

Postupné, rovinné, monochromatické vlny v lineárním izotropním nemagnetickém prostředí

Rovinné vlny 1

Při diskusi o řadě jevů je výhodné vycházet z rovinných vln. Vlny musí splňovat Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \rho_{\text{volny}} & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}_{\text{volny}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

a lineární materiálové vztahy vezmeme ve tvaru

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{rel}} \vec{E} = \varepsilon_0 (n + i\kappa)^2 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} \\ \vec{j}_{\text{volny}} &= 0.\end{aligned}$$

Přívlastek *postupné* se vztahuje k možnosti jednoduchého popisu pomocí vlnového vektoru $\vec{k}$ k charakteristice toku výkonu spojeného s vlnou; protikladem jsou vlny stojaté. Přívlastek *rovinné* charakterizuje tvar vlnoploch (rovinné plochy konstantní fáze). Přívlastek *monochromatická* je dán jednoduchou časovou závislostí. Charakteristiku vlny lze doplnit o přívlastek *homogenní* („výchylky“, tj. proměnné $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ jako funkce prostorové souřadnice $\vec{r}$ a času t podél vlnoplochy jsou konstantní) nebo *nehomogenní* („výchylka“ podél vlnoplochy není konstantní) a o přívlastek *tlumená* nebo *netlumená* podle toho, zda prostředí odebírá nebo neodebírá z vlny výkon.

1.

V rovinné, **homogenní, netlumené, postupné** vlně kmitají vektory $\vec{E}$ a $\vec{H}$ ve fázi a jejich vzájemná orientace v prostoru je taková, že směr šíření $\vec{s}_0, \vec{E}, \vec{H}$ tvoří pravotočivý systém, $\vec{s}_0$ je jednotkový vektor $|\vec{s}_0| = 1$. Z Maxwellových rovnic lze odvodit vlnové rovnice pro $\vec{E}$ a $\vec{B}$, pro izotropní prostředí.. Vlastností rovinné, homogenní, netlumené vlny v izotropním prostředí je příčnost: $\vec{E}, \vec{D} \perp \vec{s}, \vec{H}, \vec{B} \perp \vec{s}, \vec{E} \perp \vec{B}$. Vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ kmitají ve fázi a poměr jejich velikostí je určen fázovou rychlostí v daném neabsorbujícím prostředí:

$$\vec{s}_0 \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{c}{n} \vec{B}(\vec{r}, t)$$

str. 1 - 6.

Monochromatické vlny hrají základní roli při Fourierově rozkladu obecnějších časových průběhů. Homogenní, netlumená, postupná, monochromatická vlna $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$ je charakterizována amplitudou $\vec{E}_0$, vlnovým vektorem $\vec{k}$ a kruhovou frekvencí ω , případně dalšími veličinami od nich odvozenými str. 7. Při početních úkonech je výhodné využívat komplexní symboliky např. pro homogenní vlnu

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{E}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]\}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left\{\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]\right\}$$

str. 8 - 10.

Elektrické a magnetické pole postupné, rovinné vlny kmitají ve fázi,
pokud je index lomu reálný

str. 11 - 12.

$\vec{E}$, $\vec{H}$ jsou v rovinné, homogenní vlně stále navzájem kolmé a kolmé ke směru šíření.
V rovině kolmé ke směru šíření obecně mohou jejich koncové body opisovat elipsu.

Reálný popis elipticky polarizovaného záření jako superpozice
dvou lineárně polarizovaných vln je na

str. 13 - 21.

Složením vln

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad E_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta)$$

dostaneme v obecném případě elipticky polarizovanou vlnu. Parametry elipsy lze vyjádřit

pomocí úhlu ϑ , pro který je $\tan \vartheta = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$, a fázového posuvu δ

$$\sin 2\chi = -\sin 2\vartheta \cdot \sin \delta \quad \tan 2\alpha = \tan 2\vartheta \cdot \cos \delta,$$

kde elipticita je popsána úhlem χ tak, že souvisí s poměrem malé a velké poloosy elipsy

$\tan \chi = \frac{b}{a}$, $a > 0$, $b < 0$ pro levotočivě polarizovanou vlnu a $b > 0$ pro pravotočivou

polarizaci. Orientace os elipsy vzhledem k ose x je charakterizována úhlem α . Speciálními
případy jsou pak lineární polarizace složené vlny ($\delta = 0, \pm\pi, \dots$) a kruhová polarizace

($E_{0x} = E_{0y}$ a $\delta = \pm\frac{\pi}{2}, \dots$).

Komplexní popis a popis pomocí Jonesových vektorů (1×2) je nastíněn na

str. 22 - 24.

Jonesovy matice 2×2 slouží k popisu polarizačních prvků: polarizátor

str. 24 - 27,

rotátor

str. 28.

Stáčení roviny polarizace je způsobeno kruhovým dvojlomem,

str. 28/1 - 28/2.

Jonesovy matice pro fázovou destičku a kompenzátor jsou na

str. 29 - 34.

Rovinné vlny 2

Elektromagnetická vlna je spojena s objemovou hustotou energie elektrického pole,
objemovou hustotou energie magnetického pole, plošnou hustotou toku výkonu
(popsán Poyntingovým vektorem) aj. Intenzita záření *postupné* vlny
je definována jako časová střední hodnota velikosti Poyntingova vektoru.

str. 35 - 51.

Jonesovy vektory a matice jsou použitelné pro popis dokonale polarizované vlny (taková
přesně monochromatická vlna by byla, kdyby existovala). elektromagnetická pole však mají
statistický charakter a polarizace může být nejen úplná, ale i částečná nebo žádná. Pro takové

vlny lze zavést popis polarizace pomocí polarizační matice 2×2 nebo pomocí Stokesova vektoru (1×4).

str. 51/1 – 51/20

Příklady Jonesova vektoru, polarizační matice a Stokesových parametrů pro

kruhově polarizovanou vlnu

str. 51 / 9 – 51 / 11

lineárně polarizovanou vlnu

str. 51 / 11 – 51 / 15

elipticky polarizovanou vlnu

str. 51 / 16 – 51 / 18

Působení polarizačních prvků na záření charakterizované Stokesovými parametry lze popsat Muellerovými maticemi 4×4

str. 51 / 19 – 51 / 20

Rovinné vlny 3

2.

V rovinné, postupné, monochromatické, **homogenní, tlumené** vlně, která se šíří v izotropním absorbujičím prostředí s komplexním indexem lomu $n + i\kappa$, má komplexní vlnový vektor

$\vec{k}_R + i\vec{k}_I = \frac{\omega}{c}(n + i\kappa)\vec{s}_0$ obě složky rovnoběžné: tj. reálná a imaginární část vlnového vektoru

jsou rovnoběžné; plochy konstantní fáze i plochy konstantní amplitudy jsou rovnoběžné roviny. Vlna je příčná, ale vektory $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$ nekmitají ve fázi. Ani střední hustoty elektrické a magnetické energie nejsou stejné (na rozdíl od netlumené vlny). Taková vlna vzniká při kolmém dopadu rovinné vlny na rovinné rozhraní, za níž se šíří v prostředí o komplexní relativní permitivitě $\varepsilon_R + i\varepsilon_I = (n + i\kappa)^2$. Rovinná, monochromatická, tlumená, homogenní vlna je příčná, $\vec{E}$ a $\vec{B}$ kmitají fázově posunuty, např. pro lineárně polarizovanou vlnu šířící se ve směru z

$$E_x(z, t) = E_0 \exp(-k_I z) \exp[i(k_R z - \omega t)]$$

$$B_y(z, t) = E_0 \frac{n + i\kappa}{c} \exp(-k_I z) \exp[i(k_R z - \omega t)]$$

$$D_x(z, t) = E_0 \varepsilon_0 (n^2 - \kappa^2 + 2in\kappa) \exp(-k_I z) \exp[i(k_R z - \omega t)]$$

$$k_R + ik_I = \frac{\omega}{c}(n + i\kappa)$$

Tlumení vlny je charakterizováno imaginární částí indexu lomu κ , objemová hustota výkonu odebíraného vlně

$$- \langle \text{div } \vec{S} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \omega n \kappa \exp\left(-2 \frac{\omega}{c} \kappa z\right)$$

Pokles intenzity záření na dráze délky z je dán Lambertovým – Beerovým zákonem

$$I(z) = I(z=0) \exp(-\alpha z), \text{ kde absorpční koeficient } \alpha = 2 \frac{\omega}{c} \kappa.$$

str. 52 – 63.

3.

Monochromatická, **nehomogenní, tlumená** vlna vzniká např. při šikmém dopadu rovinné vlny z neabsorbujícího prostředí přes rovinné rozhraní do prostředí absorbujícího. Reálná a imaginární složky vlnového vektoru nejsou rovnoběžné, leží však v rovině dopadu. Vlna není příčná. V této části se předpokládá absorbující („pasivní“) prostředí homogenní, lineární a izotropní;

str. 64 – 65

V polarizaci s je příčná její elektrická složka (vlna typu TE), vektor $\vec{E}$ kmitá kolmo na rovinu dopadu ale konec vektoru $\vec{H}$ opisuje v daném místě elipsu, jejíž rovina je rovnoběžná s rovinou $(\vec{k}_R, \vec{k}_I)$, která je totožná s rovinou dopadu. Tedy $\vec{H}$ má podélnou složku. Poyntingův vektor je rovnoběžný se směrem $\vec{k}_R$, což souvisí s předpokladem, že k absorpci dochází v důsledku interakce prostředí s elektrickou komponentou elektromagnetické vlny.
str. 65 – 67.

V polarizaci p se jedná o vlnu příčnou magneticky (TM), elektrický vektor opisuje elipsu ležící v rovině dopadu. Poyntingův vektor leží v této rovině a nemusí být rovnoběžný ani s $\vec{k}_R$ ani s $\vec{k}_I$.
str. 68 – 72.

V obou polarizacích dostaneme mezi materiálovým parametrem – relativní permitivitou $\varepsilon_R + i\varepsilon_I$ a složkami vlnového vektoru $k_R + ik_I = \frac{\omega}{c}(n_\Theta(\Theta) + i\kappa_\Theta(\Theta))$ vztah

$$\varepsilon_R + i\varepsilon_I = n_\Theta^2(\Theta) - \kappa_\Theta^2(\Theta) + 2i n_\Theta(\Theta) \kappa_\Theta(\Theta) \cos \Theta = n^2 - \kappa^2 + 2in\kappa,$$

kde $n + i\kappa$ je komplexní index lomu pro homogenní tlumenou vlnu v témže materiálu a zápisem $n_\Theta(\Theta) + i\kappa_\Theta(\Theta)$ je zdůrazněna závislost na úhlu Θ mezi směry reálné složky vlnového vektoru a imaginární složky vlnového vektoru.

4.

Postupná, **nehomogenní, netlumená** vlna (netlumená ve smyslu, že nedochází k absorpci energie v prostředí, ale dochází k poklesu amplitudy vlny směrem od rozhraní do objemu látky) může vzniknout, když vnější podmínky vnucují elektromagnetické vlně periodicitu, která není slučitelná se šířením vlny v daném prostředí. Příkladem nechť je evanescentní vlna u rozhraní v případě totálního odrazu na opticky řidším prostředí pro dostatečně velký úhel dopadu. Vlna se šíří podél rozhraní a kolmice na vlnoplochy zůstává v rovině dopadu.

Polarizace s je opět charakterizována příčností elektrického pole, zatímco magnetické pole má složky příčnou i podélnou, vůči sobě fázově posunuté o $\frac{\pi}{2}$. Elektrické pole a příčná složka magnetického pole kmitají ve fázi. Např. pro vlnu ubývající exponenciálně ve směru z a šířící se ve směru x jsou tyto složky (a a b jsou reálná)

$$E_y = E_0' \exp(-az) \exp[i(bx - \omega t)]$$

$$B_x = -i \frac{a}{\omega} E_y$$

$$B_z = \frac{b}{\omega} E_y$$

Poyntingův vektor má nenulovou složku $\langle S_x \rangle$ a výkon není absorbován.
str. 73 – 77

Ve vlně polarizace p je magnetická složka příčná, elektrické pole má příčnou i podélnou složku.

$$E_z = E_0'' \exp(-az) \exp[i(bx - \omega t)]$$

$$E_x = -i \frac{a}{b} E_z$$

$$B_y = \frac{a^2 - b^2}{\omega b} E_z$$

Výkon opět teče podél směru x a není absorbován.

str. 77 – 82.

5.

Někdy i v optice je potřeba uvažovat interakci magnetické složky vlny s látkou, což na fenomenologické úrovni znamená zavést magnetickou permeabilitu. Vztahy mezi permitivitou a permeabilitou izotropního prostředí na jedné straně a komplexním indexem lomu na straně druhé jsou diskutovány na případu šíření rovinné homogenní tlumené monochromatické vlna v takovém prostředí na

str. 83.

Pokud permeabilita má pouze reálnou složku, přispěje k indexu lomu koeficientem $\sqrt{\mu_R}$

$$n = \sqrt{\mu_R} \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_I^2} + \epsilon_R)}$$

$$\kappa = \sqrt{\mu_R} \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon_R^2 + \epsilon_I^2} - \epsilon_R)}$$

str. 84.

Zajímavý „exotický“ případ (nevyskytující se v optickém oboru v žádném přirozeném materiálu) nastane při $\epsilon_R < 0$ a zároveň $\mu_R < 0$. Pro časovou závislost $\propto \exp(-i\omega t)$ musí být pro pasivní prostředí (které výkon z vlny odebírá, nepřidává) $\epsilon_I, \mu_I > 0$. V takovém prostředí reálná část vlnového vektoru je orientována proti směru toku výkonu (Poyntingovu vektoru). Diskutováno (včetně jednoduchého modelu „elektrického“ a „magnetického“ oscilátoru) na str. 85 – 91.

Realizace vhodných prostředí dosud obvykle spočívá ve vytváření miniaturních kovových struktur (typické rozměry menší než vlnové délky, pro infračervenou oblast desítky a stovky nm) v podstatě fungujících jako rezonátory LC;

str. 92, 93.

Výkon nesoucí elektromagnetickou vlnou

nemagnetické prostředí $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$,
 MR $\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad | \cdot \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

$$\text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{VOLNÉ}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad | \cdot (-\vec{E})$$

$$\vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) = - \vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{VOLNÉ}}$$

vektorová identita $\text{div}(\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot \text{rot } \vec{f} - \vec{f} \cdot \text{rot } \vec{g}$
 $\vec{f} \rightarrow \vec{E}, \vec{g} \rightarrow \vec{H}$

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = - \vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{VOLNÉ}}$$

Průřez $\vec{j}$ mohou být vyvolány elektrickým polem $\vec{E}$
 např. $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ Ohmův zákon, $\vec{E} \cdot \vec{j} = \sigma E^2$ Jouleovo teplo
 tak i silami jiné povahy; v kapitolách o elektrické
 a elektrických obvodech označovaných jako
 elektromotorické síly $\vec{E}_{\text{EMS}}$.

V Jouleově teple $\vec{E} \cdot \vec{j} > 0$ energie se v daném místě mění
 na teplo („spotřeba“)

v případě E_{EMS} může nastat $\vec{E}_{\text{EMS}} \cdot \vec{j} < 0$, pak vnější
 síly výkon do elmag. pole dodávají (zdroj)

Případ bez E_{EMS} („pasivní“ látka, spotřebič); $E_{\text{EMS}} = 0$

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{E} \cdot \vec{E})}{\partial t} \quad \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial (\vec{H} \cdot \vec{H})}{\partial t}$$

$$\underbrace{\text{div}(\vec{E} \times \vec{H})}_{\vec{S} \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{ W/m}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial (H^2)}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t} W_e} + \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial (E^2)}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t} W_e} + \underbrace{\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{VOLNÉ}}}_{\vec{P}_{\text{JOULE}} \quad \text{výkon}} = 0$$

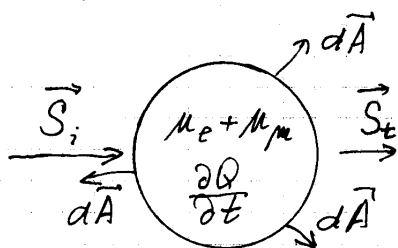
Poyntingův vektor

$$\operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial \mu_e}{\partial t} + \frac{\partial \mu_m}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = P_{\text{Joule}}$$

Pro absorbujiící oblast $\oint_{\text{plocha A}} \vec{S} \cdot d\vec{A} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(A)} (\mu_e + \mu_m) dV}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(A)} Q dV}_{> 0}$

< 0 více vtíká než vytíká $\rightarrow 0$ pro stacionární stav pole

Ve stacionárním režimu v absorbujiícím prostředí



$\oint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$ rozdíl mezi vystupujícím a vstupujícím výkonem nesoujícím elmag polem

$\int_{V(A)} \frac{\partial (\mu_e + \mu_m)}{\partial t} dV$ hromadění elektromagnetické energie uvnitř plochy A

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(A)} Q dV = \int_{V(A)} P_{\text{Joule}} dV \quad \text{výkon mlučivý ve formě Jouleova tepla}$$

Fyzikální řešení

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad V \cdot m^{-1} \cdot A \cdot m^{-1} = W \cdot m^{-2} \quad \text{výkon na jednotku plochy}$$

$$\mu_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad V \cdot m^{-1} \cdot C \cdot m^{-2} = V \cdot A \cdot s \cdot m^{-3} = J \cdot m^{-3}$$

energie v objemové jednotce
rozměr D stejný jak polarizace $\vec{P} \cdot \vec{n} = \sigma_{\text{povrch}}$

$$\mu_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad A \cdot m^{-1} \cdot \frac{N}{A \cdot s \cdot m \cdot s^{-1}} \cdot \frac{m}{m} = \frac{N \cdot m}{m^3} = J \cdot m^{-3}$$

R Lorentzovy síly
 $\vec{B} = \frac{\vec{F}}{Q \cdot v}$

$$P_{\text{Joule}} = \vec{E} \cdot \vec{j} \quad V \cdot m^{-1} \cdot A \cdot m^{-2} = W \cdot m^{-3}$$

(36/1)

$$\operatorname{div} \vec{S} \quad \text{m}^{-1} \cdot \text{W} \cdot \text{m}^{-2} = \text{W} \cdot \text{m}^{-3} < 0 \text{ pro absorbujiící prostředí}$$

$$\frac{\partial (u_e + u_m)}{\partial t} \quad \text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} = \text{W} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$P_{\text{Joule}} = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \text{W} \cdot \text{m}^{-3} = \text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} > 0 \text{ pro absorbujiící prostředí}$$

Ustálený stav: příjem energie v rovnováze s vyzářeným
teplem a elektromagnetická energie se nemění

$$\frac{\partial (u_e + u_m)}{\partial t} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t} < 0$$

Prostorová oblast může fungovat jako zdroj:

vhodně napojíme elektromotorické síly E_{EMS}

$$\text{tak, že } \vec{E}_{\text{EMS}} \cdot \vec{j} < 0$$

nebo v látce uskladníme energii, kterou vhodným

$$\text{způsobem vyzáříme} \quad \frac{\partial u}{\partial t} < 0$$

(přeměníme na elmag)

a pak lze docílit $\operatorname{div} \vec{S} > 0$ zdroj elmag pln

S rostoucí rychlostí časových změn látka přestává stíhat
reagovat, tj. dochází k fázovému posuvu mezi $E(t)$
a $D(t)$, mezi $E(t)$ a $j(t)$.

Mízi rozdíl mezi $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ a $\vec{j}$, dobrý smysl má
spíše $\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = (\sigma_R + i\sigma_I) \cdot \vec{E}$ $\sigma_R + i\sigma_I$ komplexní vodivost

Má dobrý smysl pro monochromatickou časovou závislost

$$j_0 \cdot e^{-i\omega t}, \quad P_0 \cdot e^{-i\omega t}, \quad E_0 \cdot e^{-i\omega t} \quad \text{v daném místě}$$

$$\sigma_R(\omega), \sigma_I(\omega)$$

$$\vec{j}' = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \text{použít v Ohmově zákoně}$$

(36/2)

Jouleovo teplo (energie přeměněná v teplo v jednotce objemu za jednotku času)

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t} &= \vec{E} \cdot \vec{j} = \operatorname{Re}\{E_0 e^{-i\omega t}\} \cdot \operatorname{Re}\{(\sigma_R + i\sigma_I) \cdot E_0 \cdot e^{-i\omega t}\} \\ &= E_0^2 \cos \omega t \cdot \operatorname{Re}\{\sigma_R (\cos \omega t - i \sin \omega t) + i\sigma_I (\cos \omega t - i \sin \omega t)\} = \\ &= E_0^2 (\sigma_R \cos^2 \omega t + \sigma_I \cos \omega t \cdot \sin \omega t)\end{aligned}$$

Vyšetření přes periodu $\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2}$ $\langle \cos \omega t \cdot \sin \omega t \rangle_T = 0$

$$\left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} \right\rangle_T = \frac{1}{2} \sigma_R \cdot E_0^2$$

V optice je běžnější vycházet ze susceptibility $\chi(\omega) = \chi_R + i\chi_I$ a pak je člen $\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ nahrazen $\epsilon_0 \chi \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t} &= \operatorname{Re}\{E_0 \cdot e^{-i\omega t}\} \cdot \operatorname{Re}\{\epsilon_0 (\chi_R + i\chi_I) \cdot (-i\omega) \cdot E_0 \cdot e^{-i\omega t}\} \\ &= E_0^2 \epsilon_0 \omega \cos \omega t \cdot \operatorname{Re}\{-i\chi_R (\cos \omega t - i \sin \omega t) + \\ &\quad + \chi_I (\cos \omega t - i \sin \omega t)\} = \\ &= E_0^2 \epsilon_0 \omega (\chi_I \cos^2 \omega t - \chi_R \cos \omega t \sin \omega t)\end{aligned}$$

Porovnáním $\chi_I = \frac{\sigma_R}{\epsilon_0 \omega}$ $\chi_R = \frac{-\sigma_I}{\epsilon_0 \omega}$

Relativní permitivita $\epsilon_r = 1 + \chi = 1 + \chi_R + i\chi_I$
 $= \epsilon_{rR} + i\epsilon_{rI} = \epsilon' + i\epsilon'' = \epsilon_1 + i\epsilon_2$
 obvyklá značení

Index lomu $(n + i\kappa)^2 = \epsilon_r$

$$\epsilon_1 = n^2 - \kappa^2 \quad \epsilon_2 = 2n\kappa$$

Pro absorbovaný výkon je důležitý

$$\sigma_R = \epsilon_0 \omega \chi_I = 2 \epsilon_0 \omega n \kappa$$

Lineárne polarizovaná rovinná monochromatická podúprná
nezlumená vlna (= neabsorbujúci prostredie ϵ reálne)

a) reálny popis vlny šíriaci sa v smere osy z

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t) \quad k, \omega \text{ reálne} \quad k = \frac{\omega}{c} n$$

$$\text{MR: } -\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -k \cdot E_0 \sin(kz - \omega t)$$

$$B_y = k E_0 \int \sin(kz - \omega t) dt$$

předpoklad $B_{\text{statické}} = 0$ (integrační konstanta)

$$kz - \omega t = \xi$$

$$dt = -\frac{1}{\omega} d\xi$$

$$\begin{aligned} B_y &= -\frac{k}{\omega} E_0 \int \sin \xi d\xi = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kz - \omega t) = \\ &= \frac{n}{c} E_0 \cos(kz - \omega t) \end{aligned}$$

$$S_z = E_x \cdot H_y = \frac{1}{\mu_0} \frac{n}{c} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)$$

$$S_x = S_y = 0$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{S} &= \frac{\partial S_z}{\partial z} = \frac{-n}{\mu_0 c} E_0^2 2 \cos(kz - \omega t) k \cdot \sin(kz - \omega t) \\ &= -\frac{\omega n^2}{\mu_0 c^2} E_0^2 \sin[2(kz - \omega t)] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{n}{c} = \frac{\epsilon_0}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{n}{c} = \epsilon_0 c^2 \frac{n}{c} = \epsilon_0 c n$$

$$S_z = \epsilon_0 c n E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \quad \langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c n E_0^2$$

$$|\text{div } \vec{S}| = -\omega \epsilon_0 n^2 E_0^2 \sin[2(kz - \omega t)]$$

hustota energie $u = \epsilon_0 n^2 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \quad \langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 n^2 E_0^2$

$$\langle S_z \rangle = \frac{c}{n} \cdot \langle u \rangle$$

(37/1)

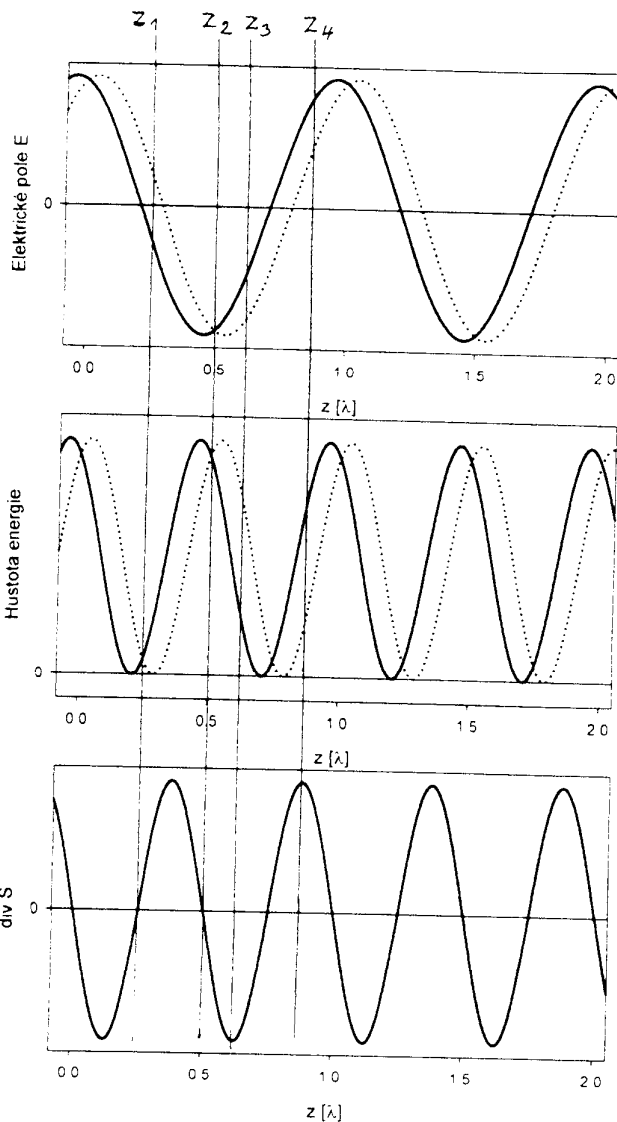
$$W = W_E + W_M$$

$\frac{c}{\nu} \cdot t$

$$|\vec{S}| \cdot A \cdot t$$

objem $V = A \cdot \frac{c}{\nu} \cdot t$
 složená energie $V \langle W \rangle$
 vyšlepci výkon $\langle S \rangle A$

Obsah energie ve válci (kvádru) o délce $\frac{c}{\nu} \cdot t$, průřezu A
 vyšlece podstavou A za čas t



Prostorová závislost

elektrického pole
 v časech $t_1 = -\frac{T}{24}$
 $t_2 = \frac{T}{24}$

okamžité (nepříměřované)
 hodnoty

hustoty elmag energie
 opět v časech
 t_1, t_2

$\text{div } \vec{S}$
 pro $\text{div } \vec{S} > 0$
 z daného místa
 energie vyšleka
 (v čase t_1 je kam
 hustota vyšší než v t_2)
 např. v místě z_4

naopak $\text{div } \vec{S} < 0$ v místě z_3 kam energie
 přijíká

hustota elektrické energie

(38)

$$\mu_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_n \mathbf{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n^2 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)$$

$$\frac{\partial \mu_e}{\partial t} = + \frac{\omega}{2} \varepsilon_0 n^2 E_0^2 \cdot \underbrace{2 \cos(kz - \omega t) \cdot \sin(kz - \omega t)}_{\sin[2(kz - \omega t)]}$$

$$\mu_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mu_0 \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \frac{n^2}{\mu_0^2 c^2} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)$$

$$\frac{\partial \mu_m}{\partial t} = + \frac{\omega}{2} \frac{n^2}{\mu_0 c^2} E_0^2 \cdot \sin[2(kz - \omega t)]$$

$$= + \frac{\omega}{2} \varepsilon_0 n^2 E_0^2 \cdot \sin[2(kz - \omega t)]$$

Při $\vec{j} = 0$ a $\vec{E}$ a $\vec{D}$ kmitajícími ve fázi (ε reální)

$$\text{je } \operatorname{div} \vec{S} = \frac{\partial S_z}{\partial z} = -\omega \varepsilon_0 n^2 E_0^2 \cdot \sin[2(kz - \omega t)] = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_e + \mu_m)$$

splněno v každém místě a čase

(výkon Jouleova tepla $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$).

Energie pole se v každém místě velmi rychle koncentruje a roztáhne a to tak, že výsledkem je lokální výkon ve směru šíření vlny.

Rychlé děje ve vlně nejíme schopni sledovat, důležitější jsou časové střední hodnoty $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned} \langle \cos^2(\omega t) \rangle_T &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) \, dt \\ &= \frac{1}{2T} \cdot \left\{ [t]_0^T + \frac{1}{2\omega} \int_0^{4\pi} \cos \xi \, d\xi \right\} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{8\pi} [\sin \xi]_0^{4\pi}}_0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$2\omega t = \xi \quad \xi_1 = 0$$

$$dt = \frac{d\xi}{2\omega} \quad \xi_2 = 2\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi$$

$$\text{obdobně } \langle \sin^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2}$$

(39)

$$\langle \sin 2\omega t \rangle_T = 0$$

$$\text{Časové střední hodnoty } \langle S_z \rangle_T = \frac{1}{2} c \cdot n \cdot \varepsilon_0 E_0^2 \neq 0$$

$$\text{ne } \langle \cos^2 \rangle_T \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{n}{c} = n \cdot \frac{c}{\mu_0 c^2} = n \cdot c \cdot \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\mu_0}$$

$$\langle \text{div } S_z \rangle_T = \left\langle \frac{\partial u_e}{\partial t} \right\rangle_T = \left\langle \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\rangle_T = 0$$

$$\langle u_e \rangle_T = \langle u_m \rangle_T = \frac{1}{4} \varepsilon_0 n^2 E_0^2$$

$$\text{pro průměr } \langle S_z \rangle_T = \underbrace{\frac{c}{n}}_{v_f} \langle u_e + u_m \rangle_T$$

v_f fázová rychlost

b) úplně fotožný případ
lineární polarizovaná monochromatická homogenní
nestlumená postupná vlna
reálný popis pomocí komplexních exponenciál

$$E_x = \frac{1}{2} E_0 \left[e^{i(kx - \omega t)} + e^{-i(kx - \omega t)} \right]$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{1}{2} E_0 \left[ik e^{i(kx - \omega t)} - ik e^{-i(kx - \omega t)} \right]$$

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial t} dt = \frac{-E_0}{2} \left[\frac{ik}{-i\omega} e^{i(kx - \omega t)} - \frac{ik}{i\omega} e^{-i(kx - \omega t)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} E_0 \frac{k}{\omega} \left[e^{i(kx - \omega t)} + e^{-i(kx - \omega t)} \right]$$

$$S_z = E_x \cdot H_y = \frac{1}{4} E_0^2 \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \underbrace{\frac{n}{c}}_{\frac{k}{\omega}} \cdot \left[e^{2i(kx - \omega t)} + 2 + e^{-2i(kx - \omega t)} \right]$$

$$\langle e^{2i(kx - \omega t)} \rangle_T = 0$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} c \cdot n \cdot \varepsilon_0 E_0^2$$

c) opět stejný případ - komplexní popis (40)

$$\tilde{E}_x = E_0 \cdot e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{ kde } E_0 \text{ reálné}$$

$$-\frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = i k E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\tilde{B}_y = \int \frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial t} dt = \frac{-i k}{-i \omega} E_0 e^{i(kz - \omega t)} = \frac{n}{c} E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\text{spočítáme } \langle S_z \rangle = \frac{1}{2} E_x \cdot H_y^* = \frac{n}{2 \mu_0 c} E_0^2$$

zde takto spočítání S_z vyšlo reálné, protože

$$E, H \text{ kmitají ve fázi: } e^{i(kz - \omega t)} \cdot e^{-i(kz - \omega t)} = 1$$

Obecně tomu tak být nemusí a k dovození reálného výsledku při násobení a mocnění komplexních veličin se používá vztah typu

$$\frac{1}{2} (\tilde{E}_x \cdot \tilde{H}_y^* + \tilde{E}_x^* \cdot \tilde{H}_y) = \text{Re} \{ \tilde{E}_x \cdot \tilde{H}_y^* \}$$

které zahrnuje "vymazání" změn v rámci 1 kmítu

$$e^{i(kz - \omega t)} \cdot e^{-i(kz - \omega t)} = 1$$

neobsahují ale časové předpoklady $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$.

Ze porovnání s předchozími reálnými případy

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \{ \tilde{E}_x \cdot \tilde{H}_y^* \} = \frac{1}{4} (\tilde{E}_x \cdot \tilde{H}_y^* + \tilde{E}_x^* \cdot \tilde{H}_y)$$

Želva obdobně pro hustotu energie $u_c = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \tilde{E} \} \cdot \text{Re} \{ \tilde{D} \}$

v bodě a) spočítáno $\langle u_c \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 n^2 E_0^2$

$$\text{Spočítáme } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \{ \epsilon_0 E_x \cdot \tilde{E}_x^* \} = \frac{1}{4} \epsilon_0 n^2 E_0^2$$

↑
a výrazu
pro u_c

↑
kvůli
komplexnímu
potřítání

(41)

V případě poučinná a mocnin v komplexním popisu monochromatických vln je třeba jisté obezřetnosti.

Poyntingův vektor $\vec{E} \times \vec{H} = \underbrace{\text{Re}\{\vec{\tilde{E}}\}}_{\text{reálný}} \times \underbrace{\text{Re}\{\vec{\tilde{H}}\}}_{\text{komplexní}}$

$$\begin{aligned}\vec{E} \times \vec{H} &= \frac{1}{2}(\vec{\tilde{E}} + \vec{\tilde{E}}^*) \times \frac{1}{2}(\vec{\tilde{H}} + \vec{\tilde{H}}^*) = \\ &= \frac{1}{4}(\vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{H}} + \vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{H}}^* + \vec{\tilde{E}}^* \times \vec{\tilde{H}} + \vec{\tilde{E}}^* \times \vec{\tilde{H}}^*)\end{aligned}$$

$$\vec{\tilde{E}} \sim e^{-i\omega t} \quad \vec{\tilde{E}}^* \sim e^{+i\omega t} \quad \vec{\tilde{H}} \sim e^{-i\omega t} \quad \vec{\tilde{H}}^* \sim e^{+i\omega t} \quad T$$

Pro časově průměrované hodnoty $\langle X \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$

$$\langle \cos \omega t \rangle_t = 0 \quad \langle \sin \omega t \rangle_t = 0 \quad \langle 1 \rangle = 1$$

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle_t = \frac{1}{2} \quad \langle \sin^2 \omega t \rangle_t = \frac{1}{2}$$

$$\langle \vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{H}} \rangle_t \sim \langle e^{-2i\omega t} \rangle = 0 \quad \langle \vec{\tilde{E}}^* \times \vec{\tilde{H}}^* \rangle_t = \langle e^{2i\omega t} \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}\langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle_{\text{reálný}} &= \frac{1}{4} \langle \vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{H}}^* + \vec{\tilde{E}}^* \times \vec{\tilde{H}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{H}}^* \} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{\tilde{E}}^* \times \vec{\tilde{H}} \}\end{aligned}$$

V případě, že $\vec{E}$, $\vec{H}$ kmitají ve fázi, je již poučinná $\vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{H}}^*$ reálná. Pokud nekmitají ve fázi, je třeba poučinná komplexní: $\vec{\tilde{E}} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$

$$\vec{\tilde{H}} = \vec{H}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \delta)}$$

$$\vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{H}}^* = (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0) \cdot e^{i\delta};$$

kmitání ve fázi: $\delta = 0$ nastává pro neabsorbující prostředí

Kruhově polarizovaná vlna (rovinná, homogenní, neklamena, ⁽⁴²⁾ postupná, ...)

a) reálný popis $E_x = E_0 \cos(kz - \omega t)$

$E_y = E_0 \sin(kz - \omega t)$

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$

$\text{rot } \vec{E} = (-E_0 k \cos(kz - \omega t), -E_0 k \sin(kz - \omega t), 0)$

$B_x = +E_0 k \int \cos(kz - \omega t) dt$

$kz - \omega t = \xi \quad \int \cos \xi d\xi = \sin \xi$

$dt = -\frac{d\xi}{\omega} \quad \int \sin \xi d\xi = -\cos \xi$

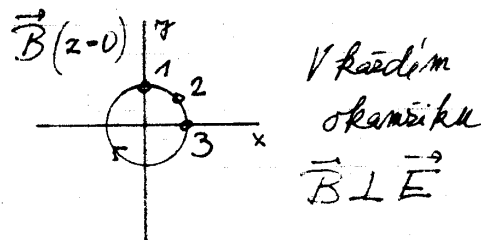
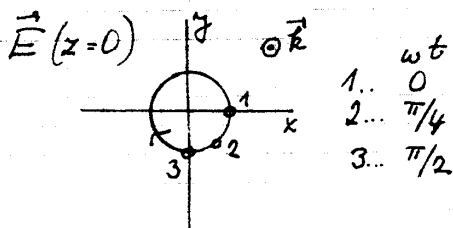
integrační konstanta = 0,

uvážujeme jen časově proměnnou pol

$B_x = -E_0 \frac{k}{\omega} \sin(kz - \omega t)$

$= -E_0 \frac{n}{c} \sin(kz - \omega t)$

$B_y = E_0 \frac{n}{c} \cos(kz - \omega t)$



Poyntingův vektor

$S_z = E_x H_y - E_y H_x = E_0^2 \frac{n}{\mu_0 c} [\cos^2(\) + \sin^2(\)] =$

$= E_0^2 \frac{n}{\mu_0 c} \equiv \langle S_z \rangle_t$ (není o časově průměrovat)

Hustota energie

$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 n^2 \vec{E}$

$W_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 n^2 (E_x^2 + E_y^2) = \frac{1}{2} \epsilon_0 n^2 E_0^2 (\cos^2(\) + \sin^2(\))$

$= \frac{1}{2} \epsilon_0 n^2 E_0^2 \equiv \langle W_e \rangle_t$

$W_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2 \mu_0} (B_x^2 + B_y^2) = \frac{1}{2 \mu_0} E_0^2 \frac{n^2}{c^2} (\sin^2(\) + \cos^2(\))$

$= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\mu_0} n^2 E_0^2 \equiv \langle W_m \rangle_t = \langle W_e \rangle_t$

Pro porovnání připomeňme lineárně polarizovanou vlnu

$\mu_e = \frac{1}{4} \epsilon_0 n^2 E_0^2$

o absorbovaném prostředí

$\mu_m = \frac{1}{4} \epsilon_0 n^2 E_0^2$

b) komplexní popis kruhově polarizované vlny

(43)

$$\tilde{E}_x = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\tilde{E}_y = E_0 e^{i(kz - \omega t - \pi/2)} = -i E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$-\frac{\partial \tilde{B}_x}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} = i E_0 i k e^{i(kz - \omega t)} = -E_0 k e^{i(kz - \omega t)}$$

$$-\frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} = i k E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\tilde{B}_x = \int \frac{\partial \tilde{B}_x}{\partial t} dt = E_0 \frac{k}{-i\omega} e^{i(kz - \omega t)} = i E_0 \frac{n}{c} e^{i(kz - \omega t)} = -\frac{n}{c} \tilde{E}_y$$

$$\tilde{B}_y = E_0 \frac{-ik}{-i\omega} e^{i(kz - \omega t)} = E_0 \frac{n}{c} e^{i(kz - \omega t)} = \frac{n}{c} \tilde{E}_x$$

Poyntingův vektor - pokusme $\frac{1}{2} \text{Re} \{ \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* \} = \langle \vec{S} \rangle_t$

$$\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* = \left(\tilde{E}_y \underbrace{\tilde{H}_z^*}_{0} - \tilde{E}_z \underbrace{\tilde{H}_y^*}_{0}, \underbrace{\tilde{E}_z \tilde{H}_x^*}_{0} - \tilde{E}_x \underbrace{\tilde{H}_z^*}_{0}, \tilde{E}_x \tilde{H}_y^* - \tilde{E}_y \tilde{H}_x^* \right)$$

$$\langle S_z \rangle_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\tilde{E}_x \tilde{H}_y^* - \tilde{E}_y \tilde{H}_x^* + \tilde{E}_x^* \tilde{H}_y - \tilde{E}_y^* \tilde{H}_x \right) =$$

$$= \frac{1}{4} E_0^2 \frac{n}{\mu_0 c} (1 - (-i)(-i) + 1 - i i) = E_0^2 \frac{n}{\mu_0 c}$$

ve shodě s reálným popisem

Zde jsme kruhově polarizované záření získali složením dvou lineárně polarizovaných, na sebe kolmých.

Střední hodnota Poyntingova vektoru v případě postupné vlny splývá s veličinou intenzita záření

$$I(\vec{r}) \equiv \langle \vec{S}(\vec{r}) \rangle_t$$

Použijme totéž pro elipticky polarizovanou vlnu 44

$$\tilde{E}_x = E_{\text{eff}} \cdot A \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

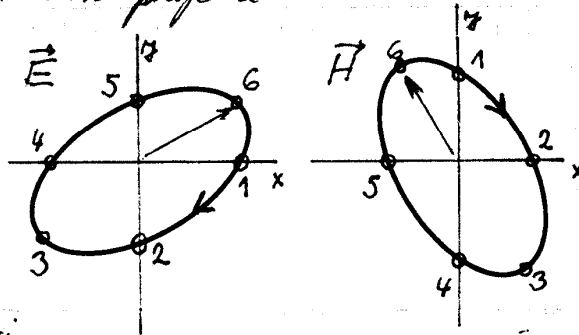
normovaná podmínka
(vhodné pro Jonesovy matice)
 $A^2 + B^2 = 1$

$$\tilde{E}_y = E_{\text{eff}} \cdot B \cdot e^{i\delta} e^{i(kz - \omega t)}$$

stejně jako v předchozích případech

$$\tilde{H}_x = -\frac{n}{\mu_0 c} \tilde{E}_y$$

$$\tilde{H}_y = \frac{n}{\mu_0 c} \tilde{E}_x$$



neabsorbující prostředí
 E, H kmitají ve fázi
(n je reálné)

$$\begin{aligned} I \equiv \langle S_z \rangle_z &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \tilde{E}_x \tilde{H}_y^* - \tilde{E}_y \tilde{H}_x^* \} \\ &= \frac{1}{2} E_{\text{eff}}^2 \frac{n}{\mu_0 c} \left(A^2 e^{i(kz - \omega t)} \cdot e^{-i(kz - \omega t)} + \right. \\ &\quad \left. + B^2 e^{i\delta} e^{i(kz - \omega t)} \cdot e^{-i\delta} e^{-i(kz - \omega t)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 c} E_{\text{eff}}^2 \underbrace{(A^2 + B^2)}_1 = \frac{1}{2} n \epsilon_0 c E_{\text{eff}}^2 \end{aligned}$$

Význam E_{eff} : amplituda lineárně polarizované vlny,
která by měla stejnou intenzitu jako
daná vlna

Ve výrazu pro intenzitu nevystupují fázové posuny δ .

Měření intenzity se nic nedovíme o polarizaci.

Zápis v Jonesově symbolice:

$$I = \frac{1}{2} n \epsilon_0 c \cdot \begin{pmatrix} E_x^* \\ E_y^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} n \epsilon_0 c E_{\text{eff}}^2 (A^2 + B^2)$$

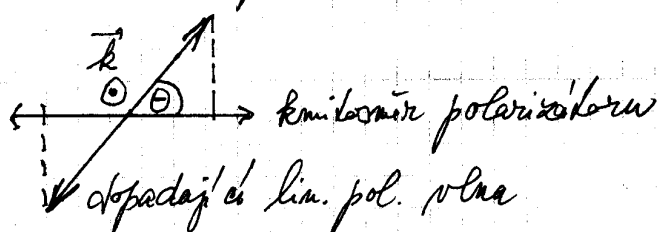
Malusův zákon (1809)

$$I(\Theta) = I(0) \cdot \cos^2 \Theta$$

Θ úhel mezi směrem polarizátoru a směrem polarizace lineární polarizovaného záření

E_0 amplituda lin. polar. záření dopadajícího na polarizátor

$E_0 \cdot \cos \Theta$ amplituda lin. polar. záření vycházejícího z polarizátoru



intenzita záření $I \sim |E|^2$

$$I(0) = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n E_0^2$$

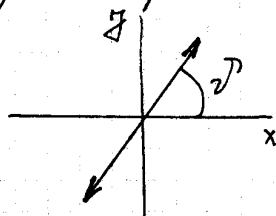
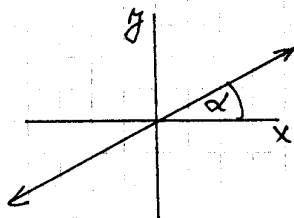
$$I(\Theta) = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n E_0^2 \cos^2 \Theta$$

Ověření vztahu pro intenzitu záření prošlého polarizátorem obecně natočeným

$$\text{dopadající } E_0 \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

lineární polarizace $\Rightarrow \delta = 0$

polarizátor



Θ v Malusově zákonu

$$\Theta = |\vartheta - \alpha|$$

$$\text{vycházející vlna } \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \cdot E_0 \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} =$$

$$= E_0 \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha \cos \vartheta + \sin \alpha \cos \alpha \sin \vartheta \\ \sin \alpha \cos \alpha \cos \vartheta + \sin^2 \alpha \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\text{Její intenzita } I_{\text{out}} = \frac{1}{2} n \epsilon_0 c E_0^2 \left[\cos^2 \alpha (\cos \alpha \cos \vartheta + \sin \alpha \sin \vartheta)^2 + \sin^2 \alpha (\cos \alpha \cos \vartheta + \sin \alpha \sin \vartheta)^2 \right] = \frac{1}{2} n \epsilon_0 c E_0^2 \cdot \cos^2 (\alpha - \vartheta) \quad \checkmark$$

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{|E_{ox}|^2 + |E_{oy}|^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

amplitudy složek polarizovaných $\parallel x, y$ poloosy elipsy

$$A = \frac{|E_{ox}|}{\sqrt{|E_{ox}|^2 + |E_{oy}|^2}}; \quad B = \frac{|E_{oy}|}{\sqrt{|E_{ox}|^2 + |E_{oy}|^2}}$$

$$\alpha \dots \text{orientace osy elipsy} \quad \tan 2\alpha = \frac{2AB \cos \delta}{A^2 - B^2}$$

Hledáme směr poloos elipsy pomocí polarizátoru.

Vlna necht' je zadána pomocí $E_{ox}, E_{oy} \cdot e^{i\delta}$, tj. vektorem $\begin{pmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} e^{i\delta} \end{pmatrix}$

Polarizátor je dán maticí $\begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$

Vynásbíjíme vlnu R polarizátorem $\begin{pmatrix} E'_{ox} \\ E'_{oy} \end{pmatrix}$

a její intenzita $I \sim (E_{ox}^*, E_{oy}^*) \cdot \begin{pmatrix} E'_{ox} \\ E'_{oy} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \epsilon_0 n \left[(E_{ox} \cos^2 \alpha + E_{oy} \sin \alpha \cos \alpha e^{-i\delta}) \cdot (E_{ox} \cos^2 \alpha + E_{oy} \sin \alpha \cos \alpha e^{i\delta}) + \right. \\ &\quad \left. + (E_{ox} \sin \alpha \cos \alpha + E_{oy} \sin^2 \alpha e^{-i\delta}) \cdot (E_{ox} \sin \alpha \cos \alpha + E_{oy} \sin^2 \alpha e^{i\delta}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 n \left[E_{ox}^2 \cos^4 \alpha + E_{ox} E_{oy} \sin \alpha \cos^3 \alpha \cdot 2 \cdot \cos \delta + E_{oy}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \right. \\ &\quad \left. + E_{ox}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + E_{ox} E_{oy} \sin^3 \alpha \cos \alpha \cdot 2 \cdot \cos \delta + E_{oy}^2 \sin^4 \alpha \right] \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 n (E_{ox}^2 \cos^2 \alpha + E_{oy}^2 \sin^2 \alpha + E_{ox} E_{oy} \sin 2\alpha \cdot \cos \delta) \end{aligned}$$

Vlna $\begin{pmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} e^{i\delta} \end{pmatrix}$ $\mathcal{R}_\alpha \{E_x\} = E_{ox} \cos \tau$ $\tau = kx - \omega t$
 $\mathcal{R}_\alpha \{E_y\} = E_{oy} (\cos \tau \cos \delta - \sin \tau \sin \delta)$

Jestliže je kmitosměr polarizátora *rovný* se směrem osy 47
 elipsy, je intenzita světla procházející polarizátorem
 maximální (minimální) $\Rightarrow$ hledání extrémů

$$\frac{dI}{d\alpha} = 0$$

$$-2 \cos \alpha \sin \alpha E_{0x}^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha E_{0y}^2 + 2 E_{0x} E_{0y} \cos \delta \cdot \cos 2\alpha = 0$$

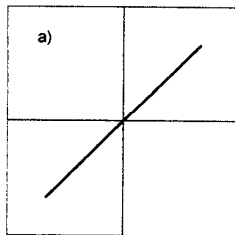
$$\sin 2\alpha (E_{0y}^2 - E_{0x}^2) + \cos 2\alpha (2 E_{0x} E_{0y} \cos \delta) = 0$$

$$\sin 2\alpha (E_{0x}^2 - E_{0y}^2) = \cos 2\alpha \cdot 2 E_{0x} E_{0y} \cos \delta$$

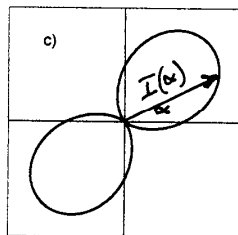
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 E_{0x} E_{0y} \cos \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}$$

ne počítáme se s ním.

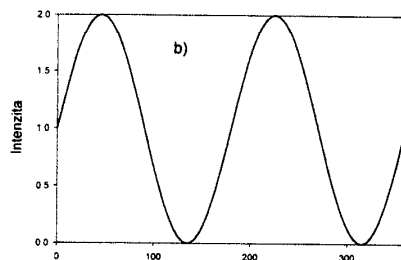
$$E_{0y} / E_{0x} = 1, \delta = 0$$



x



x



Úhel natočení analyzátoru α

zde:

$$E_{0x} = E_{0y}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha \rightarrow \infty$$

$$\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$E_{0x} = E_{0y} = 1$$

$$\Rightarrow I(\alpha = 0) =$$

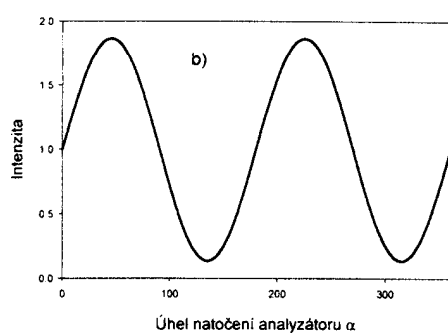
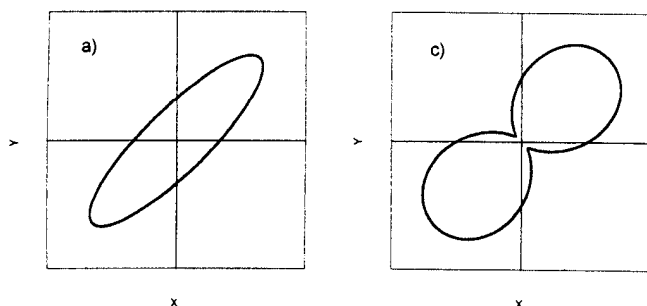
$$= I(\alpha = 90^\circ) = 1$$

(ne počítáme se s ním.)

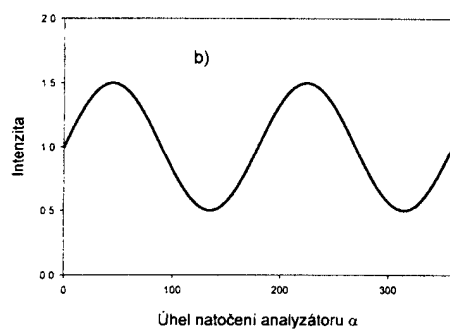
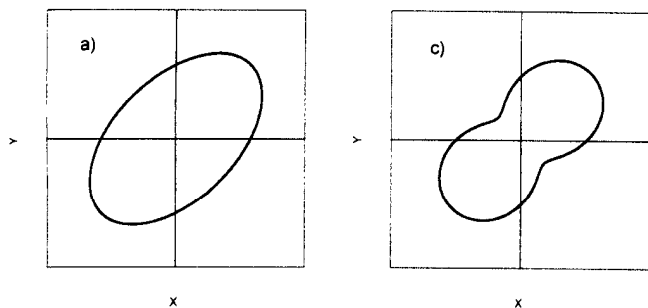
- a) polarizace elektrického vektoru
- b) intenzita záření za analyzátozem
- c) znázornění intenzity prošlé analyzátozem v polárním grafu

48

$$E_{oy} / E_{ox} = 1, \delta = 30^\circ$$



$$E_{oy} / E_{ox} = 1, \delta = 60^\circ$$

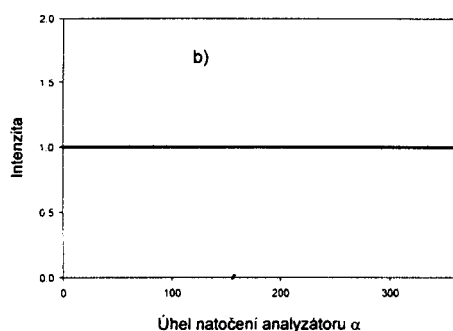
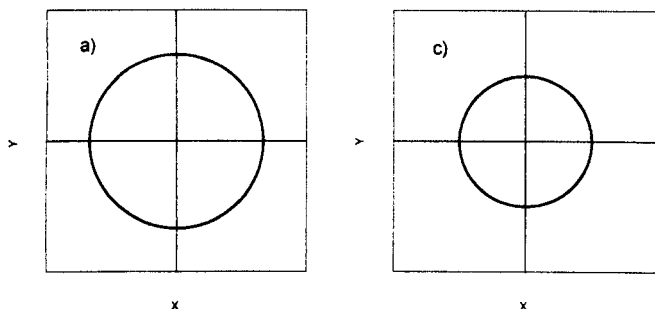


S rostoucím
fázovým posunem
 δ
klesá
"modulace"
intenzity při
otočení analyzátoru

- a) polarizace elektrického vektoru
- b) intenzita záření za analyzátozem
- c) znázornění intenzity prošlé analyzátozem v polárním grafu

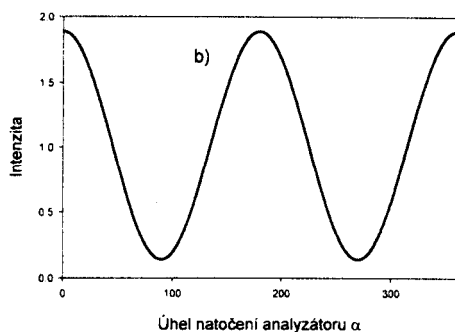
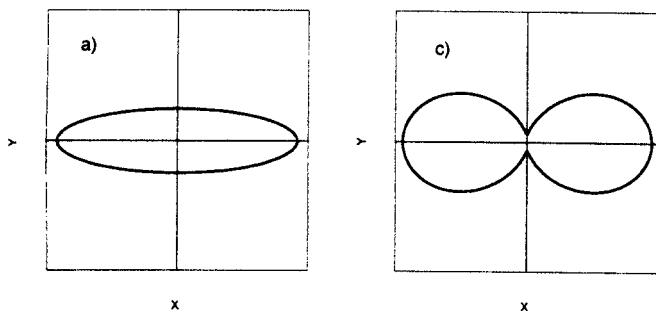
(49)

$$E_{oy} / E_{ox} = 1, \delta = 90^\circ$$



Pouhým otáčením
analyzátoru nelze
odlišit kruhové
polarizované světlo
od zcela nepolariz.
nebo

$$E_{oy} / E_{ox} = 0.27, \delta = 90^\circ$$



elipticky polarizované
od částečně
polarizovaného.

Nelze odlišit
pravootáčivé
a levootáčivé
polarizované světlo

"Nepolarizované" světlo
- statistický pojem;
do pravidel o přímě
světla vůbec nezapadá.

- a) polarizace elektrického vektoru
- b) intenzita záření za analyzátozem
- c) znázornění intenzity prošlé analyzátozem v polárním grafu

K určení smyslu kočivosti analyzovaného káření
 lze použít lázovou destičku a otočný polarizátor.
 Jednoduchý případ:

Kruhově polarizovaná plna

Lázová destička $\varphi = \frac{\pi}{2}$ („čtverholná“)

s rychlou osou ve směru $(1, 1, 0)$, tj. $\Theta = 45^\circ$

otočný polarizátor ($\equiv$ „analyzátor“) s kmitoměrem
 svírajícím s osou x úhel α

Matice popisující lázovou destičku

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \Theta e^{i\varphi_1} + \sin^2 \Theta e^{i\varphi_2}, & \sin \Theta \cos \Theta (e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}) \\ \sin \Theta \cos \Theta e^{i\varphi_1} - \sin \Theta \cos \Theta e^{i\varphi_2}, & \sin^2 \Theta e^{i\varphi_1} + \cos^2 \Theta e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{1}{=} \frac{1}{2} e^{i\varphi_1} \begin{pmatrix} 1 + e^{i\pi/2} & 1 - e^{i\pi/2} \\ 1 - e^{i\pi/2} & 1 + e^{i\pi/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e^{i\varphi_1} \begin{pmatrix} 1 + i & 1 - i \\ 1 - i & 1 + i \end{pmatrix}$$

pro $\Theta = 45^\circ$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{1^2 - i^2} = \frac{1 - 2i - 1}{2} = -i$$

$$1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$

matice lázové destičky

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Matice popisující analyzátor

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Vstupující levootočivě kruhově polarizovaná vlna $E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+1 \\ -i+i \end{pmatrix} = \frac{2E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} = \frac{2E_0}{\sqrt{2}} \cos \alpha \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Intenzita po analyzátoru

$$2E_0^2 \cos^2 \alpha \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = 2E_0^2 \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 2E_0^2 \cos^2 \alpha$$

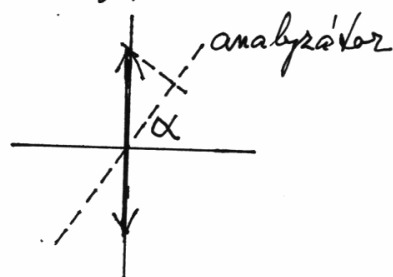
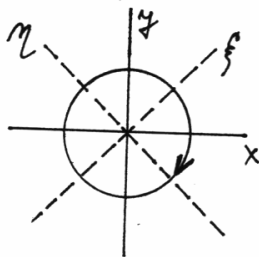
Vstupující pravotočivě kruhově polarizovaná vlna

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-1 \\ -i-i \end{pmatrix} = \frac{2E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \sin \alpha \cos \alpha \\ -i \sin^2 \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2E_0}{\sqrt{2}} (-i) \sin \alpha \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

intenzita po analyzátoru $2E_0^2 \sin^2 \alpha$



Průměr do kmit směru analyzátoru

$$\frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cdot \sin \alpha$$

Polarizační matice, Stokesovy parametry

(51/1)

popis polarizace kolimovaného svazku, směr šíření osa z ,
čistě postupná vlna $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$

monochromatická vlna: deterministická, prvá věta,
bez fluktuací amplitud i fází;

- je dokonale polarizována, tj. polarizace v 1 okamžiku
určuje polarizaci ve všech časech
- idealizace pro vyšetření podstaty fyz. jevů
- nereálná

skutečné pole má statistický charakter s fluktuacemi
amplitud i fází, což vede i k fluktuacím
polarizačního stavu

Jonesovy vektory: vhodné pro popis dokonalé polarizace,
nelze jimi popsat částečnou polarizaci nebo
nepolarizované pole

Modelová představa: rovinné vlny, vlnoplochy $\perp z$,
v místě pozorování $\vec{r} = \text{konst.}$, např. $z=0$

$$E_x(t) = a_x(t) \cdot e^{i[\delta_x(t) - \omega_0 t]}$$

$$E_y(t) = a_y(t) \cdot e^{i[\delta_y(t) - \omega_0 t]}$$

- $a_x, a_y, \delta_x, \delta_y$ reálné funkce času s náhodnými fluktuacemi
- pole je stacionární (nikoli pulzující)
- z Fourierovské analýzy: podstatné jsou příspěvky frekvencí
z poměrně úzkého oboru $(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$
 $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$

což znamená, že změny $a_x(t), a_y(t), \delta_x(t), \delta_y(t)$ jsou
velmi pomalé ve srovnání s $e^{-i\omega_0 t}$:

kvazimonochromatické pole

Pro „krátkodobé“ středomí má dobrý smysl užívat součin typu $E_x^* E_x$ atd., ale pro určení středních hodnot $\langle E_x^* E_x \rangle_t$ je nutno středomat přes čas mnohem delší než perioda $T = \frac{2\pi}{\omega}$. V optické oblasti to „automaticky“ zajišťuje nízká rychlost odezvy detektoru.

Popis polarizačního stavu v místě $z=0$ lze pomocí polarizační matice; ve vakuu

$$\frac{\epsilon_0}{4} \begin{pmatrix} \langle E_x^* E_x \rangle_t & \langle E_x^* E_y \rangle_t \\ \langle E_y^* E_x \rangle_t & \langle E_y^* E_y \rangle_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix}$$

Pozor na definici jednotlivých členů – není ustálená. V literatuře i alternativně $J_{xy} = \frac{\epsilon_0}{4} \langle E_x E_y^* \rangle$, což vede ke zmatkům ve znaménkách.

Též pozor na definice J_x, J_y, J .

Detektorem měříme veličiny průměrné hustoty elektrické energie

$$\begin{aligned} \langle w_e \rangle_t &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle \text{Re}\{\vec{E}\} \cdot \text{Re}\{\vec{E}\} \rangle_t = && \text{pro } E_z=0 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle (\text{Re}\{E_x\})^2 + (\text{Re}\{E_y\})^2 \rangle_t && \text{ve vakuu} \end{aligned}$$

Pro monochromatickou vlnu

$$\begin{aligned} \text{Re}\{E_x\} &= \frac{1}{2}(E_x + E_x^*) & \langle (\text{Re}\{E_x\})^2 \rangle &= \frac{1}{4}(\langle E_x^* E_x \rangle + \langle E_x E_x^* \rangle) \\ & & &= \frac{1}{2} \langle E_x^* E_x \rangle \end{aligned}$$

$$\text{protože } \langle E_x^* E_x^* \rangle = \langle E_x E_x \rangle = 0$$

$$\langle w_e \rangle_t = \frac{\epsilon_0}{4} (\langle E_x^* E_x \rangle + \langle E_y^* E_y \rangle)$$

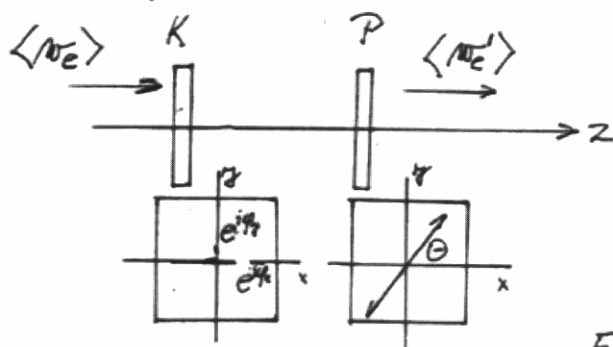
Změřením $\langle w_e \rangle_t$ se o polarizačním stavu nic nedovíme.

Je nutno zjistit vliv polarizačních prvků, v principu schéma 2: kompenzátor (lázová destička), polarizátor.

Možnost kombinací fázové destičky a polarizátoru je celá řada. Zde probereme speciální případ:

osy fázové destičky // osy x, y , fázový rozdíl polarizátor přitá s osou x úhel Θ .

Rychle osa x , $k_x < k_y \Rightarrow \varphi > 0$



$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

idealizace kompenzátoru
a polarizátoru,
řádné přechy absorpce
nebo reflexe,
dokonalá polarizační
vládnost

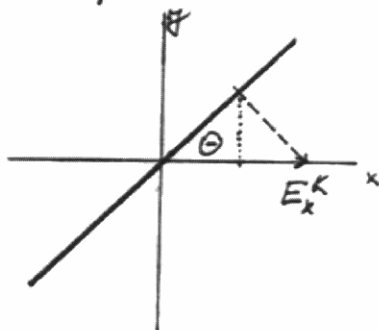
Fázové členy stejné pro obě
komponenty nejsou důležitě

Pole za fázovou destičkou

$$E_x^{(K)} = E_x(t) \cdot e^{i\varphi_x} \rightarrow E_x(t)$$

$$E_y^{(K)} = E_y(t) \cdot e^{i\varphi_y} \rightarrow E_y(t) \cdot e^{i\varphi}$$

Pole za polarizátorem



přispěvek od $E_x^{(K)}$ do kmitání ve směru
polarizátoru

$$E_x^{(K)} \cdot \cos \Theta$$

přispěvek od $E_y^{(K)}$ do kmitání
ve směru polarizátoru

$$E_y^{(K)} \cdot \sin \Theta$$

průmět kmitání ve směru polarizátoru do osy x

$$(E_x^{(K)} \cdot \cos \Theta + E_y^{(K)} \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta = E_x'(t)$$

průmět kmitání ve směru polarizátoru do osy y

$$(E_x^{(K)} \cdot \cos \Theta + E_y^{(K)} \cdot \sin \Theta) \cdot \sin \Theta = E_y'(t)$$

51/4

Totéž pomocí Jonesova počtu pro monochromatickou plnu

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

Spočítáme vliv fáze desičky a polarizátoru na měřitelnou veličinu

$$\langle W_e \rangle_t = \frac{\epsilon_0}{4} (\langle E_x'^* E'_x \rangle + \langle E_y'^* E'_y \rangle)$$

$$\begin{aligned} E_x'^* E'_x &= (E_x^* \cos^2 \theta + E_y^* e^{-i\varphi} \sin \theta \cos \theta) \cdot (E_x \cos^2 \theta + E_y e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta) = \\ &= E_x^* E_x \cos^4 \theta + E_x^* E_y e^{i\varphi} \sin \theta \cos^3 \theta + \\ &+ E_y^* E_y \sin^2 \theta \cos^2 \theta e^{i\varphi} + E_y^* E_x e^{-i\varphi} \sin \theta \cos^3 \theta = \\ &= (E_x^* E_x \cos^2 \theta + E_y^* E_y \sin^2 \theta) \cos^2 \theta + \\ &+ (E_x^* E_y e^{i\varphi} + E_x E_y^* e^{-i\varphi}) \sin \theta \cos^3 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y'^* E'_y &= (E_x^* \sin \theta \cos \theta + E_y^* e^{-i\varphi} \sin^2 \theta) \cdot (E_x \sin \theta \cos \theta + E_y e^{i\varphi} \sin^2 \theta) = \\ &= E_x^* E_x \sin^2 \theta \cos^2 \theta + E_x^* E_y e^{i\varphi} \sin^3 \theta \cos \theta + \\ &+ E_y^* E_y \sin^4 \theta + E_y^* E_x e^{-i\varphi} \sin^3 \theta \cos \theta = \\ &= (E_x^* E_x \cos^2 \theta + E_y^* E_y \sin^2 \theta) \sin^2 \theta + \\ &+ (E_x^* E_y e^{i\varphi} + E_x E_y^* e^{-i\varphi}) \sin^3 \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_x'^* E'_x + E_y'^* E'_y &= E_x^* E_x \cos^2 \theta + E_y^* E_y \sin^2 \theta + \\ &+ E_x E_y^* e^{-i\varphi} \sin \theta \cos \theta \cdot (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \\ &+ E_x^* E_y e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta \cdot (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

$$J_{xx} = \frac{\epsilon_0}{4} \langle E_x^* E_x \rangle \quad J_{yy} = \frac{\epsilon_0}{4} \langle E_y^* E_y \rangle \quad \text{reálné}$$

$$J_{xy} = J_{yx}^* = \frac{\epsilon_0}{4} \langle E_x^* E_y \rangle = |J_{xy}| e^{i\beta_{xy}} \quad \text{komplexní}$$

Hustota elektrické energie ρ_{el} po průchodu laserové desičky
(x, y, φ) a polarizátorem (Θ) je

$$\langle W_e' \rangle(\varphi, \Theta) = J_{xx} \cos^2 \Theta + J_{yy} \sin^2 \Theta + (J_{xy} e^{+i\varphi} + J_{xy}^* e^{-i\varphi}) \sin \Theta \cos \Theta$$

$$= J_{xx} \cos^2 \Theta + J_{yy} \sin^2 \Theta + 2|J_{xy}| \cos(\beta_{xy} + \varphi) \cdot \sin \Theta \cos \Theta$$

kde J_{xx}, J_{yy}, J_{xy} jsou prvky polarizační matice vstupujícího
pole (tj. před vstupem do laserové desičky)

Poslední člen popisuje modulaci signálu při změně parametru φ, Θ

2 extrémní případy:

a) při změně φ, Θ se signál $\langle W_e' \rangle$ vůbec nemění

$|J_{xy}| = 0$; E_x, E_y kmitají na sobě nezávisle, nepřijíždí "okamžité laserové rozdíly" $\delta(t)$ jsou někdy
v intervalu $(0, 2\pi)$, pak $\langle E_x^* \cdot E_y \rangle = 0$

tedy $\langle W_e' \rangle_{\text{MAX}} - \langle W_e' \rangle_{\text{MIN}} = 0$, říkáme "záření je (dokonale)
nepolarizované"

b) lze najít takovou dvojici $(\varphi, \Theta)_{\text{MIN}}$, že systémem
laserové desičky + polarizátor nic neprojde.

Pak
$$\frac{\langle W_e' \rangle_{\text{MAX}} - \langle W_e' \rangle_{\text{MIN}}}{\langle W_e' \rangle_{\text{MAX}} + \langle W_e' \rangle_{\text{MIN}}} = 1$$

řekáme "záření je (dokonale) polarizované"

Pro
$$\frac{\langle W_e' \rangle_{\text{MAX}} - \langle W_e' \rangle_{\text{MIN}}}{\langle W_e' \rangle_{\text{MAX}} + \langle W_e' \rangle_{\text{MIN}}} < 1$$
 je záření částečně polarizované

Z řady kombinací dvojice φ, Θ vyberme

$$\langle w'_e \rangle(0, 0) = J_{xx}, \quad \langle w'_e \rangle(0, 90^\circ) = J_{yy}$$

$$\langle w'_e \rangle(0, 45^\circ) = \frac{1}{2} J_{xx} + \frac{1}{2} J_{yy} + \frac{1}{2} (J_{xy} + J_{yx})$$

$$\langle w'_e \rangle(0, 135^\circ) = \frac{1}{2} J_{xx} + \frac{1}{2} J_{yy} - \frac{1}{2} (J_{xy} + J_{yx})$$

$$\langle w'_e \rangle\left(\frac{\pi}{2}, 45^\circ\right) = \frac{1}{2} J_{xx} + \frac{1}{2} J_{yy} + |J_{xy}| \cdot \sin \beta_{xy}$$

$$\langle w'_e \rangle\left(\frac{\pi}{2}, 135^\circ\right) = \frac{1}{2} J_{xx} + \frac{1}{2} J_{yy} - |J_{xy}| \cdot \sin \beta_{xy}$$

$$J_{xy} + J_{yx} = 2|J_{xy}| \cos \beta_{xy} \quad J_{xy} - J_{yx} = 2i|J_{xy}| \sin \beta_{xy}$$

a ještě bylo použito

$$J_{xy} e^{i\varphi} + J_{yx} e^{-i\varphi} = J_{xy} + J_{yx} \text{ pro } \varphi = 0$$

$$= iJ_{xy} - iJ_{yx} = -2|J_{xy}| \sin \beta_{xy} \text{ pro } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Kombinace těchto $\langle w'_e \rangle$ vybral Stokes (rok 1852) pro popis polarizace světla. V obvyklém značení Stokesových parametrů

$$A_0 = (0, 0) + (0, 90^\circ) = J_{xx} + J_{yy}$$

všechny ρ reálné

$$A_1 = (0, 0) - (0, 90^\circ) = J_{xx} - J_{yy}$$

$J_{xy} - J_{yx}$ typu imaginární

$$A_2 = (0, 45^\circ) - (0, 135^\circ) = J_{xy} + J_{yx}$$

$$A_3 = \left(\frac{\pi}{2}, 45^\circ\right) - \left(\frac{\pi}{2}, 135^\circ\right) = i(J_{xy} - J_{yx})$$

Změření A_0, A_1, A_2, A_3 můžeme přepsat prvky polarizační matice

$$J_{xx} = \frac{1}{2} (A_0 + A_1)$$

$$J_{yy} = \frac{1}{2} (A_0 - A_1)$$

$$J_{yx} = \frac{1}{2} (A_2 + iA_3)$$

$$J_{xy} = \frac{1}{2} (A_2 - iA_3)$$

Pro $E_x(t) = a_x(t) \cdot e^{i[\delta_x(t) - \omega_0 t]}$, $E_y(t) = a_y(t) e^{i[\delta_y(t) - \omega_0 t]}$ 51/7

dostaneme $\langle E_x^* E_y \rangle = \langle a_x \cdot e^{-i[\delta_x - \omega_0 t]} \cdot a_y e^{i[\delta_y - \omega_0 t]} \rangle$ a_x, a_y
reálne

$$= \langle a_x(t) a_y(t) \cdot e^{i[\delta_y(t) - \delta_x(t)]} \rangle$$

$$\langle E_y^* E_x \rangle = \langle a_x(t) a_y(t) \cdot e^{-i[\delta_y - \delta_x]} \rangle$$

$$J_{xy} + J_{yx} = \frac{\epsilon_0}{4} \langle a_x a_y 2 \cdot \cos \delta \rangle \quad \delta = \delta_y - \delta_x$$

$$J_{xy} - J_{yx} = \frac{\epsilon_0}{4} \langle 2i a_x a_y \sin \delta \rangle$$

$$i(J_{xy} - J_{yx}) = -\frac{2\epsilon_0}{4} \langle a_x a_y \sin \delta \rangle$$

Poznamky ke znaménkám:

- 1) definície polarizačnej matice: zde $J_{xy} = \frac{\epsilon_0}{4} \langle E_x^* E_y \rangle$
 pro alternatívu $J'_{xy} = \frac{\epsilon_0}{4} \langle E_x E_y^* \rangle$, $J'_{yx} = \langle E_y, E_x^* \rangle$
 vyjde znaménko obrácení

$$\text{místo } \rho_3 = i(J_{xy} - J_{yx}) \text{ je } \rho_3 = i(J'_{yx} - J'_{xy})$$

- 2) znaménko fázového rozdílu δ
 zde místo $e^{i(kz - \omega t + \delta)}$ $\omega t, \delta$ opačná znaménka
 čenté alternatíva $e^{-i(\omega t - kz + \delta')}$ $\omega t, \delta'$ stejná znaménka

- 3) definice fázového posuvu φ fázové destičky
 zde místo: rychlá osa fázové destičky $\parallel x$
 $\Rightarrow$ měřej fázový posuv $\varphi = \varphi_y - \varphi_x > 0$ sin $\varphi > 0$ pro $0 < \varphi < \pi$

alternativa: rychlá osa $\parallel y$

$$\varphi' = \varphi'_y - \varphi'_x < 0 \text{ sin } \varphi' < 0 \text{ pro } -\pi < \varphi' < 0$$

to je rozdíl v definicích ρ_2, ρ_3
 (co znaméná $(\frac{\pi}{2}, 45^\circ)$ a $(\frac{\pi}{2}, 135^\circ)$)

$$\rho'_3 = i(J_{yx} - J_{xy})$$

Dokonale nepolarizované záření:

intenzita $\langle n_e \rangle$ nezávisí na nastavení dvojice (φ, Θ)

$$A_0 = J_{xx} + J_{yy} \neq 0$$

rozdíly $A_1 = A_2 = A_3 = 0$

Polarizační matice $\frac{1}{2} I_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$J_{xx} = J_{yy}, \quad J_{xx} + J_{yy} = I_0, \quad \text{celková intenzita } \langle n_e \rangle$$

Dokonale polarizované záření

např. dokonale monochromatická plná,
reálné amplitudy i fáze jsou konstanty,

polarizační matice $\sim \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y e^{i\delta} \\ a_x a_y e^{-i\delta} & a_y^2 \end{pmatrix}$

její determinant $J_{xx} J_{yy} - J_{xy} J_{yx} = a_x^2 a_y^2 - a_x^2 a_y^2 = 0$

K tomu nemusí být plná monochromatická, stačí

první část měří $a_x(t)$ a $a_y(t)$ a pozí fázemi,

např. fluktuující plná po průchodu polarizátorem

Za podmínky $J_{xx} J_{yy} = J_{xy} J_{yx}$ sečteme

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

$$A_1^2 = J_{xx}^2 - 2 J_{xx} J_{yy} + J_{yy}^2$$

$$A_2^2 = J_{xy}^2 + 2 J_{xy} J_{yx} + J_{yx}^2$$

$$A_3^2 = -J_{xy}^2 + 2 J_{xy} J_{yx} - J_{yx}^2$$

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = J_{xx}^2 + J_{yy}^2 - 2 J_{xx} J_{yy} + 4 J_{xy} J_{yx} =$$

$$= J_{xx}^2 + J_{yy}^2 + 2 J_{xx} J_{yy} = A_0^2$$

(51/9)

Lze ukázat (Born, Wolf část 10.9.), že stupeň polarizace

$$P = \frac{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}{A_0} \quad \text{i pro částečně polarizované pole}$$

Příklady dokonale polarizované vlny (monochromatické)

1) Kružková polarizace $E_x = E_0 e^{-i\omega t}$ $\text{Re}\{E_x\} = E_0 \cos \omega t$
 $E_y = iE_0 e^{-i\omega t}$ $\text{Re}\{E_y\} = E_0 \sin \omega t$

Jonesův vektor $E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $\langle w_e \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$

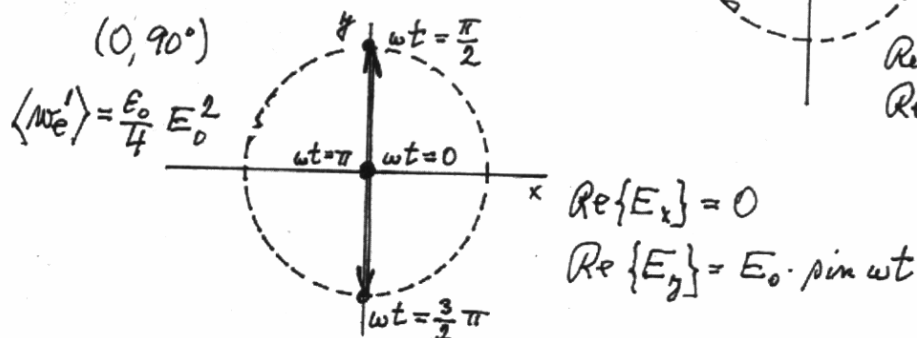
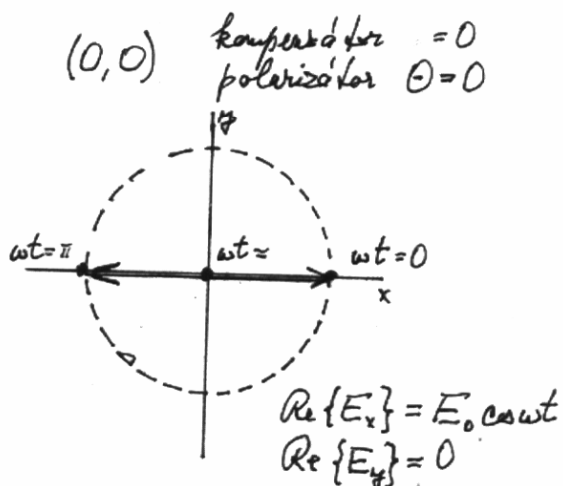
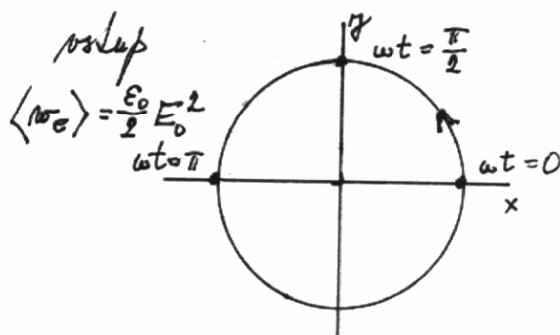
polarizační matice $J_{xx} = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2$ $J_{xy} = \frac{i\epsilon_0}{4} E_0^2$
 $J_{yx} = -i \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2$ $J_{yy} = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2$

Stokesovy parametry $A_0 = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$ $A_1 = 0$ $A_2 = 0$

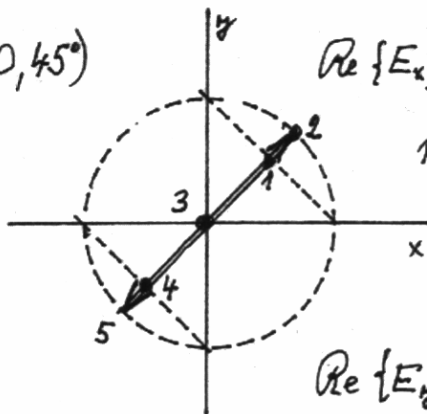
$$A_3 = i(J_{xy} - J_{yx}) = i \cdot i \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 (1+1) = -\frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

$$\frac{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}{A_0} = 1$$

Toto lze názorně rozkresleno:



$(0, 45^\circ)$



$$\operatorname{Re}\{E_x\} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos \omega t + \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin \omega t\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1... \omega t = 0, \quad 2... \omega t = \frac{\pi}{4}, \quad 3... \omega t = \frac{3}{4}\pi$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2}$$

$$4... \omega t = \pi$$

$$\omega t = \frac{3}{2}\pi$$

$$5... \omega t = \frac{5}{4}\pi$$

$$\operatorname{Re}\{E_y\} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos \omega t + \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin \omega t\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{Re}\{E_x\} = \operatorname{Re}\{E_y\} = \frac{1}{2} E_0 (\cos \omega t + \sin \omega t)$$

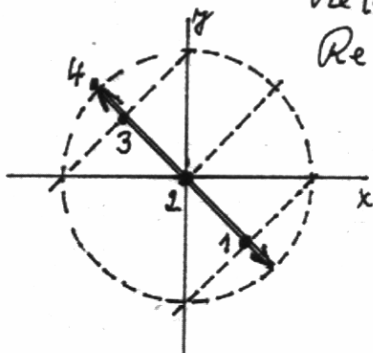
$$\langle W_e' \rangle (0, 45^\circ) = \frac{E_0}{2} \cdot \frac{1}{4} E_0^2 \cdot \left(\langle (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t + \sin 2\omega t) \rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} E_0^2 \langle (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t + \sin 2\omega t) \rangle \right)$$

$$= \frac{E_0}{4} E_0^2$$

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin 2\omega t \rangle = 0$$

$(0, 135^\circ)$



$$\operatorname{Re}\{E_x\} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos \omega t - \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin \omega t\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{Re}\{E_y\} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos \omega t - \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \sin \omega t\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{Re}\{E_x\} = -\operatorname{Re}\{E_y\} = \frac{1}{2} E_0 (\cos \omega t - \sin \omega t)$$

$$1... \omega t = 0 \quad 2... \omega t = \frac{\pi}{4} \quad 3... \omega t = \frac{\pi}{2}$$

$$4... \omega t = \frac{3}{4}\pi$$

$$3... \omega t = \pi$$

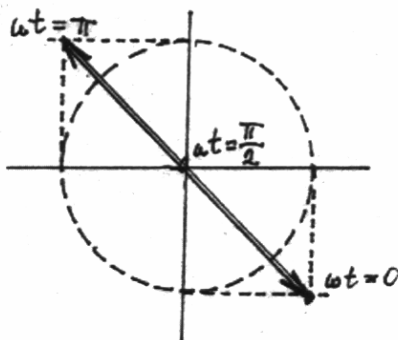
$$\langle W_e' \rangle (0, 135^\circ) = \frac{E_0}{4} E_0^2$$

Fázorová destička $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$E_x^{(K)} = E_0 e^{-i\omega t} \quad \operatorname{Re}\{E_x\} = E_0 \cos \omega t$$

$$E_y^{(K)} = i E_0 e^{-i(\omega t - \varphi)}$$

$$\operatorname{Re}\{E_y\} = -E_0 \cos \omega t$$



$$\langle W_e^K \rangle \left(\frac{\pi}{2}, 135^\circ\right) = \frac{E_0}{2} E_0^2$$

51/11

$(\frac{\pi}{2}, 45^\circ)$ do polarizátoru vstupuje lineárně polarizovaná vlna kolmo na směr polarizátoru

$$\langle W_E' \rangle \left(\frac{\pi}{2}, 45^\circ \right) = 0$$

$(\frac{\pi}{2}, 135^\circ)$ kmitovník vlny a polarizátoru shodné

$$\langle W_E' \rangle \left(\frac{\pi}{2}, 135^\circ \right) = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

$$S_0 = (0,0) + (0,90^\circ) = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad S_1 = S_2 = 0 \quad S_3 = \left(\frac{\pi}{2}, 45^\circ \right) - \left(\frac{\pi}{2}, 135^\circ \right)$$

$$\text{tj. } S_3 = -\frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \cdot \sin \delta = -\frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad \checkmark \quad = -\frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

Želad obdobně pravotočivě kruhově polarizovaná vlna

$$S_0 = (0,0) + (0,90^\circ) = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad S_1 = S_2 = 0$$

$$S_3 = \left(\frac{\pi}{2}, 45^\circ \right) - \left(\frac{\pi}{2}, 135^\circ \right) = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 - 0 = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

2) Lineárně polarizovaná vlna

$$E_x = E_0 \cdot \cos \alpha \cdot e^{-i\omega t} \quad \text{Re} \{ E_x \} = E_0 \cos \alpha \cos \omega t$$

$$E_y = E_0 \cdot \sin \alpha \cdot e^{-i\omega t} \quad \text{Re} \{ E_y \} = E_0 \sin \alpha \cos \omega t$$

$$\text{Jonesův vektor } E_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}; \quad \langle W_E \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2$$

$$\text{polarizační matice } \begin{pmatrix} E_0^2 \cos^2 \alpha & E_0^2 \cos \alpha \sin \alpha \\ E_0^2 \cos \alpha \sin \alpha & E_0^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{\epsilon_0}{4}$$

Stokesovy parametry

$$S_0 = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2$$

$$S_1 = J_{xx} - J_{yy} = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \cos 2\alpha$$

$$S_2 = J_{xy} + J_{yx} = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \cdot 2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \sin 2\alpha$$

$$S_3 = i(J_{yx} - J_{xy}) = 0$$

$$\frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{S_0} = 1$$

Spočítání $\langle w'_e \rangle$ pomocí Jonesových vektorů a matic (51/12)

$$(0,0) \quad \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} E_0 = E_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle w'_e \rangle(0,0) = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \left[(\cos \alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \cos^2 \alpha$$

$$(0,90^\circ) \quad E_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\langle w'_e \rangle(0,90^\circ) = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \left[(0, \sin \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right] = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \sin^2 \alpha$$

$$(0,45^\circ) \quad E_0 \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha + \sin \alpha \\ \cos \alpha + \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle w'_e \rangle(0,45^\circ) &= \frac{\epsilon_0}{4} \cdot \frac{E_0^2}{4} (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 \left[(1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\epsilon_0}{16} E_0^2 (1 + \sin 2\alpha) \cdot (1+1) = \frac{\epsilon_0}{8} E_0^2 (1 + \sin 2\alpha) \end{aligned}$$

$$(0,135^\circ) \quad E_0 \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \\ -\cos \alpha + \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle w'_e \rangle(0,135^\circ) &= \frac{\epsilon_0}{4} \cdot \frac{E_0^2}{4} (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 \left[(1,-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\epsilon_0}{16} E_0^2 (\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot (1+1) = \\ &= \frac{\epsilon_0}{8} E_0^2 (1 - \sin 2\alpha) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 45^\circ\right) \quad E_0 \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ i \sin \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha \\ \cos \alpha + i \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\langle w'_e \rangle\left(\frac{\pi}{2}, 45^\circ\right) = \frac{\epsilon_0}{4} \frac{E_0^2}{4} \left[(\cos \alpha - i \sin \alpha, \cos \alpha - i \sin \alpha) \begin{pmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha \\ \cos \alpha + i \sin \alpha \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{16} E_0^2 \left(\cos^2 \alpha + i \sin \alpha \cos \alpha - i \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + i \sin \alpha \cos \alpha - i \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha \right) =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{8} E_0^2$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 135^\circ\right) \quad E_0 \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ i \sin \alpha \end{pmatrix} = \quad (51/13)$$

$$= \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha - i \sin \alpha \\ -\cos \alpha + i \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\langle n_z' \rangle \left(\frac{\pi}{2}, 135^\circ\right) = \frac{\epsilon_0}{4} \cdot \frac{E_0^2}{4} \left[(\cos \alpha + i \sin \alpha, -\cos \alpha - i \sin \alpha) \begin{pmatrix} \cos \alpha - i \sin \alpha \\ -\cos \alpha + i \sin \alpha \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{16} E_0^2 \left(\cos^2 \alpha + i \sin \alpha \cos \alpha - i \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha + \right. \\ \left. + \cos^2 \alpha + i \sin \alpha \cos \alpha - i \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha \right) =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{8} E_0^2$$

Zkontrolujeme Stokesovy parametry

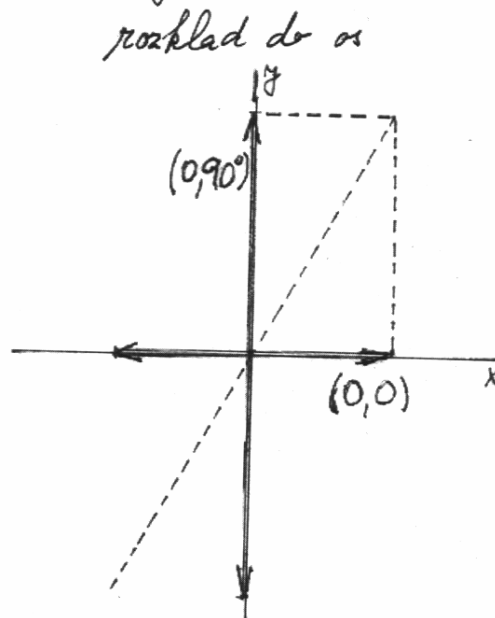
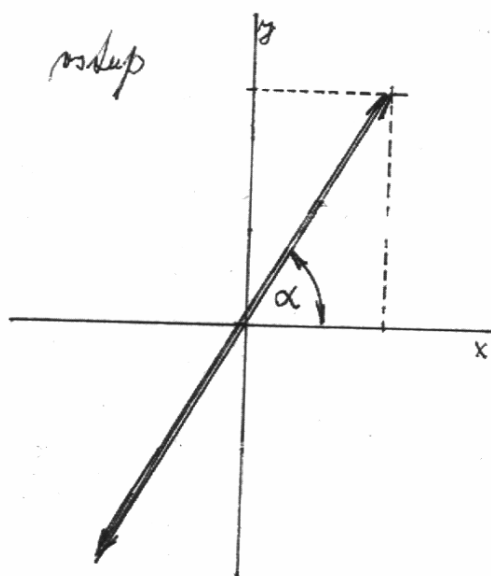
$$S_0 = (0,0) + (0,90^\circ) = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2$$

$$S_1 = (0,0) - (0,90^\circ) = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \cos 2\alpha$$

$$S_2 = (0,45^\circ) - (0,135^\circ) = \frac{\epsilon_0}{8} E_0^2 (1 + \sin 2\alpha - 1 + \sin 2\alpha) = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \sin 2\alpha$$

$$S_3 = \left(\frac{\pi}{2}, 45^\circ\right) - \left(\frac{\pi}{2}, 135^\circ\right) = \frac{\epsilon_0}{8} E_0^2 (1 - 1) = 0$$

Názorně rozkreslení polarizační stavu

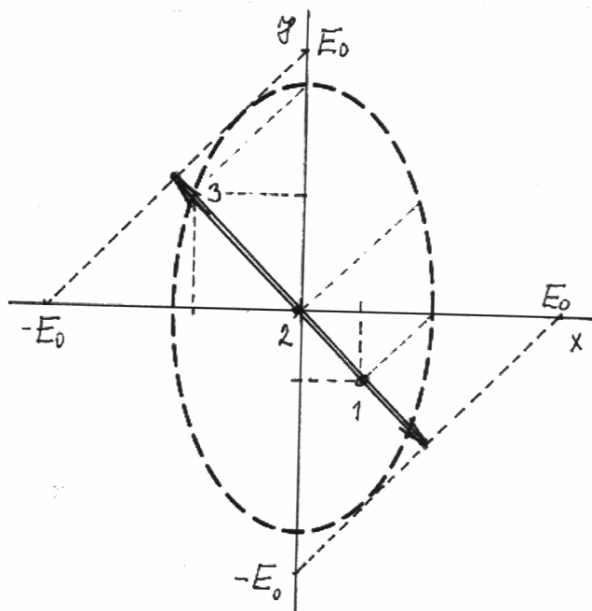
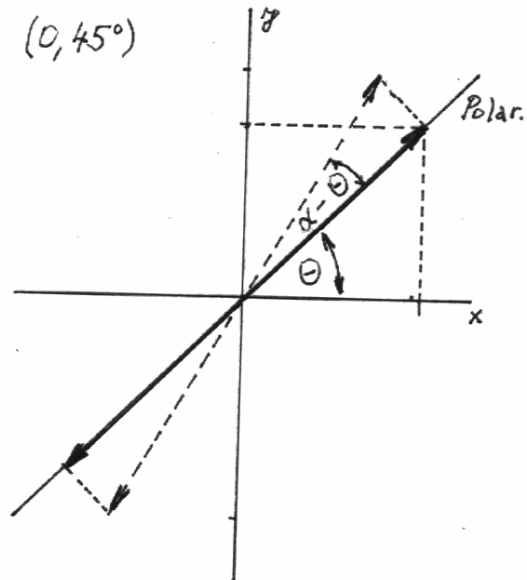
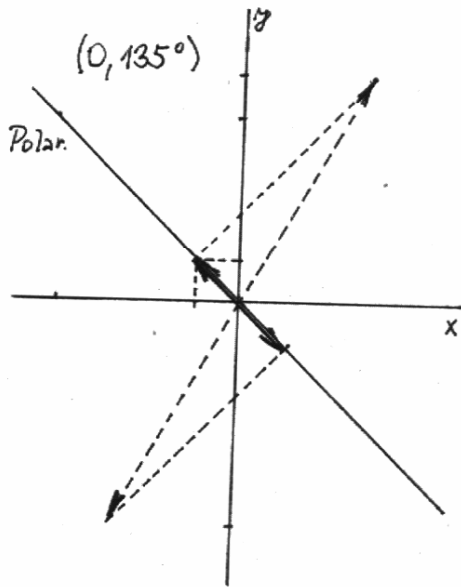


rozklad do kruhového „šikmých“ polarizací

51/14

$$E'_x(t) = E_0 \cos \omega t \cdot \cos(\alpha - \Theta) \cdot \cos \Theta = E_0 \cos \omega t \cdot (\cos \alpha \cos^2 \Theta + \sin \alpha \sin \Theta \cos \Theta)$$

$$E'_y(t) = E_0 \cos \omega t \cdot \cos(\alpha - \Theta) \cdot \sin \Theta$$



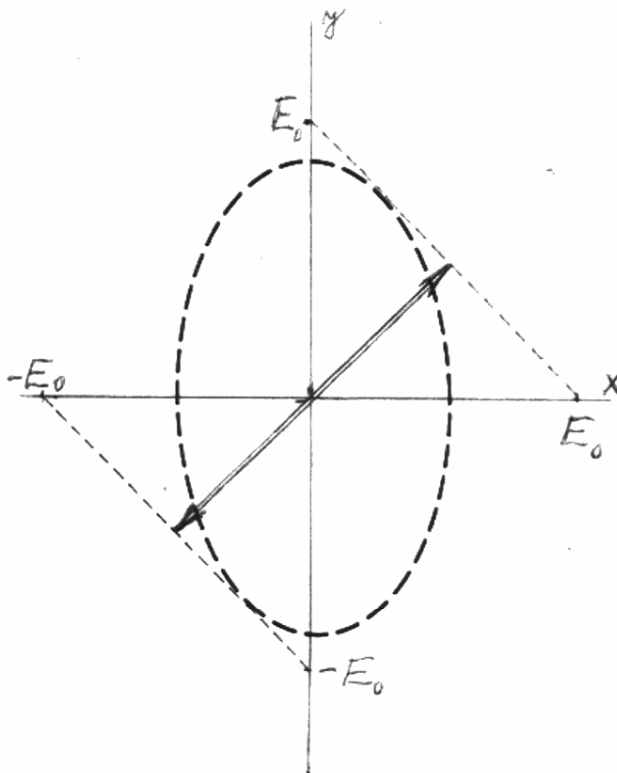
$(\frac{\pi}{2}, 135^\circ)$

plošnéjch polarizací

$$E'_x(t), E'_y(t)$$

- 1... $\omega t = 0$
- 2... $\omega t = \frac{\pi}{4}$
- 3... $\omega t = \frac{\pi}{2}$

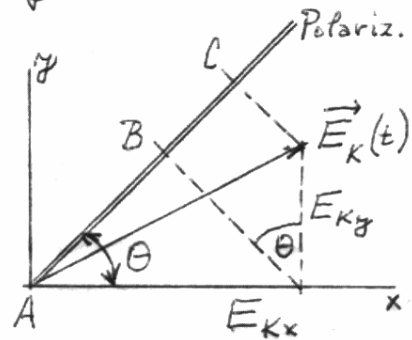
5/15



Po průchodu
lázeňou desítkou

$$E_{Kx} = E_0 \cos \alpha \cos \omega t$$

$$E_{Ky} = E_0 \sin \alpha \sin \omega t$$



Přispěvky od E_{Kx}
do nové polarizace

$$E(t) = \overline{AB} = E_{Kx} \cdot \cos \theta$$

$$E_{P2}(t) = \overline{BC} = E_{Ky} \cdot \sin \theta$$

Oba příspěvky $E_P(t) = E_0 (\cos \alpha \cos \theta \cos \omega t + \sin \alpha \sin \theta \sin \omega t)$

$$\theta = 45^\circ \quad E_P(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 (\cos \alpha \cos \omega t + \sin \alpha \sin \omega t)$$

lineárně polarizovaná vlna

$$\frac{\epsilon_0}{2} E_P^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{E_0^2}{2} (\cos^2 \alpha \cos^2 \omega t + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \omega t \cos \omega t + \sin^2 \alpha \sin^2 \omega t)$$

$$\frac{\epsilon_0}{2} \langle E_P^2 \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \left(\frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) = \frac{\epsilon_0}{8} E_0^2$$

51/16

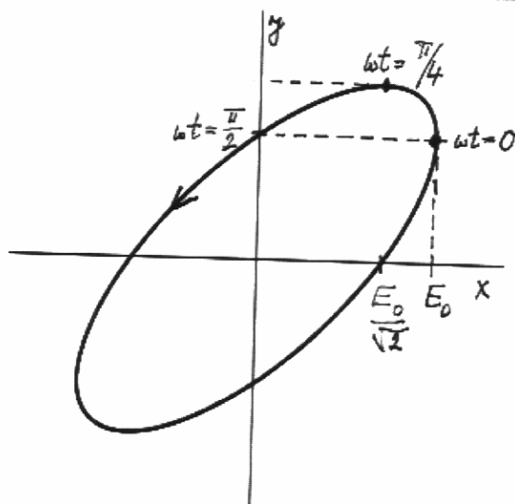
3) Elipticky polarizovaná plna $E_x = E_0 e^{-i\omega t}$
 $E_y = E_0 \cdot e^{i\pi/4} \cdot e^{-i\omega t}$

$$E_x = E_0 \cdot e^{-i\omega t}$$

$$E_y = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 (1+i) e^{-i\omega t}$$

$$\operatorname{Re}\{E_x\} = E_0 \cos \omega t$$

$$\operatorname{Re}\{E_y\} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 (\cos \omega t + \sin \omega t)$$



$$J_{xx} = \frac{\epsilon_0}{4} \langle E_x^* E_x \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2$$

$$J_{yy} = \frac{\epsilon_0}{4} \langle E_y^* E_y \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 (1+i)(1-i) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2$$

$$J_{yx} = \frac{\epsilon_0}{4} \langle E_y^* E_x \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$$

$$J_{xy} = \frac{\epsilon_0}{4} \langle E_x^* E_y \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$$

Stokesovy parametry

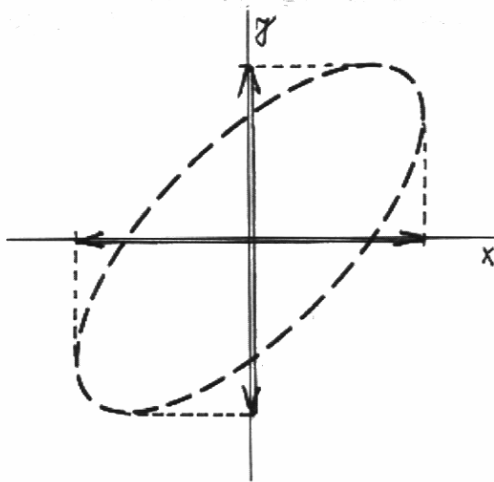
$$S_0 = J_{xx} + J_{yy} = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad S_1 = J_{xx} - J_{yy} = 0$$

$$S_2 = J_{xy} + J_{yx} = \frac{\epsilon_0}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} E_0^2 (1-i+1+i) = \frac{\sqrt{2}}{4} \epsilon_0 E_0^2$$

$$S_3 = i(J_{xy} - J_{yx}) = i \frac{\epsilon_0}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} E_0^2 (1+i-1-i) = i \frac{\sqrt{2}}{4} i \epsilon_0 E_0^2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \epsilon_0 E_0^2$$

$$\sqrt{S_2^2 + S_3^2} = \epsilon_0 E_0^2 \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{2}{16}} = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 = S_0$$

$$S_3 = -\frac{\epsilon_0}{4} \cdot E_0^2 \cdot 2 \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4} \epsilon_0 E_0^2$$



$$(0,0) \operatorname{Re}\{E_x'\} = E_0 \cos \omega t$$

$$\operatorname{Re}\{E_y'\} = 0$$

$$\langle w_e' \rangle(0,0) = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2$$

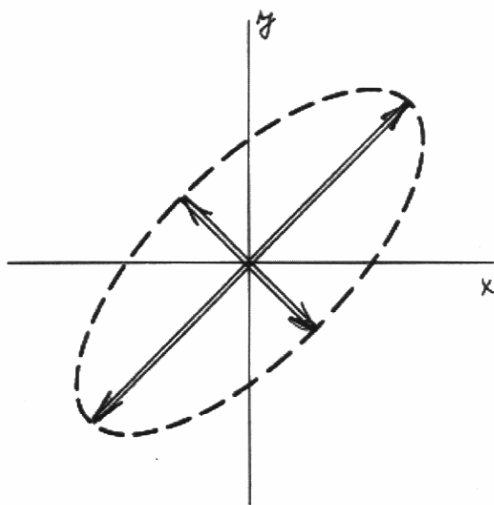
$$(0, 90^\circ) \operatorname{Re}\{E_x'\} = 0$$

$$\operatorname{Re}\{E_y'\} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 (\sin \omega t + \cos \omega t)$$

$$\langle w_e' \rangle(0, 90^\circ) =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{1}{2} E_0^2 (1 + \langle 2 \sin \omega t \cos \omega t \rangle)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2$$



$$(0, 45^\circ)$$

přispěvek ke kmitům ve směru polarizátoru od E_x

$$E_{p1}(t) = E_x \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos \omega t$$

přispěvek od E_y

$$E_{p2}(t) = E_y \cdot \sin \theta =$$

$$= \frac{1}{2} E_0 (\sin \omega t + \cos \omega t)$$

Kmity ve směru polarizátoru

$$E_p(t) = E_{p1}(t) + E_{p2}(t)$$

$$E_p(t) = E_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega t + \frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{1}{2} \sin \omega t \right) = \frac{E_0}{2} [(\sqrt{2}+1) \cos \omega t + \sin \omega t]$$

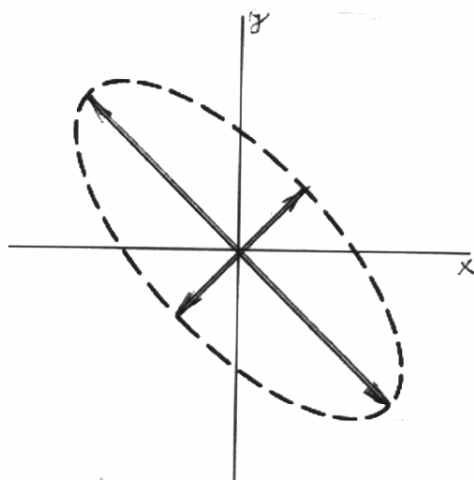
$$\frac{\epsilon_0}{2} \langle E_p^2 \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{E_0^2}{4} \langle [(\sqrt{2}+1) \cos \omega t + \sin \omega t]^2 \rangle$$

lineárně polarizovaná plá

$$= \frac{\epsilon_0}{8} E_0^2 \left[(3+2\sqrt{2}) \underbrace{\langle \cos^2 \omega t \rangle}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\langle \sin^2 \omega t \rangle}_{\frac{1}{2}} + 2(\sqrt{2}+1) \underbrace{\langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle}_0 \right] =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{16} E_0^2 (4+2\sqrt{2})$$

51/18



$(\frac{\pi}{2}, 45^\circ)$ pr. přímého fáz. desížení

$$E_{kx} = E_0 \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\text{Re}\{E_{kx}\} = E_0 \cos \omega t$$

$$E_{ky} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 (1+i) \cdot e^{-i\omega t} \cdot i =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 (i-1) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\text{Re}\{E_{ky}\} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 (\sin \omega t - \cos \omega t)$$

$$\cos \Theta = \sin \Theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$E_p(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} E_{kx} + \frac{\sqrt{2}}{2} E_{ky} = \frac{E_0}{2} [(\sqrt{2}-1) \cos \omega t + \sin \omega t]$$

$$\frac{\epsilon_0}{2} \langle E_p^2 \rangle = \frac{\epsilon_0}{8} E_0^2 \langle [\dots]^2 \rangle = \frac{\epsilon_0}{16} E_0^2 (4 - 2\sqrt{2})$$

Zcela obdobně

$$(0, 135^\circ) \quad \cos \Theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \Theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$E_p(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos \omega t + \frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{1}{2} \sin \omega t$$

$$\frac{\epsilon_0}{2} \langle E_p^2 \rangle = \frac{\epsilon_0}{16} E_0^2 (4 - 2\sqrt{2})$$

$$(\frac{\pi}{2}, 135^\circ)$$

$$E_p(t) = \frac{E_0}{2} (\sin \omega t + \sqrt{2} \cos \omega t + \cos \omega t)$$

$$\frac{\epsilon_0}{2} \langle E_p^2 \rangle = \frac{\epsilon_0}{16} E_0^2 (4 + 2\sqrt{2})$$

$$A_0 = (0, 0) + (0, 90^\circ) = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

$$A_1 = (0, 0) - (0, 90^\circ) = 0$$

$$A_2 = (0, 45^\circ) - (0, 135^\circ) = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \sqrt{2}$$

$$A_3 = (\frac{\pi}{2}, 45^\circ) - (\frac{\pi}{2}, 135^\circ) = -\frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \sqrt{2}$$

(51/19)

Polarizační prvky působící na vlny popsané Stokesovými parametry
- Muellerovy matice 4×4

Zde je několik příkladů pro prvky posíle při prázdné
Stokesových parametru

Připomeňme

lineární polarizace $\begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

okružní polarizace
levotočivá $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, pravotočivá $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Polarizátor s kmitoměrem v ose x působící na nepolarizované
záření

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ intenzity propustí} \\ \frac{1}{2} \text{ intenzity raději (pošle jím)} \\ \text{záření polarizované v ose x} \end{array}$$

- Polarizátor s kmitoměrem v ose y působící na záření
polarizované pod úhlem $\alpha = 45^\circ$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{záření polarizované v ose y} \\ \text{propustěna } \frac{1}{2} \text{ intenzity} \end{array}$$

- Polarizátor s kmitoměrem 135° působící na lineární pol. 45°

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{neprojde nic}$$

51/20

Polarizátor s kmitoměrem 135° působící na lineární polarizaci 135°

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{projde pře}$$

• Fázová destička $\frac{\pi}{2}$ s osami v osách x, y působící na nepolarizované světlo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{vychází opět nepolarizované světlo}$$

• Fázová destička $\frac{\pi}{2}$ působící na lineárně polarizovanou vlnu 45°

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{levotočivá kruhová polarizace}$$

• Fázová destička $\frac{\pi}{2}$ působící na levotočivě polarizovanou vlnu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{lineární polarizace } 135^\circ$$

Pro počítání s úplně polarizovanými vlnami je jednodušší Jonesův počet.