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

c) Teorém o posuvu – vliv posuvu počátku proměnné t

$$\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = f_\omega(\omega)\cdot e^{i\omega\tau}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\cdot e^{i\omega t}\,dt \qquad \text{substituce } \mu = t-\tau;\ t = \mu+\tau$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\cdot e^{i\omega\mu}\cdot e^{i\omega\tau}\,d\mu = e^{i\omega\tau}\cdot f_\omega(\omega)$$

d) Teorém o modulaci

$$\mathcal{F}\{f(t)\cdot e^{-i\omega_0 t}\} = f_\omega(\omega-\omega_0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{i(\omega-\omega_0)t}\,dt = f_\omega(\omega-\omega_0)$$

FT komplexně sdružené funkce

$$f_\omega(\omega) \equiv \mathfrak{F}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\omega t}\, dt$$

$$f_\omega^*(\omega) \equiv \left[\mathfrak{F}\left\{f(t)\right\}\right]^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\mathfrak{F}\left\{f^*(t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \cdot e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \cdot e^{-it(-\omega)}\, dt$$

$$= f_\omega^*(-\omega)$$

Podobně pro inverzní transformaci

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{f_\omega(\omega)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(\omega) \cdot e^{-i\omega t}\, d\omega = f(t)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{f_\omega^*(\omega)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega^*(\omega) \cdot e^{-i\omega t}\, d\omega = f^*(t)$$

$$\left[\mathfrak{F}^{-1}\left\{f_\omega(\omega)\right\}\right]^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega^*(\omega) \cdot e^{i\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega^*(\omega) \cdot e^{-it(-\omega)}\, d\omega = f^*(-t)$$

e) Teorém o konvoluci (FT konvoluce)

$$\mathcal{F}\{g(t)*h(t)\} = \mathcal{F}\{g(t)\}\cdot\mathcal{F}\{h(t)\}\cdot \text{koef}$$ koef $=\sqrt{2\pi}$ při ω, $=1$ při ν

kde $g(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t')\cdot h(t-t')\,dt' \equiv f(t)$ konvoluce $g(t), h(t)$

$$\mathcal{F}\{g*h\} \equiv f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t')\,h(t-t')\,dt'\right]e^{i\omega t}\,dt$$

převést na dvojný integrál substitucí $x = t'$, $y = t - t'$, $t = x + y$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot h(y)\cdot e^{i\omega(x+y)}\cdot D(t',t)\,dx\,dy$$

kde Jacobiho determinant

$$D(t',t) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t'} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t'} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,e^{i\omega x}\cdot h(y)\,e^{i\omega y}\cdot 1\cdot dx\,dy$$

což je dvojný integrál součinové funkce typu

$$\iint G(x)\cdot H(y)\,dx\,dy = \int G(x)\,dx\cdot\int H(y)\,dy$$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,e^{i\omega x}\,dx\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,e^{i\omega y}\,dy$$

$$= \sqrt{2\pi}\; g_\omega(\omega)\cdot h_\omega(\omega)$$

$$f_\nu(\nu) = g_\nu(\nu)\cdot h_\nu(\nu) \qquad f_\nu(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{2\pi i\nu t}\,dt$$

"FT konvoluce je součin" $\qquad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t')\cdot h(t-t')\,dt'$

f) Teorém o součinu (FT součinu funkcí)

zde symbolicky, pečlivě rozepsáno viz Komrska

úmluva $\mathcal{F}\{F(t)\} \equiv F_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{i\omega t} dt$ přímá FT

$\mathcal{F}^{-1}\{F_\omega(\omega)\} \equiv F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_\omega(\omega) e^{-i\omega t}$ inverzní FT

nechť $F(t) = G(t) \cdot H(t)$

Předchozí teorém o konvoluci platí pro přímou i inverzní FT, tedy též

$$\mathcal{F}^{-1}\{G_\omega(\omega) * H_\omega(\omega)\} = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}^{-1}\{G_\omega(\omega)\} \cdot \mathcal{F}^{-1}\{H_\omega(\omega)\}$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{G(t)\} \cdot \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{H(t)\} = \sqrt{2\pi}\, G(t) \cdot H(t)$$

znova aplikovat přímou FT

$$\sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}\{G(t) \cdot H(t)\} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{G_\omega(\omega) * H_\omega(\omega)\}$$

$$\mathcal{F}\{G(t) \cdot H(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} G_\omega(\omega) * H_\omega(\omega)$$

tj. $\mathcal{F}\{G(t) \cdot H(t)\} \equiv F_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega(\omega') \cdot H(\omega - \omega')\, d\omega'$

Podobně pro inverzní transformaci součinu funkcí frekvencí

$$\mathcal{F}^{-1}\{K_\omega(\omega) \cdot L_\omega(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K(t) * L(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(t') \cdot L(t - t')\, dt'$$

Shrnutí oba případy:

1) $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t')\, h(t-t')\, dt' = g * h$

$f_\omega(\omega) = \sqrt{2\pi}\; g_\omega(\omega) \cdot h_\omega(\omega)$

2) $F(t) = G(t) \cdot H(t)$

$F_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(G_\omega * H_\omega \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega(\omega') \cdot H(\omega - \omega')\, d\omega'$

g) speciální případ konvoluce: autokorelace $F_A = f^*(-t) * f(t)$

$F_A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f^*(t-\tau)\, dt$ prohození t, t' v definici konv.

$\mathcal{F}\{F_A(\tau)\} = \sqrt{2\pi}\, f_\omega(\omega) \cdot f_\omega^*(\omega) = \sqrt{2\pi}\, |f_\omega(\omega)|^2$

kde $f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$

Jedna z mnoha realizací: $f(t)$ elektrické pole záření $E(t)$

τ časové zpoždění v dvousvazkové interferenci (např. 2 ramena Michelsonova interferometru)

$F(\tau)$ interferenční příspěvek k signálu na detektoru

$|f_\omega(\omega)|^2$ spektrální hustota

změřit $F(\tau)$ a spočtením $\mathcal{F}\{F(\tau)\}$ získáme spektrální hustotu (= "spektrum")

tj. základní princip fourierovské spektroskopie

Např.: $\frac{1}{2} c\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \cdot E^*(t)\, dt$ je plošná hustota energie pulzu $[J \cdot m^{-2}]$, tj. jaká energie projde jednotkou plochy za celou dobu trvání pulzu ($\frac{1}{2}$ plyne z komplexní symboliky)

$\frac{1}{2} c\varepsilon_0\, E_\omega(\omega) \cdot E_\omega^*(\omega)$ plošná hustota spektrální hustoty energie pulzu $[J \cdot m^{-2} \cdot s]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(t) E^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} E_\omega(\omega) \cdot E_\omega^*(\omega)\, d\omega$$

h) Parsevalův teorém (verze pro pulz) - podmínky integrovatelnosti
FT autokorelace + vlastnost δ-funkce

$$|f_\omega(\omega)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathcal{F}\{F(\tau)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_\omega(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\cdot e^{i\omega\tau}\, d\tau\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau-0)} d\omega \cdot d\tau = F(0)$$

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot f^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

tj. $$\int_{-\infty}^{\infty} |f_\omega(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Když f = elektrické pole pulzu, souvisí tyto integrály s energií nesenou pulzem

Verze pro periodickou funkci – stačí integrovatelnost přes 1 periodu

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\Delta\omega t} \qquad \text{perioda } \frac{2\pi}{\Delta\omega} = T$$

na této periodě $e^{-in\Delta\omega t}$ tvoří ortogonální systém

viz bod 2) $$\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} e^{i(m-n)\Delta\omega t}\, dt = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\,\delta_{mn}$$

takže ve výrazu $\int f(t)\cdot f^*(t)\, dt$ zůstanou jen členy $c_n c_n^*$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

obzvlášť jednoduchý příklad $f(t) = \cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$$

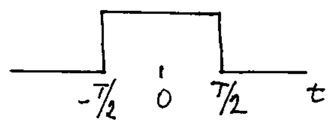
$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2\omega t \, dt = \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}(1+\cos 2\omega t)\,dt = \frac{1}{2T}\left\{[t]_{-T/2}^{T/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\omega}\int_{-2\pi}^{2\pi}\cos u \, du\right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi}[\sin u]_{-2\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = c_1^2 + c_{-1}^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

5) Fourierova transformace některých funkcí

aa) obdélník symetrický kolem $t=0$, jeho délka T



$f(t) = 0$ pro $t \leq -T/2$

$f(t) = 1 \qquad -T/2 < t \leq T/2$

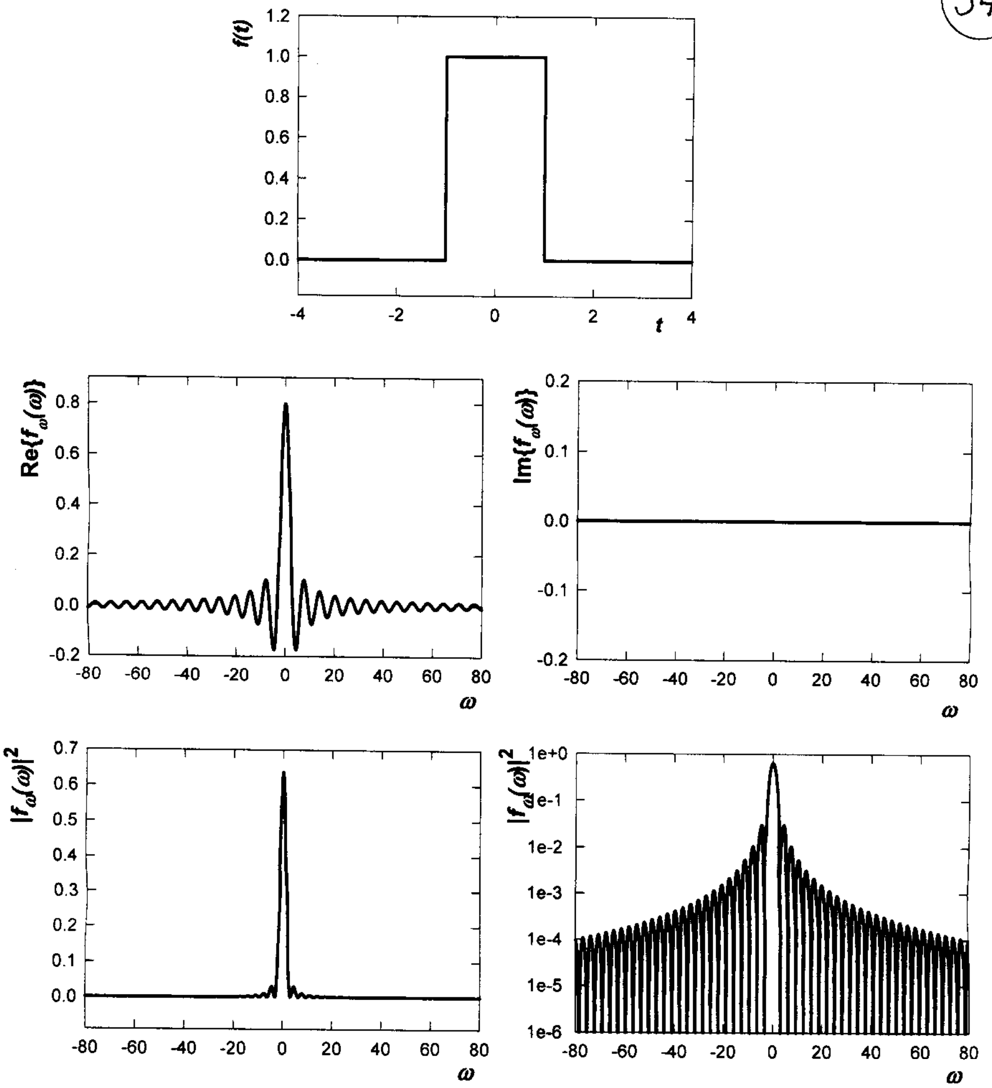
$f(t) = 0 \qquad t > T/2$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}}\left(e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}\right)$$

$$= \frac{2i}{i\omega\sqrt{2\pi}}\sin\frac{\omega T}{2} = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} = \frac{T}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega T}{2}$$

reálná funkce symetrická kolem $t=0$

$\Rightarrow$ f_ω je reálná (stačila by kosinová trsfce)



Nakresleno: funkce $f(t)$

reálná a imaginární část $f_\omega(\omega)$

"energetické" spektrum $|f_\omega(\omega)|^2$

v lineární a logaritmické škále

ab) Inverzní transformace pro obdélník symetrický kolem $t=0$

$$f_\omega(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin a\omega, \quad a = T/2$$

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_\omega(\omega) \cdot \cos\omega t \, d\omega,$$ stačí, protože $f_\omega(\omega)$ je reálná sudá

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\omega} \sin a\omega \cdot \cos\omega t \, d\omega}$$

$\frac{\pi}{2}$ pro $a > t > 0$

$\frac{\pi}{4}$ pro $a = t > 0$

0 pro $t > a > 0$

$$f(t>0) = \frac{4}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{pro} \quad 0 < t < T/2$$

$$= \frac{4}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{pro} \quad t = T/2$$

(v původním zadání obdélníka explicitně neuvedeno, je rozumné v místech nespojitosti dodat funkční hodnotu jako průměr limit zprava a zleva

$$1/2 \left(\lim_{t \to T/2^+} + \lim_{t \to T/2^-} \right)$$

$$= 0 \quad \text{pro} \quad t > T/2$$

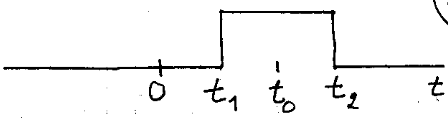
$\cos\omega t = \cos(-\omega t)$ sudá funkce, tedy znaménko t neovlivní výsledek

$$f(t<0) = 1 \quad \text{pro} \quad 0 > t > -T/2$$

$$= 1/2 \qquad t = -T/2$$

$$= 0 \qquad t < -T/2$$

ac) "posunutý" obdélník

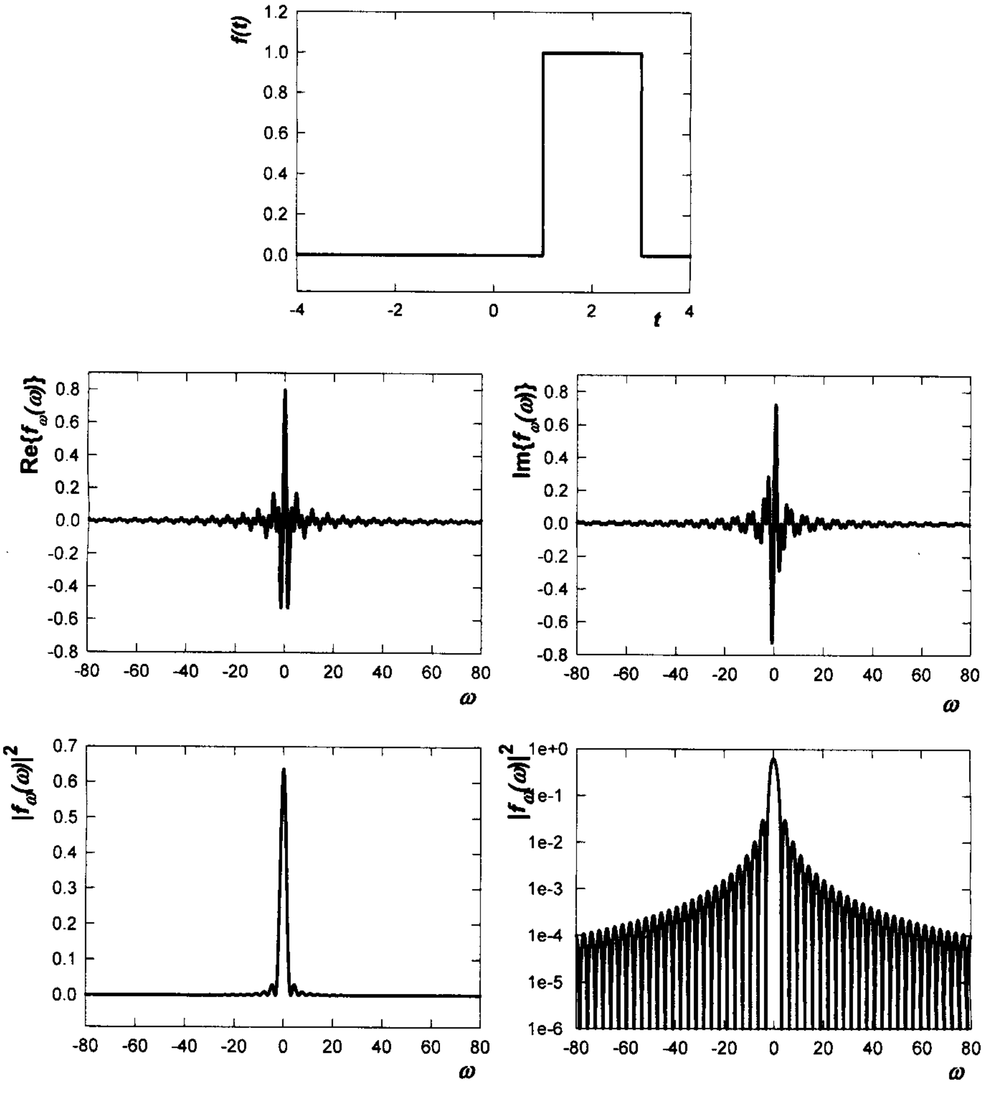


$f(t)=0$ pro $t<t_1=t_0-T/2$

$f(t)=1$ pro $t_1<t<t_2$

$f(t)=0$ pro $t>t_2=t_0+T/2$

$$f_\omega(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{i\omega t}\,dt=\frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}}\left(e^{i\omega t_0}e^{i\omega T/2}-e^{i\omega t_0}e^{-i\omega T/2}\right)=$$



$$f_\omega(\omega) = e^{i\omega t_0} \frac{2i \sin\frac{\omega T}{2}}{i\omega\sqrt{2\pi}} = e^{i\omega t_0} \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} =$$

$$= \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \cdot \operatorname{sinc}\frac{\omega T}{2} \cdot \cos\omega t_0 + i\frac{T}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\frac{\omega T}{2} \cdot \sin\omega t_0$$

$f_\omega(\omega)$ má reálnou i imaginární složku

posun v čase o t_0 se projeví vynásobením faktorem $e^{i\omega t_0}$

ale "energetická" veličina $|f_\omega(\omega)|^2$ zůstane beze změny !!

$(\sin^2\omega t_0 + \cos^2\omega t_0 = 1)$

ad) "Posunutý" a užší obdélník

"Zúžení" funkce $f(t)$ má za důsledek rozšíření funkce $f_\omega(\omega)$.

nulové body funkce $|f_\omega|^2$ $\quad \sin\frac{\omega T}{2} = 0 \quad \omega \neq 0$

$$\omega = \frac{2k\pi}{T} \quad k \text{ celé } \neq 0$$

nulové body nejbližší hlavnímu maximu

$$\omega^{(0)}_{\substack{1\\-1}} = \pm\frac{2\pi}{T}$$

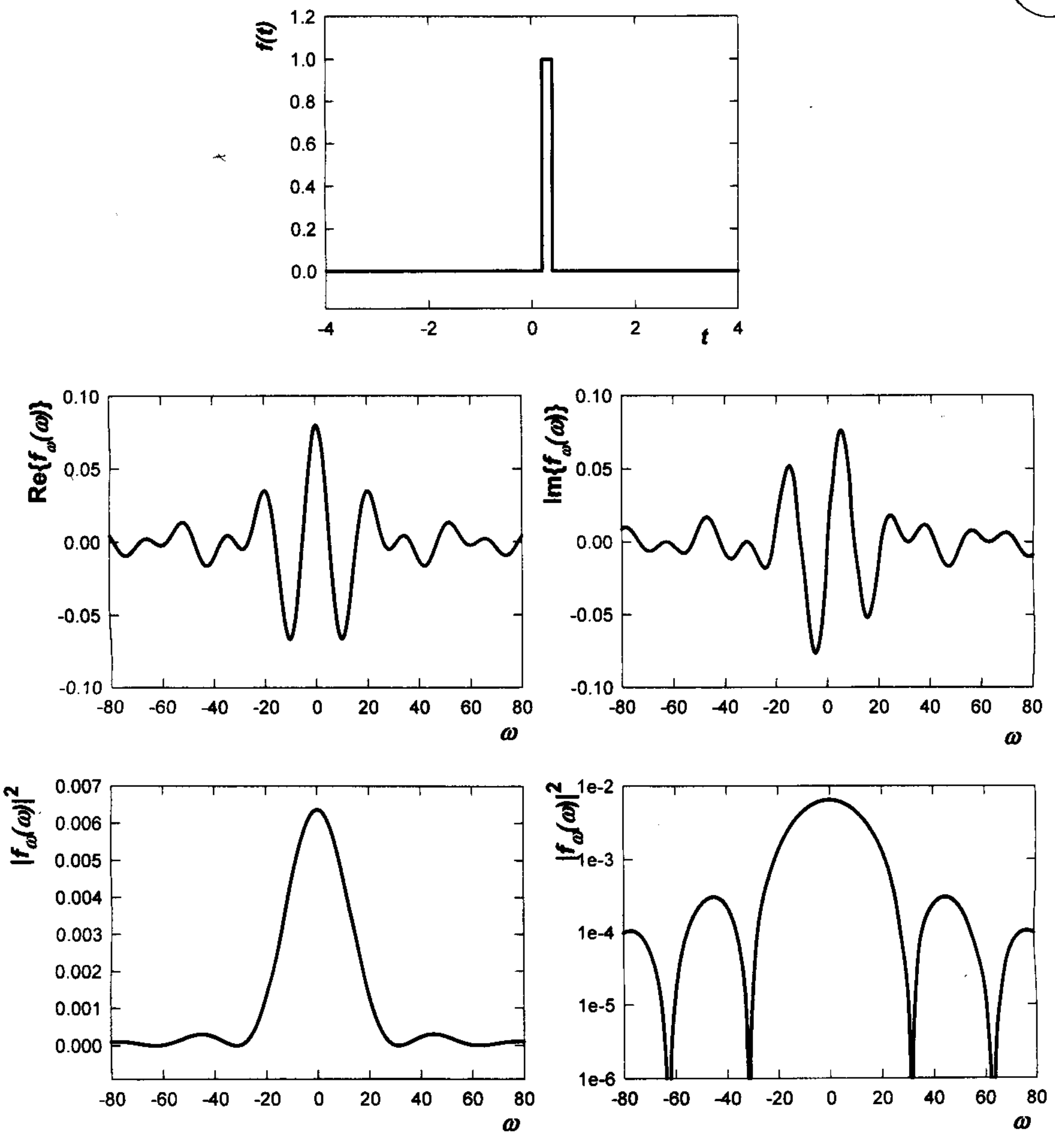
Jejich vzdálenost lze považovat za míru šířky spektrálního maxima $\quad (\omega_1^{(0)} - \omega_{-1}^{(0)}) \cdot T = 4\pi \doteq 12{,}566 \text{ rad}$

pološířka v půlce výšky: $\quad \dfrac{\sin^2\frac{\omega T}{2}}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2} \quad \Delta\omega \cdot T \doteq 2{,}783 \text{ rad}$

plná šířka v půlce výšky FWHM $\quad \Delta\omega_{1/2} \cdot T \doteq 5{,}566 \text{ rad}$

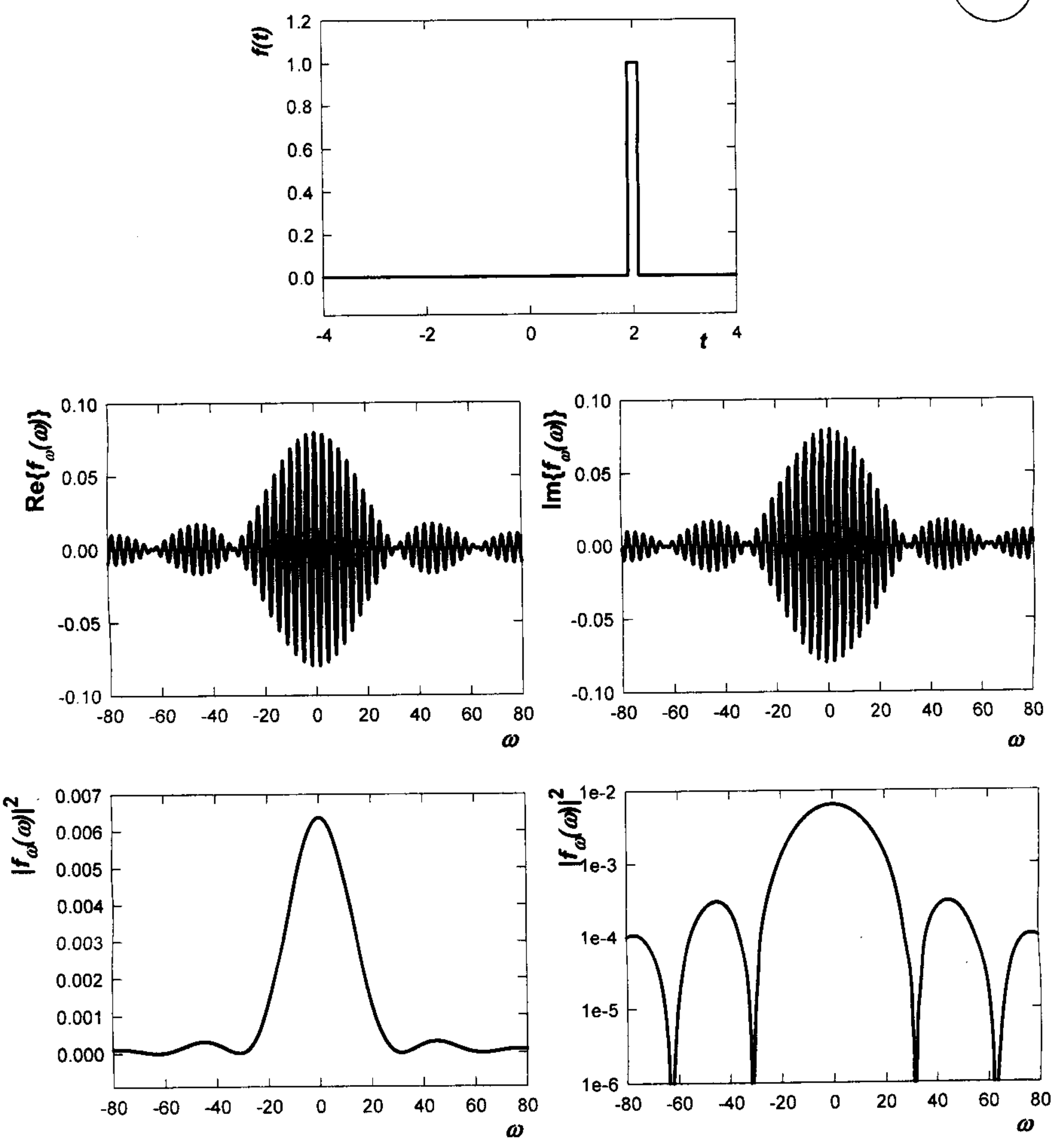
$Re\{f_\omega(\omega)\}$ může mít nulové body mnohem hustší díky $\cos\omega t_0$,

podobně $Im\{f_\omega(\omega)\}$ díky $\sin\omega t_0$



Užší obdélník nepříliš vzdálený od $t = 0$

Teorém o posuvu + nepřímá úměra mezi šířkami funkcí $f(t)$ a $f_\omega(\omega)$



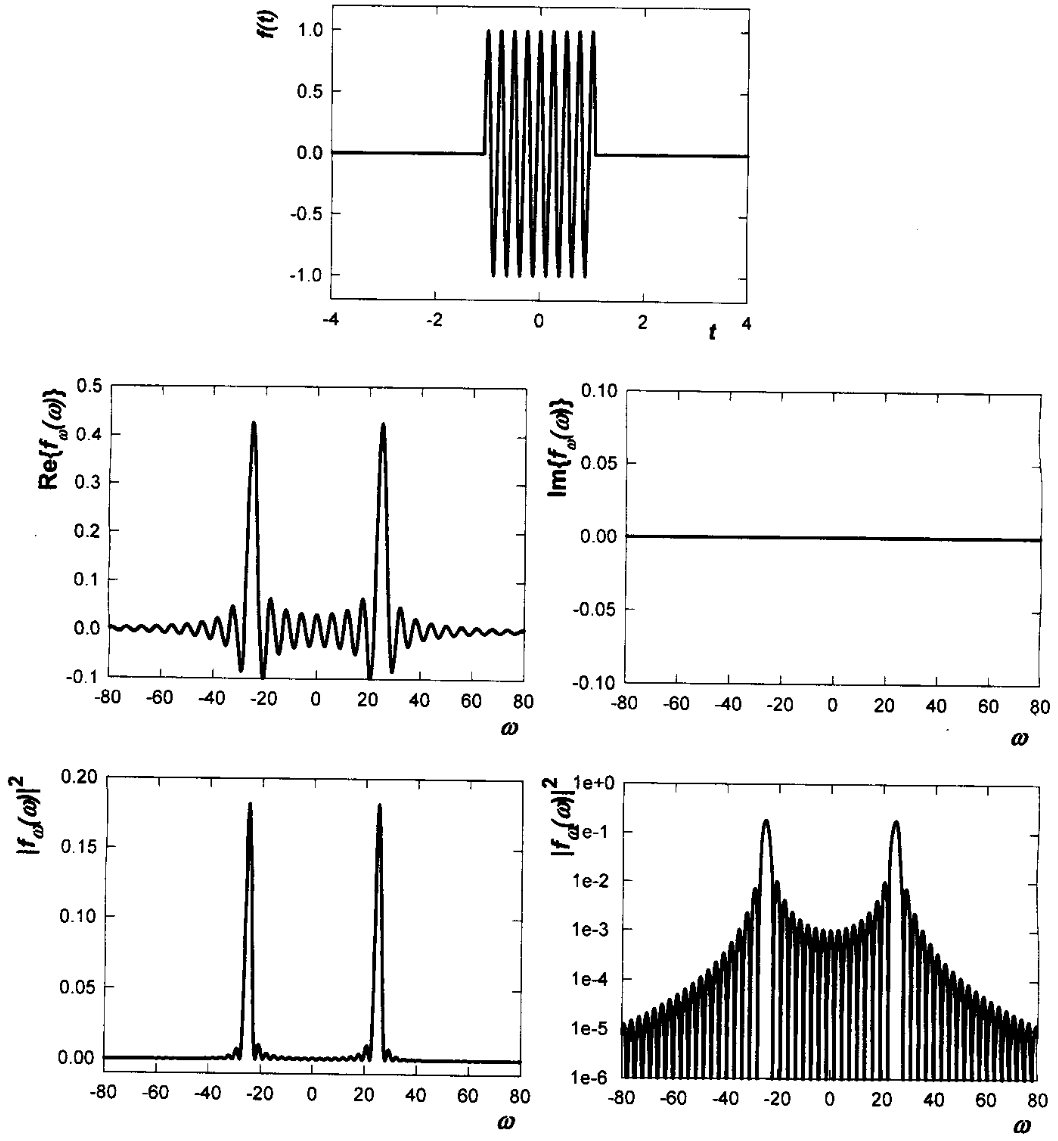
Tentýž obdélník více vzdálen od $t = 0$:

- modulace f_ω je díky faktoru $e^{i\omega t_0}$ hustší,

"energetická" $|f_\omega|^2$ beze změny v porovnání s předchozím obrázkem.

"inverze modulačního teorému" = teorém o posuvu ae) Modulovaný obdélník symetrický kolem $t = 0$

$$f(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t < -T/2$$
$$f(t) = \cos \omega_0 t \quad \text{pro} \quad -T/2 \leq t \leq T/2$$
$$f(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t > T/2$$



$T = 2,136$ $\qquad \omega_{MAX} \doteq \pm 24,94$

$\omega_0 = 25$ (kvůli spojitosti; nepodstatné, ale hezčí)

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} \left(e^{i\omega_0 t} e^{i\omega t} + e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2i(\omega+\omega_0)\sqrt{2\pi}} \left(e^{i(\omega+\omega_0)T/2} - e^{-i(\omega+\omega_0)T/2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2i(\omega-\omega_0)\sqrt{2\pi}} \left(e^{i(\omega-\omega_0)T/2} - e^{-i(\omega-\omega_0)T/2}\right)$$

$$= \frac{2i \sin\frac{(\omega+\omega_0)T}{2}}{2i(\omega+\omega_0)\sqrt{2\pi}} + \frac{2i \sin\frac{(\omega-\omega_0)T}{2}}{2i(\omega-\omega_0)\sqrt{2\pi}} = \frac{T}{2\sqrt{2\pi}}\left(\operatorname{sinc}\frac{(\omega+\omega_0)T}{2} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sinc}\frac{(\omega-\omega_0)T}{2}\right)$$

$f(t)$ reálná sudá funkce

$f_\omega(\omega)$ reálná sudá funkce, hlavní maxima pro $\omega \doteq \pm\omega_0$

af) Modulovaný obdélník antisymetrický kolem $t=0$

$f(t) = 0 \quad t < -T/2$

$f(t) = \sin\omega_0 t \quad$ pro $-T/2 \leq t \leq T/2$

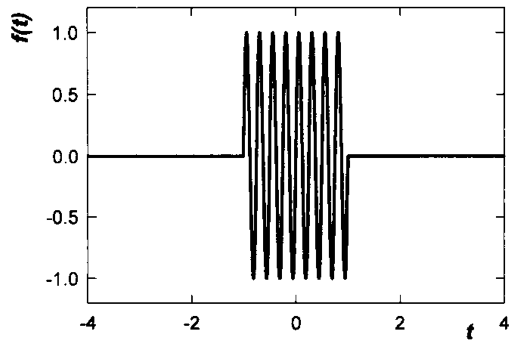
$f(t) = 0 \quad t > T/2$

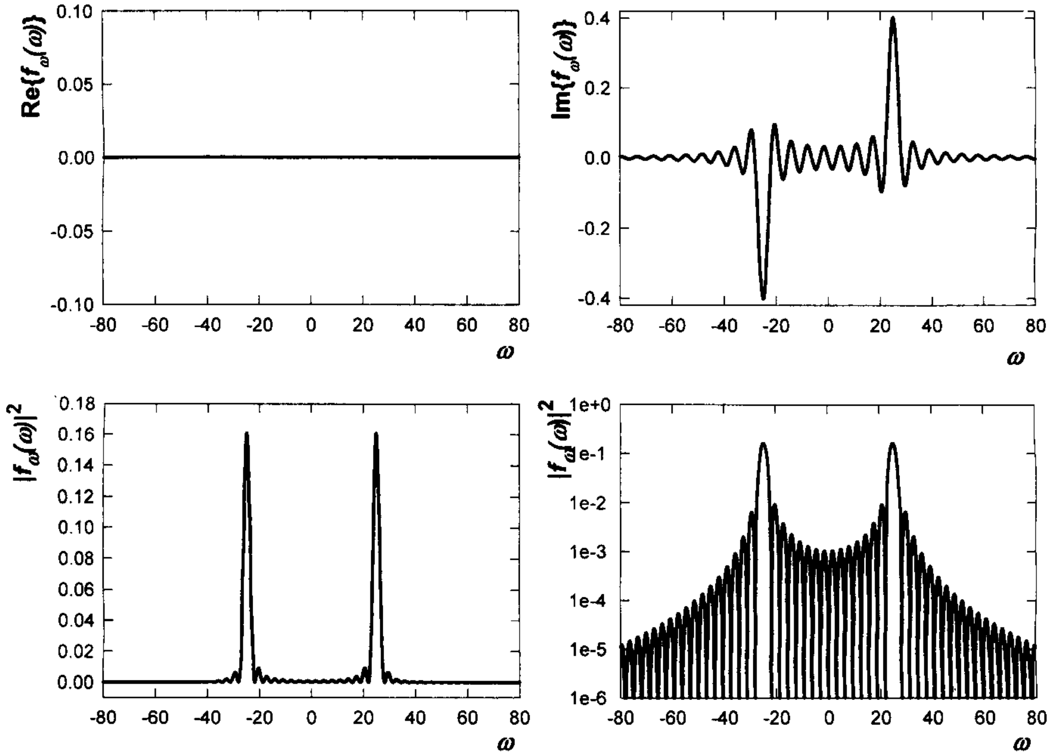
$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} \left(e^{i\omega_0 t} e^{i\omega t} - e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i(\omega+\omega_0)T/2} - e^{-i(\omega+\omega_0)T/2}}{i(\omega+\omega_0)} - \frac{e^{i(\omega-\omega_0)T/2} - \dots}{i(\omega-\omega_0)}\right]$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(\omega+\omega_0)T/2}{\omega+\omega_0} - \frac{\sin(\omega-\omega_0)T/2}{\omega-\omega_0}\right]$$





$T \doteq 2{,}01$ $\omega_0 = 25$ (kvůli spojitosti) $\omega_{MAX} \doteq \pm 24{,}94$

$f(t)$ reálná lichá funkce

$f_\omega(\omega)$ ryze imaginární lichá funkce

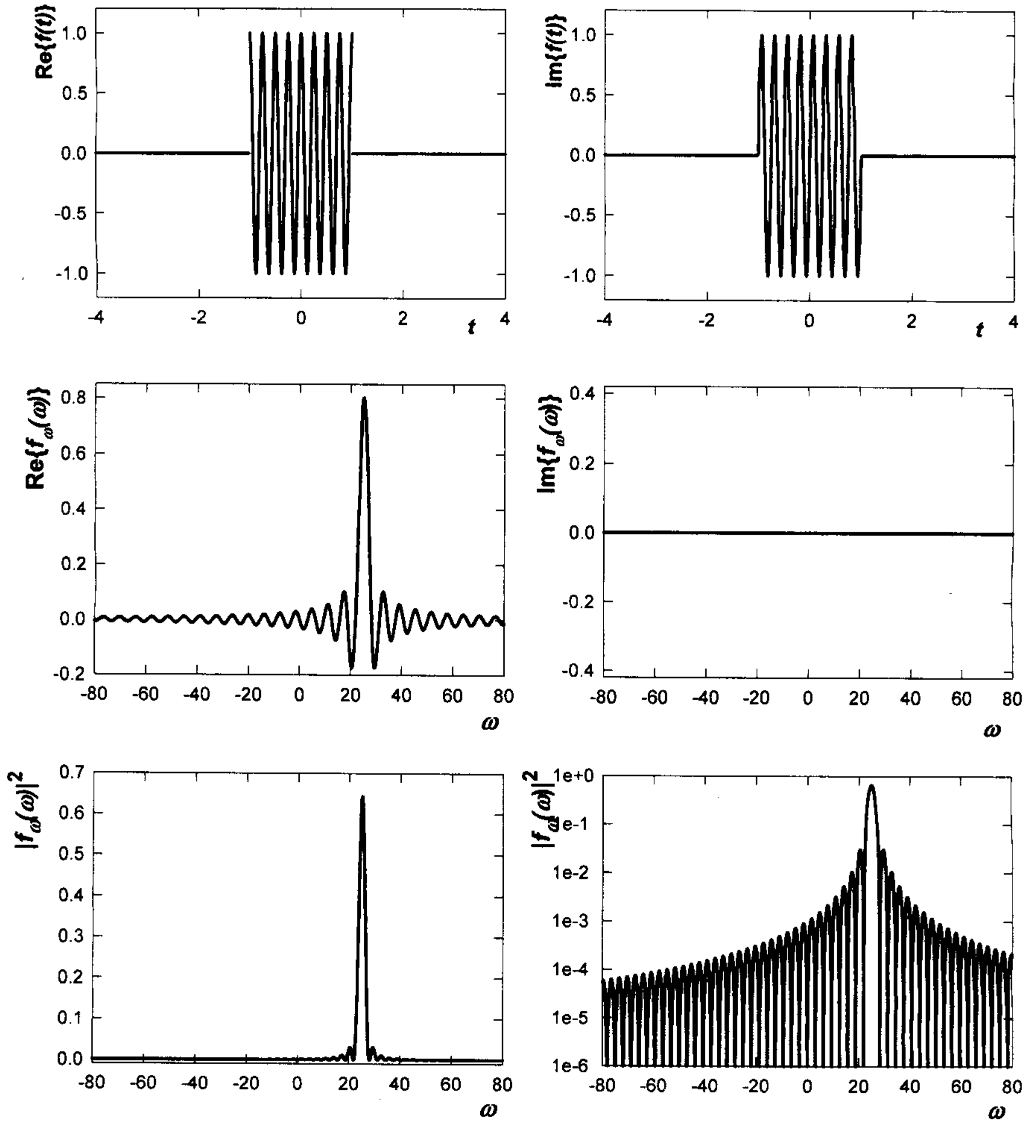
Odchylky ω_{MAX} od $\pm\omega_0$ tím větší, čím více se obě maxima ovlivňují (malé ω_0 a malé T). V optickém oboru pro úzké spektrální pásy zanedbatelné (veliké ω_0 a veliké T)

ag) Obdélník modulovaný komplexní funkcí $e^{-i\omega_0 t}$

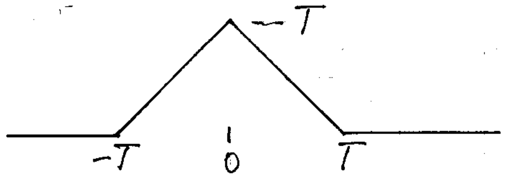
$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(\omega-\omega_0)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{i(\omega-\omega_0)\sqrt{2\pi}} \left[e^{i(\omega-\omega_0)T/2} - e^{-i(\omega-\omega_0)T/2} \right] = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \; \frac{\sin(\omega-\omega_0)T/2}{(\omega-\omega_0)T/2}$$

jediné hlavní maximum $\omega_{MAX} = \omega_0$



f a) trojúhelník symetrický kolem $t=0$,
délka $2T$, výška T



$f(t)=0$ pro $t<-T$
$f(t)=T+t$ pro $-T<t<0$
$f(t)=T-t$ pro $0<t<T$
$f(t)=0$ pro $t>T$

$$f_\omega(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-T}^{0}(T+t)\,e^{i\omega t}\,dt+\int_{0}^{T}(T-t)\,e^{i\omega t}\,dt\right]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[T\int_{-T}^{0}e^{i\omega t}dt+\int_{-T}^{0}t\cdot e^{i\omega t}dt+T\int_{0}^{T}e^{i\omega t}dt-\int_{0}^{T}t\,e^{i\omega t}dt\right]$$

$$\int \underset{u}{t}\cdot \underset{v'}{e^{i\omega t}}dt=\underset{uv}{\left[t\cdot\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\right]}\underset{-u'v}{-\int\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}dt}=\left[t\cdot\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\right]+\left[\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2}\right]$$

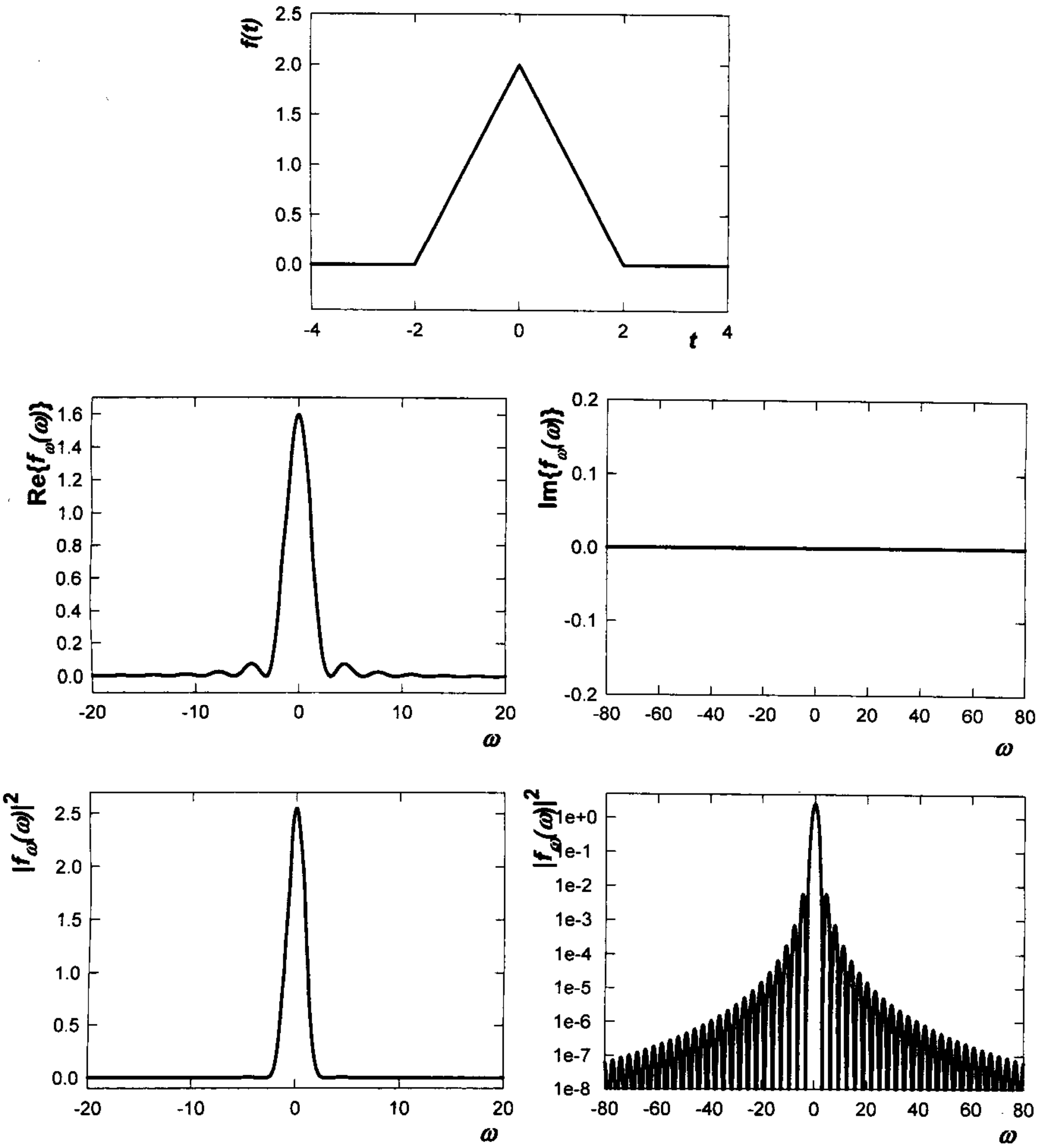
$$f_\omega(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{T\left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\right]_{-T}^{0}+\left[t\cdot\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\right]_{-T}^{0}+\left[\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2}\right]_{-T}^{0}+\right.$$
$$\left.+T\left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\right]_{0}^{T}-\left[t\cdot\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\right]_{0}^{T}-\left[\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2}\right]_{0}^{T}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[T\,\frac{1-e^{-i\omega T}+e^{i\omega t}-1}{i\omega}+\frac{T}{i\omega}\left(e^{-i\omega T}-e^{i\omega T}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\omega^2}\left(1-e^{-i\omega T}-e^{i\omega T}+1\right)\right]=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\omega^2}\left(1-\cos\omega T\right)$$

$$1-\cos\omega T=\sin^2\frac{\omega T}{2}+\cos^2\frac{\omega T}{2}-\cos\frac{\omega T}{2}\cdot\cos\frac{\omega T}{2}+\sin\frac{\omega T}{2}\cdot\sin\frac{\omega T}{2}$$
$$=2\sin^2\frac{\omega T}{2}$$

$$f_\omega(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2}{\omega^2}\cdot 2\sin^2\frac{\omega T}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,T^2\cdot\frac{4}{\omega^2T^2}\sin^2\frac{\omega T}{2}=$$

$$=\frac{T^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\operatorname{sinc}^2\frac{\omega T}{2}$$



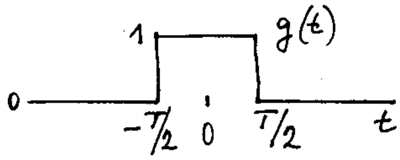
f(t)
t
Re{f_ω(ω)}
Im{f_ω(ω)}
ω
|f_ω(ω)|²

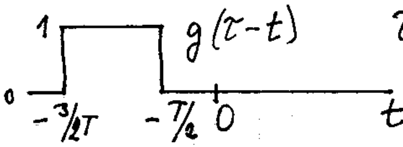
bb) Trojúhelník jako autokorelační funkce obdélníka; $f_\omega(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot |g_\omega(\omega)|^2$

$$f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot g^*(\tau - t)\, dt$$

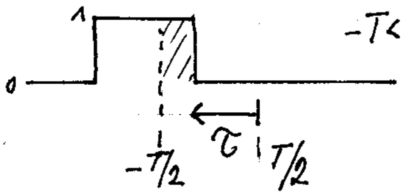
$g(t)$ obdélník šíře T

$f(t)$ trojúhelník šíře $2T$

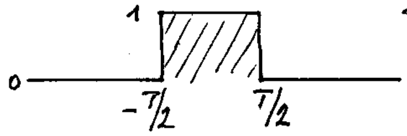




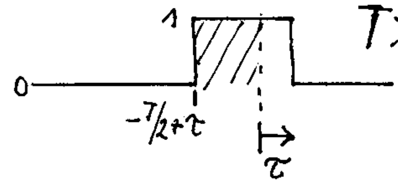
$\tau = -T \qquad f(-T) = 0$



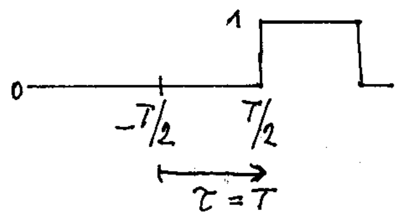
$-T < \tau < 0 \qquad f(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2+\tau} 1\, dt = \tau + T$



$\tau = 0 \qquad f(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2} 1\, dt = T$



$T > \tau > 0 \qquad f(\tau) = \int_{-T/2+\tau}^{T/2} 1\, dt = T - \tau$



$\tau = T \qquad f(T) = 0$

$$f_\omega(\omega) = \frac{T^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega T}{2}$$

$$g_\omega(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2}$$

$f_\omega(\omega) = \sqrt{2\pi}\, |g_\omega(\omega)|^2$

splněno

c a) gaussovský puls $f(t) = e^{-\frac{\gamma^2}{2}t^2}$ kolem $t = 0$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\gamma^2}{2}t^2 + i\omega t}\, dt$$

tedy integrál typu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2 + bx}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{b^2/4a^2}$

Možné odvození:

nejprve lze ukázat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ spočtením druhé mocniny integrálu v polárních souřadnicích

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

polární souřadnice $x = r \cdot \cos\alpha$ $\quad x^2 + y^2 = r^2$

$y = r \cdot \sin\alpha$ $\quad r \in (0, \infty)$

$\alpha \in (0, 2\pi)$

obecně substituce ve dvojném integrálu

$x = x(u, v)$

$y = y(u, v)$

$$\iint_M f(x, y)\, dx\, dy = \iint_N f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot |D(u,v)|\, du\, dv$$

kde $|D(u, v)|$ je absolutní hodnota Jacobiho determinantu

$$D(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

což je v polárních souřadnicích

$$D(r, \alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r \cdot \sin\alpha \\ \sin\alpha & r \cdot \cos\alpha \end{vmatrix} = r > 0$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right]^2 = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr\right] d\alpha = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

substituce $\rho = r^2$ $\quad d\rho = 2r\, dr$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right]^2 = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\rho} d\rho = -\pi \left[e^{-\rho}\right]_0^{\infty} = -\pi(0 - 1) = \pi$$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$; integrand sudá funkce $\Rightarrow \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

další substituce $s = ax - \frac{b}{2a}$ $\qquad a>0$

$$ds = a\cdot dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a^2x^2 - bx + \frac{b^2}{4a^2}\right)}\cdot a\cdot dx$$

$$a\cdot e^{\frac{-b^2}{4a^2}}\cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+bx}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+bx}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot e^{\frac{b^2}{4a^2}}$$

a platí to i pro imaginární b

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}\gamma^2 + i\omega t}\,dt \qquad a = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \quad b = i\omega$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\gamma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\gamma^2}\cdot 2} = \frac{1}{\gamma}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{2\gamma^2}} \qquad \frac{1}{a} = \sqrt{2}/\gamma$$

c) Posun středu pulzu v čase $0 \to t_0$ $\qquad f(t) = e^{-\frac{(t-t_0)^2\gamma^2}{2}}$

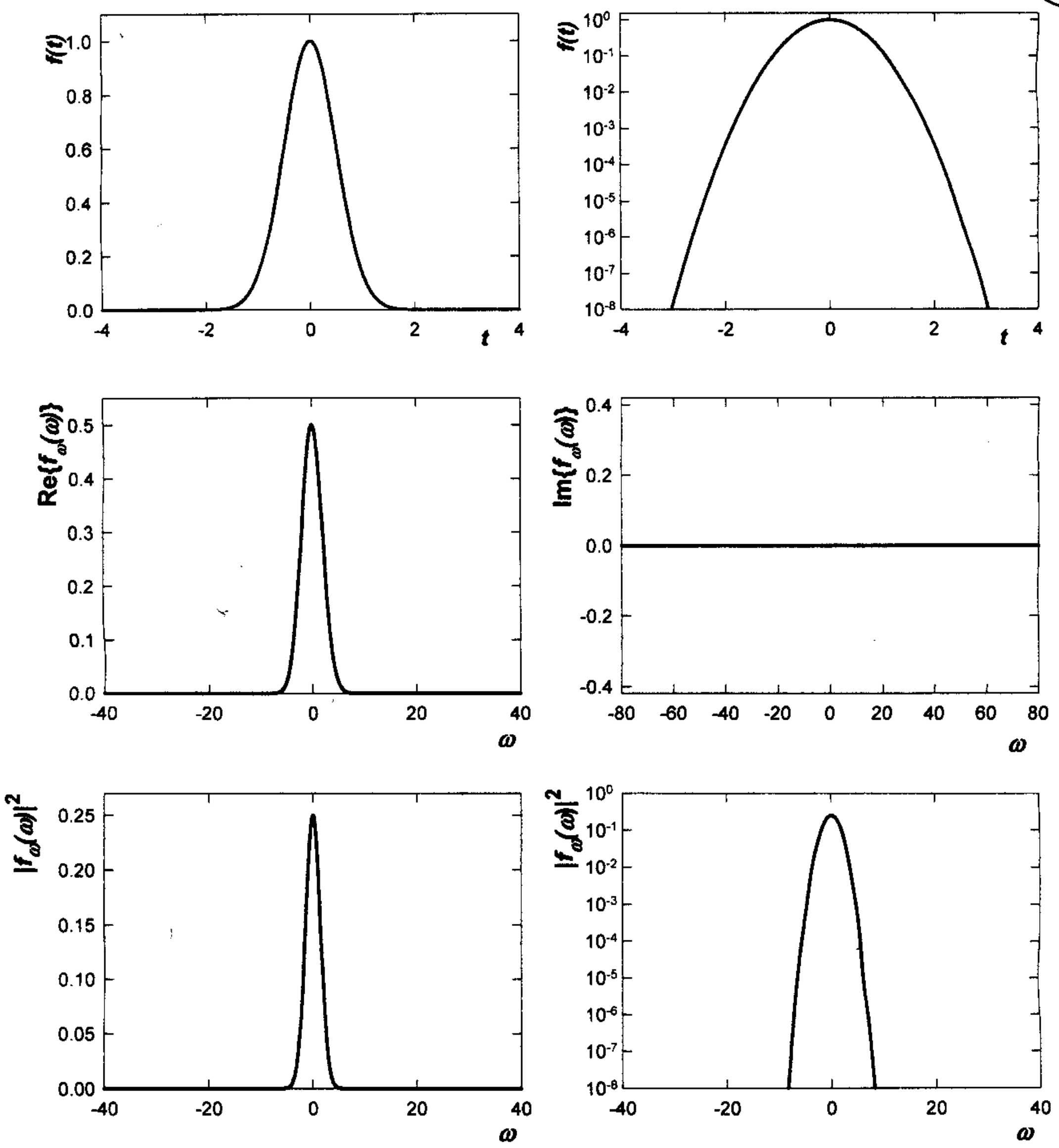
$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-t_0)^2\gamma^2}{2}} e^{i\omega t}\,dt = e^{i\omega t_0}\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t'^2\gamma^2}{2}}\cdot e^{i\omega t'}\,dt'}_{f_\omega(\omega,\, t_0=0)}$$

$$f_\omega(\omega) = \cos\omega t_0\cdot f_\omega(\omega, t_0=0) + i\sin\omega t_0\cdot f_\omega(\omega, t_0=0)$$

reálná a imaginární část modulované $\cos\omega t_0$, $\sin\omega t_0$, modulace tím hustší, čím t_0 větší.

Na $|f_\omega(\omega)|^2$ nemá vliv.

$\gamma = 2$



Maximum reálního nemodulovaného pulzu v $t = 0$

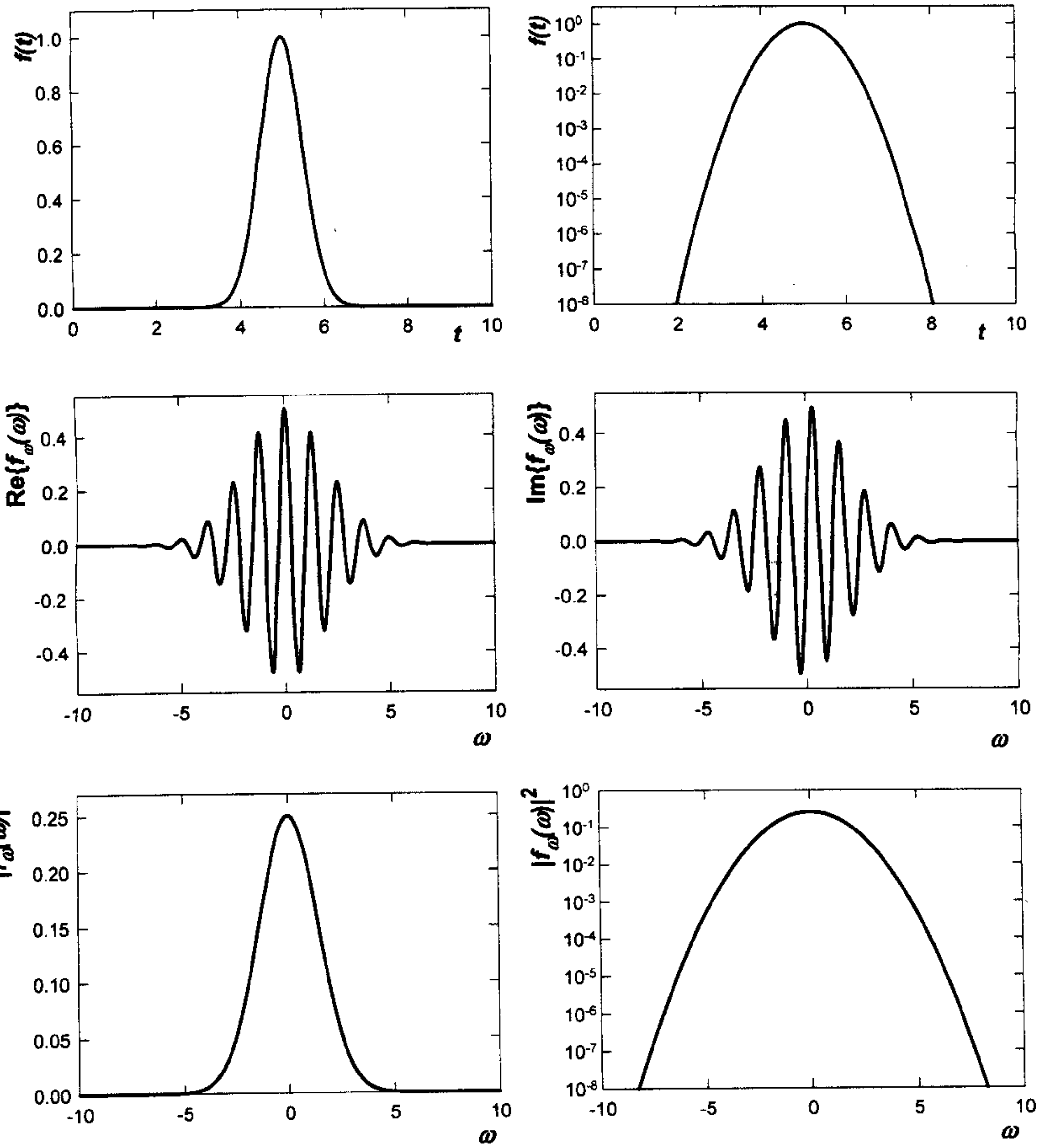
$f(t)$ symetrická kolem $t = 0 \Rightarrow Im\{f_\omega\} = 0$

žádná modulace $f(t) \Rightarrow$ maximum f_ω pro $\omega = 0$

Maximum (reálného) nemodulovaného pulsu v $t_0 = 5$,
$\gamma = 2$

modulace $\mathrm{Re}\{f_\omega\} \sim \cos \omega t_0$, $\mathrm{Im}\{f_\omega\} \sim \sin \omega t_0$

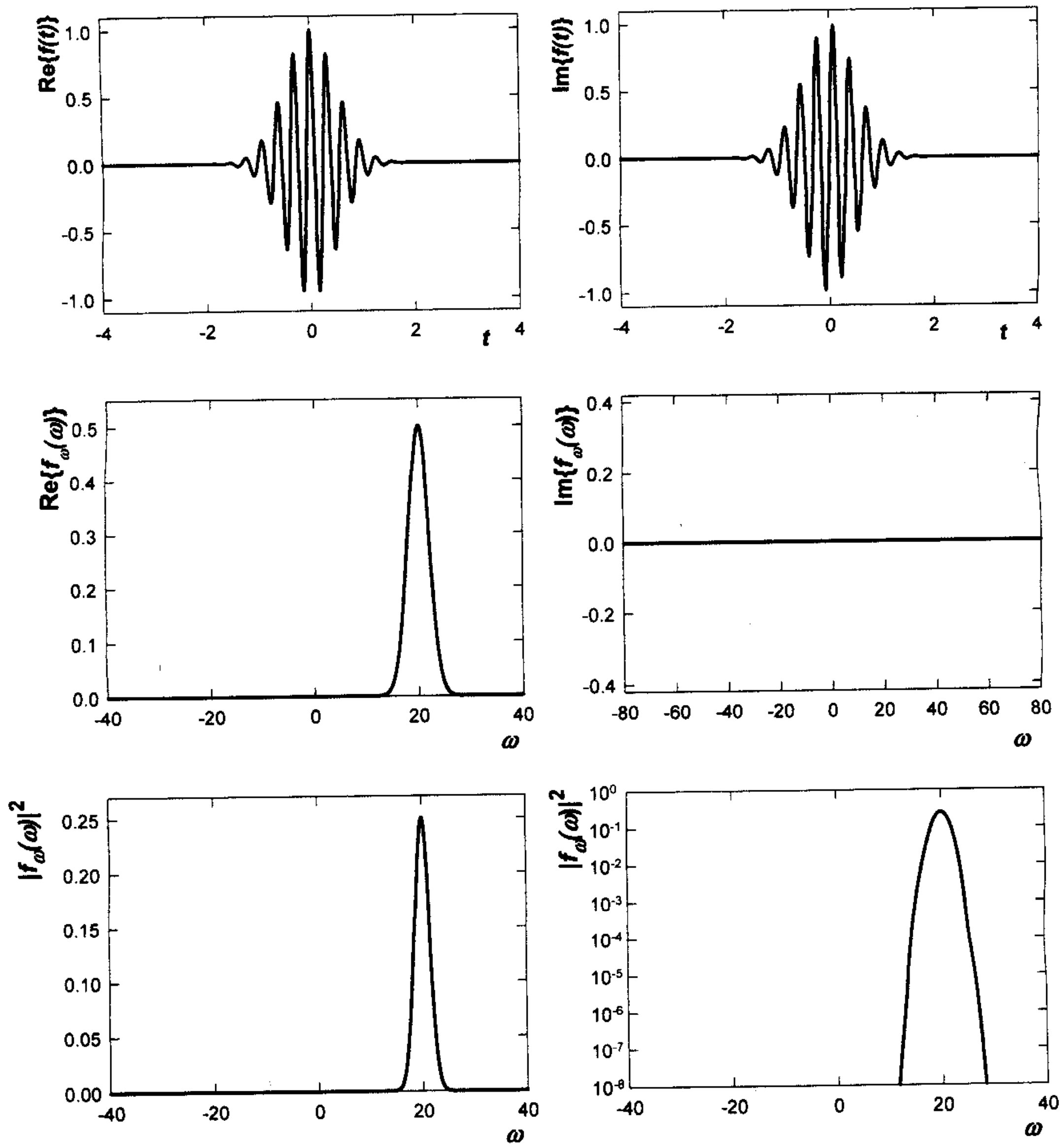
$|f_\omega|^2$ oproti $t_0 = 0$ (předchozí obr.) beze změny !



c c) gaussovský pulz modulovaný komplexní exponenciální funkcí

$$f(t) = e^{-\frac{\gamma^2}{2}t^2} \cdot e^{-i\omega_0 t}$$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 t^2/2}\, e^{i(\omega-\omega_0)t}\, dt = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{2\gamma^2}(\omega-\omega_0)^2}$$



$\omega_0 = 20 \quad \gamma = 2$

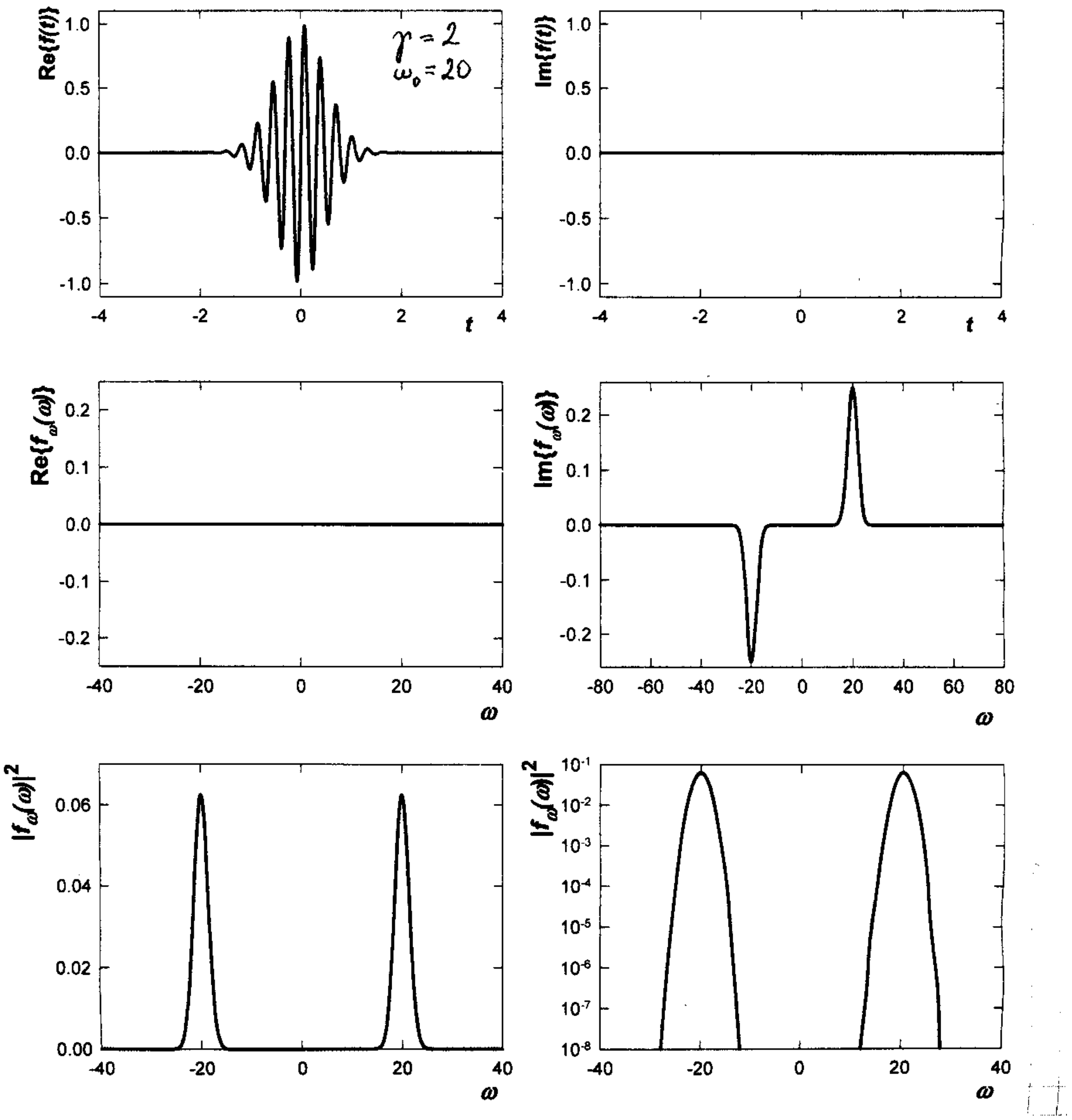
Posun maxima f_ω k ω_0.

cd) gaussovský puls modulovaný reálnou funkcí sinus (antisymetrická, lichá funkce)

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 t^2} \cdot \sin \omega_0 t = e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 t^2} \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 t^2}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right) e^{i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{i}{2\gamma}\left[e^{-\frac{1}{2\gamma^2}(\omega-\omega_0)^2} - e^{-\frac{1}{2\gamma^2}(\omega+\omega_0)^2}\right]$$

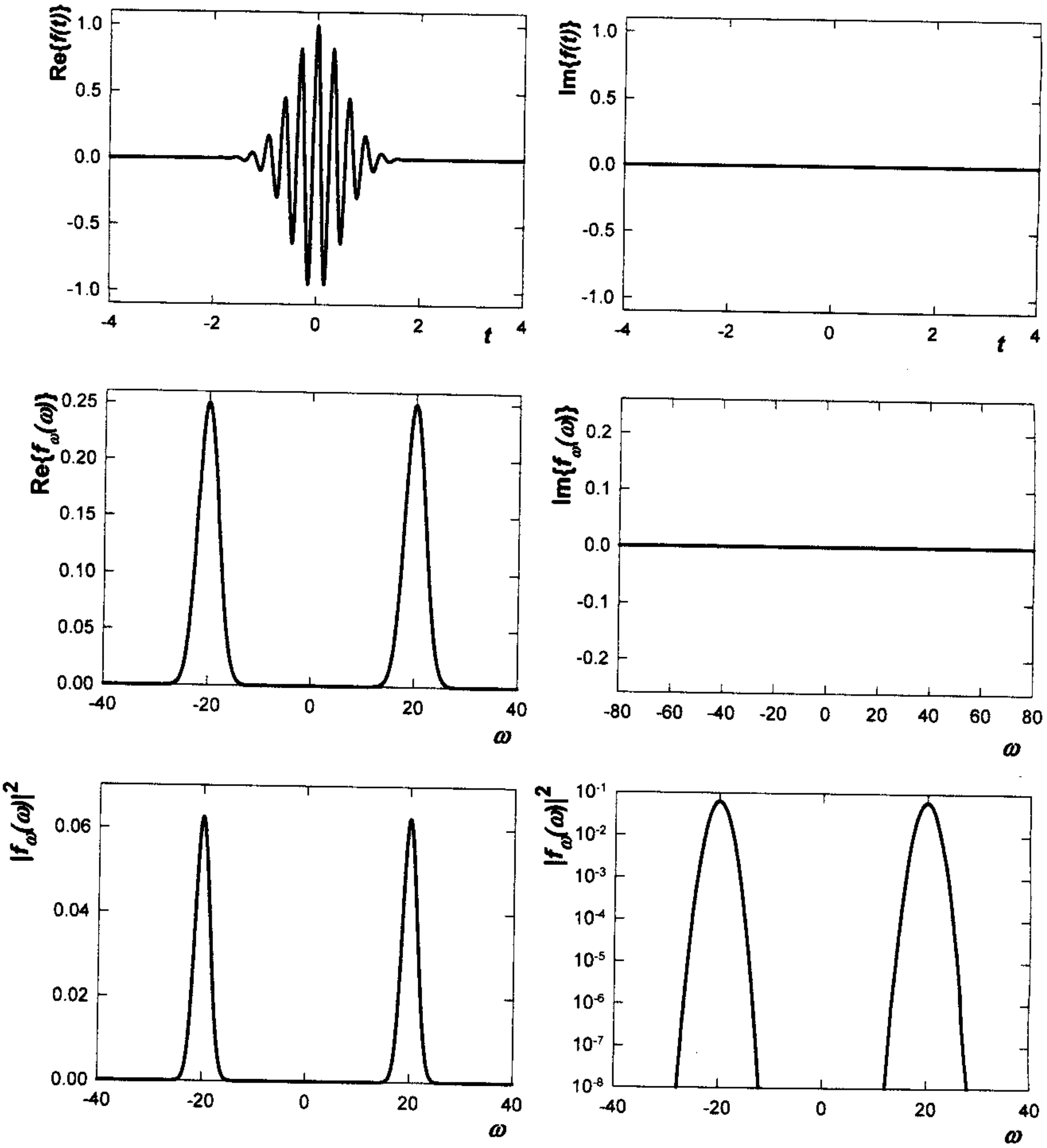


ce) gaussovský pulz modulovaný reálnou funkcí kosinus

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}p^2t^2}\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}p^2t^2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}p^2t^2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)e^{i\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2p}\left(e^{-\frac{1}{2p^2}(\omega-\omega_0)^2} + e^{-\frac{1}{2p^2}(\omega+\omega_0)^2}\right)$$



cf) gaussovský puls modulovaný funkcí kosinus s maximem v čase $t_0 \neq 0$

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}p^2(t-t_0)^2} \cdot \cos\omega_0(t-t_0) =$$
$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}p^2(t-t_0)^2} \cdot \left(e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega_0 t_0} + e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_0 t_0}\right)$$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\omega t}\, dt$$ rozdělit na $f_\omega = f_\omega^{(1)} + f_\omega^{(2)}$

$$f_\omega^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2}(t^2-2t_0t)} \cdot e^{-\frac{t_0^2 p^2}{2}} e^{-i\omega_0 t_0} e^{i\omega_0 t} e^{i\omega t}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{p^2 t_0^2}{2}} \cdot e^{-i\omega_0 t_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2}(t^2-2t_0t)} e^{i(\omega_0+\omega)t}\, dt$$

použít vzorce $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+bx}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{b^2/4a^2}$

zde $a = \frac{p}{\sqrt{2}}$, $b = p^2 t_0$

$$\frac{b^2}{4a^2} = \frac{2}{4p^2}\left[p^4 t_0^2 - (\omega+\omega_0)^2 + 2ip^2 t_0(\omega+\omega_0)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}p^2 t_0^2 - \frac{(\omega+\omega_0)^2}{2p^2} + it_0(\omega+\omega_0)$$

$$f_\omega^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}p^2t_0^2} \cdot e^{-i\omega_0 t_0} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{p} \cdot e^{\frac{1}{2}p^2t_0^2} \cdot e^{-\frac{1}{2p^2}(\omega+\omega_0)^2} \cdot e^{it_0(\omega+\omega_0)} =$$
$$= \frac{1}{2p} e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2p^2}} \cdot e^{i\omega t_0}$$

podobně $\displaystyle f_\omega^{(2)} = \frac{1}{2p} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2p^2}} \cdot e^{i\omega t_0}$

$$f_\omega = \frac{1}{2p} e^{i\omega t_0} \left[e^{-\frac{1}{2p^2}(\omega+\omega_0)^2} + e^{-\frac{1}{2p^2}(\omega-\omega_0)^2}\right]$$

dle očekávání $f_\omega(\omega, t_0) = e^{i\omega t_0} \cdot f_\omega(\omega, t_0 = 0)$

Gaussovský pulz modulovaný kosinem s maximem $t_0 \neq 0$

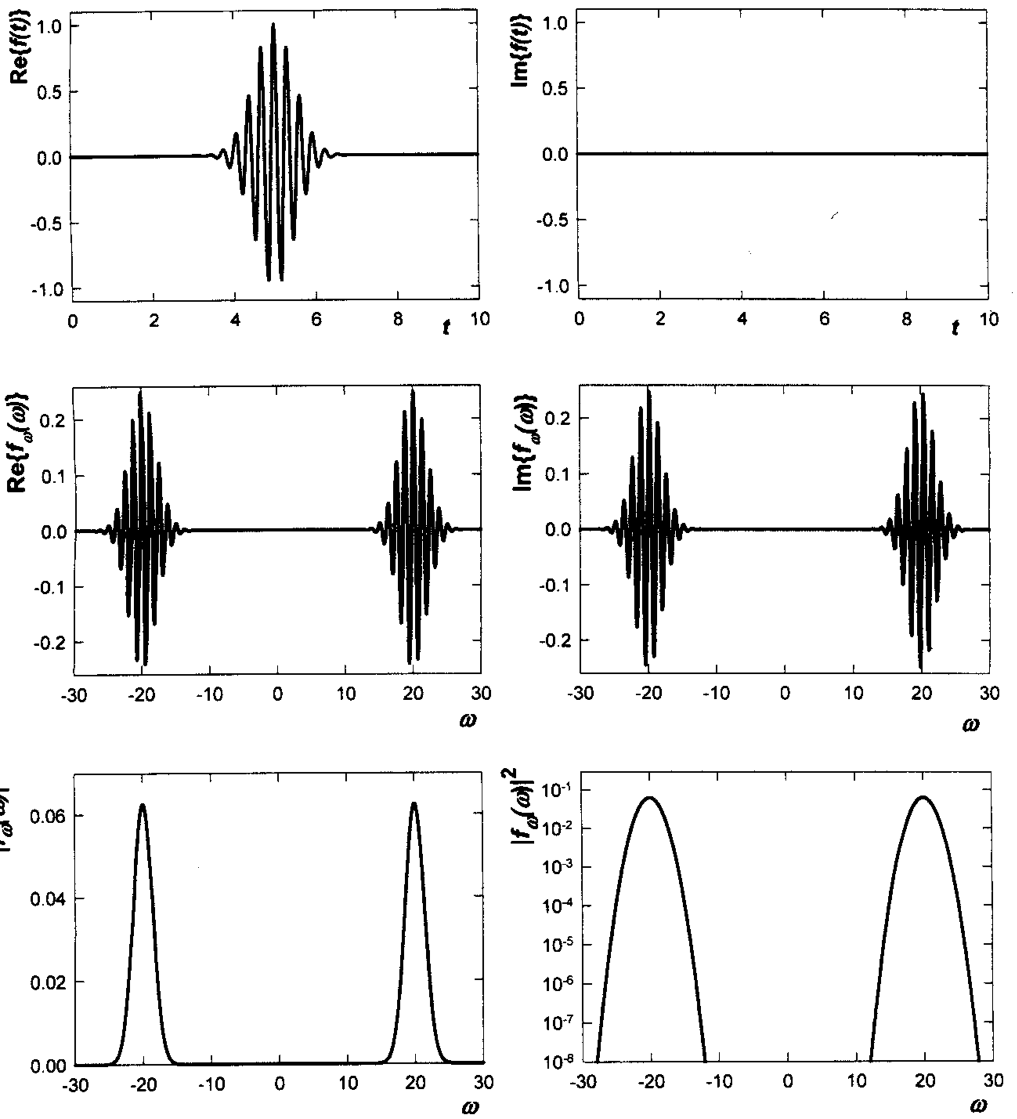
modulace $f(t)$ $\Rightarrow$ maximum $f_\omega(\omega)$ u $\pm\omega_0$

časový posuv pulzu o t_0 $\Rightarrow$ modulace $f_\omega(\omega)$;

pro $f_\omega(\omega, t_0 = 0)$ reálné: $Re\{f_\omega\} \sim \cos \omega t_0$

$Im\{f_\omega\} \sim \sin \omega t_0$

$\omega_0 = 20, \qquad t_0 = 5, \; \gamma = 2$

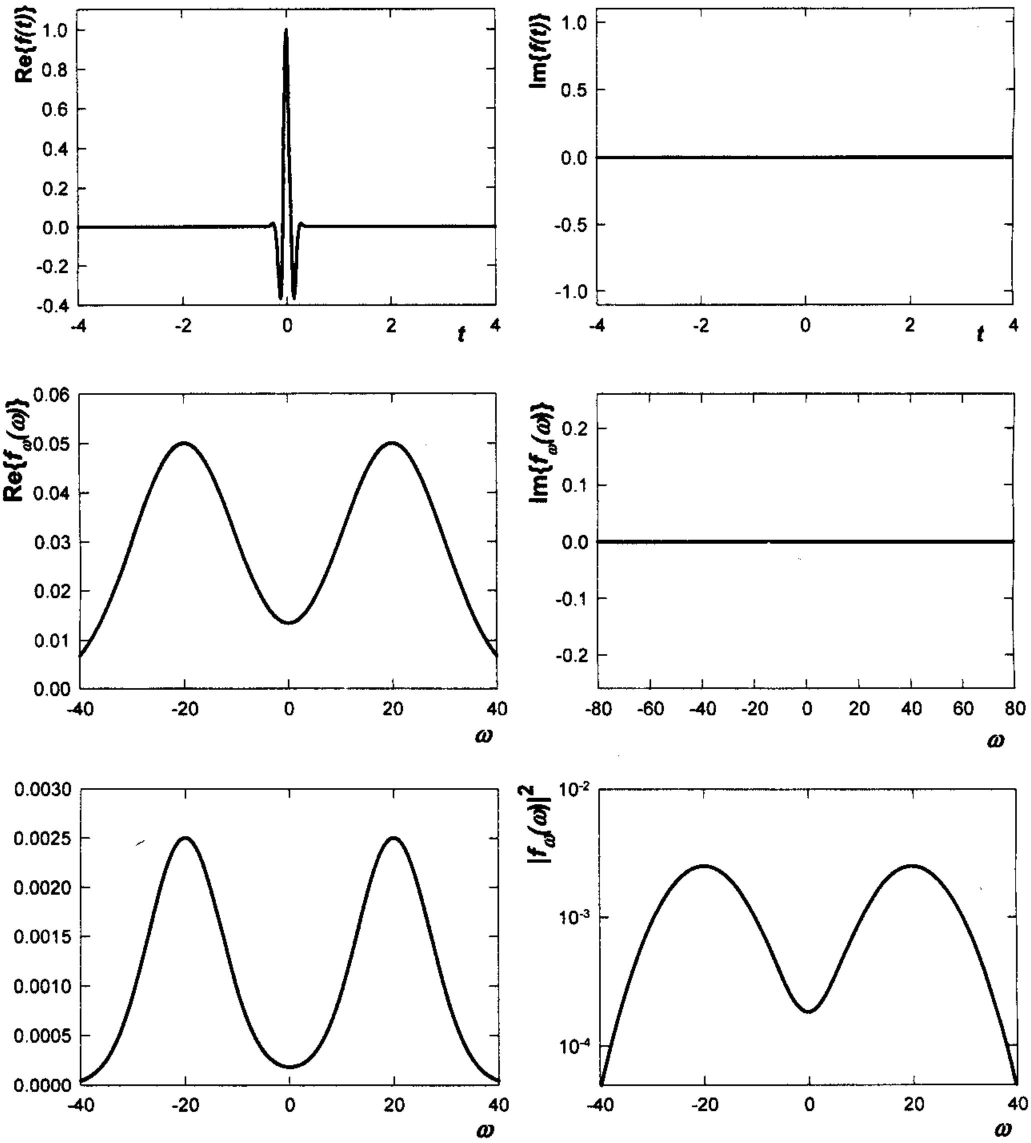


Žádný vliv t_0 na $|f_\omega|^2$.

cg)

Velmi krátký gaussovský pulz modulovaný kosinem

$\omega_0 = 20, \gamma = 10$



Doba trvání: šířka v 1/2 výšky

$e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \cdot \Delta t^2} = \frac{1}{2}$ $\quad \Delta t_{FWHM} = 2 \cdot \Delta t$

$\Delta t_{FWHM} = \frac{2}{\gamma}\sqrt{2 \ln 2}$

Spektrální šířka v 1/2 výšky

$e^{-\frac{1}{2\gamma^2} \cdot \Delta\omega^2} = 1/2$, $\Delta\omega_{FWHM} = 2\Delta\omega$

$\Delta\omega_{FWHM} = 2\gamma\sqrt{2 \cdot \ln 2}$

$$\Delta t_{FWHM} \cdot \Delta\omega_{FWHM} = 8 \cdot \ln 2 \doteq 5{,}545$$

da)

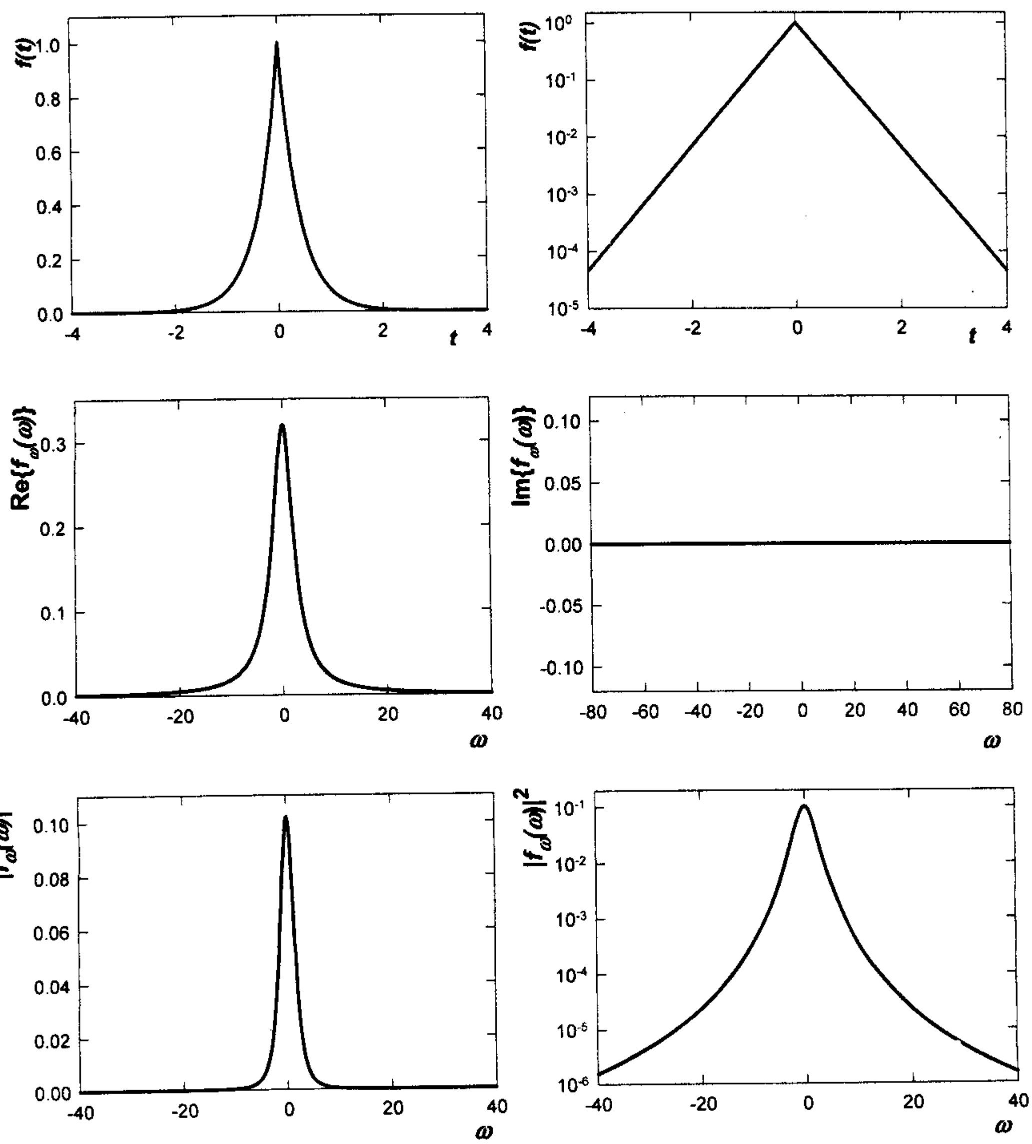
oboustranná exponenciála $f(t) = e^{-p|t|}$ (57)

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{pt} e^{i\omega t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-pt} e^{i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{p + i\omega} + \frac{0-1}{i\omega - p} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{p+i\omega} + \frac{1}{p - i\omega} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p - i\omega + p + i\omega}{p^2 + \omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$p = 2,5$



db) zpětná Fourierova transformace

$$f_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{i\omega+\gamma} - \frac{1}{i\omega-\gamma}\right) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\omega-i\gamma} - \frac{1}{\omega+i\gamma}\right)$$

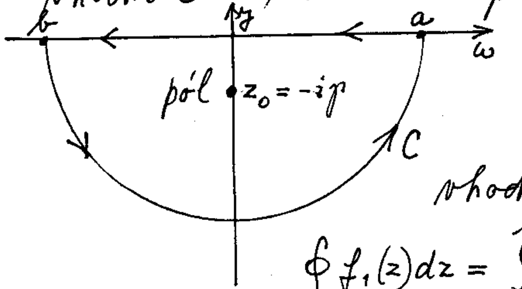
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+i\gamma}\,d\omega - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-i\gamma}\,d\omega$$

K výpočtu integrálů lze použít reziduové věty

$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum$ rezidua pro f „vhodných" vlastností

$z = \omega + iy$ komplexní proměnná,
C uzavřená křivka v komplexní rovině, kladná orientace
f holomorfní až na konečný počet pólů uvnitř C
reziduum (1. řádu) koeficient a_{-1} v rozvoji
funkce kolem pólu z_0 $\quad f(z) = \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \ldots$

vhodné C: reálná osa + půloblouk



$$\oint_C \frac{e^{-izt}}{z+i\gamma}\,dz = 2\pi i\, e^{-i\gamma t} = 2\pi i\, e^{-t\gamma}$$

vhodné vlastnosti pouze pro $t>0$

$$\oint_C f_1(z)\,dz = \int_a^b f_1(z)\,dz + \int_{\text{oblouk } b\frown a} f_1(z)\,dz$$

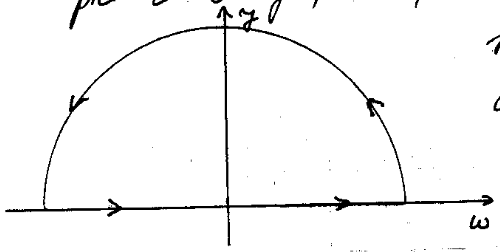
zde $z \equiv \omega$ reálná osa

v limitě poloměr oblouku $\to\infty$: $\quad$ stále $t>0$

$$2\pi i\, e^{-t} = \int_{\infty}^{-\infty} f_1(\omega)\,d\omega + \underbrace{\lim_{|z|\to\infty}\int_{\text{oblouk}} f_1(\omega)\,d\omega}_{\to 0}$$

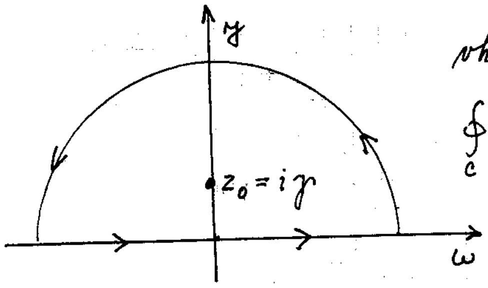
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega+i\gamma} = -2\pi i\, e^{-t\gamma} \quad \text{pro } t>0$$

pro $t<0$ je nutno se obrátit k horní polorovině, kde $f_1(z)$ žádný pól nemá a dostaneme



$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+i\gamma}\,d\omega = 0, \quad t<0$$

2. člen $\dfrac{e^{-izt}}{z-i\gamma}$ má naopak pól v horní polorovině $z_0 = i\gamma$



vhodné pro časy $t<0$

$$\oint_C \frac{e^{-izt}}{z-i\gamma}\,dz = 2\pi i\, e^{-ii\gamma t} + \underbrace{\int_{\text{oblouk}} \dots dz}_{\substack{\to 0 \\ \text{při } |z|\to\infty}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-i\gamma}\,d\omega = 2\pi i\, e^{t\gamma} \quad \text{pro } t<0$$

Pro $t>0$: v dolní polorovině žádný pól, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-i\gamma}\,d\omega = 0$ pro $t>0$

Sečtení obou příspěvků:

$$f(t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+i\gamma}\,d\omega - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-i\gamma}\,d\omega$$

$$= -2\pi i\,\frac{i}{2\pi}\, e^{-\gamma t} \quad \text{pro } t>0$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\cdot 2\pi i\, e^{t\gamma} \quad \text{pro } t<0$$

$$= e^{-|t|\gamma} \quad \text{pro všechna } t$$

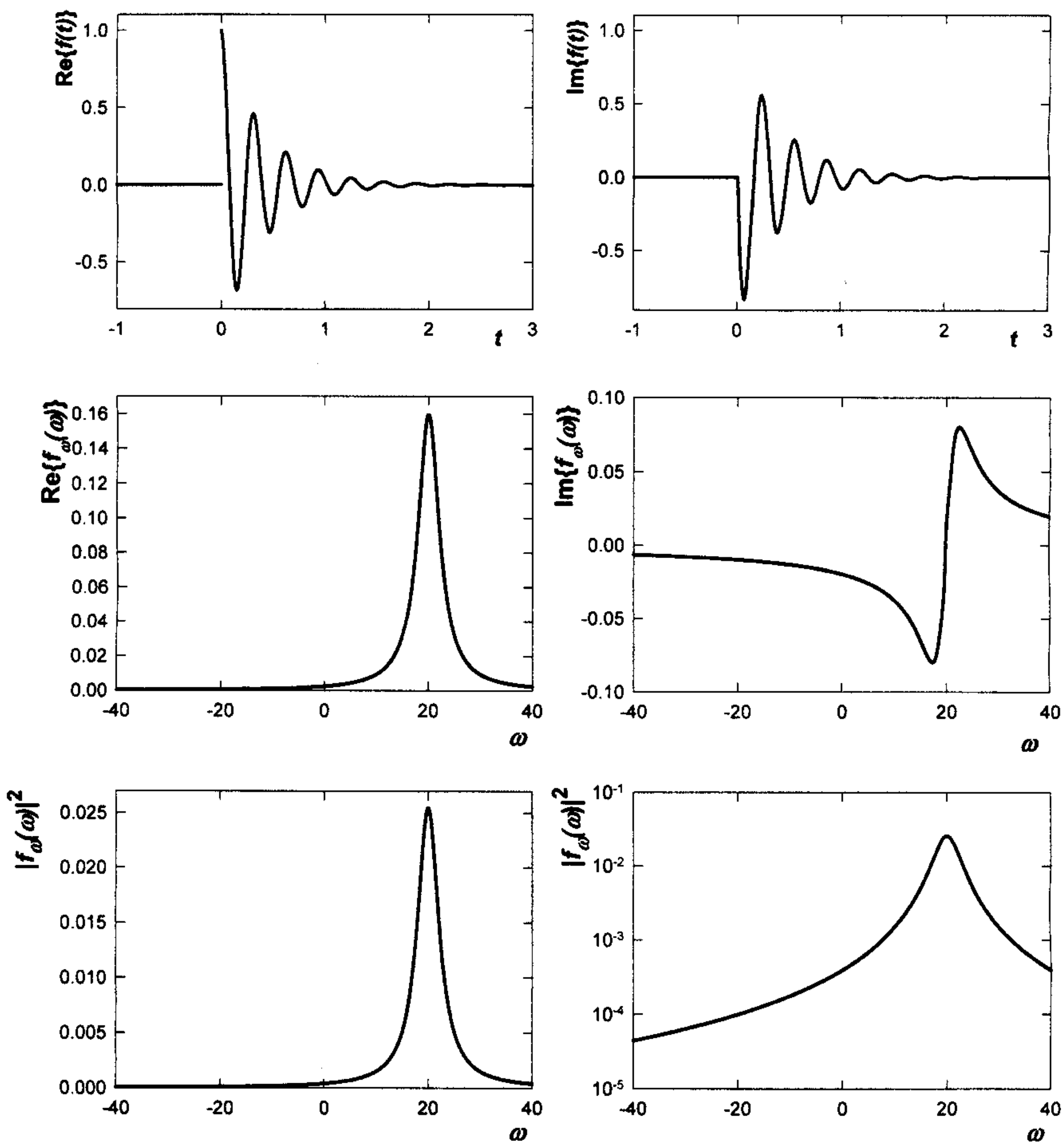
dc) Tlumený oscilátor (komplexní)

$$f(t)=0 \text{ pro } t<0,\quad f(t)=e^{-\gamma t}e^{-i\omega_0 t} \text{ pro } t>0$$

$$f_\omega(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t(\gamma+i\omega_0-i\omega)}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{-1}{i(\omega-\omega_0)-\gamma}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\gamma+i(\omega-\omega_0)}{\gamma^2+(\omega-\omega_0)^2}$$

$\omega_0=20,\ \gamma=2{,}5$



dd) Tlumené sinové oscilace

$$f(t)=0 \text{ pro } t<0, \quad f(t)=e^{-t\gamma}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}\right)$$

1. člen v $f_\omega^{(1)}$ $\quad \dfrac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^\infty e^{t(i\omega_0+i\omega-\gamma)}\,dt =$

$$=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\,\frac{-1}{i(\omega_0+\omega)-\gamma}=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\,\frac{\gamma+i(\omega+\omega_0)}{\gamma^2+(\omega+\omega_0)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\omega+\omega_0}{\gamma^2+(\omega+\omega_0)^2}-\frac{i\gamma}{\gamma^2+(\omega+\omega_0)^2}\right)$$

2. člen $f_\omega^{(2)}$ $\quad \dfrac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^\infty e^{t(i\omega-i\omega_0-\gamma)}\,dt =$

$$=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\,\frac{-1}{i(\omega-\omega_0)-\gamma}=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\,\frac{\gamma+i(\omega-\omega_0)}{\gamma^2+(\omega-\omega_0)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma^2+(\omega-\omega_0)^2}-\frac{i\gamma}{\gamma^2+(\omega-\omega_0)^2}\right)$$

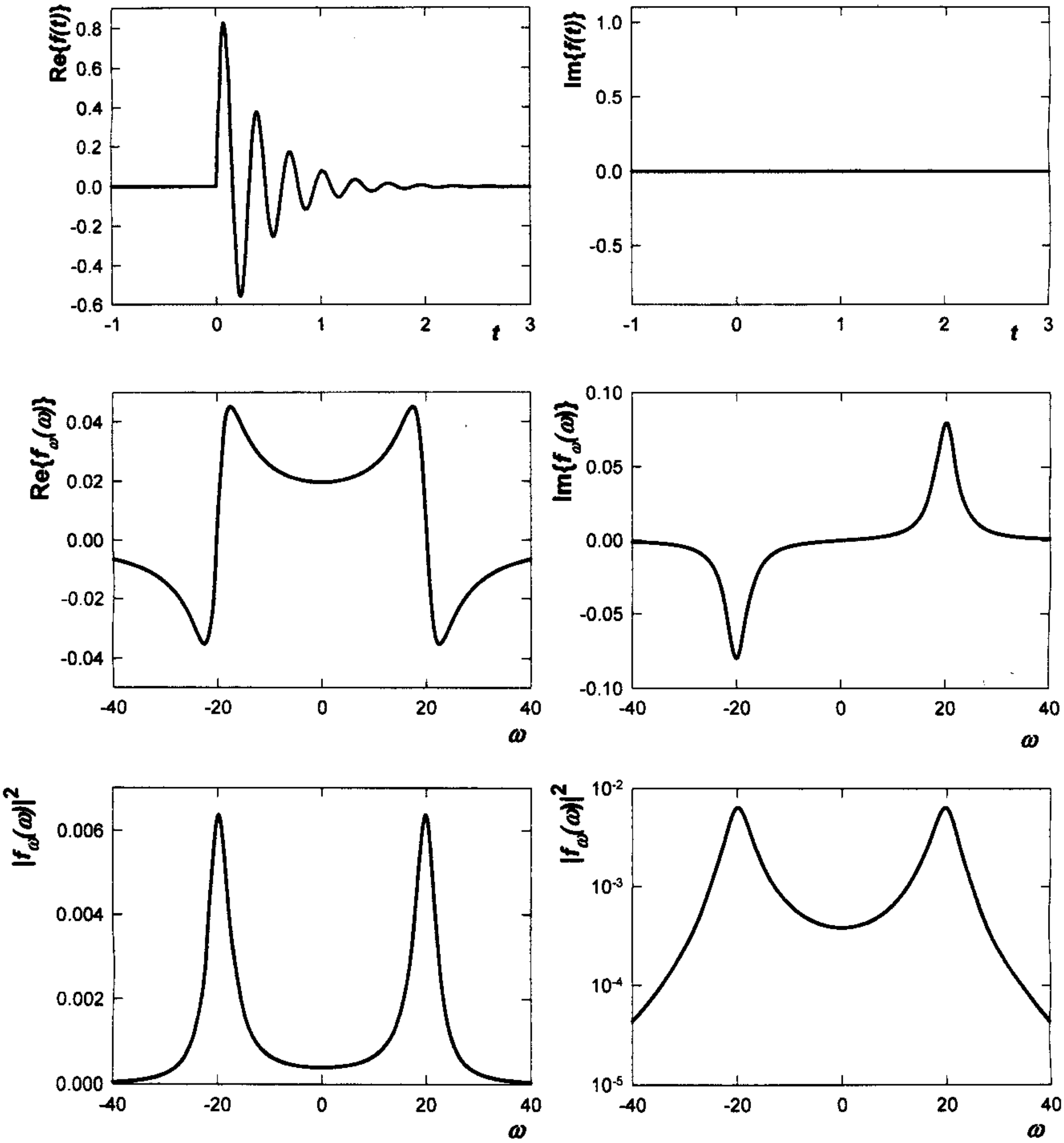
dohromady $\quad f_\omega^{(1)}-f_\omega^{(2)}=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{\omega+\omega_0}{\gamma^2+(\omega+\omega_0)^2}-\dfrac{\omega-\omega_0}{\gamma^2+(\omega-\omega_0)^2}-\right.$

$$\left.-\frac{i\gamma}{\gamma^2+(\omega+\omega_0)^2}+\frac{i\gamma}{\gamma^2+(\omega-\omega_0)^2}\right)$$

rychle tlumený (velké γ) $\Rightarrow$ velká šířka $|f_\omega|^2$

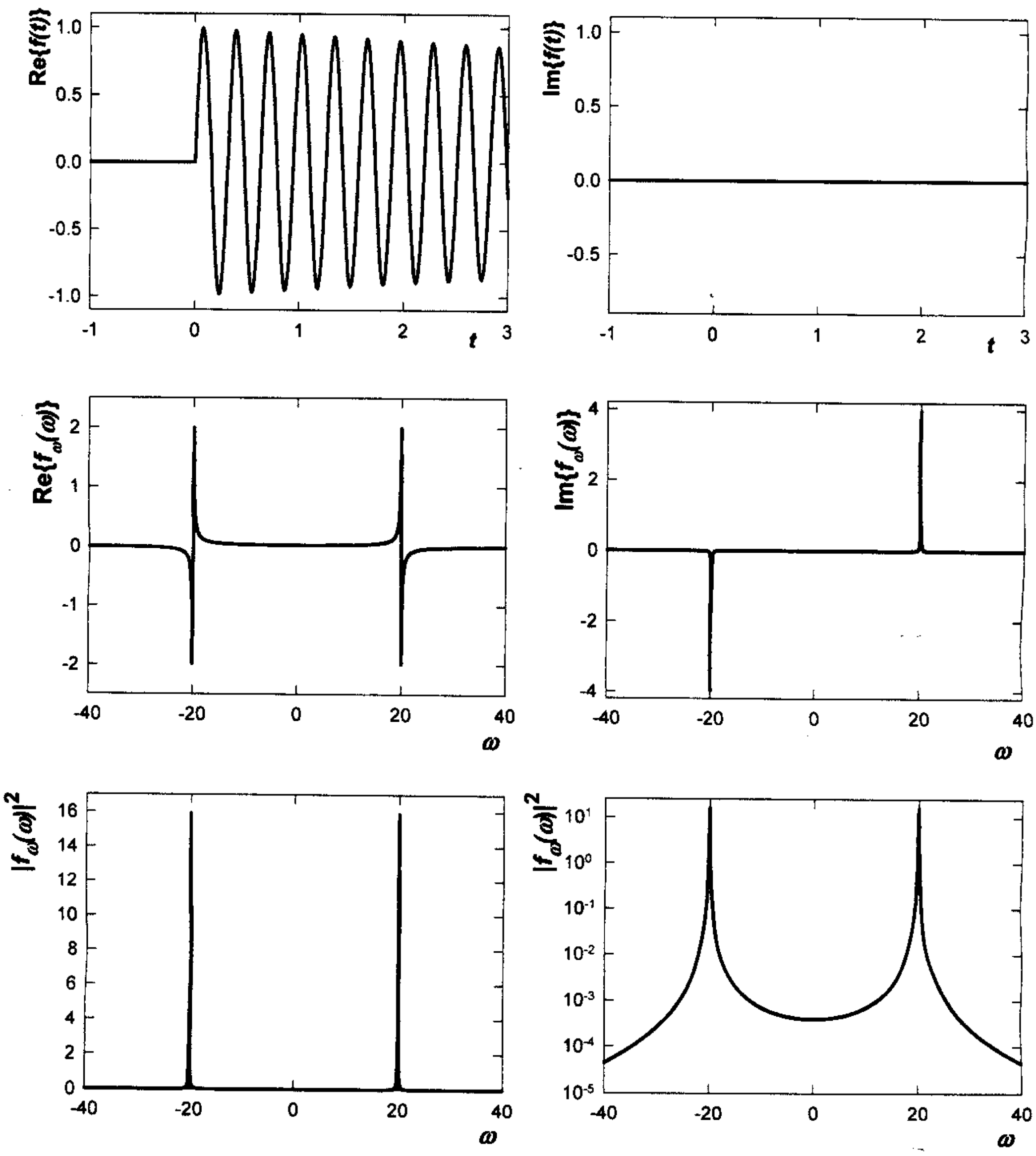
"Překrývají" se větve od rezonancí v $\omega=+\omega_0$ a $\omega=-\omega_0$

Nejjednodušeji $\quad f_\omega(\omega)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{1}{\omega+\omega_0+i\gamma}-\dfrac{1}{\omega-\omega_0+i\gamma}\right)$



$\omega_0 = 20\,,\ \gamma = 2{,}5$

"pinový" tlumený oscilátor



$\omega_0 = 20 \quad \gamma = 0{,}05$

Pomaleji tlumený oscilátor (sinový)

d f) sinový tlumený oscilátor

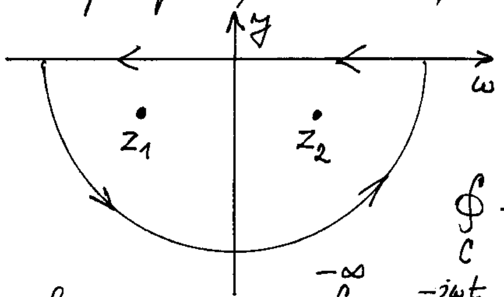
zpětná Fourierova transformace

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\omega+\omega_0+i\gamma} - \frac{1}{\omega-\omega_0+i\gamma}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0+i\gamma}\,d\omega - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0+i\gamma}\,d\omega\right]$$

opět přes residuovou větu: póly $z_1 = -\omega_0 - i\gamma$

$z_2 = \omega_0 - i\gamma$



oba v dolní polorovině

$$\oint_C \frac{e^{-izt}}{z+\omega_0+i\gamma}\,dz = 2\pi i\, e^{-iz_1 t} =$$

$$\lim_{|z|\to\infty} \quad = \int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0+i\gamma}\,d\omega + \underbrace{\lim \int_{\text{oblouk}} \ldots\, dz}_{0}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0+i\gamma}\,d\omega = -2\pi i\, e^{i\omega_0 t} e^{-\gamma t}$$

pro $t>0$

V horní polorovině žádné póly $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0+i\gamma}\,d\omega = 0$ pro $t<0$

Stejně $\oint_C \frac{e^{-izt}}{z-\omega_0+i}\,dz = 2\pi i\, e^{-iz_2 t} = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0+i\gamma}\,d\omega$ pro $t>0$

Dohromady

$$f(t) = \frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi i\left(-e^{i\omega_0 t}e^{-\gamma t} + e^{-i\omega_0 t}e^{-\gamma t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\, e^{-t\gamma}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right) \quad \text{pro } t>0$$

$$= 0 \quad \text{pro } t<0$$

dg) Tlumený oscilátor (kosinový)

$$f(t) = e^{-t\gamma} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right) \quad t>0\ ;\ f(t)=0 \quad t<0$$

1. člen
$$f_\omega^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t(\gamma - i\omega_0 - i\omega)} dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{i(\omega+\omega_0) - \gamma} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\gamma - i(\omega+\omega_0)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\gamma + i(\omega+\omega_0)}{\gamma^2 + (\omega+\omega_0)^2}$$

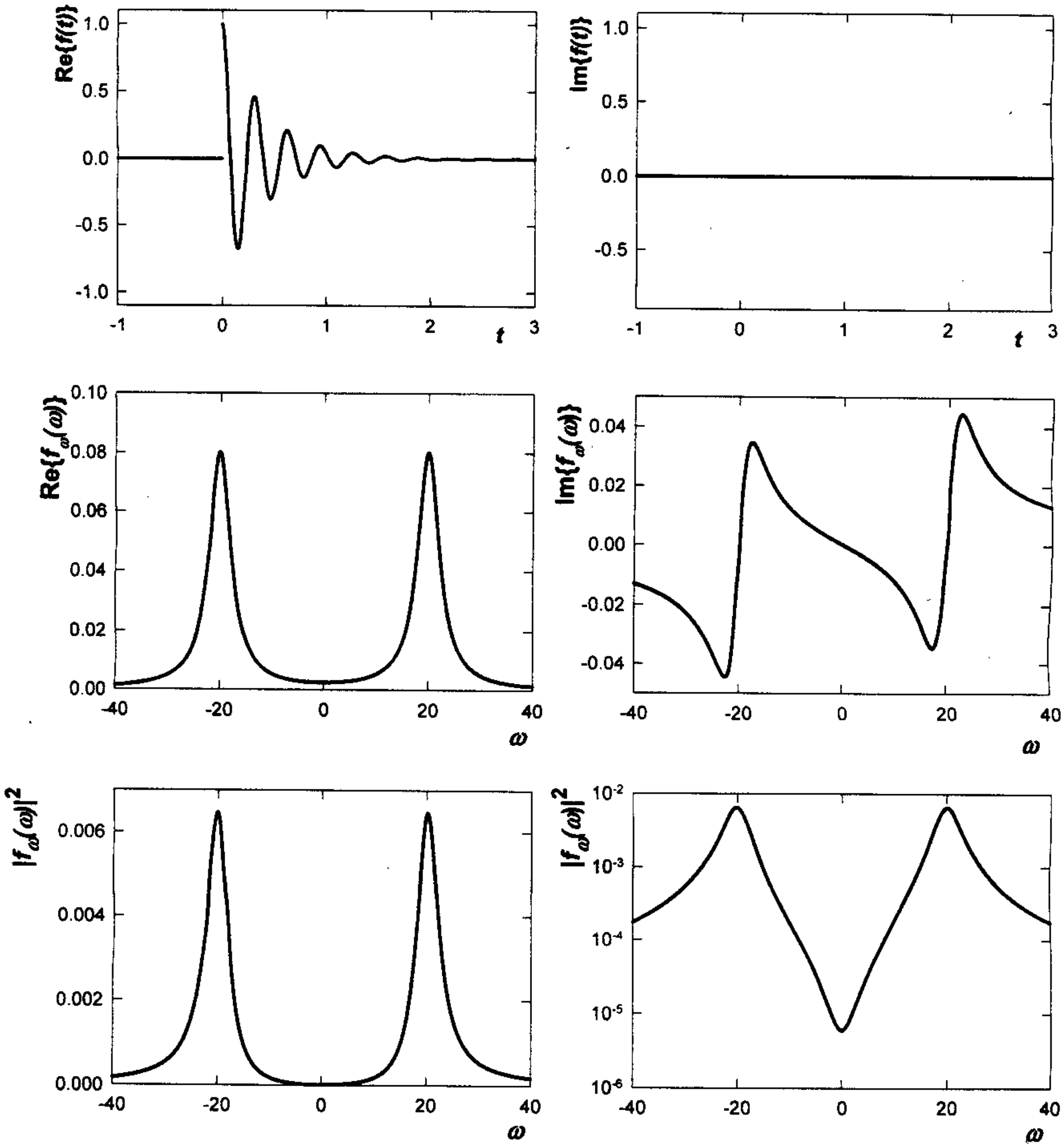
2. člen
$$f_\omega^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t(\gamma + i\omega_0 - i\omega)} dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{-\gamma + i(\omega-\omega_0)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\gamma - i(\omega-\omega_0)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma + i(\omega-\omega_0)}{\gamma^2 + (\omega-\omega_0)^2}$$

dohromady:
$$f_\omega^{(1)} + f_\omega^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega+\omega_0)^2} + \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega-\omega_0)^2} + \frac{i(\omega+\omega_0)}{\gamma^2+(\omega+\omega_0)^2} + \frac{i(\omega-\omega_0)}{\gamma^2+(\omega-\omega_0)^2} \right)$$

porovnáním k) a l) sin → cos odpovídá změně fáze o $\frac{\pi}{2}$, což se projeví "prohozením" $Re\{f_\omega\}$ a $Im\{f_\omega\}$ ovšem s přihlédnutím k symetrii $Re\{f_\omega\}$ a antisymetrii $Im\{f_\omega\}$



Kosinový tlumený oscilátor $\omega_0 = 20, \gamma = 2{,}5$

maximum $|f_\omega(\omega)|^2$ pro $\omega_{MAX} = \pm 20{,}15$

dh)

Přetlumený "oscilátor" (relaxátor)

$$\ddot{x} + p\dot{x} + \Omega^2 x = 0 \qquad \alpha_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4\Omega^2}}{2}$$

kmitající oscilátor $4\Omega^2 > p^2$ ... $\sqrt{\ }$ imaginární

kriticky tlumený $4\Omega^2 = p^2$ $\quad x = A\cdot e^{-p/2\, t} + B\cdot t\, e^{-p/2\, t}$

přetlumený $4\Omega^2 < p^2$ $\quad x = A\cdot e^{-\frac{p-\beta}{2}t} + B\cdot e^{-\frac{p+\beta}{2}t}$

Nechť je v $t=0$ relaxátor $\quad p > \beta > 0 \quad \beta = \sqrt{p^2 - 4\Omega^2}$

tak šikovně nakopnut, že $x = f(t) = e^{-\frac{p-\beta}{2}t} - e^{-\frac{p+\beta}{2}t}$

zkráceně $\quad f(t) = e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t} \quad t>0, \quad f(t) = 0 \quad t<0$

$$f_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\omega t - \delta_1 t}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\omega t - \delta_2 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{0-1}{i\omega - \delta_1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{0-1}{i\omega - \delta_2} =$$

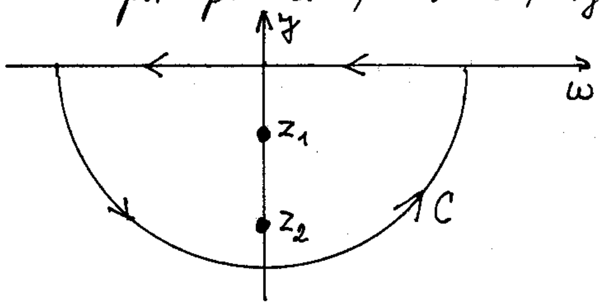
$$= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\omega + i\delta_2} - \frac{1}{\omega + i\delta_1}\right) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\omega - i\delta_2}{\omega^2 + \delta_2^2} - \frac{\omega - i\delta_1}{\omega^2 + \delta_1^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\delta_1}{\omega^2 + \delta_1^2} - \frac{\delta_2}{\omega^2 + \delta_2^2} + \frac{i\omega}{\omega^2 + \delta_1^2} - \frac{i\omega}{\omega^2 + \delta_2^2}\right)$$

kde $\delta_1 = \frac{p-\beta}{2}$, $\delta_2 = \frac{p+\beta}{2}$ $\qquad \delta_2 > \delta_1 > 0$

Inverzní transformace $\quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f_\omega(\omega)\,d\omega$

opět pomocí reziduové věty



póly $\quad z_1 = -i\,\frac{p-\beta}{2}$

$\qquad z_2 = -i\,\frac{p+\beta}{2}$

Pro $t>0$

$$\oint_C \left(\frac{1}{z+i\delta_1} - \frac{1}{z+i\delta_2}\right) e^{-izt}\, dz = 2\pi i\left(e^{-i\frac{p-\beta}{2i}t} - e^{-i\frac{p+\beta}{2i}t}\right)$$

$$\oint_C = \int_{\infty}^{-\infty} + \underbrace{\int_{\substack{\text{oblouk}\\ |z|\to\infty}}}_{\to 0} = -\int_{-\infty}^{\infty}$$

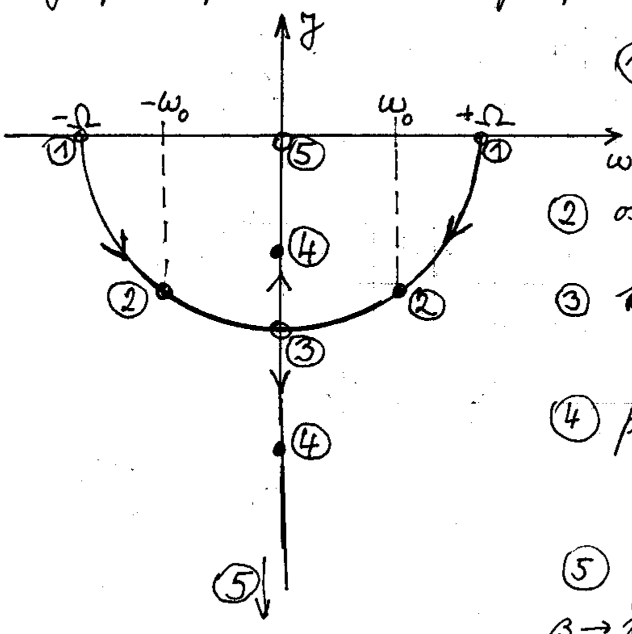
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega+i\delta_1} - \frac{1}{\omega+i\delta_2}\right) e^{-i\omega t}\, d\omega = 2\pi i\left(e^{-\frac{p+\beta}{2}t} - e^{-\frac{p-\beta}{2}t}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{+i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\omega+i\delta_1} - \frac{1}{\omega+i\delta_2}\right) e^{-i\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{-2\pi}{2\pi}\left(e^{-\frac{p+\beta}{2}t} - e^{-\frac{p-\beta}{2}t}\right) = e^{-\frac{p-\beta}{2}t} - e^{-\frac{p+\beta}{2}t}$$

Pro $t<0$ v horní polorovině žádné póly $\Rightarrow f(t)=0 \quad t<0$

<u>Pohyb pólů při zvětšování p</u> při pevné Ω oscilátoru



① netlumené oscilace $p=0$

② oscilace $\omega_0 = \sqrt{\Omega^2 - \frac{p^2}{4}}$

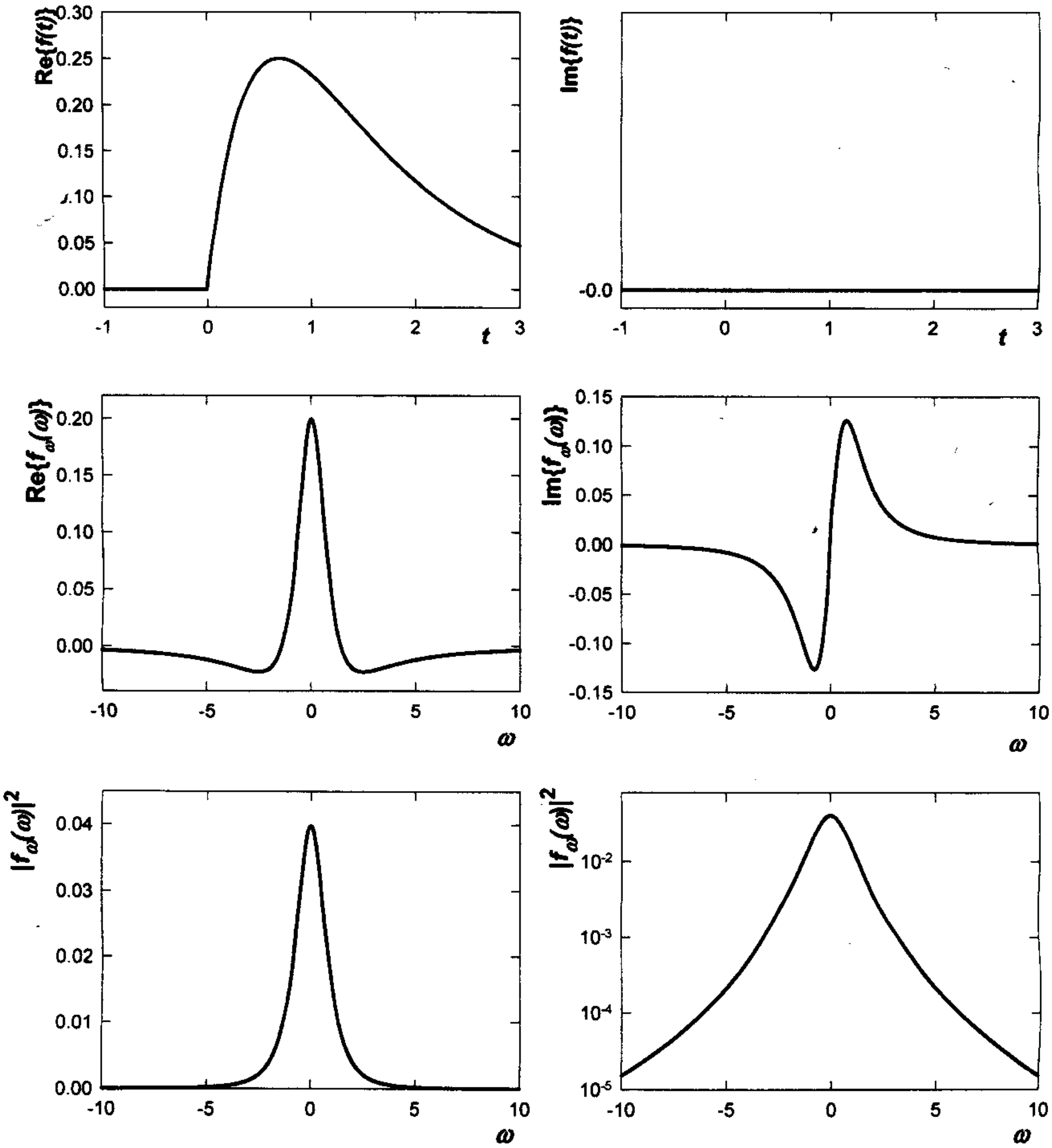
③ kritické tlumení $\Omega = p/2$

④ přetlumení, žádné vlastní kmity

⑤ $p\to\infty$:
$\beta \to p$ pól $z_1 \to 0$
$z_2 \to -i\infty$

Relaxátor

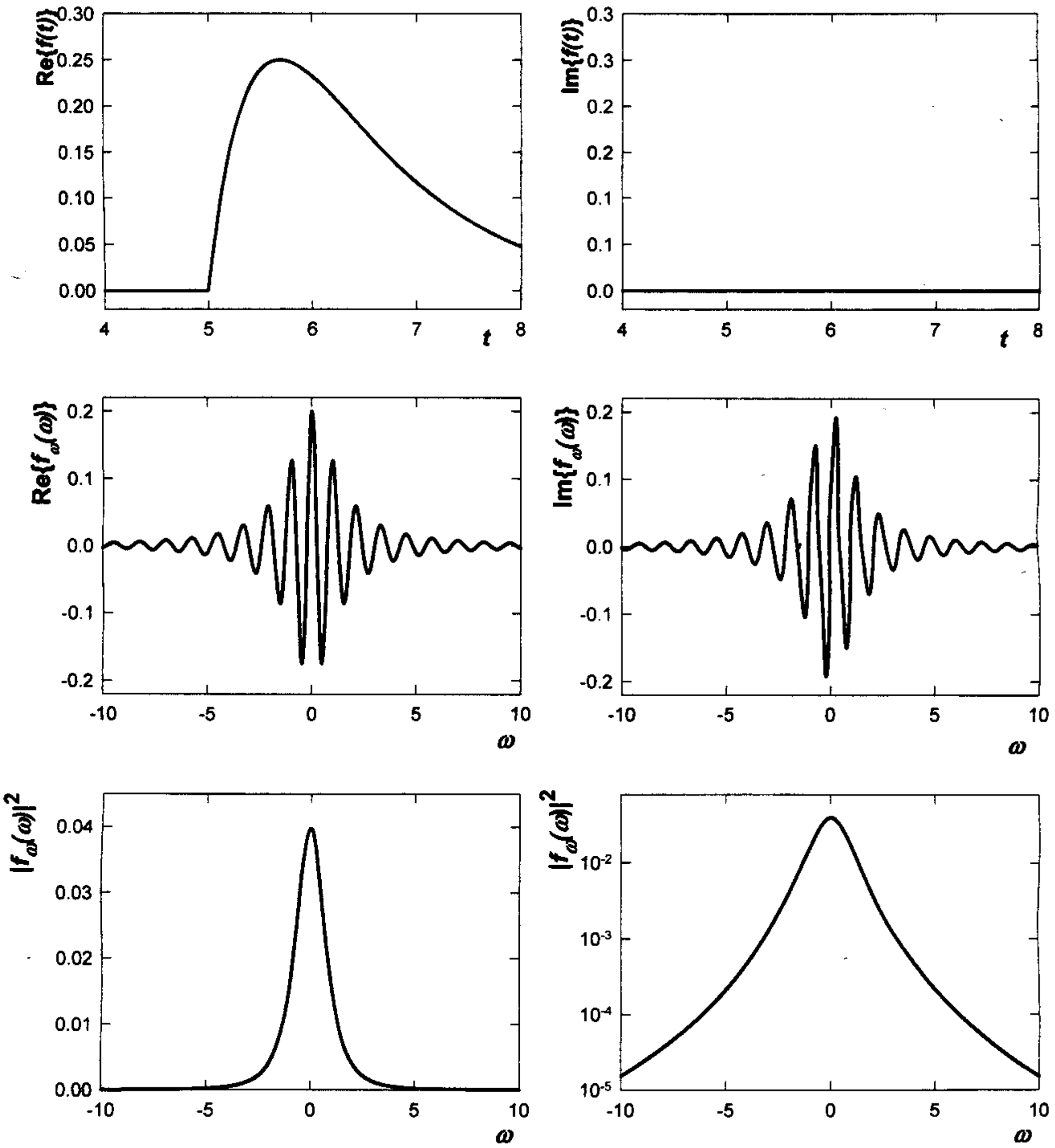
$p=3$ $\beta=\sqrt{\gamma^2-4\Omega^2}=1$ čas "nakopnutí" $t_0=0$



70

Relaxátor

$\gamma = 3 \quad \beta = \sqrt{\gamma^2 - 4\Omega^2} = 1$ čas „nakopnutí" $t_0 = 5$



Šířky pulzů a jejich Fourierových obrazů (spektrální šířky)

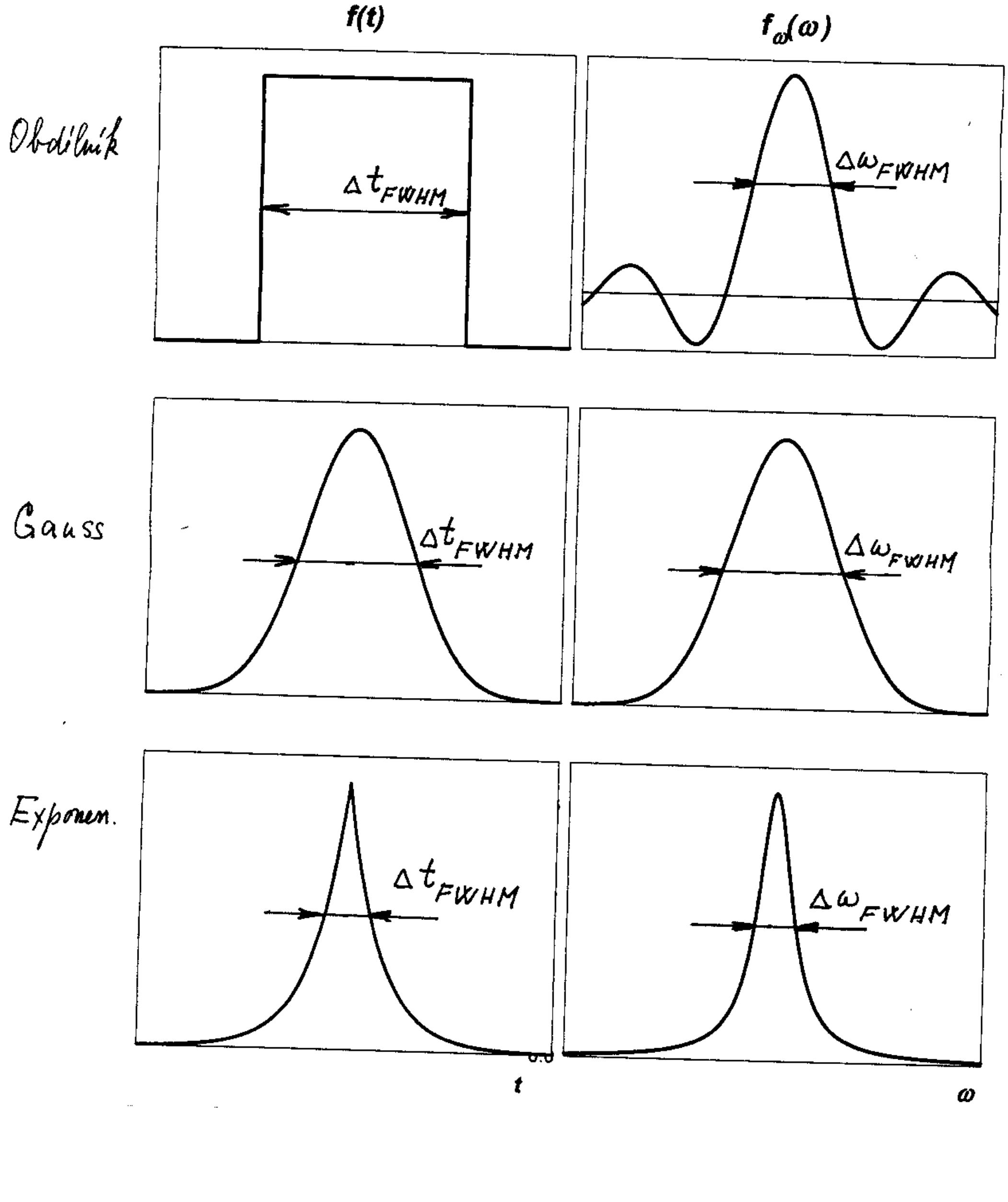
zde: plné šířky v 1/2 výšky FWHM (full width at half maximum)

1) obdélník $f_\omega(\omega) \sim \mathrm{sinc}\,\frac{\omega \cdot \Delta t}{2}$;

1/2 výšky $\Rightarrow$ $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$ $\quad x \doteq 1{,}8955$

$x = \frac{\omega \cdot \Delta t}{2}$ $\quad \Delta\omega_{FWHM} = 2\omega \doteq \frac{7{,}582}{\Delta t}$

$\Delta\omega_{FWHM} \cdot \Delta t_{FWHM} \doteq 7{,}582$



2) gaussovský puls $f(t) = e^{-t^2/2\tau^2}$

$f_\omega(\omega) = \tau \cdot e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}}$

maxima $t = 0$ $f(0) = 1$

$\omega = 0$ $f_\omega(0) =$

poloviční výška: $e^{-t^2/2\tau^2} = 1/2$

$t^2 = 2\tau^2 \ln 2$

$t = \tau\sqrt{2 \cdot \ln 2}$ $\Delta t_{FWHM} = 2\tau\sqrt{2\ln 2}$

$\doteq 2{,}355 \cdot \tau$

$e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{2}} = 1/2$

$\omega = \frac{1}{\tau}\sqrt{2 \cdot \ln 2}$ $\Delta\omega_{FWHM} = \frac{2}{\tau}\sqrt{2\ln 2}$

$\Delta t_{FWHM} \cdot \Delta\omega_{FWHM} = 8\ln 2 \doteq 5{,}545$

3) exponenciála $e^{-|t|/\tau}$

maximum $t = 0$ $f(0) = 1$

poloviční výška $t = \tau \cdot \ln 2$ $\Delta t_{FWHM} = 2\tau \ln 2$

$f_\omega(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$ maximum $\omega = 0$

poloviční výška $\omega^2\tau^2 = 1$

$\omega = 1/\tau$

$\Delta\omega_{FWHM} = 2/\tau$

$\Delta t_{FWHM} \cdot \Delta\omega_{FWHM} = 4 \cdot \ln 2 = 2{,}773$

Poznámka k fyzikální interpretaci
v proměnných čas – kruhová frekvence

$f(t) \longrightarrow E_x(t)$ intenzita elektrického pole $[V \cdot m^{-1}]$

$f_\omega(\omega) \longrightarrow E_{x\omega}(\omega)$ spektrální hustota elektrického pole
na jednotkový interval kr. frekvence

$$E_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \cdot e^{i\omega t}\, dt \qquad [V \cdot m^{-1} \cdot s] = [V \cdot m^{-1} / s^{-1}]$$

Poyntingův vektor $\vec{E} \times \vec{H}$ ve vakuu pro čistě postupnou vlnu
v reálných veličinách

$$E_x^{(r)} = \frac{1}{2} E_0 \left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right), \quad H_y^{(r)} = \frac{E_0}{c \cdot \mu_0} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right)$$

okamžitý <u>výkon</u> $E_x^{(r)} \cdot H_y^{(r)} = \frac{E_0^2}{4c\mu_0} \left(e^{-2i\omega t} + 1 + 1 + e^{2i\omega t}\right)$

$$S_z = \frac{1}{2} \frac{c}{c^2 \mu_0} E_0^2 \left(1 + \cos 2\omega t\right)$$ výkon dopadající (procházející) jednotkou plochy

časová střední hodnota $\left\langle E_x^{(r)} \cdot H_y^{(r)} \right\rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$

Totéž ve „zkráceném" komplexním zápise

$$\tilde{E}_x = E_0 e^{-i\omega t} \qquad \tilde{H}_y = c \cdot \varepsilon_0 E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{E}_x \cdot \tilde{H}_y^* = c \varepsilon_0 E_0^2 \implies \langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \tilde{E}_x \cdot \tilde{H}_y^* \qquad [V m^{-1} \cdot A m^{-1}] = [W \cdot m^{-2}]$$

Pro pulz můžeme změřit <u>energii</u> procházející $1 m^2$

$$\frac{1}{2} c \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \cdot E^*(t)\, dt \qquad [W \cdot m^{-2} \cdot s] = [J \cdot m^{-2}]$$

Pro stacionární děje časově zprůměrovaný výkon

$$\frac{1}{t_{DET}} \cdot \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \int_0^{t_{DET}} E(t) \cdot E^*(t)\, dt$$

Autokorelace a energetická spektrální hustota "pinového" tlumeného oscilátoru

značení tak, aby τ bylo časové zpoždění,

autokorelace $$F_A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot f^*(t-\tau)\,dt$$

spektrální hustota $|f_\omega|^2$

aplikace konvolučního teorému $\mathcal{F}\{F_A(\tau)\} = \sqrt{2\pi}\cdot|f_\omega|^2$

Zkusíme, zda platí v speciálním případě

$$f(t) = 0 \text{ pro } t<0,\quad f(t) = \frac{1}{2i}e^{-pt}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$
při $t>0$

$f^*(t-\tau) = 0$ pro $t<\tau$

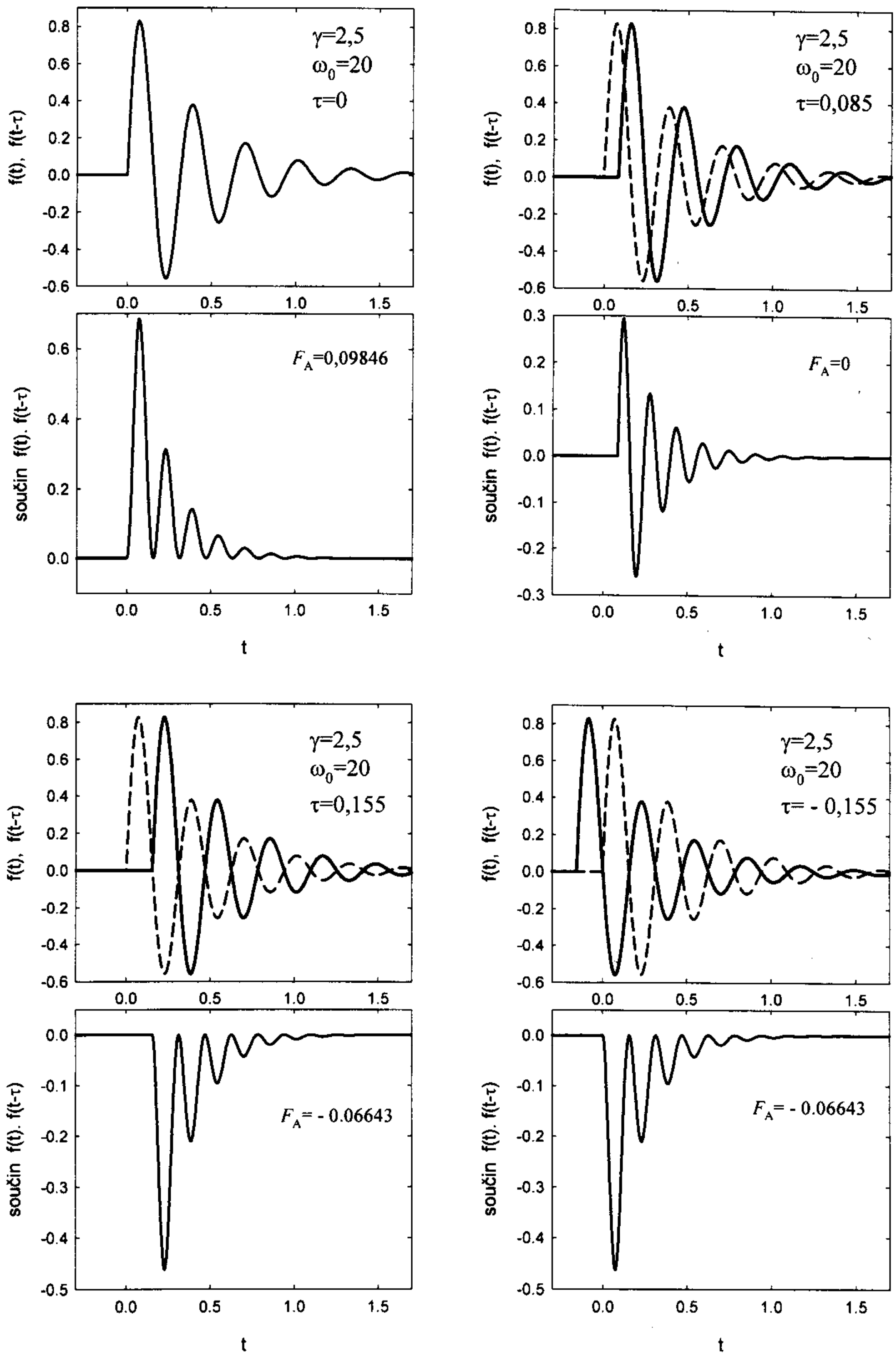
$$f^*(t-\tau) = \frac{-1}{2i}e^{-p(t-\tau)}\left(e^{-i\omega_0(t-\tau)} - e^{i\omega_0(t-\tau)}\right) \text{ při } t>\tau$$

Autokorelace: zvlášť počítat pro $\tau<0$ a $\tau>0$

$$F_A(\tau>0) = \frac{-1}{2i}\cdot\frac{1}{2i}\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt}e^{-p(t-\tau)}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(e^{-i\omega_0(t-\tau)} - e^{i\omega_0(t-\tau)}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{4}e^{p\tau}\int_{\tau}^{\infty} e^{-2pt}\left(e^{i\omega_0\tau} - e^{2i\omega_0 t}e^{-i\omega_0\tau} - e^{-2i\omega_0 t}e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}\right)dt$$

jednotlivé členy:

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-2pt}\,dt = \frac{-1}{2p}\left[e^{-2pt}\right]_{\tau}^{\infty} = \frac{1}{2p}\cdot e^{-2p\tau}$$


γ=2,5
ω0=20
τ=0
f(t), f(t-τ)
FA=0,09846
součin f(t). f(t-τ)
t
γ=2,5
ω0=20
τ=0,085
FA=0
γ=2,5
ω0=20
τ=0,155
FA= - 0.06643
γ=2,5
ω0=20
τ= - 0,155
FA= - 0.06643

$$\int_\tau^\infty e^{-2(p-i\omega_0)t}\,dt = \frac{1}{-2(p-i\omega_0)}\left[e^{(\ )}\right]_\tau^\infty = \frac{1}{2(p-i\omega_0)}e^{-2p\tau}e^{2i\omega_0\tau}$$

$$\int_\tau^\infty e^{-2(p+i\omega_0)t}\,dt = \frac{1}{-2(p+i\omega_0)}\left[e^{(\ )}\right]_\tau^\infty = \frac{1}{2(p+i\omega_0)}e^{-2p\tau}e^{2i\omega_0\tau}$$

$$F_A(\tau>0) = \frac{1}{4}e^{p\tau}e^{-2p\tau}\Big(e^{i\omega_0\tau}\cdot\frac{1}{2p} - e^{-i\omega_0\tau}e^{2i\omega_0\tau}\cdot\frac{1}{2(p-i\omega_0)} -$$

$$-e^{i\omega_0\tau}\cdot e^{-2i\omega_0\tau}\cdot\frac{1}{2(p+i\omega_0)} + e^{-i\omega_0\tau}\cdot\frac{1}{2p}\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}e^{-p\tau}\left[e^{i\omega_0\tau}\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{2(p-i\omega_0)}\right) + e^{-i\omega_0\tau}\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{2(p+i\omega_0)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{(i\omega_0-p)\tau}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-i\omega_0}\right) + e^{-(i\omega_0+p)\tau}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+i\omega_0}\right)\right]$$

$$F_A(\tau<0) = \frac{-1}{2i}\cdot\frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-pt}e^{-p(t-\tau)}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(e^{-i\omega_0(t-\tau)} - e^{i\omega_0(t-\tau)}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}e^{p\tau}\int_0^\infty e^{-2pt}\left(e^{i\omega_0\tau} - e^{2i\omega_0 t}e^{-i\omega_0\tau} - e^{-2i\omega_0 t}e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}\right)dt$$

jednotlivé příspěvky

$$\int_0^\infty e^{-2pt}\,dt = \frac{-1}{2p}\left[e^{-2pt}\right]_0^\infty = \frac{1}{2p}$$

$$\int_0^\infty e^{-(2p-2i\omega_0)t}\,dt = \frac{1}{2(i\omega_0-p)}\left[e^{(\ )}\right]_0^\infty = \frac{1}{2(p-i\omega_0)}$$

$$\int_0^\infty e^{-(2p+2i\omega_0)t}\,dt = \frac{-1}{2(p+i\omega_0)}\left[e^{(\ )}\right]_0^\infty = \frac{1}{2(p+i\omega_0)}$$

$$F_A(\tau<0)=\frac{1}{4}e^{p\tau}\left(e^{i\omega_0\tau}\cdot\frac{1}{2p}-e^{-i\omega_0\tau}\cdot\frac{1}{2(p-i\omega_0)}-\right.$$

$$\left.-e^{i\omega_0\tau}\cdot\frac{1}{2(p+i\omega_0)}+e^{-i\omega_0\tau}\cdot\frac{1}{2p}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left[e^{(i\omega_0+p)\tau}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+i\omega_0}\right)+e^{(p-i\omega_0)\tau}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-i\omega_0}\right)\right]$$

Fourierova transformace $\mathcal{F}\{F_A(\tau)\}=F_\omega(\omega)$

$$F_\omega(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}F_A(\tau<0)\cdot e^{i\omega\tau}d\tau+\int_0^\infty F_A(\tau>0)e^{i\omega\tau}d\tau\right]$$

jednotlivé příspěvky.

$$\int_{-\infty}^{0}e^{(p+i\omega_0)\tau}e^{i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{p+i(\omega+\omega_0)}\left[e^{(\ )}\right]_{-\infty}^{0}=\frac{1}{p+i(\omega+\omega_0)}$$

$$\int_{-\infty}^{0}e^{(p-i\omega_0)\tau}e^{i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{p+i(\omega-\omega_0)}\left[e^{(\ )}\right]_{-\infty}^{0}=\frac{1}{p+i(\omega-\omega_0)}$$

$$\int_0^\infty e^{(i\omega_0-p)\tau}e^{i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{-p+i(\omega+\omega_0)}\left[e^{(\ )}\right]_0^\infty=\frac{1}{p-i(\omega+\omega_0)}$$

$$\int_0^\infty e^{-(i\omega_0+p)\tau}e^{i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{i(\omega-\omega_0)-p}\left[e^{(\ )}\right]_0^\infty=\frac{1}{p-i(\omega-\omega_0)}$$

$$8\cdot\sqrt{2\pi}\cdot F_\omega=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+i\omega_0}\right)\cdot\frac{1}{p+i(\omega+\omega_0)}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-i\omega_0}\right)\frac{1}{p+i(\omega-\omega_0)}+$$

$$+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-i\omega_0}\right)\frac{1}{p-i(\omega+\omega_0)}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+i\omega_0}\right)\frac{1}{p-i(\omega-\omega_0)}$$

$$8\cdot\sqrt{2\pi}\cdot F_\omega = \frac{p+i\omega_0-p}{p(p+i\omega_0)}\cdot\left(\frac{1}{p+i\omega+i\omega_0}+\frac{1}{p-i\omega+i\omega_0}\right)+$$

$$+\frac{p-i\omega_0-p}{p(p-i\omega_0)}\left(\frac{1}{p+i\omega-i\omega_0}+\frac{1}{p-i\omega-i\omega_0}\right)=$$

$$=\frac{i\omega_0}{p(p+i\omega_0)}\cdot\frac{p-i\omega+i\omega_0+p+i\omega+i\omega_0}{(p+i\omega+i\omega_0)(p-i\omega+i\omega_0)}-\frac{i\omega_0}{p(p-i\omega_0)}\frac{p-i\omega-i\omega_0+p+i\omega-i\omega_0}{(p+i\omega-i\omega_0)(p-i\omega-i\omega_0)}=$$

$$=\frac{2i\omega_0(p+i\omega_0)}{p(p+i\omega_0)(p+i\omega+i\omega_0)(p-i\omega+i\omega_0)}-\frac{2i\omega_0(p-i\omega_0)}{p(p-i\omega_0)(p+i\omega-i\omega_0)(p-i\omega-i\omega_0)}=$$

$$=\frac{2i\omega_0\left(p^2-ip\omega-ip\omega_0+ip\omega+\omega^2+\omega\omega_0-ip\omega_0-\omega\omega_0-\omega_0^2\right)}{p(p+i\omega+i\omega_0)(p-i\omega+i\omega_0)(p+i\omega-i\omega_0)(p-i\omega-i\omega_0)}-$$

$$-\frac{2i\omega_0\left(p^2-ip\omega+ip\omega_0+ip\omega+\omega^2-\omega\omega_0+ip\omega_0+\omega\omega_0-\omega_0^2\right)}{p(p+i\omega+i\omega_0)(p-i\omega-i\omega_0)(p-i\omega+i\omega_0)(p+i\omega-i\omega_0)}=$$

$$=\frac{2i\omega_0\left(p^2-2ip\omega_0+\omega^2-\omega_0^2-p^2-2ip\omega_0-\omega^2+\omega_0^2\right)}{p\left[p^2+(\omega+\omega_0)^2\right]\left[p^2+(\omega-\omega_0)^2\right]}=$$

$$=\frac{-8ii\,\omega_0^2\,p}{p\left[p^2+(\omega+\omega_0)^2\right]\left[p^2+(\omega-\omega_0)^2\right]}=\frac{8\,\omega_0^2}{\left[p^2+(\omega+\omega_0)^2\right]\left[p^2+(\omega-\omega_0)^2\right]}$$

Skrátka:

$$\mathcal{F}\left\{F_A(\tau)\right\}\equiv F_\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{\omega_0^2}{\left[p^2+(\omega+\omega_0)^2\right]\left[p^2+(\omega-\omega_0)^2\right]}$$

Dříve spočteno $f_\omega = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\omega+\omega_0+i\gamma} - \frac{1}{\omega-\omega_0+i\gamma}\right)$

$$|f_\omega|^2 = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{\omega+\omega_0+i\gamma} - \frac{1}{\omega-\omega_0+i\gamma}\right)\left(\frac{1}{\omega+\omega_0-i\gamma} - \frac{1}{\omega-\omega_0-i\gamma}\right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\,\frac{\omega-\omega_0+i\gamma-\omega-\omega_0-i\gamma}{(\omega+\omega_0+i\gamma)(\omega-\omega_0+i\gamma)}\cdot\frac{\omega-\omega_0-i\gamma-\omega-\omega_0+i\gamma}{(\omega+\omega_0-i\gamma)(\omega-\omega_0-i\gamma)} =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\,\frac{2\omega_0\cdot 2\omega_0}{\left[(\omega+\omega_0)^2+\gamma^2\right]\left[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2\right]} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\omega_0^2}{\left[(\omega+\omega_0)^2+\gamma^2\right]\left[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2\right]}$$

a skutku $\mathcal{F}\{F_A(\tau)\} = \sqrt{2\pi}\cdot|f_\omega|^2$

Autokorelační funkce reálné funkce je reálná a symetrická:
pro uvedený případ

$$F_A(\tau<0) = \frac{1}{8}\left[e^{(i\omega_0+\gamma)\tau}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma+i\omega_0}\right)+e^{(\gamma-i\omega_0)\tau}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma-i\omega_0}\right)\right] =$$

$$= \frac{e^{\gamma\tau}}{8}\left[e^{i\omega_0\tau}\cdot\frac{1}{\gamma}+e^{-i\omega_0\tau}\frac{1}{\gamma}-\frac{e^{i\omega_0\tau}}{\gamma+i\omega_0}-\frac{e^{-i\omega_0\tau}}{\gamma-i\omega_0}\right] =$$

$$= \frac{e^{\gamma\tau}}{8}\left[\frac{2\cos\omega_0\tau}{\gamma}-\frac{e^{i\omega_0\tau}(\gamma-i\omega_0)+e^{-i\omega_0\tau}(\gamma+i\omega_0)}{\gamma^2+\omega_0^2}\right] =$$

$$= \frac{e^{\gamma\tau}}{8}\left(\frac{2}{\gamma}\cos\omega_0\tau-\frac{\gamma\left(e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}\right)}{\gamma^2+\omega_0^2}-\frac{-i\omega_0\left(e^{i\omega_0\tau}-e^{-i\omega_0\tau}\right)}{\gamma^2+\omega_0^2}\right)$$

$$= \frac{e^{\gamma\tau}}{8}\left[2\cos\omega_0\tau\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma}{\gamma^2+\omega_0^2}\right)+\frac{i\omega_0\left(2i\sin\omega_0\tau\right)}{\gamma^2+\omega_0^2}\right] =$$

$$= \frac{e^{\gamma\tau}}{4}\left(\frac{\gamma^2+\omega_0^2-\gamma^2}{\gamma(\gamma^2+\omega_0^2)}\cos\omega_0\tau-\frac{\omega_0}{\gamma^2+\omega_0^2}\cdot\sin\omega_0\tau\right) =$$

$$= \frac{e^{\gamma\tau}}{4}\left(\frac{\omega_0^2}{\gamma(\gamma^2+\omega_0^2)}\cos\omega_0\tau-\frac{\omega_0}{\gamma^2+\omega_0^2}\cdot\sin\omega_0\tau\right)$$

$$F_A(\tau>0)=\frac{1}{8}\left[e^{(i\omega_0-\gamma)\tau}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma-i\omega_0}\right)+e^{-(i\omega_0+\gamma)\tau}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma+i\omega_0}\right)\right]=$$

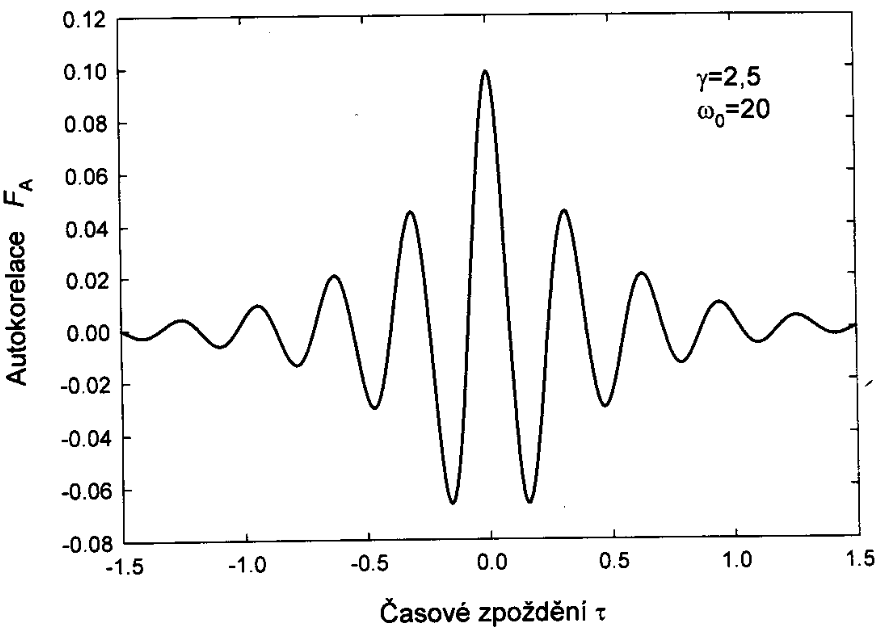
$$=\frac{e^{-\gamma\tau}}{8}\left[\frac{1}{\gamma}\left(e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}\right)-\frac{e^{i\omega_0\tau}}{\gamma-i\omega_0}-\frac{e^{-i\omega_0\tau}}{\gamma+i\omega_0}\right]=$$

$$=\frac{e^{-\gamma\tau}}{8}\left(\frac{2}{\gamma}\cos\omega_0\tau-\frac{\gamma e^{i\omega_0\tau}+i\omega_0e^{i\omega_0\tau}+\gamma e^{-i\omega_0\tau}-i\omega_0e^{-i\omega_0\tau}}{\gamma^2+\omega_0^2}\right)=$$

$$=\frac{e^{-\gamma\tau}}{8}\left(\frac{2}{\gamma}\cdot\cos\omega_0\tau-\frac{2\gamma}{\gamma^2+\omega_0^2}\cos\omega_0\tau-\frac{i\omega_0}{\gamma^2+\omega_0^2}\left(e^{i\omega_0\tau}-e^{-i\omega_0\tau}\right)\right)=$$

$$=\frac{e^{-\gamma\tau}}{4}\left(\frac{\gamma^2+\omega_0^2-\gamma^2}{\gamma(\gamma^2+\omega_0^2)}\cos\omega_0\tau-\frac{i\,i\,\omega_0\sin\omega_0\tau}{\gamma^2+\omega_0^2}\right)=$$

$$=\frac{e^{-\gamma\tau}}{4}\left(\frac{\omega_0^2}{\gamma(\gamma^2+\omega_0^2)}\cos\omega_0\tau+\frac{\omega_0}{\gamma^2+\omega_0^2}\sin\omega_0\tau\right)$$



Autokorelace a energetická spektrální hustota gaussovského pulzu s kosinovou modulací

$$f(t) = e^{-\frac{p^2}{2}t^2} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$$f^*(t-\tau) = e^{-\frac{p^2}{2}(t-\tau)^2} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega_0 (t-\tau)} + e^{i\omega_0 (t-\tau)}\right)$$

$$f(t)\cdot f^*(t-\tau) = \frac{1}{4} e^{-\frac{p^2}{2}(t^2+t^2-2t\tau+\tau^2)} \cdot \left(e^{i\omega_0\tau} + e^{2i\omega_0 t}\cdot e^{-i\omega_0\tau} + e^{-2i\omega_0 t} e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0 t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} e^{-\frac{p^2}{2}\tau^2}\left[e^{i\omega_0\tau} e^{-p^2t^2+p^2t\tau} + e^{i\omega_0\tau} e^{-p^2t^2+p^2t\tau-2i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0\tau} e^{-p^2t^2+p^2t\tau} + e^{-i\omega_0\tau} e^{-p^2t^2+p^2t\tau+2i\omega_0 t}\right)$$

jednotlivé příspěvky k $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot f^*(t-\tau)\,dt$

všude použít $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+bx}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{b^2/4a^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2t^2+p^2\tau t}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{p}\cdot e^{\frac{1}{4}p^2\tau^2}$$

zde $a = p$, $b = p^2\tau$

$$\frac{b^2}{4a^2} = \frac{p^4\tau^2}{4a^2} = \frac{1}{4}p^2\tau^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2t^2+p^2\tau t-2i\omega_0 t}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{\frac{1}{4}p^2\tau^2} e^{-i\omega_0\tau} e^{-\omega_0^2/p^2}$$

zde: $a = p$, $b = p^2\tau - 2i\omega_0$,

$$\frac{b^2}{4a^2} = \frac{p^4\tau^2}{4p^2} - \frac{4ip^2\tau\omega_0}{4p^2} - \frac{4\omega_0^2}{4p^2} = \frac{1}{4}p^2\tau^2 - \frac{\omega_0^2}{p^2} - i\omega_0\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2t^2+p^2\tau t+2i\omega_0 t}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{\frac{1}{4}p^2\tau^2} e^{i\omega_0\tau} e^{-\omega_0^2/p^2}$$

zde: $a = p$, $b = p^2\tau + 2i\omega_0$,

$$\frac{b^2}{4a^2} = \frac{1}{4}p^2\tau^2 - \frac{\omega_0^2}{p^2} + i\omega_0\tau$$

autokorelace

$$F_A = \frac{1}{4} e^{-\frac{p^2}{2}\tau^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{\frac{p^2}{4}\tau^2} e^{i\omega_0\tau} + \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{\frac{p^2}{4}\tau^2} e^{-i\omega_0\tau} e^{-\omega_0^2/p^2} \cdot e^{i\omega_0\tau} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{\frac{p^2}{4}\tau^2} e^{i\omega_0\tau} e^{-\frac{\omega_0^2}{p^2}} \cdot e^{-i\omega_0\tau} + \frac{\sqrt{\pi}}{p} \cdot e^{\frac{p^2}{4}\tau^2} e^{-i\omega_0\tau}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} e^{-\frac{p^2}{2}\tau^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{p} \cdot e^{\frac{p^2}{4}\tau^2}\left(2 e^{-\omega_0^2/p^2} + e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2p} e^{-\frac{p^2}{4}\tau^2}\left(\cos\omega_0\tau + e^{-\omega_0^2/p^2}\right)$$

Fourierova transformace autokorelační funkce $F_A(\tau)$

$$F_\omega = \mathfrak{F}\{F_A(\tau)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{4}\tau^2}\left(2 e^{-\frac{\omega_0^2}{p^2}} + e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}\right) e^{i\omega\tau} d\tau$$

opět jednotlivé příspěvky

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{4}\tau^2 + i\omega\tau} d\tau = \frac{2\sqrt{\pi}}{p} e^{-\omega^2/p^2}$$

zde: $a = p/2$, $b = i\omega$

$$\frac{b^2}{4a^2} = \frac{-\omega^2}{4p^2/4} = -\frac{\omega^2}{p^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{4}\tau^2 + i\omega_0\tau + i\omega\tau} d\tau = \frac{2\sqrt{\pi}}{p} \cdot e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{p^2}}$$

zde: $a = \frac{p}{2}$, $b = i(\omega+\omega_0)$, $\frac{b^2}{4a^2} = -\frac{(\omega+\omega_0)^2}{p^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{4}\tau^2 - i\omega_0\tau + i\omega\tau} d\tau = \frac{2\sqrt{\pi}}{p} \cdot e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{p^2}}$$

zde: $a = \frac{p}{2}$, $b = i(\omega-\omega_0)$, $\frac{b^2}{4a^2} = -\frac{(\omega-\omega_0)^2}{p^2}$

$$\mathfrak{F}\{F_A\} = \frac{1}{4p\sqrt{2}}\left[2 \cdot e^{-\omega_0^2/p^2} \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{p} \cdot e^{-\omega^2/p^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{\pi}}{p} e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{p^2}} + \frac{2\sqrt{\pi}}{p} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{p^2}}\right) =$$

$$\mathcal{F}\{F_A\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\gamma^2}\left(e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{\gamma^2}} + e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\gamma^2}} + 2e^{-\frac{\omega_0^2+\omega^2}{\gamma^2}}\right)$$

porovnání s $|f_\omega|^2$

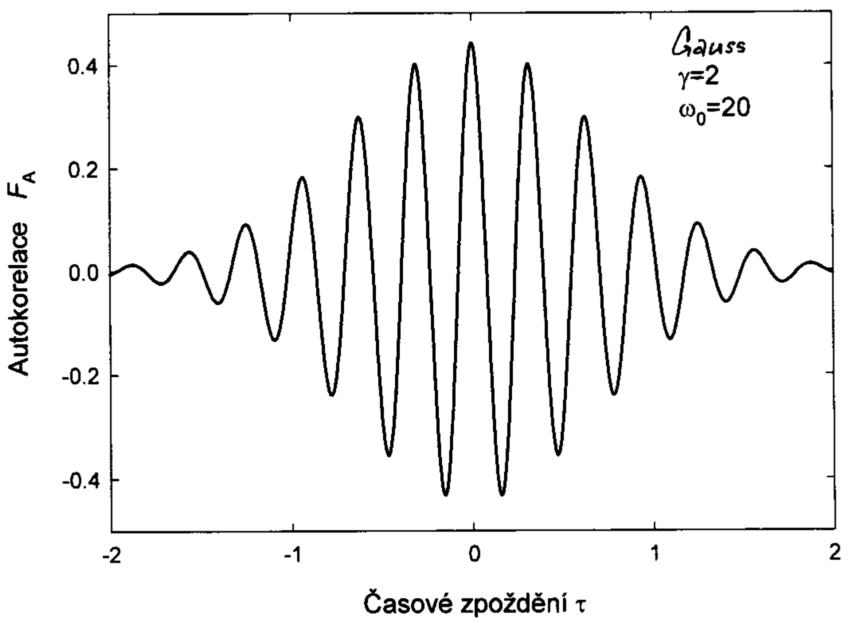
dříve spočteno $f_\omega = \frac{1}{2\gamma}\left(e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\gamma^2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2\gamma^2}}\right)$

$$|f_\omega|^2 = \frac{1}{4\gamma^2}\left(e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\gamma^2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2\gamma^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4\gamma^2}\left(e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\gamma^2}} + 2e^{-\frac{1}{2\gamma^2}(\omega^2-2\omega\omega_0+\omega_0^2+\omega^2+2\omega\omega_0+\omega_0^2)} + e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{\gamma^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\gamma^2}\left(e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\gamma^2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{\gamma^2}} + 2e^{-\frac{\omega^2+\omega_0^2}{\gamma^2}}\right)$$

opět potvrzeno $\mathcal{F}\{F_A\} = \sqrt{2\pi}\cdot|f_\omega|^2$



δ – funkce

limita posloupnosti funkcí $\delta_p(x)$

$\delta(x) = \lim\limits_{p\to\infty} \delta_p(x)$ $\quad \lim\limits_{p\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_p(x)\,dx = 1$, mnohdy $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_p(x)\,dx = 1$

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\delta_p(x\neq 0)}{\lim\limits_{x\to 0} \delta_p(x)} = 0,$$ mnohdy $$\lim_{p\to\infty} \delta_p(x\neq 0) = 0$$

základní vlastnost $\quad f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx$

Použít k výpočtu FT, když zůstaneme u proměnných t, ω

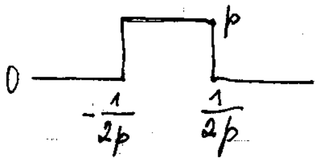
$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt \qquad x \to t,\ k \text{ místo } \omega$$

$$FT(\delta) \equiv \delta_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,\delta(t-t_0)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{i\omega t_0}$$

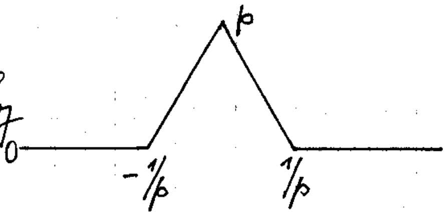
speciálně $\quad \delta_\omega(\omega; t_0=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad$ FT nekonečně ostrého pulzu je konstantní spektrum

Posloupností δ_p je mnoho, např.:

a) obdélníky $\quad \delta_p\left(x < -\frac{1}{2p}\right) = 0, \quad \delta_p\left(-\frac{1}{2p} < x < \frac{1}{2p}\right) = p, \quad \delta_p\left(x > \frac{1}{2p}\right) = 0$



b) trojúhelníky



c) Gaussovy funkce

$$\delta_p(x) = \sqrt{\frac{p}{\pi}}\, e^{-px^2}$$

d) FT obdélníka → sinc

$$\delta_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-p}^{p} e^{ixy}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{p}\cos xy\,dy = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin px}{x} =$$

$$= \frac{p}{\pi}\,\frac{\sin px}{px} = \frac{p}{\pi}\,\mathrm{sinc}\,px$$

e) $\delta_p(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{p}{1+p^2x^2}$ $\qquad p = 1/\varepsilon$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{p\to\infty}\frac{p}{1+p^2x^2} = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

zkontrolujme Fourierovu transformaci, pro srovnání s předchozími FT označme proměnné $x \to \omega$; $k \to t$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-|t|\cdot\varepsilon} \qquad \varepsilon > 0$$

$$f_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t\varepsilon}e^{i\omega t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-t\varepsilon}e^{i\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-0}{i\omega+\varepsilon} + \frac{0-1}{i\omega-\varepsilon}\right] = \frac{1}{2\pi}\,\frac{i\omega-\varepsilon-i\omega-\varepsilon}{-\varepsilon^2-\omega^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{2\varepsilon}{\omega^2+\varepsilon^2} = \delta_p(\omega)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} f_\omega = \delta(\omega) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\omega^2}$$

Fourierova fce konstanty A je $A\cdot\sqrt{2\pi}\cdot\delta(\omega)$

Ověření podmínky "normování" funkcí $\delta_\varepsilon(\omega)$: subst. $y = \frac{\omega}{\varepsilon}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon\,d\omega}{\omega^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon^2\,dy}{y^2\varepsilon^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{\pi}\Big[\mathrm{arctg}\,y\Big]_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \checkmark$$

Heavisideův schod při $t=0$

$H(t)=0$ pro $t<0$, $H(0)=\frac{1}{2}$, $H(t>0)=1$ jinak též

$h(t)=-\frac{1}{2}$ $t<0$ $h(0)=0$, $h(t>0)=\frac{1}{2}$

$H(t)=h(t)+\frac{1}{2}$

$$FT\{h(t)\}=h_\omega(\omega)=\frac{-1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{i\omega t}d\omega+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega$$ neurčitý výraz

zkusme zahrnout malé tlumení k $\pm\infty$, tj

$\omega\rightarrow\omega-i\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $t<0$

$\omega\rightarrow\omega+i\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $t>0$

$$h_\omega(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^\infty e^{(i\omega-\varepsilon)t}dt-\int_{-\infty}^{0}e^{(i\omega+\varepsilon)t}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{0-1}{i\omega-\varepsilon}-\frac{1-0}{i\omega+\varepsilon}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon-i\omega}-\frac{1}{\varepsilon+i\omega}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon+i\omega-\varepsilon+i\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{i\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}$$

$h(t)$ reálná lichá

h_ω imaginární lichá

$FT\{\frac{1}{2}\}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^\infty e^{(i\omega-\varepsilon)t}dt+\int_{-\infty}^{0}e^{(i\omega+\varepsilon)t}dt\right]=\ldots$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon+i\omega+\varepsilon-i\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\omega^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}\delta(\omega)$$

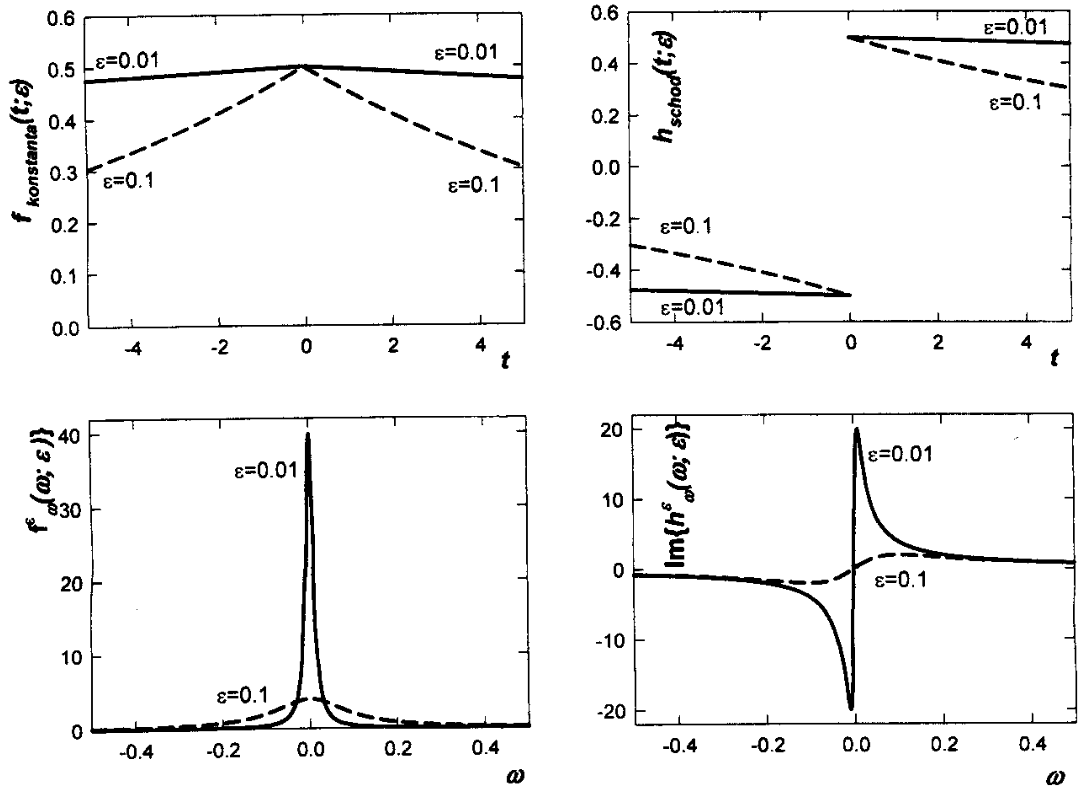
konstanta $\frac{1}{2}$ reálná sudá $\Rightarrow$ FT reálná sudá

$$f_k(t;\varepsilon) = \frac{1}{2} e^{-|t|\varepsilon}$$

$\longrightarrow$ konstante $1/2$

$$h_{schod}(t;\varepsilon) = -\frac{1}{2} e^{t\varepsilon} \quad t<0$$
$$= \frac{1}{2} e^{-t\varepsilon} \quad t>0$$

$\longrightarrow$ schod od $-1/2$ do $1/2$



$$f_\omega^{(\varepsilon)} \longrightarrow \pi \cdot \delta(\omega)$$

$$h^{(\varepsilon)}_{schod}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}$$

Znovu totéž:

- rozdělení Heavisideova schodu (z 0 na 1) na symetrickou část (konstanta 1/2) a antisymetrickou (schod z −1/2 na 1/2)
- aproximace těchto funkcí exponenciálami, $\varepsilon \to 0$

$$f_{konst}^{(\varepsilon)}(t) = \frac{1}{2} e^{t\varepsilon} \quad t<0\,; \quad f_{konst}^{(\varepsilon)}(t) = \frac{1}{2} e^{-t\varepsilon} \quad t>0$$

$$h^{(\varepsilon)}(t) = -\frac{1}{2} e^{t\varepsilon} \quad t<0\,; \quad h^{(\varepsilon)}(t) = \frac{1}{2} e^{-t\varepsilon} \quad t>0$$

- jejich FT

$$f_\omega^{(\varepsilon)}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(i\omega+\varepsilon)t}dt + \int_0^\infty e^{(i\omega-\varepsilon)t}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\varepsilon+i\omega} + \frac{1}{\varepsilon-i\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\omega^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}\cdot\delta^{(\varepsilon)}(\omega)$$

$$h_\omega^{(\varepsilon)}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[-\int_{-\infty}^{0} e^{(i\omega+\varepsilon)t}dt + \int_0^\infty e^{(i\omega-\varepsilon)t}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\varepsilon-i\omega} - \frac{1}{\varepsilon+i\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{i\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}$$

- sečtením

$$FT\{H^{(\varepsilon)}(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\delta^{(\varepsilon)}(\omega) + \frac{i\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}\right)$$

- v limitě $\varepsilon \to 0$

$$FT\{H(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\pi\cdot\delta(\omega) + i\,\mathbb{P}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]$$

což je symbolický výraz pro využití v integrálech, kde $\delta(\omega)$ znamená $\int_a^b g(\omega)\cdot\delta(\omega)\,d\omega = g(0) \quad 0\in(a,b)$

případně $\int_a^b g(\omega)\cdot\delta(\omega-\omega_0)\,d\omega = g(\omega_0) \quad \omega_0\in(a,b)$

a $\mathbb{P}\left(\frac{1}{\omega}\right)$ znamená $\int_a^{-\varepsilon}\frac{g(\omega)}{\omega}\,d\omega + \int_\varepsilon^b \frac{g(\omega)}{\omega}\,d\omega \quad 0\in(a,b)$

v $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$

Význam symbolu $\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega}\right)$, Cauchyova hlavní hodnota

zkoumat limitu integrálů $\int h_\omega^{(\varepsilon)}(\omega)\cdot g(\omega)\,d\omega$ při $\varepsilon \to 0$

$$\frac{1}{i}\int_a^b h_\omega^{(\varepsilon)}(\omega)\cdot g(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \frac{\omega\cdot g(\omega)}{\varepsilon^2+\omega^2}\,d\omega$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_a^{-\varepsilon}\frac{g(\omega)\,d\omega}{\omega} + \int_{-\varepsilon}^{0}\frac{\omega\cdot g(\omega)}{\varepsilon^2+\omega^2}\,d\omega + \int_0^{\varepsilon}\frac{\omega\cdot g(\omega)}{\varepsilon^2+\omega^2}\,d\omega + \int_\varepsilon^b \frac{g(\omega)}{\omega}\,d\omega\right]$$

daleko od $\omega=0$ lze ε zanedbat

Nechť $g(\omega)$ v okolí $\omega=0$ nezlobí (spojitost, derivace,..)

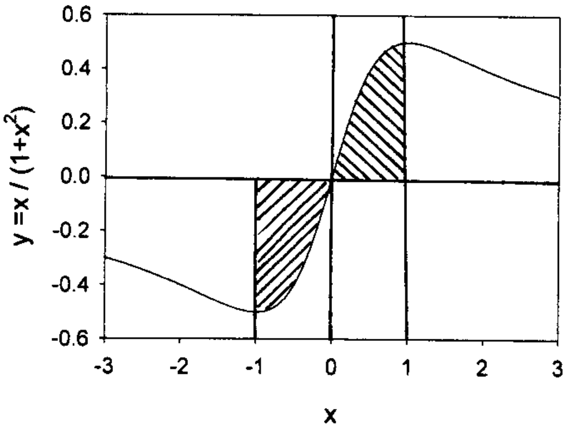
$$g(\omega) \doteq g(0) + \omega\cdot g'(0)$$

1) $$\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{\omega\cdot g(0)}{\varepsilon^2+\omega^2}\,d\omega + \int_0^{\varepsilon}\frac{\omega\, g(0)}{\varepsilon^2+\omega^2}\,d\omega = 0$$

protože $$g(0)\cdot\int_0^{\varepsilon}\frac{\omega\,d\omega}{\varepsilon^2+\omega^2} = g(0)\int_0^1\frac{\varepsilon^2 x\,dx}{\varepsilon^2+\varepsilon^2x^2} = g(0)\int_0^1\frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{g(0)}{2}\int_1^2\frac{dz}{z} = \frac{g(0)}{2}\ln 2$$

podobně $$g(0)\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{\omega\,d\omega}{\varepsilon^2+\omega^2} = -\frac{g(0)}{2}\ln 2$$



2) $\int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\omega^2 g'(0)}{\varepsilon^2+\omega^2}\, d\omega + \int_{0}^{\varepsilon} \frac{\omega^2 g'(0)}{\varepsilon^2+\omega^2}\, d\omega \doteq 0{,}4292 \cdot \varepsilon \cdot g'(0) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\omega^2}{\omega^2+\varepsilon^2}\, d\omega = \int_0^1 \frac{\varepsilon^3 x^2\, dx}{\varepsilon^2 x^2+\varepsilon^2} = \varepsilon \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_0^{\varepsilon} \ldots = \varepsilon \left(\int_0^1 1\, dx - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \right) = \varepsilon \left(1 - \operatorname{arctg} 1 \right) \doteq$$

$$\doteq 0{,}2146\, \varepsilon$$

podobně $\int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\omega^2}{\varepsilon^2+\omega^2}\, d\omega = \ldots \doteq 0{,}2146\, \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

když $g'(0)$ konečné

$$\mathcal{P}\int_a^b \frac{g(\omega)}{\omega}\, d\omega \equiv \int_a^{-\varepsilon} \frac{g(\omega)}{\omega}\, d\omega + \int_{\varepsilon}^{b} \frac{g(\omega)}{\omega}\, d\omega$$

$0 \in (a, b)$

podobně při $\omega \to \omega + \omega_0$; $\omega + \omega_0 \in (a, b)$

$$\mathcal{P}\int_a^b \frac{g(\omega+\omega_0)}{\omega+\omega_0}\, d\omega = \int_a^{-\omega_0-\varepsilon} \frac{g(\omega+\omega_0)}{\omega+\omega_0}\, d\omega + \int_{-\omega_0+\varepsilon}^{b} \frac{g(\omega+\omega_0)}{\omega+\omega_0}\, d\omega$$

Nechť $g(t)$ je typická paměťová funkce

$g(t<0)=0$, $g(\to +\infty)$ rychle ubývá, typicky $\sim e^{-pt}$

identita $g(t) = H(t) \cdot g(t)$ "vynásobení schodem funkci g nezmění"

její FT (FT součinu je konvoluce FT)

$$g_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_\omega(\omega') \cdot H_\omega(\omega-\omega')\, d\omega'$$

kde $H_\omega(\omega-\omega') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\pi\cdot\delta(\omega-\omega') + i\,\mathbb{P}\left(\frac{1}{\omega-\omega'}\right)\right]$

$$g_\omega(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi\cdot g_\omega(\omega')\,\delta(\omega-\omega')\,d\omega' + \frac{i}{2\pi}\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_\omega(\omega')}{\omega-\omega'}\,d\omega'$$

$$= \frac{1}{2}g_\omega(\omega) + \frac{i}{2\pi}\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_\omega(\omega')}{\omega-\omega'}\,d\omega'$$

$$g_\omega(\omega) = \frac{i}{\pi}\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_\omega(\omega')\,d\omega'}{\omega-\omega'} \equiv \frac{i}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon}\frac{g_\omega(\omega')}{\omega-\omega'}\,d\omega' + \int_{\omega+\varepsilon}^{\infty}\frac{g_\omega(\omega')}{\omega-\omega'}\,d\omega'\right)$$

v limitě $\varepsilon \to 0$

Rozepišme do reálných a imaginárních složek

$$\mathrm{Re}\,g_\omega(\omega) + i\,\mathrm{Im}\,g_\omega(\omega) = \frac{i}{\pi}\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,g_\omega(\omega')}{\omega-\omega'}\,d\omega' + \\ - \frac{1}{\pi}\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,g_\omega(\omega')}{\omega-\omega'}\,d\omega'$$

tj.:

$$\mathrm{Re}\,g_\omega(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,g_\omega(\omega')}{\omega-\omega'}\,d\omega' = \frac{1}{\pi}\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,g_\omega(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega'$$

$$\mathrm{Im}\,g_\omega(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,g_\omega(\omega')}{\omega-\omega'}\,d\omega' = \frac{-1}{\pi}\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,g_\omega(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega'$$

Kramersovy-Kronigovy integrální relace, které spojují reálné a imaginární část Fourierovy transformace typické paměťové funkce.

Je-li $g(t)$ reálná funkce, pak

$$g_\omega(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\omega t}\,dt = g_\omega^*(-\omega),\ \text{tj}$$

$$\mathrm{Re}\, g_\omega(-\omega) = \mathrm{Re}\, g_\omega(\omega),\quad \mathrm{Im}\, g_\omega(-\omega) = -\mathrm{Im}\, g_\omega(-\omega)$$

$$\mathrm{Re}\, g_\omega(\omega) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{Im}\, g_\omega(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega' + \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, g_\omega(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega' =$$

$$\omega' \rightarrow -\omega'$$

$$= \frac{-1}{\pi}\mathcal{P}\int_{\infty}^{0}\frac{\mathrm{Im}\, g_\omega(-\omega')}{-\omega'-\omega}\,d\omega' + \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, g_\omega(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega' =$$

$$= \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, g_\omega(\omega')}{\omega'+\omega}\,d\omega' + \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, g_\omega(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega' =$$

$$= \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega'\mathrm{Im} - \omega\,\mathrm{Im} + \omega'\mathrm{Im} + \omega\,\mathrm{Im}}{\omega'^2-\omega^2}\,d\omega' =$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega'\,\mathrm{Im}\, g_\omega(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}\,d\omega'$$

podobně

$$\mathrm{Im}\, g_\omega(\omega) = \ldots = \frac{-2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\,\mathrm{Re}\, g_\omega(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}\,d\omega'$$

$$-\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{Re}}{\omega'-\omega}\,d\omega' - \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}}{\omega'-\omega}\,d\omega'$$

$$= \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{\infty}^{0}\frac{\mathrm{Re}}{-\omega'-\omega}\,d\omega' - \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}}{\omega'-\omega}\,d\omega'$$

$$= \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}}{\omega'+\omega}\,d\omega' - \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}}{\omega'-\omega}\,d\omega'$$

$$= \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega'\mathrm{Re} - \omega\,\mathrm{Re} - \omega'\mathrm{Re} - \omega\,\mathrm{Re}}{\omega'^2-\omega^2}\,d\omega' = \frac{-2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\cdot\mathrm{Re}}{\omega'^2-\omega^2}$$

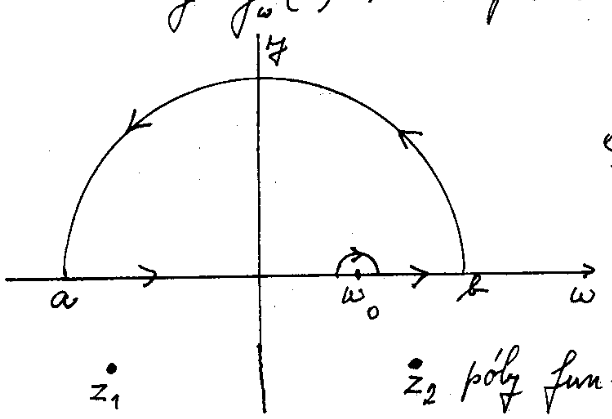
Totiž trochu jinak: princip kauzality implikuje

$g(t<0)=0$, $g(t\to\infty)\to 0$ dostatečně rychle

Dříve uvedené příklady: $g_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{i\omega t}\, dt$ má

póly pouze v dolní polorovině komplexní roviny

To platí obecně – zde bez důkazu. V horní polorovině je $g_\omega(z)$ holomorfní $\Rightarrow$ integrál po naznačené křivce



póly funkce $g_\omega(z)$

$$\oint \underbrace{\underbrace{g_\omega(z)}_{\text{holomorf}} \cdot \underbrace{\frac{1}{z-\omega_0}}_{\text{holomorfní}}}_{\text{holomorfní}} dz = 0$$

integrace přes velkou půlkružnici $\int_v \frac{g_\omega(z)}{z-\omega_0}\,dz \to 0$

když její poloměr $R\to\infty$ a $g_\omega(z)$ ubývá aspoň jako $\frac{1}{|z|}$

tj $\frac{g_\omega(z)}{z-\omega}$ ubývá jako $\frac{1}{|z|^2}$ a $\pi\cdot\frac{R}{R^2}\to 0$

integrace přes malou půlkružnici, která ve středu má pól, jehož reziduum je $g_\omega(\omega_0)$

$$\int_m \underbrace{\frac{g_\omega(z)}{z-\omega_0}}_{\doteq \frac{g_\omega(\omega_0)}{r\cdot e^{i\varphi}}} dz \doteq \int_\pi^0 \underbrace{\frac{g_\omega(\omega_0)}{r\cdot e^{i\varphi}}}_{\frac{g_\omega(z)}{z-\omega_0}} \cdot \underbrace{i\cdot r\cdot e^{i\varphi}\, d\varphi}_{dz} =$$

$$= -i\int_0^{\pi} g_\omega(\omega_0)\cdot d\varphi = -i\pi\, g_\omega(\omega_0)$$

integrál přes reálnou osu ω

$$\int_a^{\omega_0-\varepsilon}\frac{g_\omega(\omega)}{\omega-\omega_0}\,d\omega + \int_{\omega_0+\varepsilon}^{b}\frac{g_\omega(\omega)}{\omega-\omega_0}\,d\omega = \mathbb{P}\int_a^b\frac{g_\omega(\omega)}{\omega-\omega_0}\,d\omega$$

Cauchyova hlavní hodnota

$a \to -\infty$, $b \to +\infty$ (aby $\int$ po velké půlkružnici $\to 0$)

$$\oint\frac{g_\omega(z)}{z-\omega_0}\,dz = 0 = -i\pi\, g_\omega(\omega_0) + \mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_\omega(\omega)}{\omega-\omega_0}\,d\omega$$

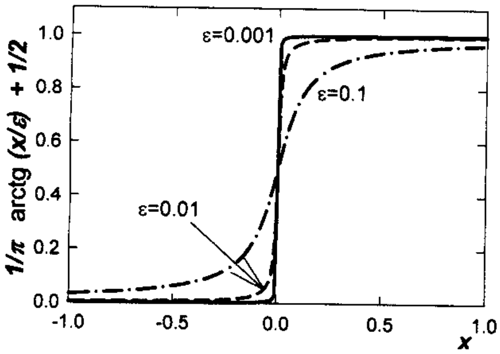
$$g_\omega(\omega_0) = \frac{1}{i\pi}\,\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_\omega(\omega_0)}{\omega-\omega_0}\,d\omega = \frac{i}{\pi}\,\mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_\omega(\omega_0)}{\omega_0-\omega}\,d\omega$$

stejně jako za pomoci FT Heavisideova schodu

Často vhodné využít „δ-funkce je derivací Heavisideova schodu".

vhodná posloupnost funkcí konvergujících k $H(x)$

$$\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \qquad \varepsilon \to 0$$



$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+\frac{x^2}{\varepsilon^2}}\cdot\frac{1}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$$

dříve ukázáno

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$$