

Proseminář z Optiky

Difrakce I – Difrakční integrál, Babinetův princip

18.11.2023



FACULTY
OF MATHEMATICS
AND PHYSICS
Charles University

Popis světla

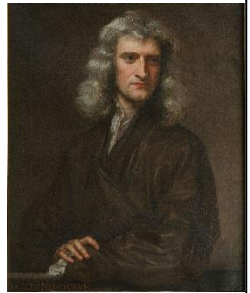
Christian Huygens

- 1690 – *Traité de la Lumière*
 - vlnová teorie
 - předpoklad konečné rychlosti světla
- hlavní problém: geometrická optika
- světlo – vlnoplochy, každý bod prostoru jako zdroj sférické vlny
- ALE: šíření éterem + longitudinální vlny



Isaac Newton

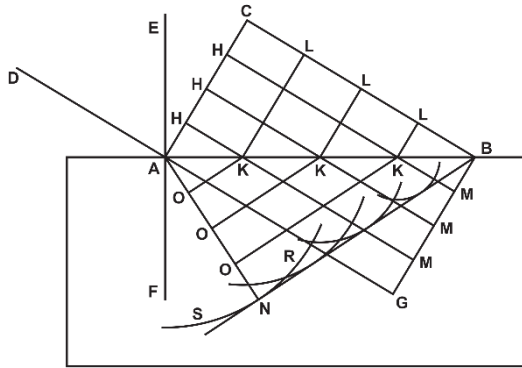
- 1670s – teorie barev
 - – disperze
 - 1675 – Hypotesis of Light
 - 1704 - Opticks
 - světlo - částice pohybující se v éteru, v materiálu odraz a lom závislý na hustotě
- ALE: interakce světla s látkou - alchymie



Popis světla

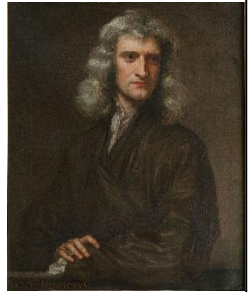
Christian Huygens

- 1690 – *Traité de la Lumière*
 - vlnová teorie
 - předpoklad konečné rychlosti světla



Isaac Newton

- 1670s – teorie barev
 - – disperze
- 1675 – *Hypotesis of Light*
- 1704 - *Opticks*
- světlo - částice pohybující se v éteru, v materiálu odraz a lom závislý na hustotě

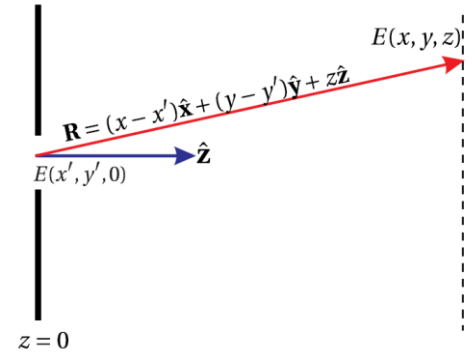


ALE: interakce světla s látkou - alchymie

Skalární popis difrakce

Fresnel – Kirchhoffův difrakční integrál

$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\text{apertura}} E(x', y', 0) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \left(\frac{1 + \cos(R, z)}{2} \right) da$$

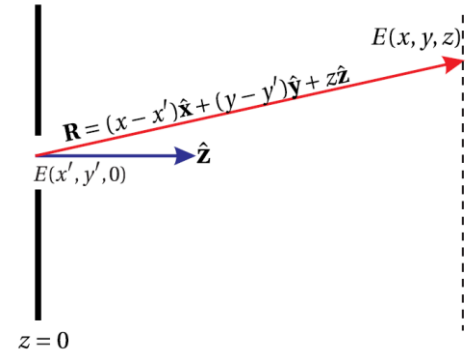


Skalární popis difrakce

Fresnel – Kirchhoffův difrakční integrál

$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\text{apertura}} E(x', y', 0) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \left(\frac{1 + \cos(R, z)}{2} \right) da$$

pole E je možné zjistit pomocí znalosti pole v apertuře



Skalární popis difrakce

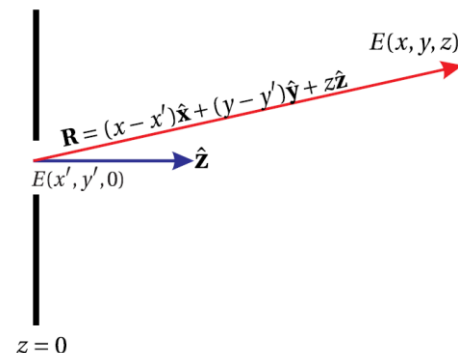
Fresnel – Kirchhoffův difrakční integrál

$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\text{apertura}} E(x', y', 0) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \left(\frac{1 + \cos(R, z)}{2} \right) da$$

pole E je možné zjistit pomocí znalosti pole v apertuře

Faktor $-\frac{i}{\lambda}$ je nutný i pro správné jednotky při výpočtu

Směrový faktor – aby se vlna nešířila zpět



Skalární popis difrakce

Máme dán popis pole $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t}$,

to splňuje Helmholtzovu rovnici $\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$

nyní budeme ignorovat vektorovost a budeme počítat pouze s $E(\mathbf{r})$

Budeme mít ale relaci spojující tyto dvě veličiny

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \nabla E(\mathbf{r})$$

(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Existují Greenův teorém (odvodíte na matematické analýze):

$$\oint_s \left[U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right] da = \int_V [U \nabla^2 V - V \nabla^2 U] dV = 0$$

Dosadíme specifické funkce

$$U = \frac{e^{ikr}}{r}$$
$$V = E(\mathbf{r})$$

(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Dosadíme specifické funkce

$$U = \frac{e^{ikr}}{r}$$
$$V = E(\mathbf{r})$$

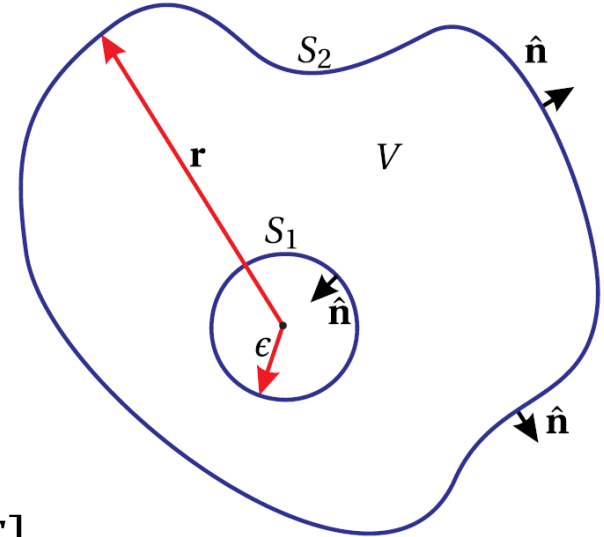
A dostaneme

$$\oint_S \left[E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} \right] da = 0$$

(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Nyní bez újmy na obecnosti vezmeme plochu skládající se ze dvou částí S_1 a S_2

Integrál se rozkouskujeme do dvou částí



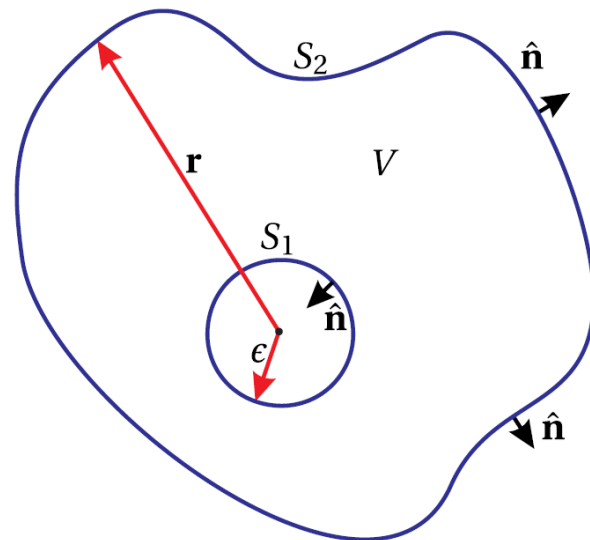
$$\oint_{S_2} \left[E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} \right] ds_2 = - \oint_{S_1} \left[E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} \right] ds_1$$

(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Nyní bez újmy na obecnosti vezmeme plochu skládající se ze dvou částí S_1 a S_2

Integrál se rozkouskujeme do dvou částí

A pošleme $\epsilon \rightarrow 0$



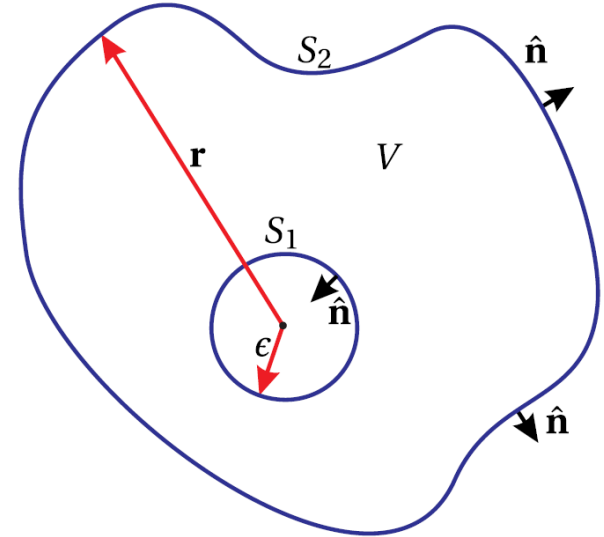
(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Nyní bez újmy na obecnosti vezmeme plochu skládající se ze dvou částí S_1 a S_2

Integrál se rozkouskujeme do dvou částí

A pošleme $\epsilon \rightarrow 0$

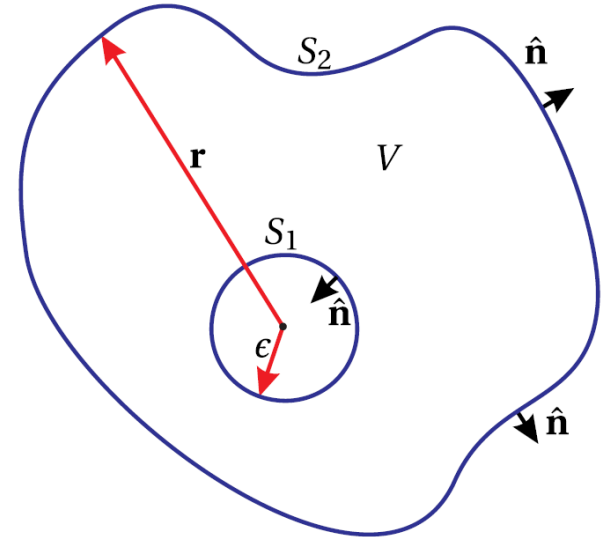
$$E(0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_2} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right] ds_2$$



(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

$$E(0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_2} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right] ds_2$$

Pokud tedy známe funkci vpravo, můžeme vypočítat podobu pole v počátku.



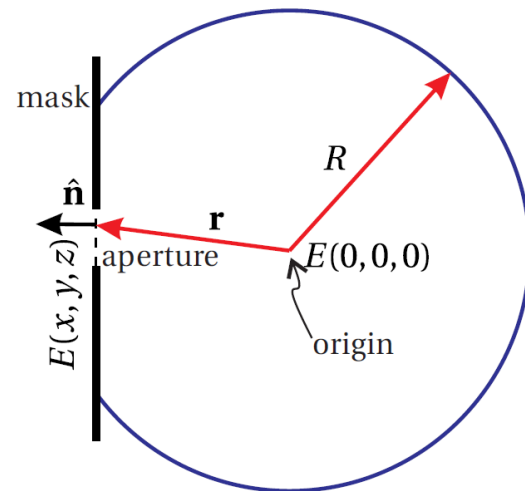
(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Opět bez újmy na obecnosti vezměme tuto plochu

Pro $R \rightarrow \infty$

všude kromě masky funkce v integrálu vymizí

Na masce předpokládejme $E = 0$ a $\frac{\partial E}{\partial n} = 0$



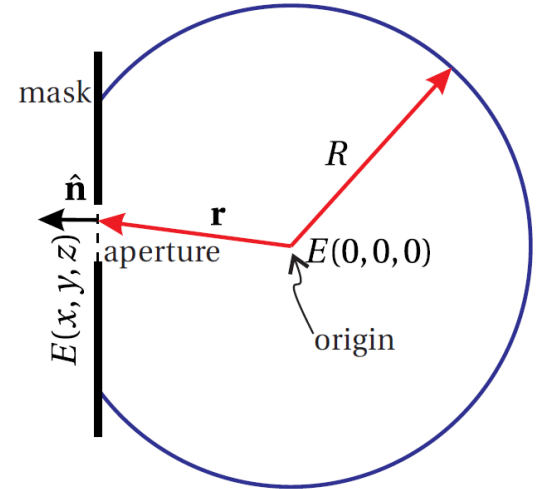
(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Dostaneme tedy

$$E(0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{apertura}} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right] da$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \rightarrow \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr} \cos(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}) \xrightarrow{r \gg \lambda} \frac{ike^{ikr}}{r} \cos(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}})$$

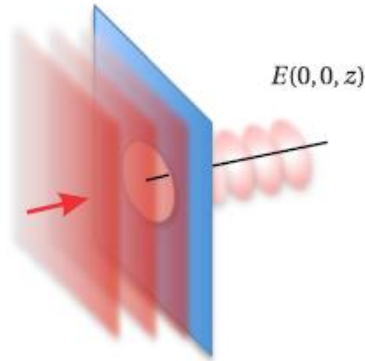
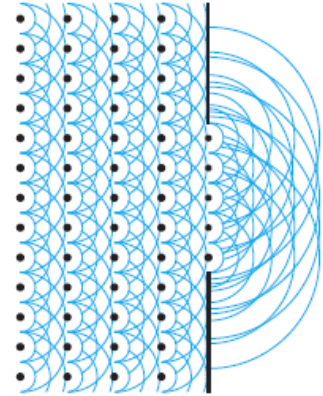
$$E(0) = \frac{-i}{\lambda} \iint_{\text{apertura}} E \frac{e^{ikr}}{r} \left[\frac{1 + \cos(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}})}{2} \right] da$$



Difrakce

Použití Huygensova principu
a vypočítání podoby pole při znalosti pole v apertuře

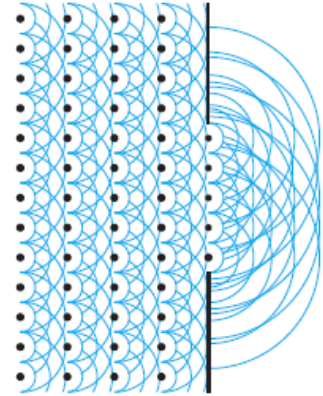
Jak vypadá pole na ose z za kruhovou aperturou?



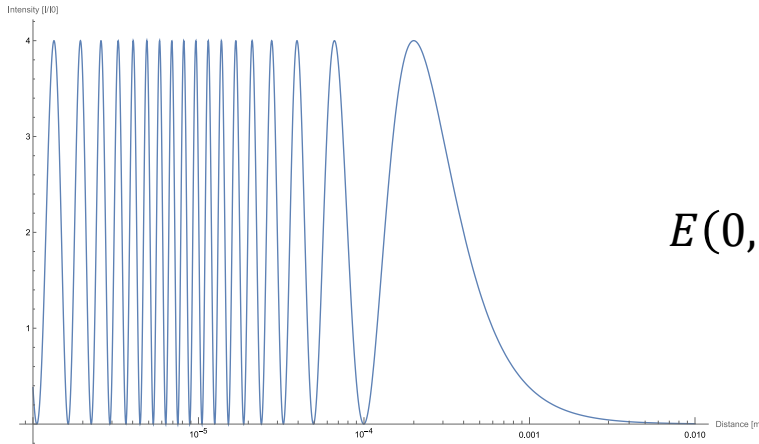
$$E(0, 0, z) = -\frac{i E_0}{\lambda} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\frac{D}{2}} \frac{e^{ik\sqrt{\rho'^2+z^2}}}{\sqrt{\rho'^2+z^2}} \rho' d\rho'$$

Difrakce

Použití Huygensova principu (https://www.walter-fendt.de/html5/phen/refractionhuygens_en.htm) a vypočítání podoby pole při znalosti pole v apertuře



Jak vypadá pole na ose z za kruhovou aperturou?

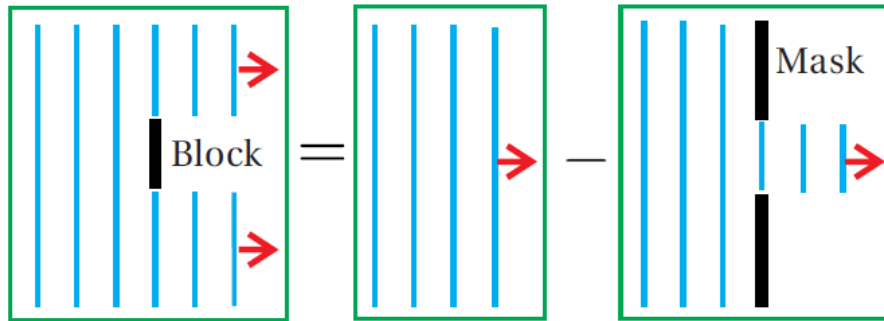


$$E(0, 0, z) = 2 |E_0|^2 \left[1 - \cos \left(k \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2} - kz \right) \right]$$

Babinetův princip

V difrakčním integrálu záleží na ploše vymezené aperturou
tuto plochu ale můžeme dělit a vymezovat dále a integrál musí platit

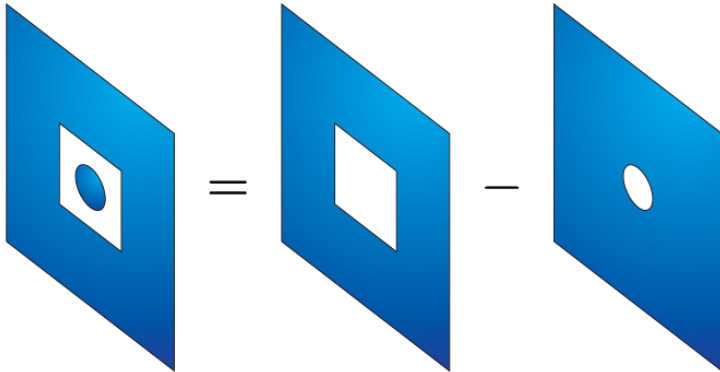
Pokud nebude překážka, musíme dostat rovinnou vlnu



Babinetův princip

V difrakčním integrálu záleží na ploše vymezené aperturou
tuto plochu ale můžeme dělit a vymezovat dále a integrál musí platit

Způsob počítání složitějších apertur nebo masek

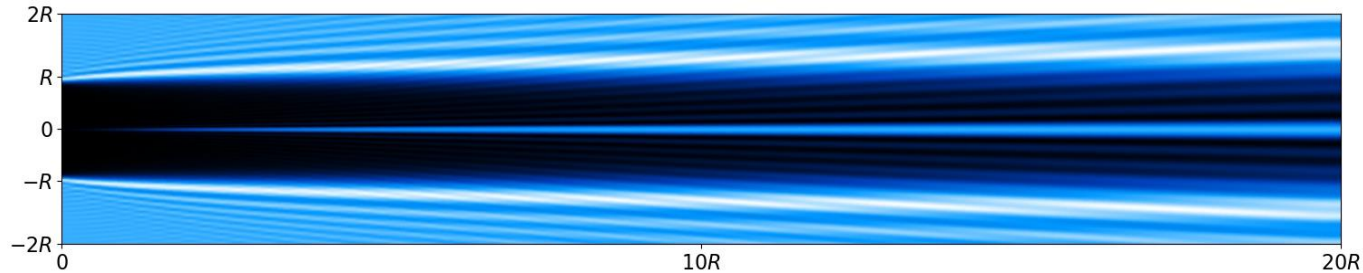


Poissonova skvrna

Pole za kruhovou aperturou na ose z

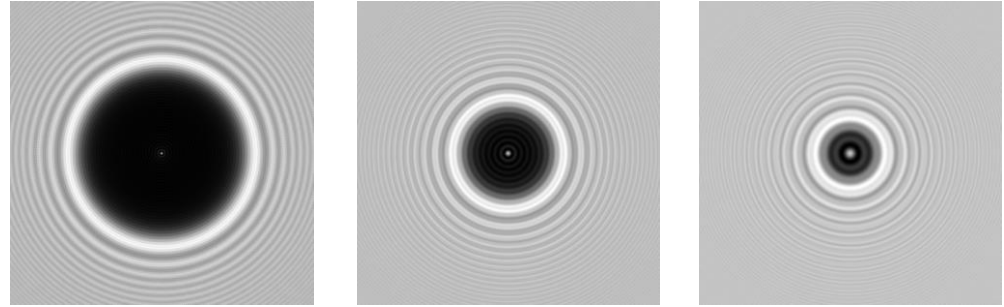
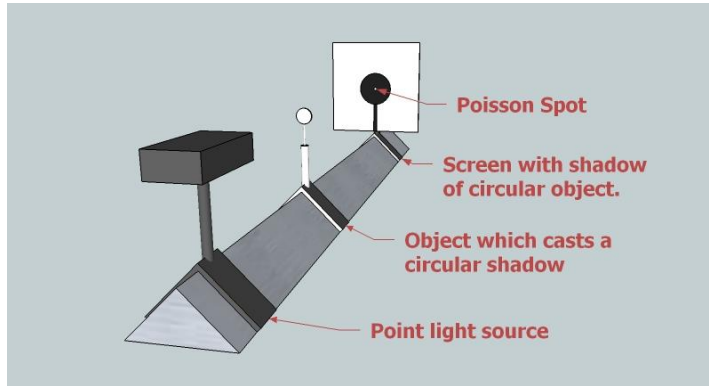
$$E(0, 0, z) = 2 |E_0|^2 \left[1 - \cos \left(k \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2} - kz \right) \right]$$

Podle Babinetova principu musí být tedy za překážkou také intenzita



Poissonova skrvna

Difrakce na kruhové překážce



The images show simulated Arago spots in the shadow of a disc of varying diameter (4 mm, 2 mm, 1 mm – left to right) at a distance of 1 m from the disc.

Fraunhoferova difrakce

Difrakce v dalekém poli

$$e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)} \cong 1$$

$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{\text{apertura}} E(x', y', 0) e^{-i\frac{k}{z}(x x' + y y')} dx' dy'$$

Splněno pro

$$z \gg \frac{k}{2} (\text{poloměr apertury})^2$$

Pro naše výpočty $z \gg \frac{k}{2} \frac{dx}{2} \frac{dy}{2} = \frac{2500}{k}$

Fraunhoferova difrakce na štěrbině

Difrakce v dalekém poli

$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E(x', y', 0) e^{-\frac{ik}{z}(xx'+yy')} dx'$$

$$E(x, y, z) = C \cdot E_0 \left[-\frac{z}{ikx} e^{-\frac{ikx x'}{z}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cong \frac{2z a}{kx a} \sin\left(\frac{kax}{2z}\right)$$

$$E(x, y, z) \cong a \cdot \frac{\sin\left(\frac{kax}{2z}\right)}{\left(\frac{kax}{2z}\right)} = a \cdot \text{sinc}\left(\frac{kax}{2z}\right)$$

Fraunhoferova difrakce na 2D štěrbině

Difrakce v dalekém poli

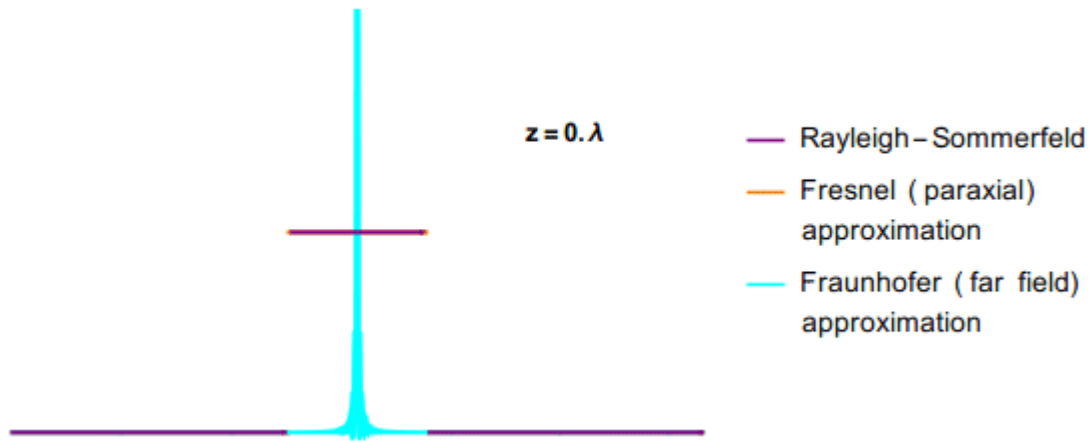
$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E(x', y', 0) e^{-\frac{ik}{z}xx'} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-\frac{ik}{z}yy'} dy'$$

$$E(x, y, z) \cong \frac{2z a}{kx a} \sin\left(\frac{ka x}{2z}\right) \cdot \frac{2z b}{ky b} \sin\left(\frac{kb y}{2z}\right)$$

$$E(x, y, z) \cong ab \cdot \text{sinc}\left(\frac{kax}{2z}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{kby}{2z}\right)$$

Difrakce

Porovnání difrakce při různých aproximacích



Reference

Peatross, Ware, Physics of Light and Optics, BYU, 2021 Revision.

Jan Franc, skripta Optika, 2021.

Štefan Višňovský, Optika – poznámky k přednášce.

P. Malý, Optika, Karolinum, 2008

<https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/r/rayleigh+criterion>

<https://www.parabolixlight.com/fresnel-lens-and-parabolic-reflectors>

https://cs.wikipedia.org/wiki/Fresnelova_%C4%8Do%C4%8Dka

<https://www.edmundoptics.com/knowledge-center/application-notes/optics/advantages-of-fresnel-lenses/>

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d1/Lentille_de_fresnel.gif

https://en.wikipedia.org/wiki/Zone_plate

<http://zoneplate.lbl.gov/theory>

https://www.researchgate.net/publication/258683913_Hard-X-ray_Zone_Plates_Recent_Progress/figures?lo=1

https://xdb.lbl.gov/Section4/Sec_4-4.html

https://www.nicepng.com/ourpic/u2w7i1i1o0t4t4o0_zone-plate-spacing-fresnel-zone-plate/

Markus Weigand. *Realization of a New Magnetic Scanning X-ray Microscope and Investigation of Landau Structures Under Pulsed Field Excitation*. Cuvillier, E, 2015.

<https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/r/resolution>

https://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens

https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

https://cs.wikipedia.org/wiki/Alfred_Cornu

<http://sdsu-physics.org/physics180/physics180B/Topics/light/phys180Bch24.html>

https://www.researchgate.net/publication/299437011_Comparative_Analysis_of_Path_Loss_Models_in_Mobile_Communications_for_Urban_Case/figures?lo=1

<https://www.optixs.cz/spektrometry-29k/vlaknove-spektrometry-55k/flame-vlaknovy-spektrometr-53p>

By User:Patrick87 - Own work, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=21807350>

By Cmglee - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19051904>

https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_lens

https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_lens#History