

Proseminář z Optiky

Difrakce II – Difrakční obrazce, Fourierovská optika



FACULTY
OF MATHEMATICS
AND PHYSICS
Charles University

Frauenhoferova difrakce

Difrakce v dalekém poli

$$e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)} \cong 1$$

$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{\text{apertura}} E(x', y', 0) e^{-i\frac{k}{z}(x x' + y y')} dx' dy'$$

Splněno pro

$$z \gg \frac{k}{2} (\text{poloměr apertury})^2$$

Pro naše výpočty $z \gg \frac{k}{2} \frac{dx}{2} \frac{dy}{2} = \frac{2500}{k}$

Frauenhoferova difrakce na štěrbině

Difrakce v dalekém poli

$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E(x', y', 0) e^{-\frac{ik}{z}(xx'+yy')} dx'$$

$$E(x, y, z) = C \cdot E_0 \left[-\frac{z}{ikx} e^{-\frac{ikx x'}{z}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cong \frac{2z a}{kx a} \sin\left(\frac{kax}{2z}\right)$$

$$E(x, y, z) \cong a \cdot \frac{\sin\left(\frac{kax}{2z}\right)}{\left(\frac{kax}{2z}\right)} = a \cdot \text{sinc}\left(\frac{kax}{2z}\right)$$

Frauenhoferova difrakce na 2D štěrbíně

Difrakce v dalekém poli

$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E(x', y', 0) e^{-\frac{ik}{z}xx'} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-\frac{ik}{z}yy'} dy'$$

$$E(x, y, z) \cong \frac{2z}{kx} \frac{a}{a} \sin\left(\frac{kax}{2z}\right) \cdot \frac{2z}{ky} \frac{b}{b} \sin\left(\frac{kby}{2z}\right)$$

$$E(x, y, z) \cong ab \cdot \text{sinc}\left(\frac{kax}{2z}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{kby}{2z}\right)$$

Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

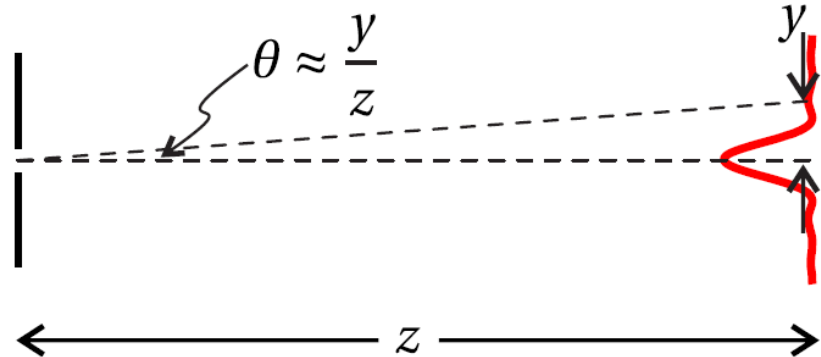
Čistě matematicky můžeme napsat

$$I(x, y, z) = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \left| \frac{1}{\lambda z} \iint_{ap} E(x', y', 0) e^{-ik\left(\frac{x}{z}x' + \frac{y}{z}y'\right)} dx' dy' \right|^2$$

Prostorová závislost na stínítku je vyjádřena pomocí úhlů

$$\theta_x \cong \frac{x}{z}, \theta_y \cong \frac{y}{z}$$

Zachovává se úhlová šířka svazku



Fourierovská optika

Ve Fraunhoferově aproximaci:

$$I(x, y, z) = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \left| \frac{1}{\lambda z} \iint_{ap} E(x', y', 0) e^{-ik\left(\frac{x}{z}x' + \frac{y}{z}y'\right)} dx' dy' \right|^2$$

Difrakce => Fourierova transformace



VS

Fourierovská optika

Ve Fraunhoferově aproximaci:

$$I(x, y, z) = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \left| \frac{1}{\lambda z} \iint_{ap} E(x', y', 0) e^{-ik\left(\frac{x}{z}x' + \frac{y}{z}y'\right)} dx' dy' \right|^2$$

Difrakce => Fourierova transformace $f(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \varepsilon} dx$



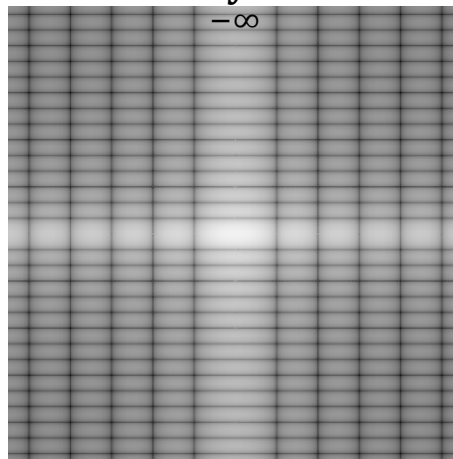
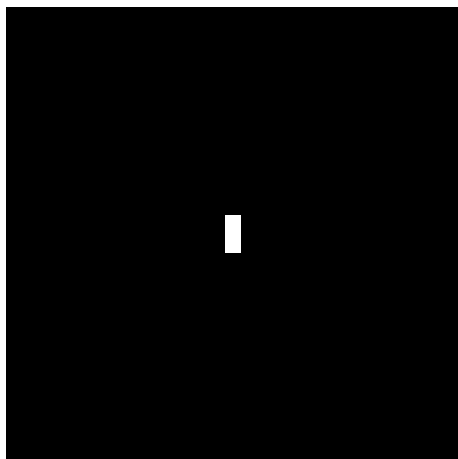
VS

Fourierovská optika

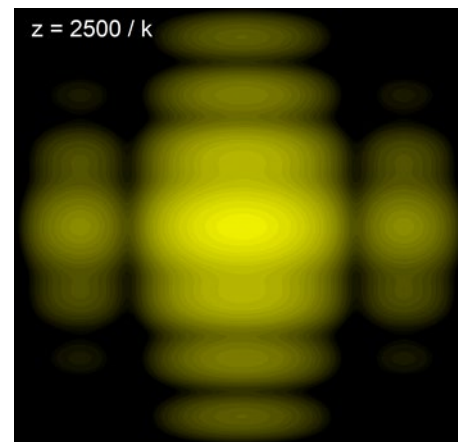
Ve Fraunhoferově aproximaci:

$$I(x, y, z) = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \left| \frac{1}{\lambda z} \iint_{ap} E(x', y', 0) e^{-ik\left(\frac{x}{z}x' + \frac{y}{z}y'\right)} dx' dy' \right|^2$$

Difrakce => Fourierova transformace $f(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \varepsilon} dx$



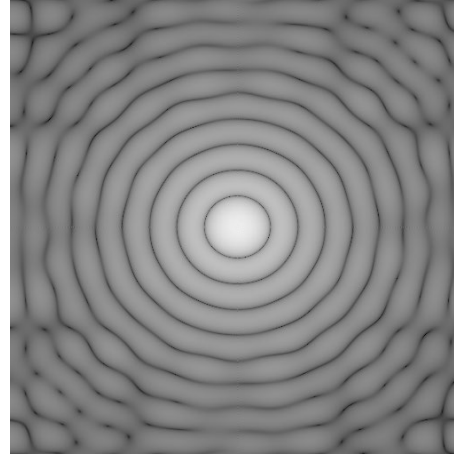
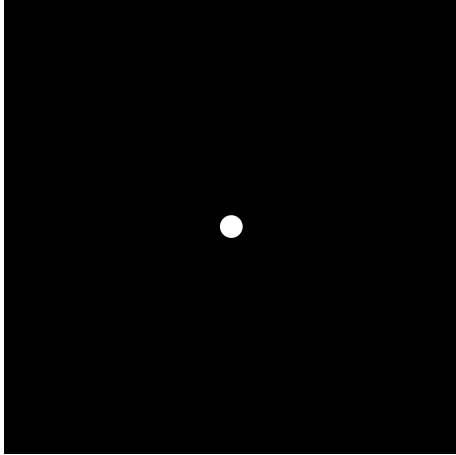
VS



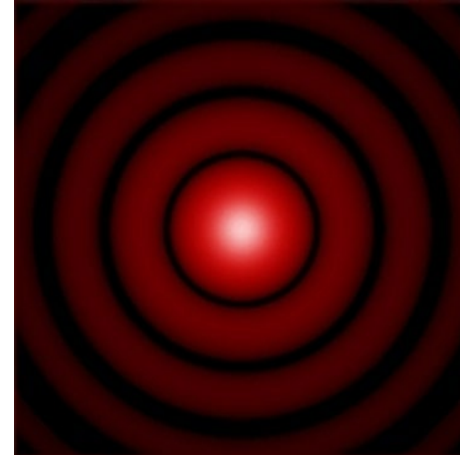
Fourierovská optika

Ve Fraunhoferově aproximaci:

Difrakce \Rightarrow Fourierova transformace



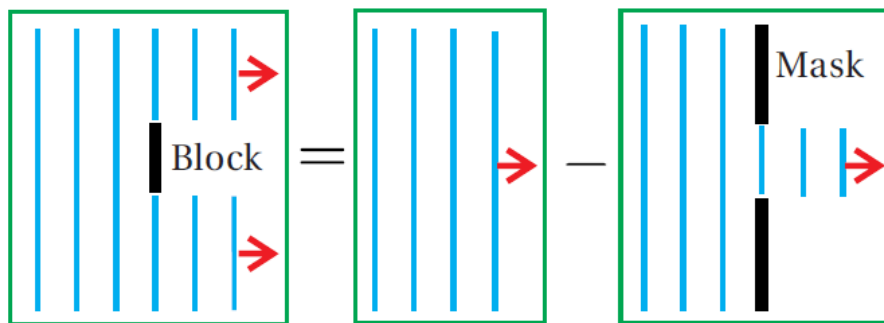
VS



Babinetův princip

V difrakčním integrálu záleží na ploše vymezené aperturou
tuto plochu ale můžeme dělit a vymezovat dále a integrál musí platit

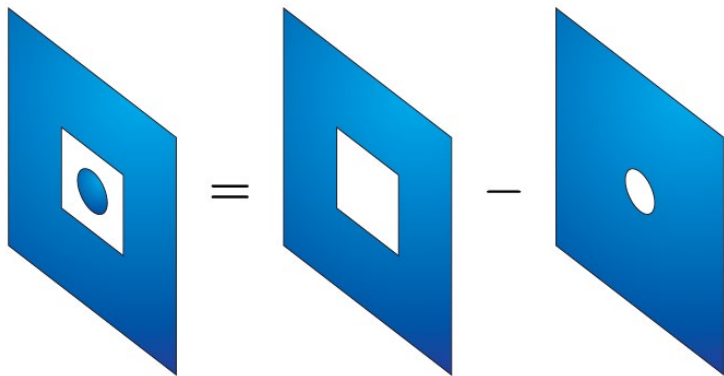
Pokud nebude překážka, musíme dostat rovinnou vlnu



Babinetův princip

V difrakčním integrálu záleží na ploše vymezené aperturou
tuto plochu ale můžeme dělit a vymezovat dále a integrál musí platit

Způsob počítání složitějších apertur nebo masek



Babinetův princip

Ve Fraunhoferově aproximaci:

Difrakční obrazec štěrby = difrakční obrazec překážky až na dopřednou intenzitu

$$FT(\text{aperture}_x) = \text{sinc } x$$

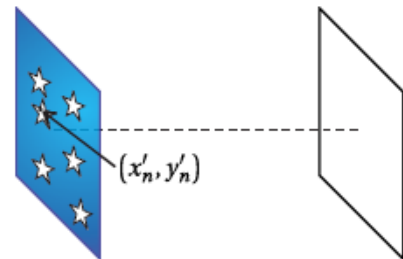
$$FT(\text{plane wave}) = \delta(\theta = 0)$$

$$FT(\text{aperture}) + FT(\text{barrier}) = FT(\text{plane wave})$$

Interference na N šterbinách

Pro více apertur

$$E(x', y', 0) = \sum_{n=1}^N E_{aperture}(x' - x'_n, y' - y'_n, 0)$$



Ve Fraunhoferově aproximace

$$E(x, y, z) = -i \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{\lambda z} \sum_{n=1}^N \iint_{-\infty}^{\infty} E_{ap}(x' - x'_n, y' - y'_n, 0) e^{-i\frac{k}{z}(xx' + yy')} da$$

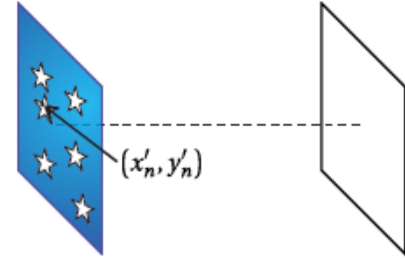
Po přeznačení

$$E(x, y, z) = \left[\sum_{n=1}^N e^{\frac{ik}{z}(xx'_n + yy'_n)} \right] \cdot \left[-i \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} E_{ap}(x'', y'', 0) e^{-i\frac{k}{z}(xx'' + yy'')} da \right]$$

Interference na N šterbinách

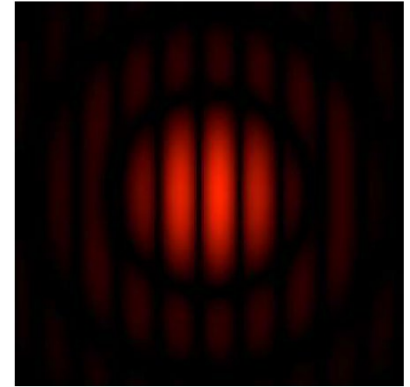
Pole pro více šterbin se skládá z Fraunhoferova obrazce jedné apertury a sumačního členu

→ příklad: dvě identické kruhové šterbiny vzdálené o h v ose x

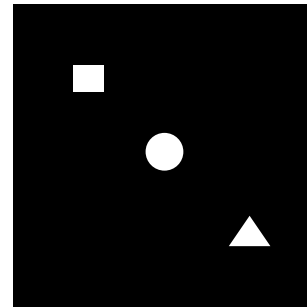
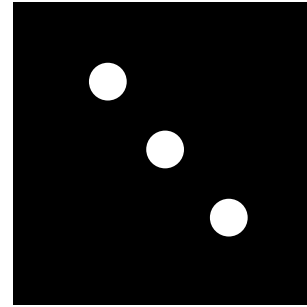
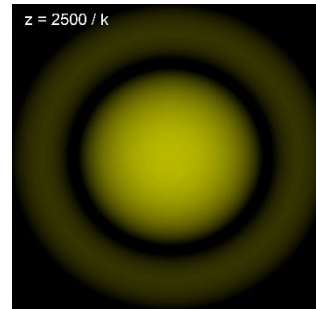
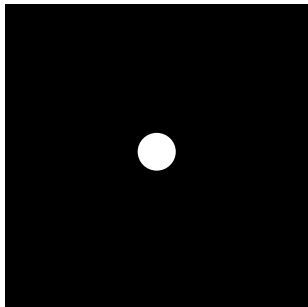
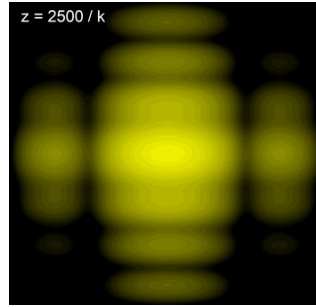
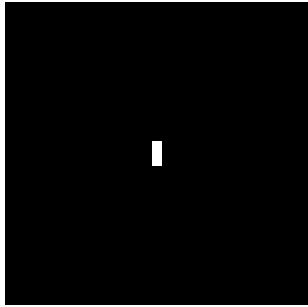


Pole na N identických apertur v ose y vzdálených o h

$$I(x, 0, z) \cong I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{Nkh}{2z}x\right)}{N \sin\left(\frac{kh}{2z}x\right)} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{ka}{2z}x\right)}{\frac{ka}{2z}x} \right)^2$$

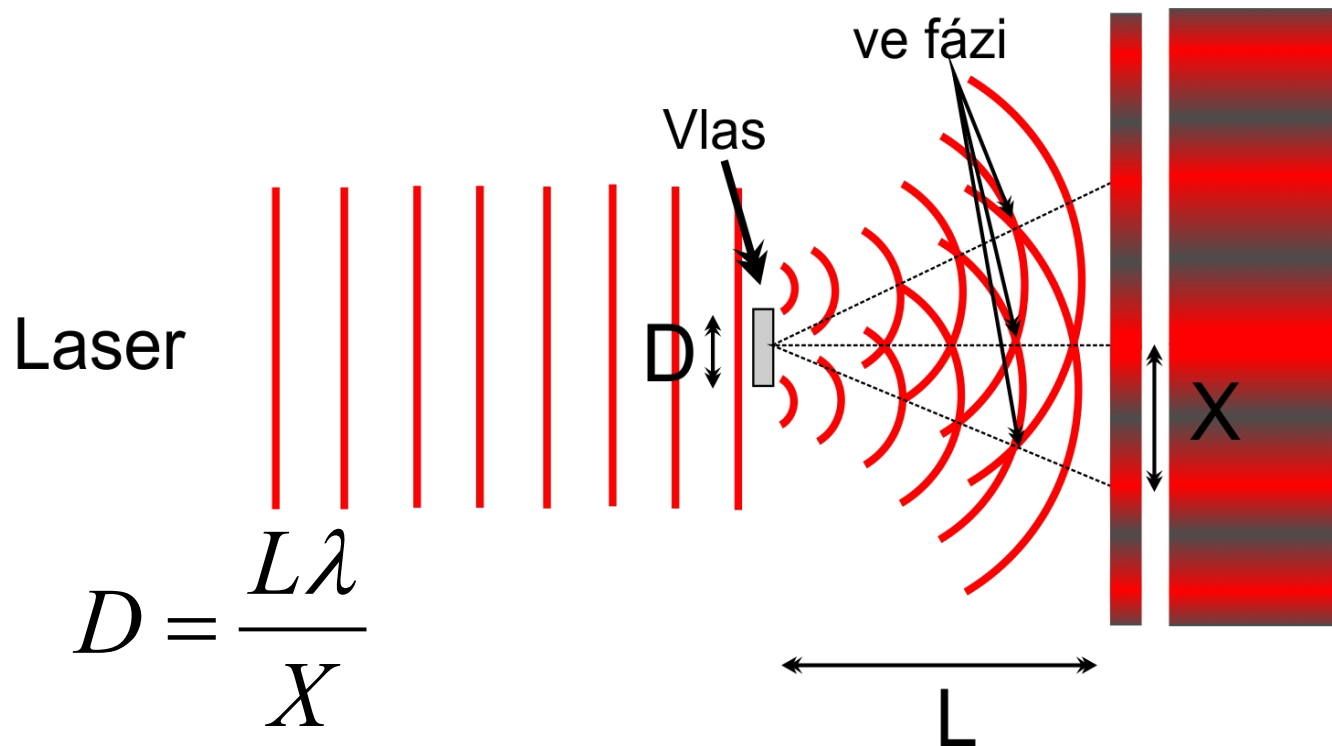


Difrakční vzory



https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-interference/latest/wave-interference_en.html

Babinetův princip – šířka vlasu



Babinetův princip – šířka vlasu

Rozdělení dle barvy vlasů

Blond vlasy : 17 – 50 μm

Tmavé vlasy : 60 – 180 μm

L [m]	4	
λ [nm]	532	
X [cm]	2.2	
D =	96.7	μm

Rozdělení dle kvality vlasů

vyšší lámavost
lépe drží účesy



průměrná
tloušťka pro
danou barvu

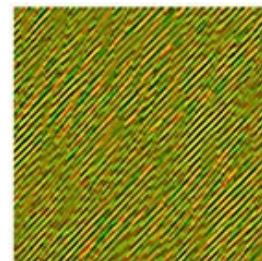
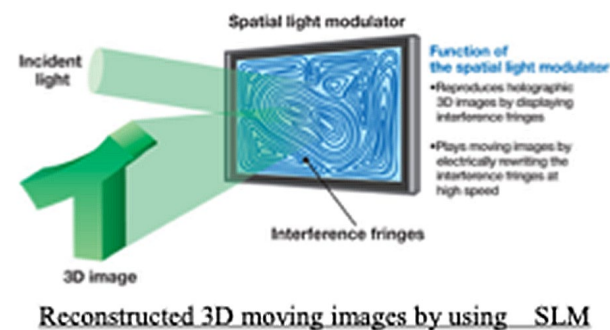
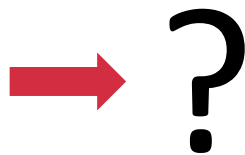
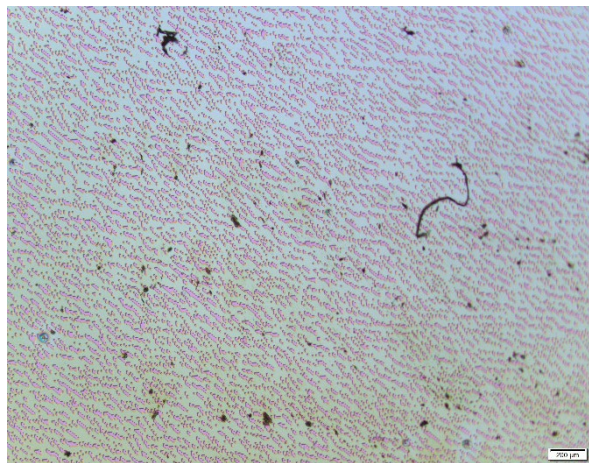


pevnější
méně poddajné

Difrakční vzory

Prostorový modulátor

- vytvoření difrakčního obrazce
- rekonstrukce obrazu objektu



Hologram - calculated by computer, displayed by a spatial light modulator

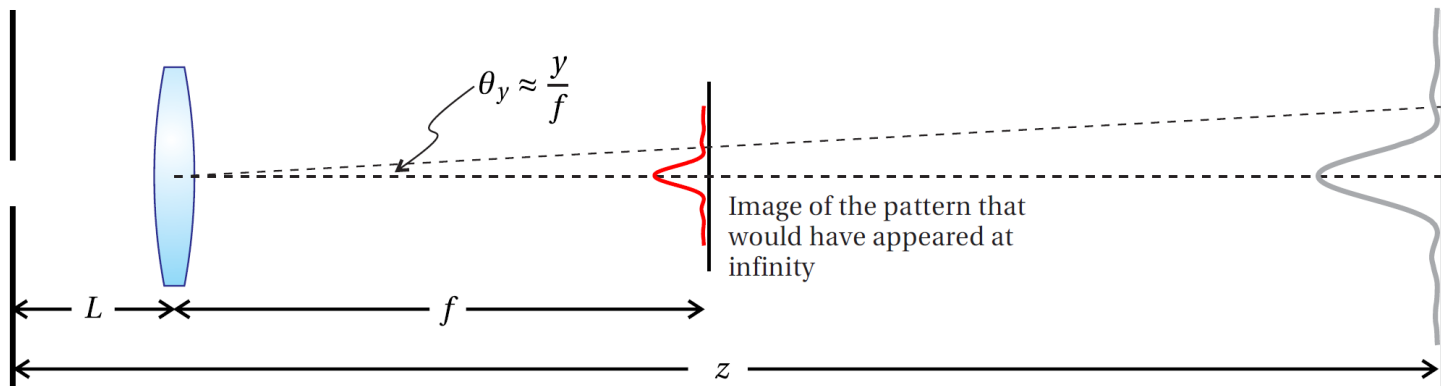


Produces a clock face

Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

Podmínka dalekého pole

$$z \gg \frac{\pi r^2}{\lambda}$$



Obraz Frauenhoferovy difrakce je virtuální předmět $\frac{1}{f} = \frac{1}{-(z-L)} + \frac{1}{d}$

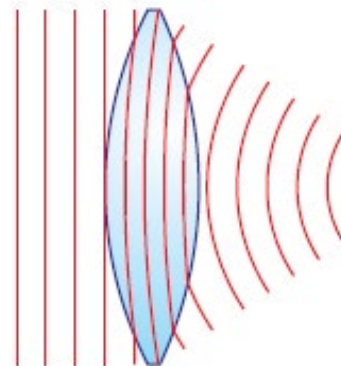
Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

Čočka zobrazí Frauenhoferovu difrakci do ohniskové vzdálenosti, tedy

$$I(x, y, L + F) \cong \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \left| \frac{1}{\lambda f} \iint_{ap} E(x', y', 0) e^{-\frac{ik}{f}(xx' + yy')} dx' dy' \right|^2$$

Ale průchod čočkou mění fázi elektrického pole.
Tedy $E(x', y', 0)$ nutno dopočítat

Jakou fázi získají vlny po průchodu čočkou?



Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

Fázový rozdíl je závislý na radiální vzdálenosti od středu čočky

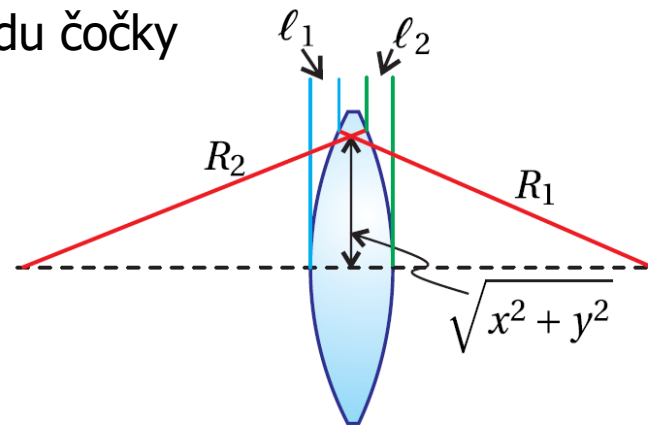
$$\Delta\phi = -k(n-1)(l_1 + l_2)$$

Pomocí paraxiální aproximace

$$l_1 \cong \frac{x^2 + y^2}{2R_1}, l_2 \cong \frac{x^2 + y^2}{2R_2}$$

Po dosazení dostaneme

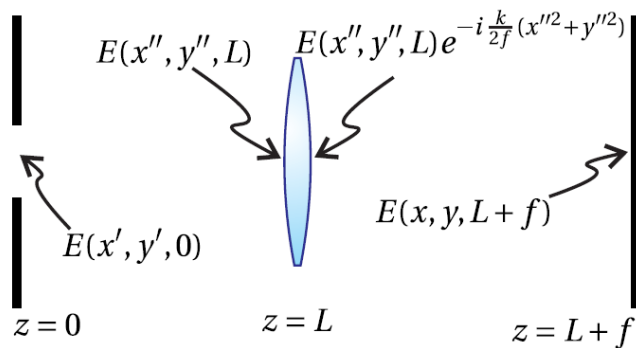
$$\Delta\phi = -k(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)(x^2 + y^2)$$



Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

Po průchodu tenkou čočkou se změní fáze

$$E(x'', y'', z_{\text{za čočkou}}) = E(x'', y'', z_{\text{před čočkou}}) e^{-i \frac{k}{2f} (x''^2 + y''^2)}$$



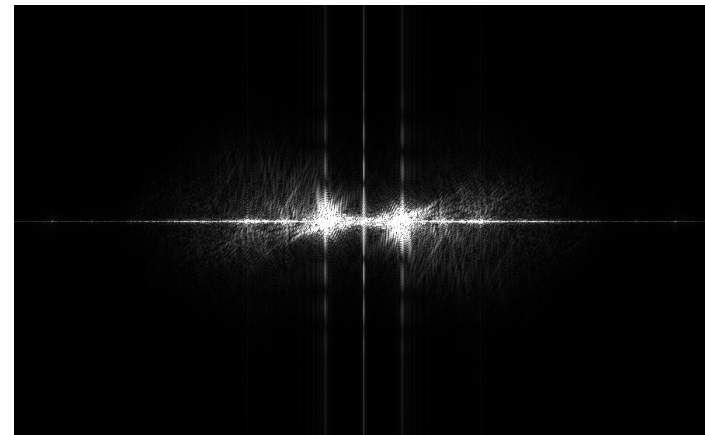
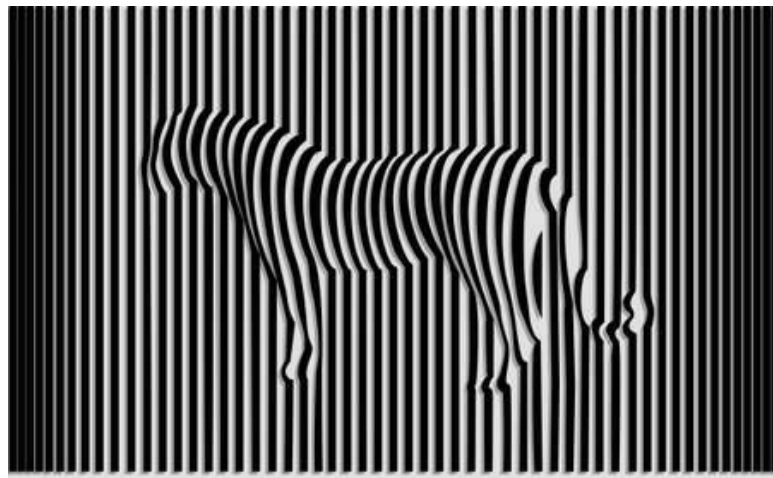
$$\begin{aligned} & E(x, y, L + f) \\ &= -i \frac{e^{ik(L+f)} e^{i \frac{k}{2f} (x^2 + y^2)} e^{i \frac{kL}{2f^2} (x^2 + y^2)}}{\lambda f} \times \\ & \times \iint_{ap} E(x', y', 0) e^{i \frac{k}{f} (xx' + yy')} dx' dy' \end{aligned}$$

Fourierovská optika – filtry

Použití na úpravu obrázku apod.

- vyšší frekvence (kratší periodičita) blíž středu
- nižší frekvence (plochy apod) dále od středu

$$E(x, y, z) = C \iint_{ap} E(x', y', 0) e^{-ik\left(\frac{x}{z}x' + \frac{y}{z}y'\right)} dx' dy'$$

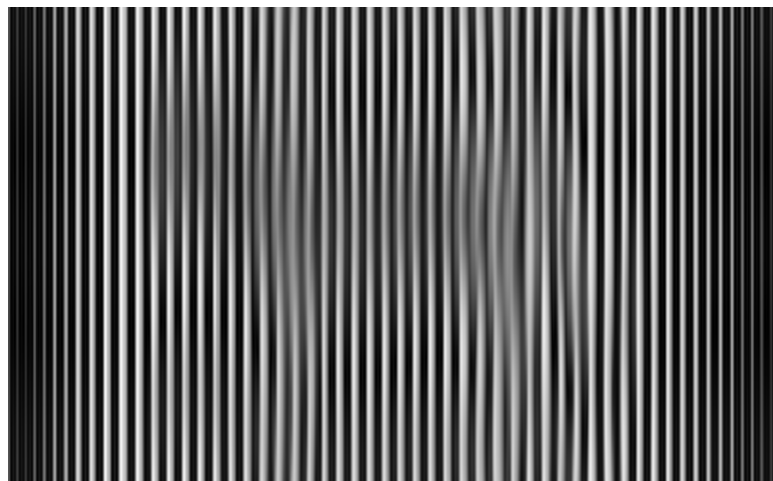


Fourierovská optika – filtry

Použití na úpravu obrázku apod.

- vyšší frekvence (kratší periodičita) blíž středu
- nižší frekvence (plochy apod) dále od středu

$$E(x, y, z) = C \iint_{ap} E(x', y', 0) e^{-ik\left(\frac{x}{z}x' + \frac{y}{z}y'\right)} dx' dy'$$

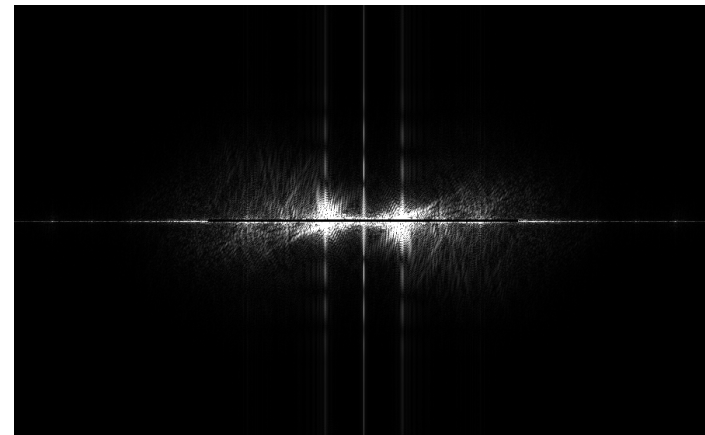
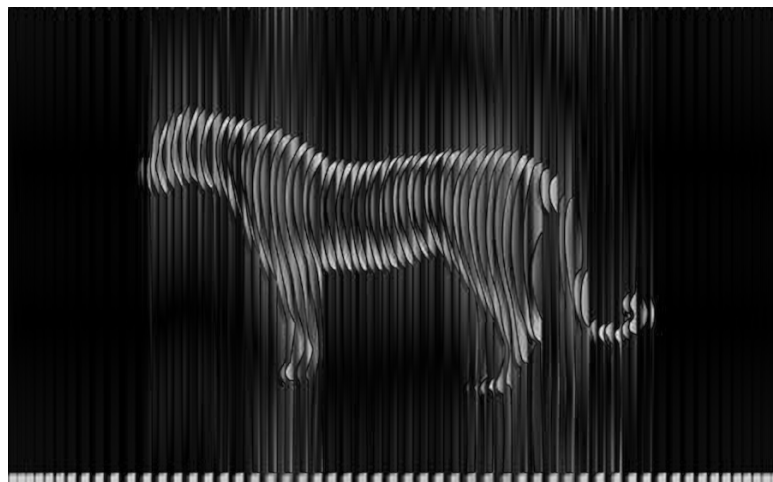


Fourierovská optika – filtry

Použití na úpravu obrázku apod.

- vyšší frekvence (kratší periodičita) blíž středu
- nižší frekvence (plochy apod) dále od středu

$$E(x, y, z) = C \iint_{ap} E(x', y', 0) e^{-ik\left(\frac{x}{z}x' + \frac{y}{z}y'\right)} dx' dy'$$

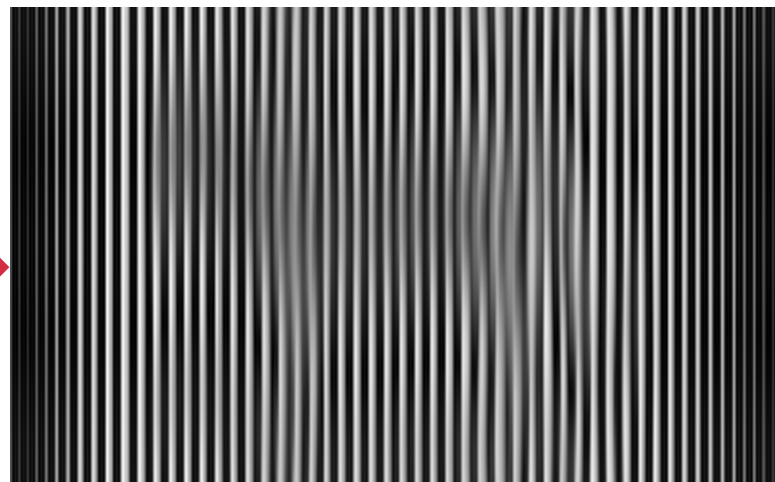
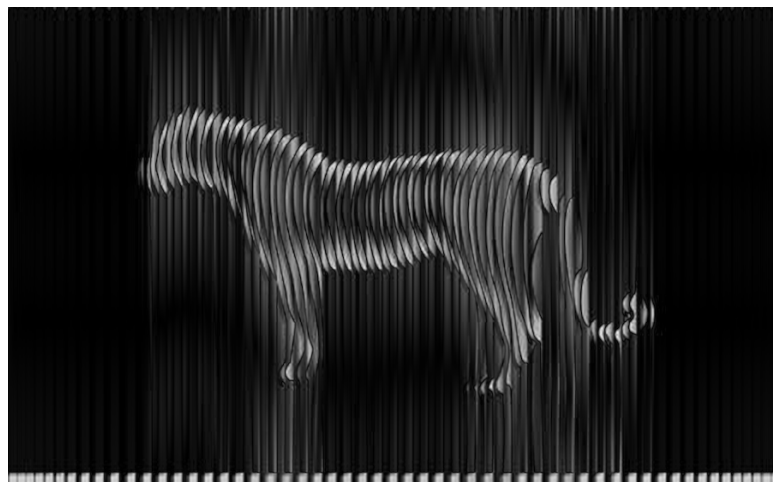


Fourierovská optika – filtry

Použití na úpravu obrázku apod.

Vymezování a úprava difrakčního obrazce

$$E(x, y, z) = C \iint_{ap} E(x', y', 0) e^{-ik\left(\frac{x}{z}x' + \frac{y}{z}y'\right)} dx' dy'$$



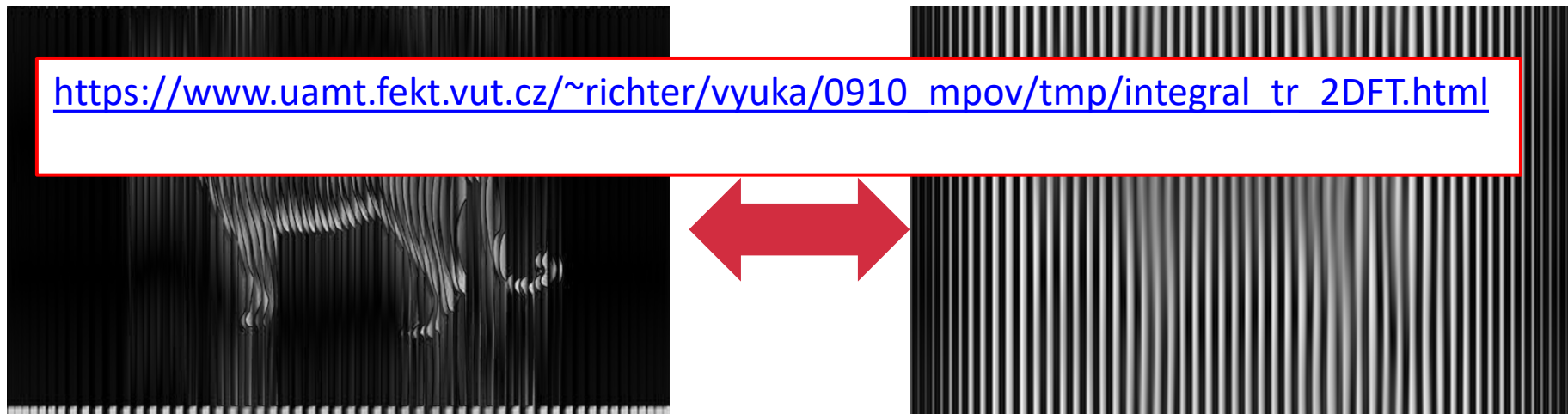
Fourierovská optika – filtry

Použití na úpravu obrázku apod.

Vymezování a úprava difrakčního obrazce

$$E(x, y, z) = C \iint_{ap} E(x', y', 0) e^{-ik\left(\frac{x}{z}x' + \frac{y}{z}y'\right)} dx' dy'$$

https://www.uamt.fekt.vut.cz/~richter/vyuka/0910_mpov/tmp/integral_tr_2DFT.html



Difrakce na kruhové apertuře

Předpokládáme kruhovou symetrii apertury a tedy použijeme válcové souřadnice

$$x = \rho \cdot \cos \phi \quad x' = \rho' \cdot \cos \phi'$$

$$y = \rho \cdot \sin \phi \quad y' = \rho' \cdot \sin \phi'$$

Difrakční integrál (ve Fresnelově aproximaci) bude mít podobu

$$\begin{aligned} E(\rho, z) \\ = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik\rho^2}{2z}} \int_0^{2\pi} \int_0^R E(\rho', 0) e^{\frac{ik\rho'^2}{2z}} e^{-\frac{ik(\rho\rho' \cos \phi \cos \phi' + \rho\rho' \sin \phi \sin \phi')}{z}} \rho' d\rho' d\phi' \end{aligned}$$

Po úpravě

$$E(\rho, z) = -\frac{2\pi i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik\rho^2}{2z}} \int_0^R E(\rho', 0) e^{\frac{ik\rho'^2}{2z}} J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \rho' d\rho'$$

Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

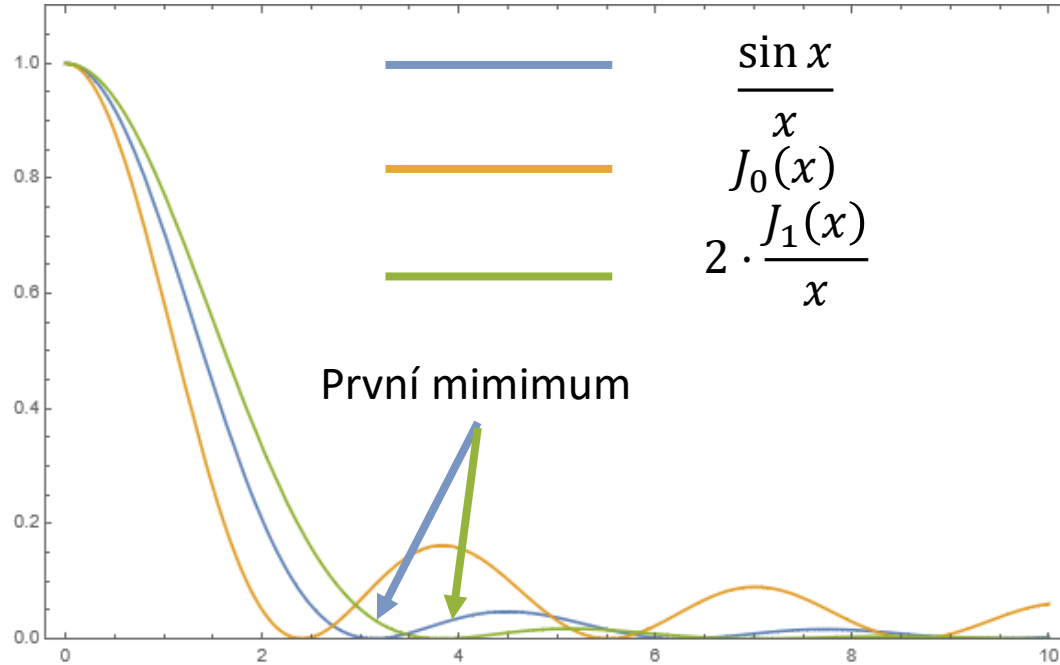
Ve Fraunhoferově aproximaci

$$E(\rho, z) = -\frac{2\pi i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik\rho^2}{2z}} \int_0^R E(\rho', 0) J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \rho' d\rho'$$

Využití tabelovaného integrálu (Hankelova transformace)

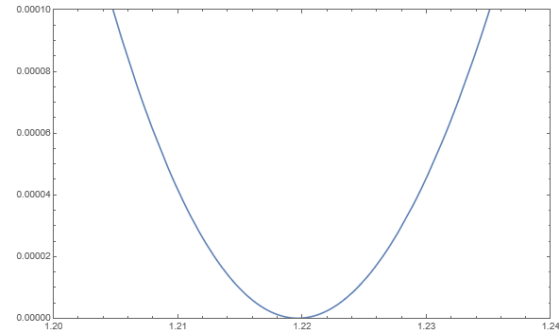
$$E(\rho, z) = -\frac{2\pi i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik\rho^2}{2z}} \frac{Rz}{k\rho} J_1\left(\frac{Rk\rho}{z}\right)$$
$$I(\rho, z) \approx \left(2 \cdot \frac{J_1\left(\frac{Rk\rho}{z}\right)}{\left(\frac{Rk\rho}{z}\right)} \right)^2$$

Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře



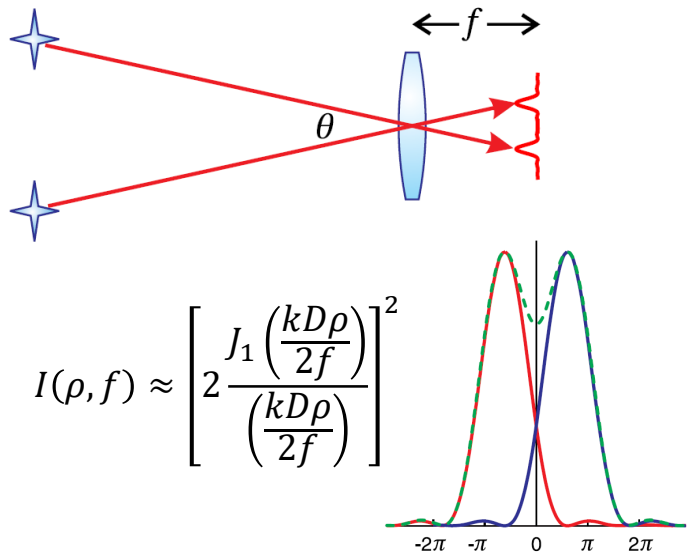
Minimum pro $\frac{\sin x}{x} \rightarrow \pi$

Pro $\frac{J_1(x)}{x} \rightarrow 1,22 \pi$



Rayleighovo kritérium (mez)

pozorování vzdálených objektů
– difrakční obrazec v ohnisku čočky → rozmytí obrazu



Dva předměty lze rozeznat pokud maximum difrakčního obrazce jednoho se nachází alespoň ve vzdálenosti prvního minima difrakčního obrazce druhého předmětu

$$\frac{kD\rho}{2f} = 1.22\pi$$

$$\Rightarrow \theta_{min} \cong \frac{\rho}{f} = \frac{1.22 \lambda}{D}$$



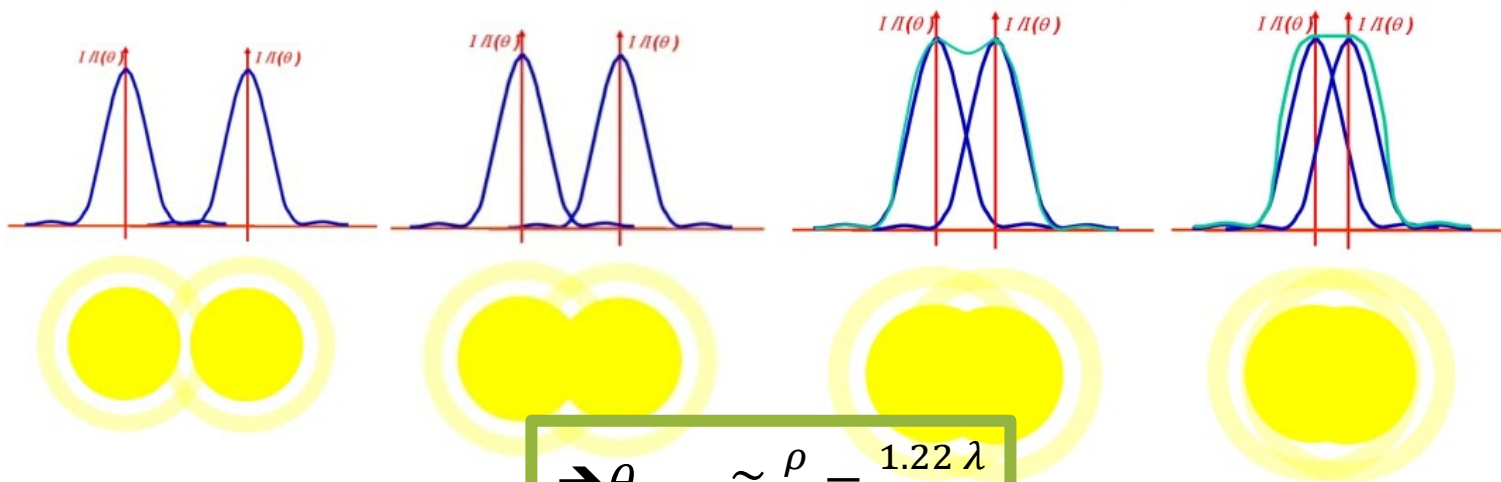
John William Strutt (3rd Baron Rayleigh) (1842–1919, British) was

Rayleighovo kritérium (mez)

pozorování vzdálených objektů
– difrakční obrazec v ohnisku čočky → rozmytí obrazu



John William Strutt (3rd Baron Rayleigh) (1842–1919, British) was



$$\Rightarrow \theta_{min} \cong \frac{\rho}{f} = \frac{1.22 \lambda}{D}$$

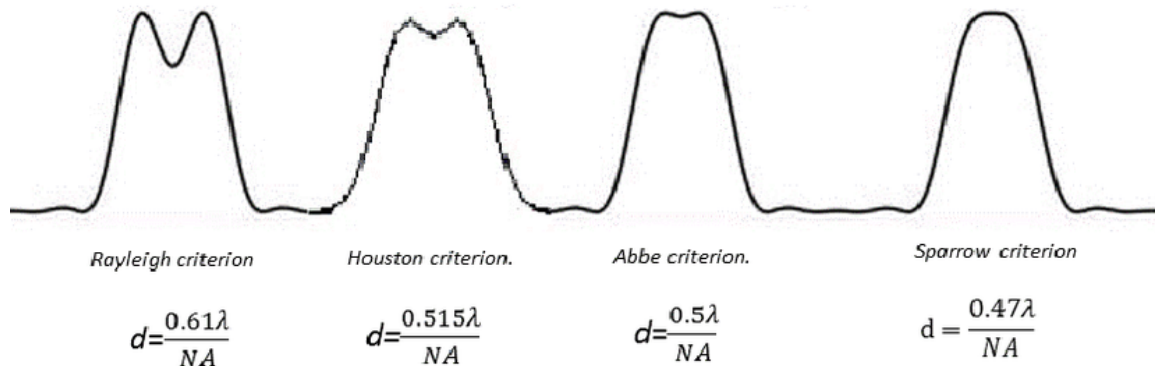
Rayleighovo kritérium (mez)

jsou i další kritéria, která udávají rozlišení menší než Rayleigho mez

- Používáno v moderních metodách fotografie a spektroskopie



John William Strutt (3rd Baron Rayleigh) (1842–1919, British) was



Reference

Peatross, Ware, Physics of Light and Optics, BYU, 2021 Revision.

Jan Franc, skripta Optika, 2021.

Štefan Višňovský, Optika – poznámky k přednášce.

P. Malý, Optika, Karolinum, 2008

<https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/r/rayleigh+criterion>

<https://www.parabolixlight.com/fresnel-lens-and-parabolic-reflectors>

https://cs.wikipedia.org/wiki/Fresnelova_%C4%8Do%C4%8Dka

<https://www.edmundoptics.com/knowledge-center/application-notes/optics/advantages-of-fresnel-lenses/>

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d1/Lentille_de_fresnel.gif

https://en.wikipedia.org/wiki/Zone_plate

<http://zoneplate.lbl.gov/theory>

https://www.researchgate.net/publication/258683913_Hard-X-ray_Zone_Plates_Recent_Progress/figures?lo=1

https://xdb.lbl.gov/Section4/Sec_4-4.html

https://www.nicepng.com/ourpic/u2w7i1i1o0t4t4o0_zone-plate-spacing-fresnel-zone-plate/

Markus Weigand. *Realization of a New Magnetic Scanning X-ray Microscope and Investigation of Landau Structures Under Pulsed Field Excitation*. Cuvillier, E, 2015.

<https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/r/resolution>

https://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens

https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

https://cs.wikipedia.org/wiki/Alfred_Cornu

<http://sdsu-physics.org/physics180/physics180B/Topics/light/phys180Bch24.html>

https://www.researchgate.net/publication/299437011_Comparative_Analysis_of_Path_Loss_Models_in_Mobile_Communications_for_Urban_Case/figures?lo=1

<https://www.optixs.cz/spektrometry-29k/vlaknove-spektrometry-55k/flame-vlaknovy-spektrometr-53p>

By User:Patrick87 - Own work, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=21807350>

By Cmglee - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19051904>

https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_lens

https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_lens#History