NOFY010
Proseminář z optiky

Základy Laserů a Gaussovské svazky

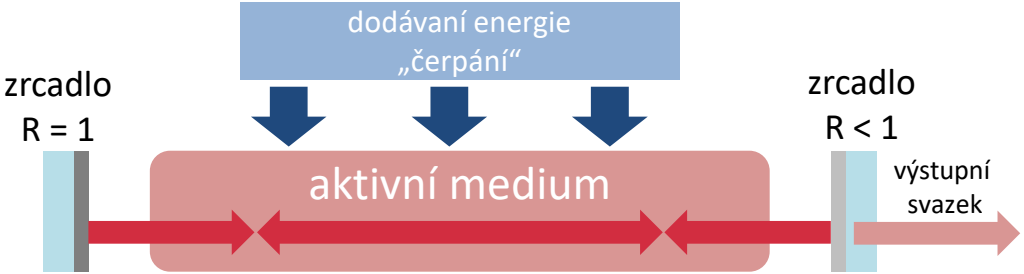
11.1.2024

FACULTY
OF MATHEMATICS
AND PHYSICS
Charles University

Co je LASER?

LASER: Light Ampification by Stimulated Emission of Radiation

Light – elmag. záření od mikrovln po rentgenové záření
MASER → FEL free electron laser

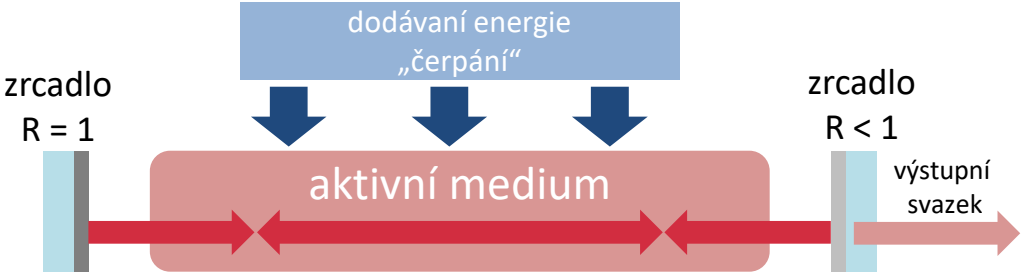


Co je LASER?

LASER: Light Ampification by Stimulated Emission of Radiation

Hlavní části laseru:

1. Aktivní medium : látka (atomy, molekuly) s energetickými hladinami
2. Proces čerpání : dodávání energie a excitace aktivního media
3. Optická zpětná vazba : způsob, aby světlo interagovalo vícekrát s aktivním mediem před výstupem



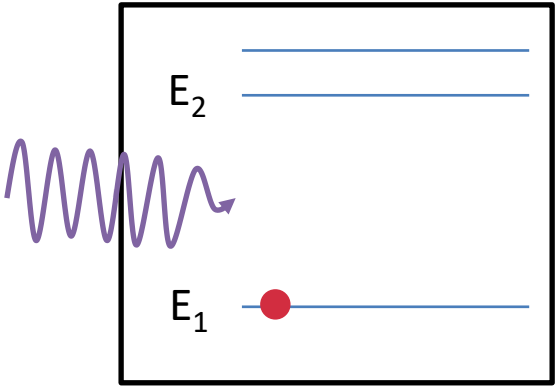
Absorpce a Emise

Světlo: Vlnově-korpuskulární dualismus

foton – částice, ale také vlnový balík, energie $h\nu$

Látka: základní a excitovaný stav

interakce se světlem → absorpce



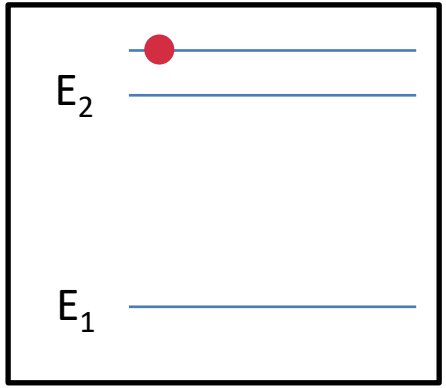
Absorpce a Emise

Světlo: Vlnově-korpuskulární dualismus
foton – částice, ale také vlnový balík, energie $h\nu$

Látka: základní a excitovaný stav

interakce se světlem → Absorpce

(část) energie pohlcena mřížkou
→ nezářivý proces, tepelná energie



Absorpce a Emise

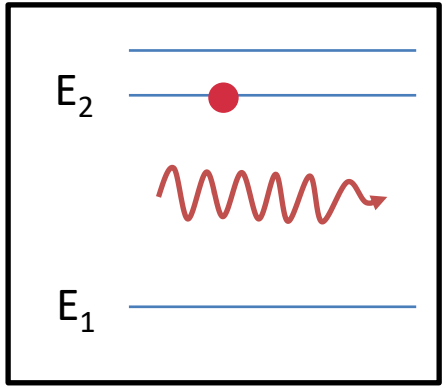
Spontanní emise : přechod zpět do základního stavu

pravděpodobnost → Fermiho zlaté pravidlo

energie rovna energetickému rozdílu hladin

směr šíření světla : nahodilý

$$h\nu = E_2 - E_1$$

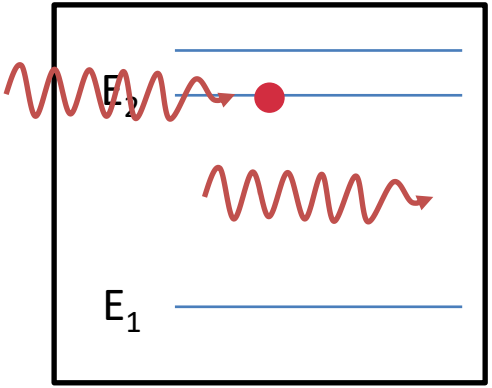


Absorpce a Emise

Stimulovaná emise:

Pokud je stav E2 ozářen zářením s rezonantní frekvencí, ta může „stimulovat" přechod do základního stavu a vyzáření energie

$$h\nu = E_2 - E_1$$



přechodem vyzářená vlna
má stejnou fázi a směr jako vlna dopadající

Absorpce a Emise

Popis dynamiky ve dvouhladinovém systému

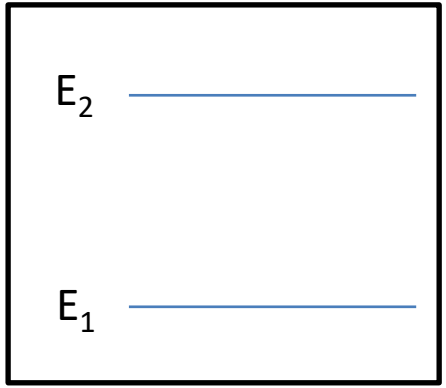
N_{celk} celková koncentrace nosičů

N_i koncentrace ve stavu i (populace)

$$\frac{dN_2}{dt} = -A\,N_2$$

pravděpodobnost spontánní emise je úměrná koncentraci

A je Einsteinův koeficient spontánní emise



$$N_2(t) = N_2(0)\,e^{-At} = N_2(0)\,e^{-\frac{t}{t_r}}$$

Absorpce a Emise

Pro absorpci platí:

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12}\,\rho(\nu)\,N_1$$

B_{12} Einsteinův koeficient absorpce

$\rho(\nu)$ spektrální hustota energie

Intermezzo

Záření černého tělesa:

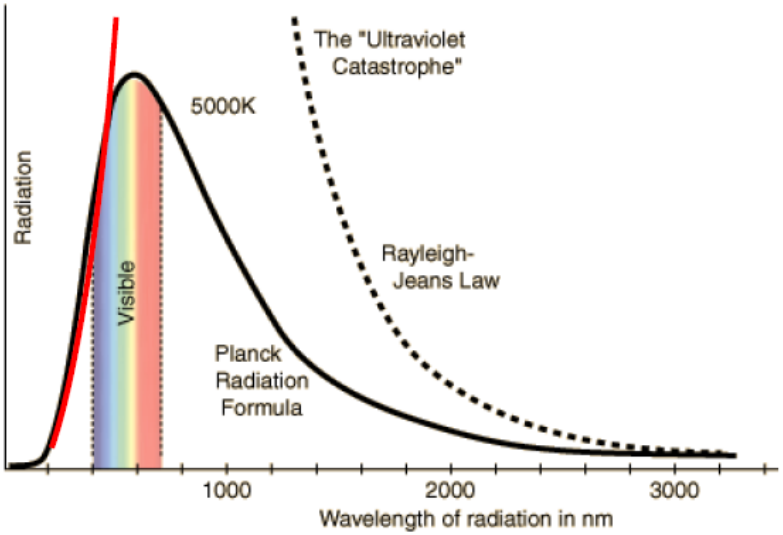
Rayleigh – James $u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$

$u(\nu)$ spektální hustota energie

➔ Energie (v objemu) : $\int u(\nu) d\nu$

Problém: $\int u(\nu) d\nu = \infty$

➔ "ultraviolet catastrophe"



Intermezzo

Řešení : Kvantová mechanika a interakce se zářením (semiklasicky)

Pravděpodobnost přechodu (Fermiho zlaté pravidlo)

při časové perturbaci $h(t)$

$$P_{1\to 2} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{t} e^{i\frac{E_{21}}{\hbar}t'}\, h(t')dt'\right|^2$$

Uvažujme interakci s polem popsaným jako

$$h(t) = 2\,\mathrm{A}_0 \sin \omega t \quad \text{pro } t > 0$$

Intermezzo

Pravděpodobnost přechodu pro takový případ je

$$P_{1\to 2} = \frac{A_0^2}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{21}t'}\left(e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}\right)dt'\right|^2$$

$$= \frac{4A_0^2}{\hbar^2}\left|\left(\frac{e^{i\frac{(\omega_{21}-\omega)}{2}t}sin(\omega_{21}-\omega)t}{2\,(\omega_{21}-\omega)}\right) - \left(\frac{e^{i\frac{(\omega_{21}-\omega)}{2}t}sin(\omega_{21}+\omega)t}{2\,(\omega_{21}+\omega)}\right)\right|$$

Intermezzo

Pravděpodobnost přechodu pro takový případ je

$$P_{1\to 2} = \frac{A_0^2}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_{21}t'}\left(e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}\right)dt'\right|^2$$

$$= \frac{4A_0^2}{\hbar^2}\left|\left(\frac{e^{i\frac{(\omega_{21}-\omega)}{2}t}\sin(\omega_{21}-\omega)t/2}{(\omega_{21}-\omega)}\right) - \boxed{\left(\frac{e^{i\frac{(\omega_{21}-\omega)}{2}t}\sin(\omega_{21}+\omega)t}{2\,(\omega_{21}+\omega)}\right)}\right|^2$$

Aproximace rotující vlny

Rotating wave approximation RWA

Součet frekvencí dá velmi vysokou frekvenci

→tento člen osciluje velmi rychle a přes středování vyjde roven nule

Intermezzo

Pravděpodobnost přechodu se dá aproximovat jako

$$P_{1\to 2} \approx \frac{4A_0^2}{\hbar^2} \cdot \frac{sin^2[(\omega_{21}-\omega)t/2]}{(\omega_{21}-\omega)^2}$$

Je vidět, že platí (pro nedegenerované hladiny)

$$P_{1\to 2} = P_{2\to 1}$$

Musí existovat přechod z excitované hladiny na základní hladinu „aktivovaný" pomocí perturbace světlem ➔ stimulovaná emise

Dvouhladinový systém

Pro dvouhladinový systém tedy platí

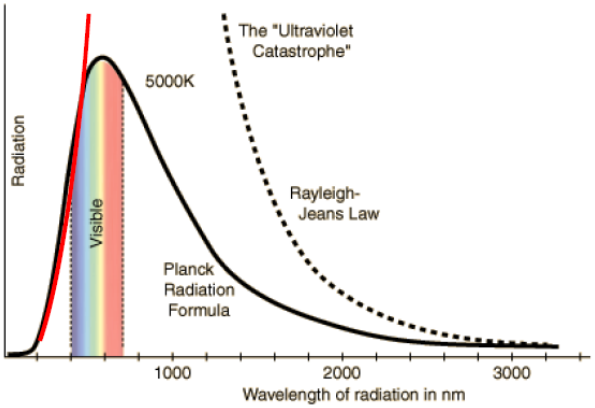
$$\frac{dN_2}{dt} = -AN_2 - B_{21}\,\rho(\nu)\,N_2$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12}\,\rho(\nu)N_2$$

A platí termodynamická rovnováha

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

Pak lze použít pro výpočet $\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$



Dvouhladinový systém

Pro obdélníkové spektrum $\Delta\nu$, kde čelo rovinné vlny urazí dz, platí

$$dI = B_{21}(N_2 - N_1)\frac{I}{c\,\Delta\nu}h\nu\,dz$$

Prostorově tedy dostaneme

$$I(z) = I_0 e^{\left[B_{21}(N_2-N_1)\frac{h\nu}{c\,\Delta\nu}z\right]}$$

Pro $N_2 > N_1$
➔ LASER

Pro nízké teploty platí $N_2 \ll 1$ a tedy světlo je absorbováno podle „očekávání"

$$a_0 = -B_{21}\,N_1\frac{h\nu}{c\,\Delta\nu}$$

Dvouhladinový systém

Obecný, stacionární, případ

$$N_2 - N_1 = -\frac{N_{celk}}{1 + 2B_{21}\tau\rho}$$

A pro absorpci platí

$$a(I) = \frac{a_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \approx a_0 - \frac{a_0}{I_{sat}} I$$

➔ Saturace absorpce

Dvouhladinový systém

Problém : Inverze populace není možná při termální rovnováze

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

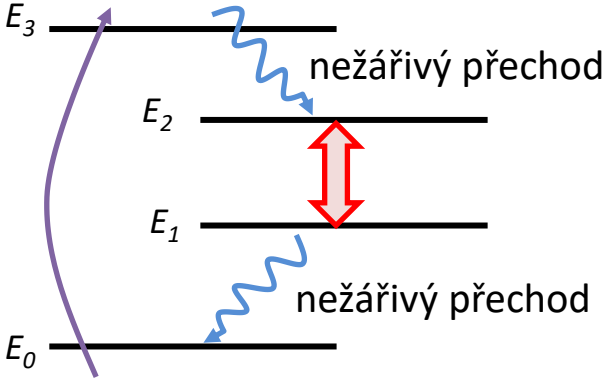
Inverze populace není možná ve stacionárním případě

$$\frac{dN_2}{dt} = -A\,N_2 + B_{21}\rho(\nu)(N_1 - N_2) = 0$$

$$N_2 = \frac{B_{21}\rho(\nu)}{A + B_{21}\rho(\nu)} N_1$$

Tří (čtyř) – hladinový systém

Jak se tedy dá realizovat LASER (resp. inverze populace) ???



Přechod $E_0 \rightarrow E_3$:

čerpání G

Přechod $E_3 \rightarrow E_2$:

předání energie mřížce tepelnou ztrátou

předpoklad: všechny elektrony spadnou okamžitě na E_2 – okamžitá dynamika

Přechod $E_2 \rightarrow E_1$:

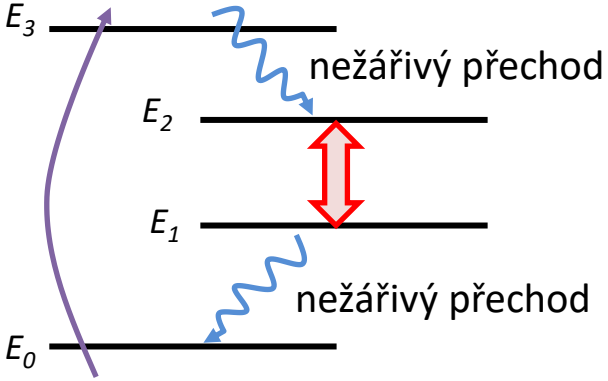
zářivý přechod s parametry B_{21} a A

Přechod $E_1 \rightarrow E_0$:

rychlost přechodu γ_{10}

Tří (čtyř) – hladinový systém

Jak se tedy dá realizovat LASER (resp. inverze populace) ???



$$\frac{dN_2}{dt} = G - A\,N_2 + B_{21}\rho(N_1 - N_2)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = A\,N_2 - B_{21}\rho(N_1 - N_2) - \gamma_{10}N_1$$

$$\frac{dN_0}{dt} = \gamma_{10}N_1 - G$$

Řešení ve stacionárním případě:

$$\Delta N = N_2 - N_1 = \frac{G}{\gamma_{10}}\left[\frac{\gamma_{10} - A}{A + B_{21}\rho}\right]$$

Inverze populace je možná v případě $\gamma_{10} > A$

NUTNÁ PODMÍNKA LASEROVÁNÍ

Inverze populace

Zpět na rovnici pro intenzitu světla závislou na z

$$I(z) = I_0 e^{\left[B_{21}(N_2 - N_1)\frac{h\nu}{c\,\Delta\nu} z\right]}$$

Pro $N_2 = N_1$ světlo prochází beze změny

Pro $N_2 > N_1$ zesílení světla koeficientem zesílení

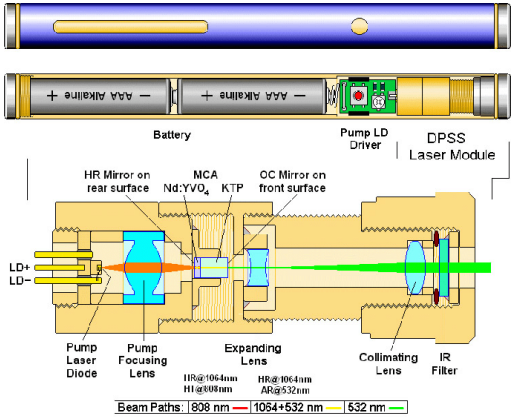
$$g = B_{21}(N_2 - N_1)\frac{h\nu}{c\,\Delta\nu}$$

Podmínka: čerpání – dodávání energie do systému

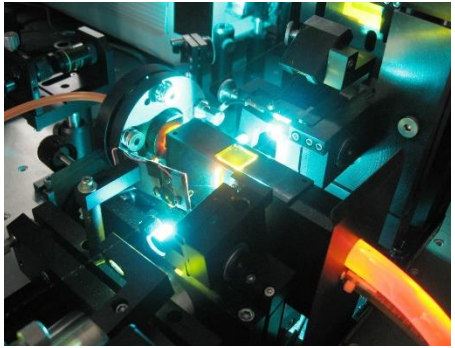
Typy Laserů

Typy čerpání:

Opticky	Nd:YAG, dopované granáty Ti:Sapphire zábleskem nebo optickou diodou
Elektricky	polovodičové kaskádové lasery quantum wells zředěné plyny – excimerové lasery
Chemicky	laserová barviva (rhodamine, etc.)



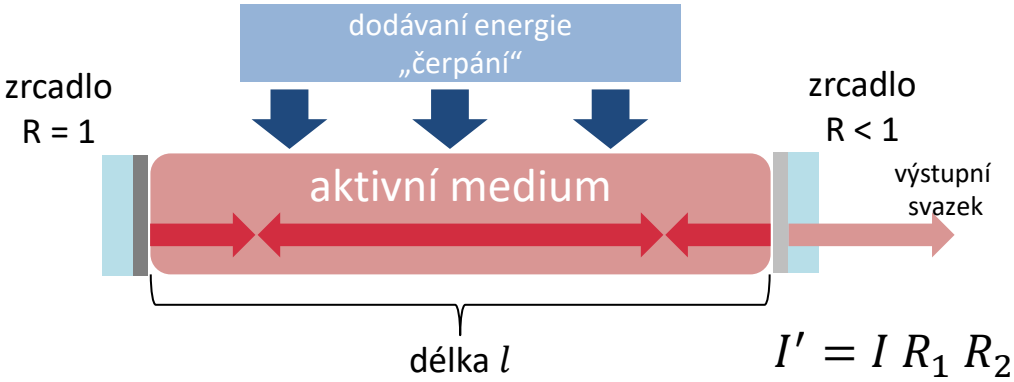
Typical Green DPSS Laser Pointer Using MCA



Rezonátor

Jak zvětšit čerpání ?

Zajistit několikanásobný průchod světla aktivním mediem



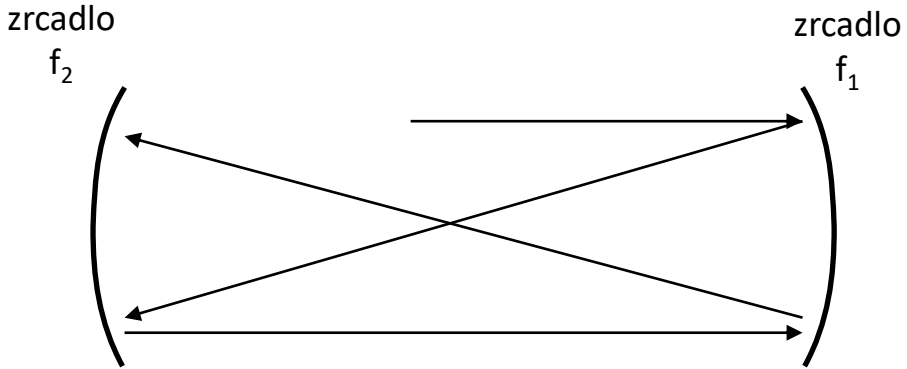
$$I' = I\, R_1\, R_2\, e^{g\,2\,l}$$

Pro zesílení $R_1 R_2 e^{2gl} \geq 1$ ➔ prahová podmínka laseru

Rezonátor

Chceme, aby lehká deviace svazku nevyvedla svazek z rezonátoru

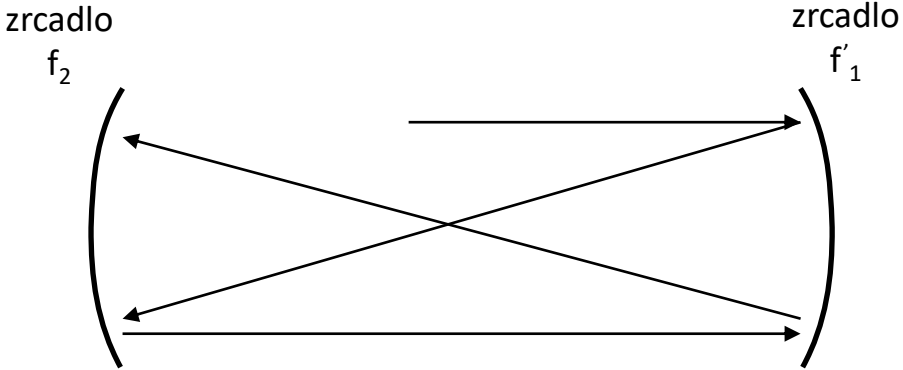
➔ Použití parabolických zrcadel



Rezonátor

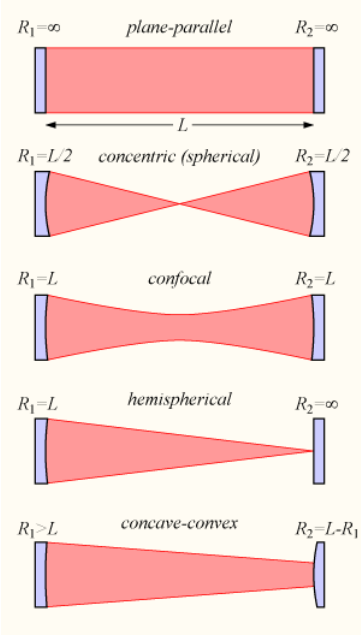
Chceme, aby lehká deviace svazku nevyvedla svazek z rezonátoru

➔ Použití parabolických zrcadel



Přenosová matice

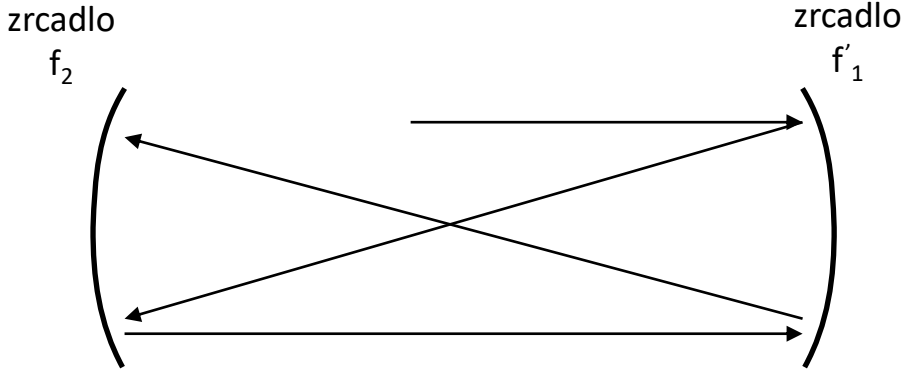
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_1'} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Rezonátor

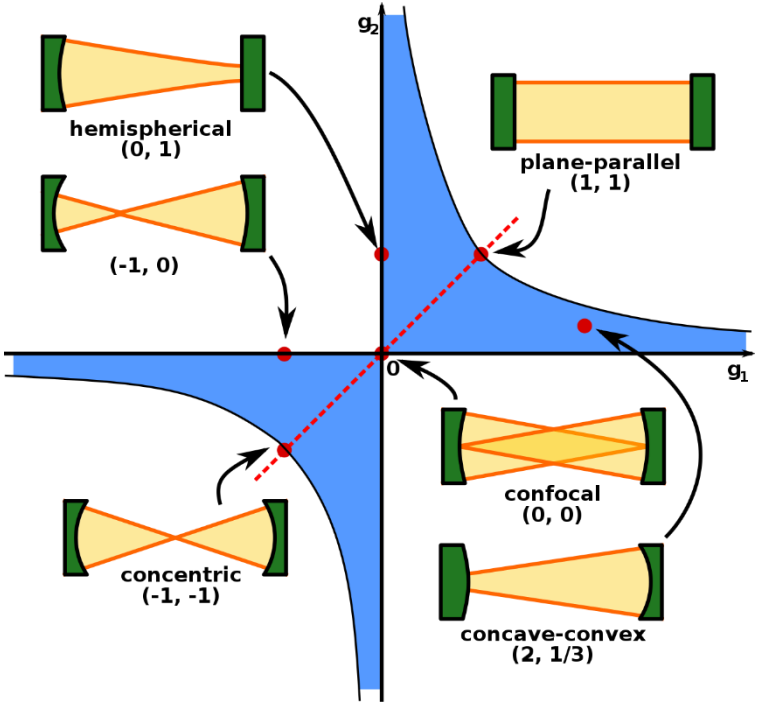
Chceme, aby lehká deviace svazku nevyvedla svazek z rezonátoru

➔ Použití parabolických zrcadel

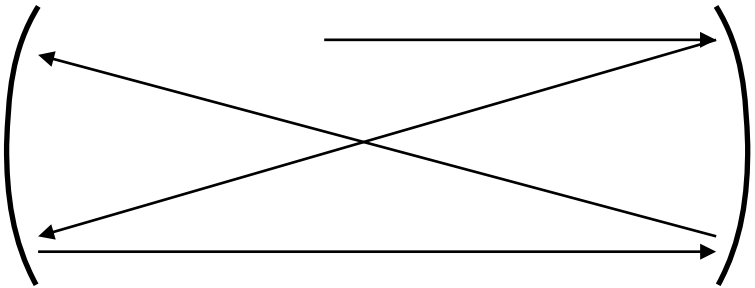


Rovnice stability rezonátoru

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{2f_1'}\right)\left(1 - \frac{L}{2f_2}\right) \leq 1$$



Gaussovský svazek



Pole uvnitř rezonátoru

Jak vypadá elmag. Pole uvnitř rezonátoru?

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\boldsymbol{E}}{dt^2} = 0$$

➔ řešení vlnové rovnice (těžké)

→ Podmínky a předpoklady?

$$\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = \boldsymbol{E} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\Delta \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0$$

➔ Helmholtzova rovnice

Pole uvnitř rezonátoru

Další předpoklad: Pomalu se měnící fáze, vlnoplocha závislá na z

Paraxiální přiblížení $E(x,y,z) = \psi(x,y,z) \cdot e^{-ikz}$

➔ Paraxiální Helmholtzova rovnice

$$\Delta_T \boldsymbol{\psi}(x,y,z) - 2\, i\, k \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = 0$$

Řešení takové rovnice? → vlna s parabolickou vlnoplochou (paraboloid)

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{A}{z}\, e^{-ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}}, x^2 + y^2 = \rho^2, z \gg x, y$$

Pole uvnitř rezonátoru

Komplexní obálka paraboloidní vlny je řešení paraxiální Helmholtzovy rovnice

➔ Posunutá obálka $z \Rightarrow z - \xi$ je také řešení

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{A}{q(z)} e^{-ik\frac{\rho^2}{2q(z)}}, q(z) = z - \xi$$

Je to paraboloidní vlna v $z = \xi$ místo $z = 0$

Co se stane, pokud bude ξ komplexní číslo a/nebo čistě imaginární?

Pole uvnitř rezonátoru

Komplexní obálka

Rayleighova vzdálenost

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{A}}{q(z)} e^{-ik\frac{\rho^2}{2q(z)}}, q(z) = z + iz_0$$

Pro oddělení reálné a imaginární části zavedeme

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}$$

Proč?

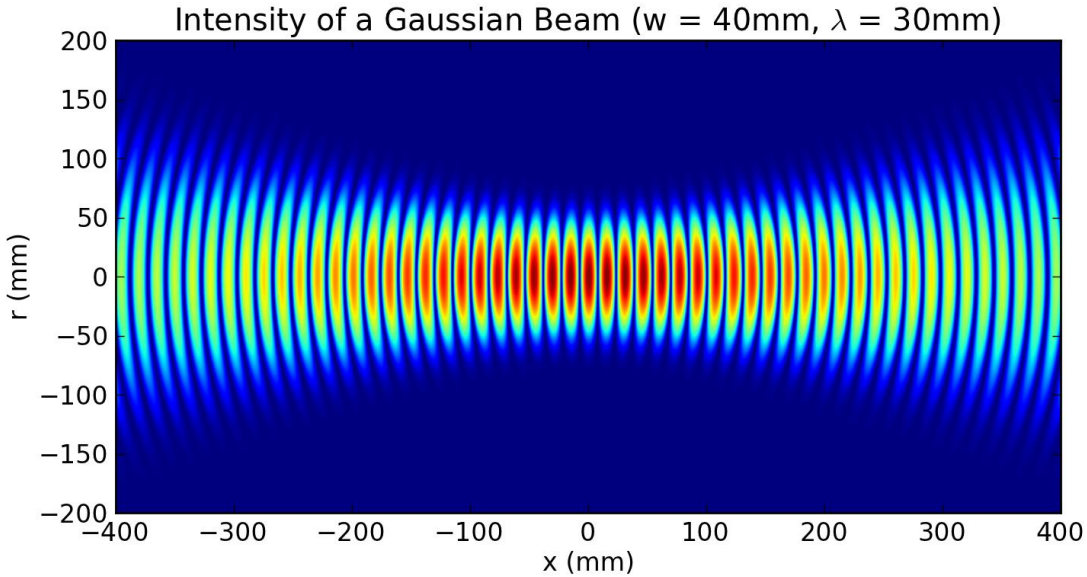
Gaussovský svazek

$$\rightarrow \qquad \psi(\boldsymbol{r}) = A_0 \cdot \frac{W_0}{W(z)} \cdot \; e^{-\frac{\rho^2}{W^2(z)}} \cdot \; e^{\left[-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right]}$$

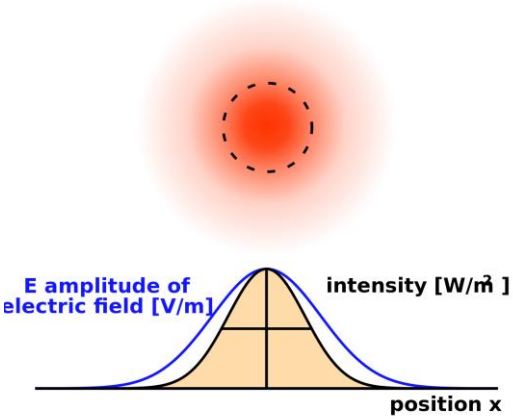
$A_0 = \frac{A}{i\, z_0}$	konstanta, dána okrajovými podmínkami
$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$	minimální hodnota šířky svazku
$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$	šířka svazku
$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$	poloměr křivosti vlnoplochy
$\zeta(z) = \arctan\frac{z}{z_0}$	dodatečná fáze svazku (dána fázovou rychlostí světla) – Gouy phase

Gaussovský svazek

$$\rightarrow \quad \psi(\boldsymbol{r}) = A_0 \cdot \frac{W_0}{W(z)} \cdot e^{-\frac{\rho^2}{W^2(z)}} \cdot e^{\left[-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right]}$$



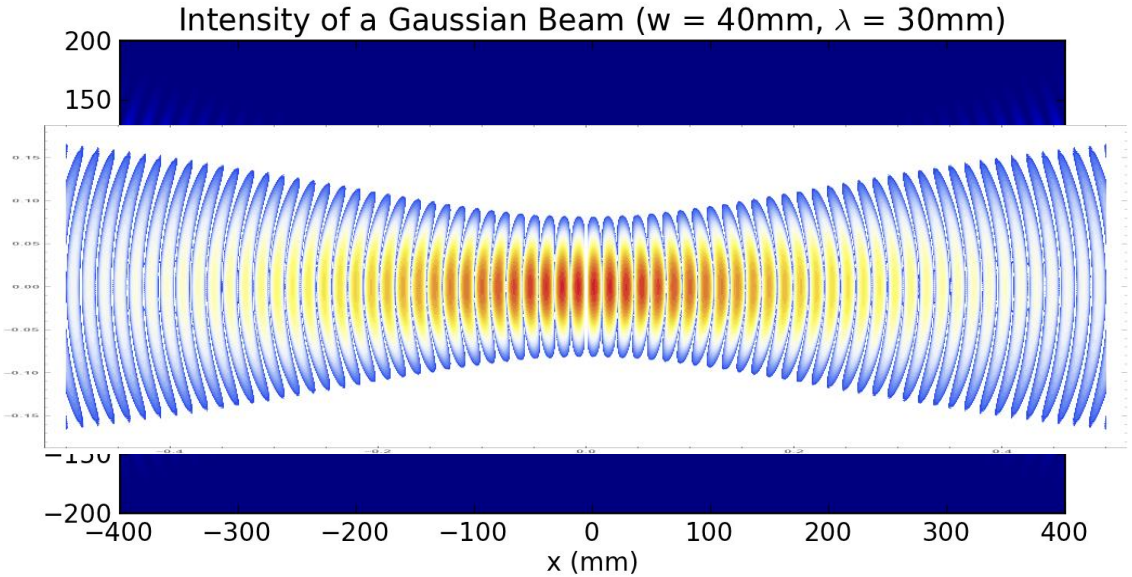
By Etoombs at en.wikipedia, CC BY 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18035223



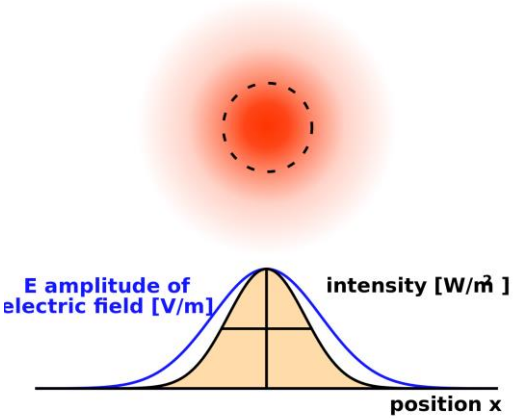
By FDominec - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3017519

Gaussovský svazek

$$\rightarrow \quad \psi(\boldsymbol{r}) = A_0 \cdot \frac{W_0}{W(z)} \cdot e^{-\frac{\rho^2}{W^2(z)}} \cdot e^{\left[-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right]}$$



By Etoombs at en.wikipedia, CC BY 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18035223



By FDominec - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3017519

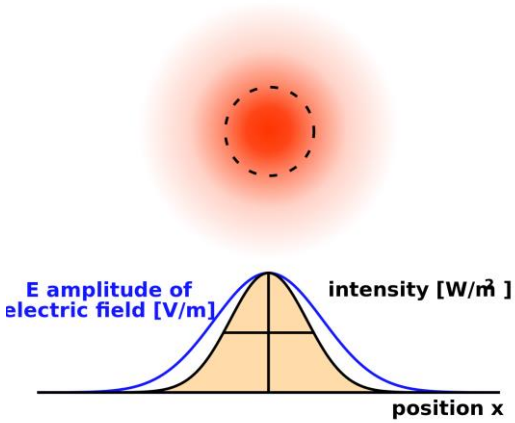
Vlastnosti Gaussovského svazku

Intenzita

$$I(z) \sim |E(r)|^2$$

je závislá na z a na vzdálenosti od osy $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

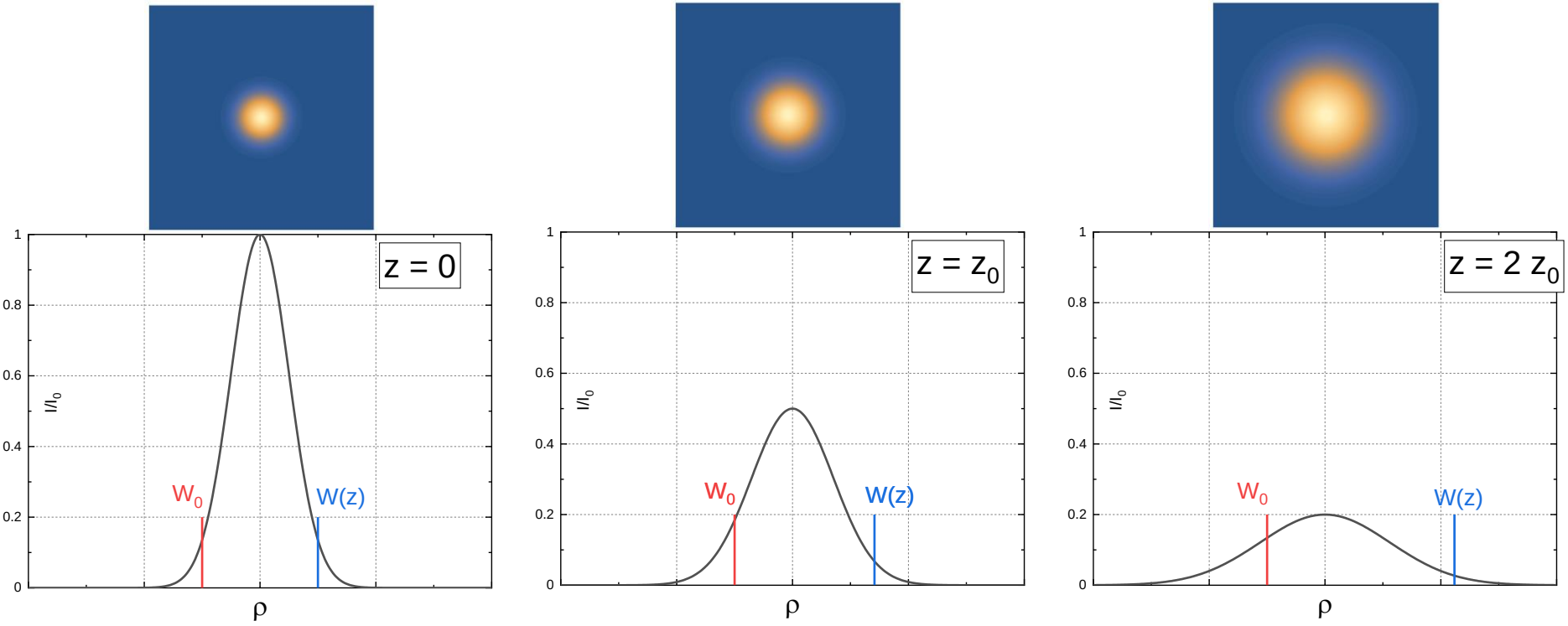
$$I(\rho, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)}\right]^2 e^{\left[-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right]}$$



By FDominec - Own work, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3017519

Nejvyšší hodnota na ose z a klesá s vyšší ρ

Vlastnosti Gaussovského svazku



Vlastnosti Gaussovského svazku

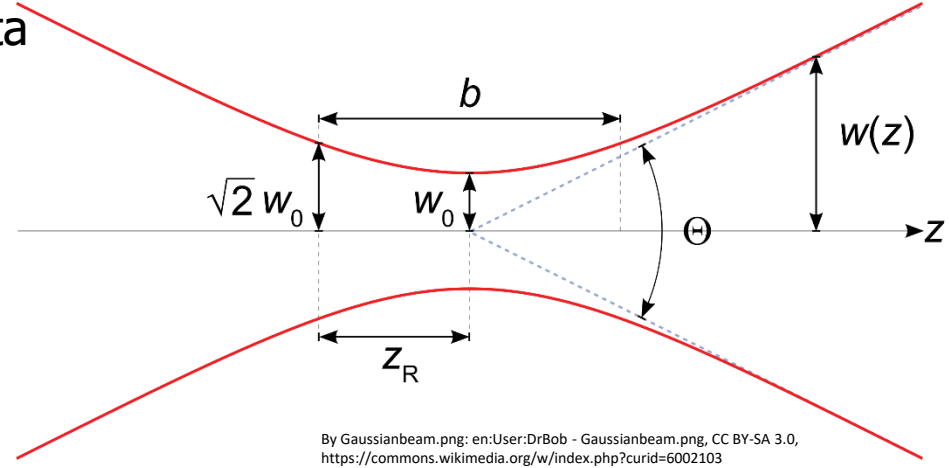
Poloměr svazku

V radiální vzdálenosti $\rho = W(z)$ poklesne výkon na $1/e^2$ hodnoty

V rovině $z = 0$ → minimální hodnota

Maximální zúžení

W_0 je poloměr svazku (velikost stopy)



Vlastnosti Gaussovského svazku

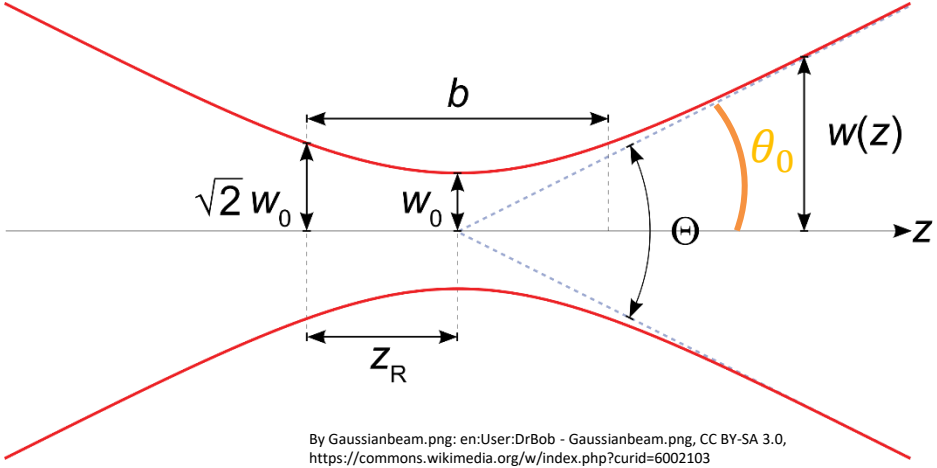
Poloměr svazku

Pro $z \gg z_0$ dostaneme lineární vztah

$$W(z) \approx \frac{W_0}{z_0} z = \theta_0 z$$

A můžeme také psát

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi W_0}$$



Vlastnosti Gaussovského svazku

Poloměr svazku

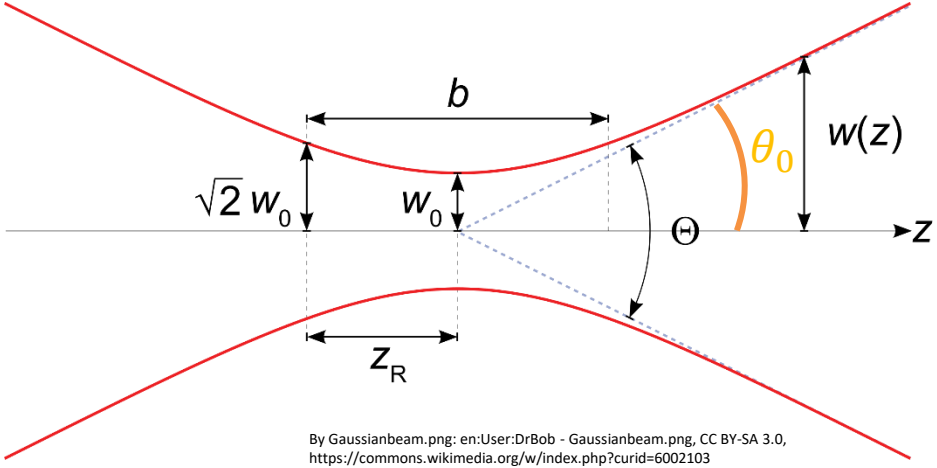
Difrakční limit !!
Neexistuje „ohnisko“, pouze W_0

Pro $z \gg z_0$ dostaneme lineární vztah

$$W(z) \approx \frac{W_0}{z_0} z = \theta_0 z$$

A můžeme také psát

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi W_0}$$



By Gaussianbeam.png: en:User:DrBob - Gaussianbeam.png, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6002103

Průchod optickými prvky

K čemu jsou Gaussovské svazky dobré?

Jsou svazky vycházející z laseru
Mají minimální možný průměr → „ohnisko"

Jak procházejí optickými prvky?

➔ to už jsme napočítali (přednáška Difrakce II, průchod čočkou),
➔ změna fáze

$$kz + k\frac{\rho^2}{2R} - \xi - k\frac{\rho^2}{2f} = kz + k\frac{\rho^2}{2R'} - \xi$$

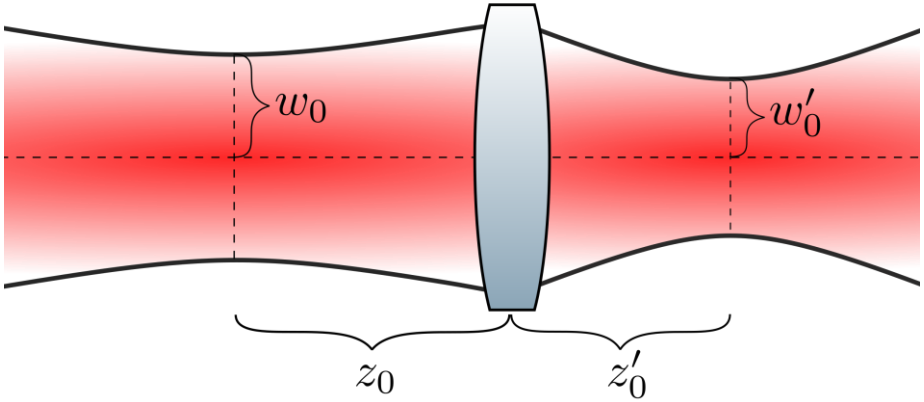
Průchod optickými prvky

K čemu jsou Gaussovské svazky dobré?

Jsou svazky vycházející z laseru
Mají minimální možný průměr → „ohnisko"

Jak procházejí optickými prvky?

➔ Navazování Gaussovského svazku



TEM módy

Gassovský svazek jako jediné (jedinečné) řešení paraxiální HR?

Ne, řešení je celá třída:
Hermitovské-Gaussovské módy

l a m – mody
(TEM00 – Gaussovský svazek)

$$E(x,y,z) = u_l(x,z)\, u_m(y,z)\, e^{-ikz}$$

$$u_J(x,z) = \left(\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{2^J J!\, w_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q_0}{q(z)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{q^*(z)}{q(z)}\right)^{\frac{J}{2}} H_J\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) e^{-i\frac{kx^2}{2q(z)}}$$

Hermitovský polynom

TEM módy

Gassovský svazek jako jediné (jedinečné) řešení paraxiální HR?

Řešení s kruhovou symetrii – válcové souřadnice

Laguerre-Gaussovské módy

$$u_{lp}(r,\phi,z) = C_{lp}^{LG}\frac{1}{w(z)}\left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)}\right)^{|l|} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) e^{-ik\frac{r^2}{2R(z)}} e^{-il\phi} e^{i\psi(z)}$$

TEM módy