Proseminář z Optiky

Difrakce I – Difrakční integrál, Rayleighovo kritérium

18.11.2021

FACULTY
OF MATHEMATICS
AND PHYSICS
Charles University

Popis světla

Christian Huygens

- 1690 – Traité de la Lumière
  - vlnová teorie
  - předpoklad konečné rychlosti světla

- hlavní problém: geometrická optika
- světlo – vlnoplochy, každý bod prostoru jako zdroj sférické vlny

•ALE: šíření éterem + longitudinální vlny

Isaac Newton

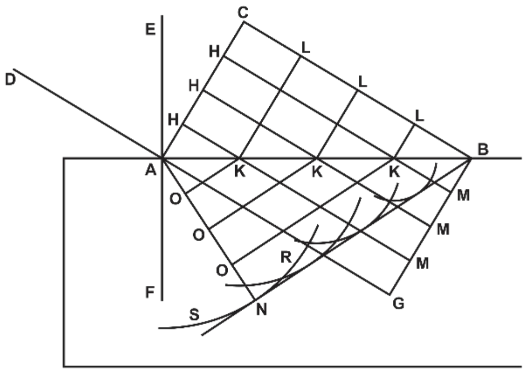
- 1670s – teorie barev
- – disperze
- 1675 – Hypotesis of Light
- 1704 - Opticks
- světlo - částice pohybující se v éteru, v materiálu odraz a lom závislý na hustotě

ALE: interakce světla s látkou - alchymie

Popis světla

Christian Huygens

- 1690 – Traité de la Lumière
    - vlnová teorie
    - předpoklad konečné rychlosti světla



Isaac Newton

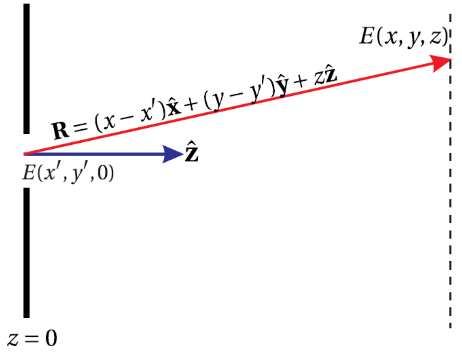
- 1670s – teorie barev
- – disperze
- 1675 – Hypotesis of Light
- 1704 - Opticks
- světlo - částice pohybující se v éteru, v materiálu odraz a lom závislý na hustotě

ALE: interakce světla s látkou - alchymie

Skalární popis difrakce

Fresnel – Kirchhoffův difrakční integrál

$$E(x,y,z) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{apertura} E(x',y',0) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \left(\frac{1+\cos(R,z)}{2}\right) da$$

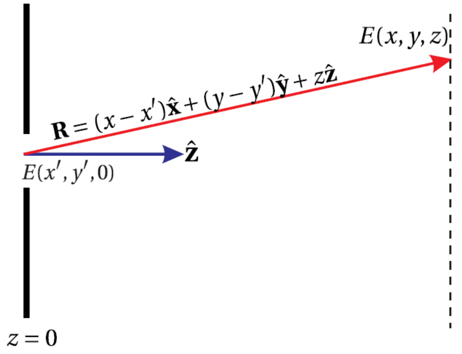


Skalární popis difrakce

Fresnel – Kirchhoffův difrakční integrál

$$E(x,y,z) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{apertura} E(x',y',0) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \left(\frac{1+\cos(R,z)}{2}\right) da$$

pole E je možné zjistit pomocí znalosti pole v apertuře

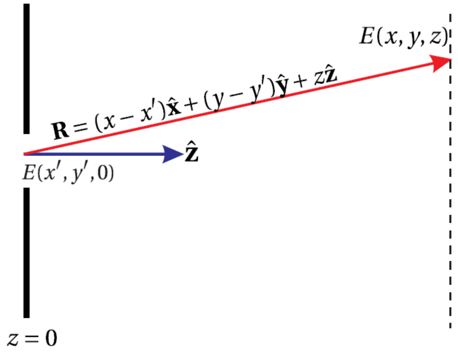


Skalární popis difrakce

Fresnel – Kirchhoffův difrakční integrál

$$E(x,y,z) = -\frac{i}{\lambda} \iint\limits_{apertura} E(x',y',0) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \left(\frac{1+\cos(R,z)}{2}\right) da$$

pole *E* je možné zjistit pomocí znalosti pole v apertuře



Faktor $-\frac{i}{\lambda}$ je nutný i pro správné jednotky při výpočtu

Směrový faktor – aby se vlna nešířila zpět

Skalární popis difrakce

Máme dán popis pole $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot e^{-i\omega t}$,

to splňuje Helmholzovu rovnici $\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + k^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$

nyní budeme ignorovat vektorovost a budeme počítat pouze s $E(\boldsymbol{r})$

Budeme mít ale relaci spojující tyto dvě veličiny

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \times \nabla E(\boldsymbol{r})$$

(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Existují Greenův teorém (odvodíte na matematické analýze):

$$\oint_S \left[U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right] da = \boxed{\int_V [U\,\nabla^2 V - V\,\nabla^2 U]dV} = 0$$

Dosadíme specifické funkce

$$U = \frac{e^{ikr}}{r}$$
$$V = E(\boldsymbol{r})$$

(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Dosadíme specifické funkce

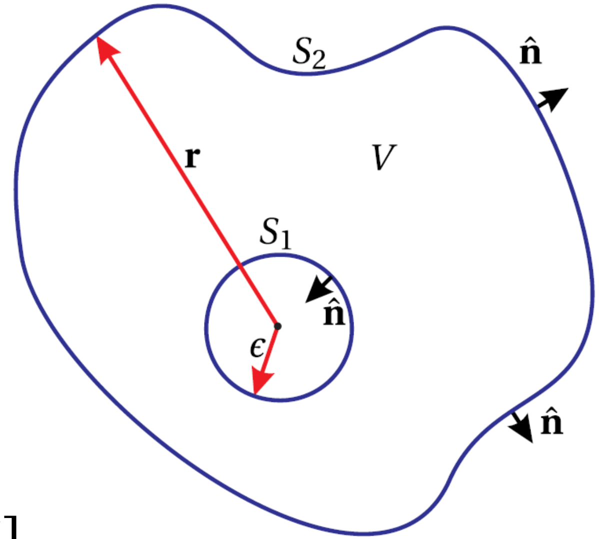
$$U = \frac{e^{ikr}}{r}$$
$$V = E(\boldsymbol{r})$$

A dostaneme

$$\oint_S \left[E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} \right] da = 0$$

(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Nyní bez újmy na obecnosti vezmeme plochu skládající se ze dvou částí S_1 a S_2

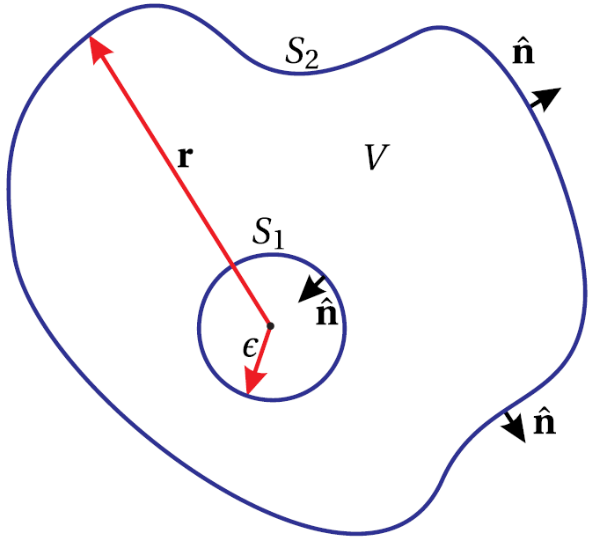


Integrál se rozkouskujeme do dvou částí

$$\oint_{S_2} \left[E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} \right] ds_2 = - \oint_{S_1} \left[E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} \right] ds_1$$

(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Nyní bez újmy na obecnosti vezmeme plochu skládající se ze dvou částí S_1 a S_2

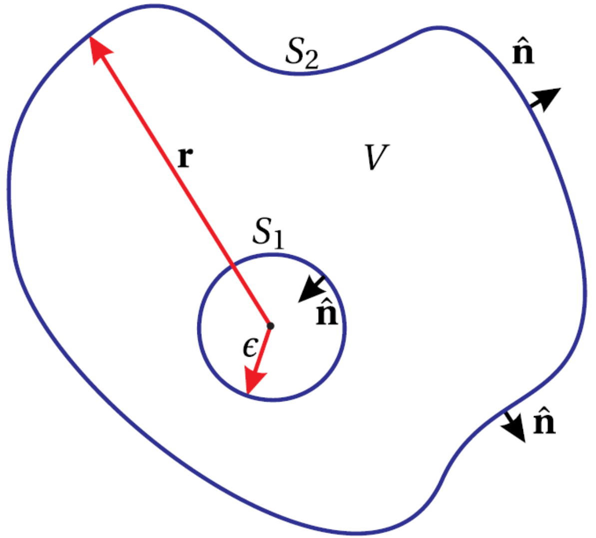


Integrál se rozkouskujeme do dvou částí

A pošleme $\epsilon \to 0$

(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Nyní bez újmy na obecnosti vezmeme plochu skládající se ze dvou částí S_1 a S_2



Integrál se rozkouskujeme do dvou částí

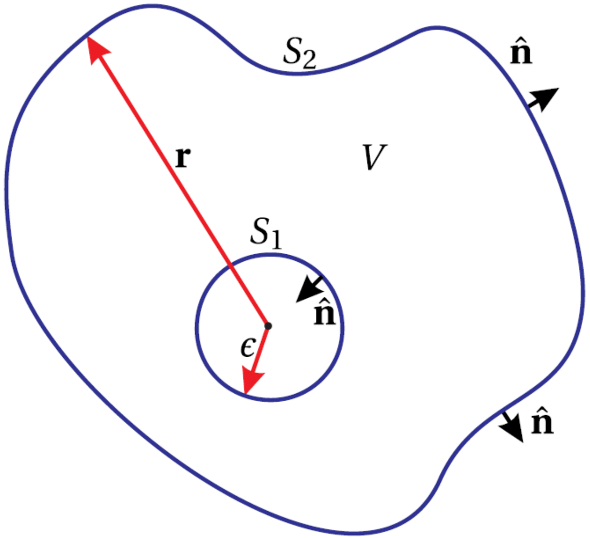
A pošleme $\epsilon \to 0$

$$E(0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_2} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right] ds_2$$

FACULTY
OF MATHEMATICS
AND PHYSICS
Charles University

(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

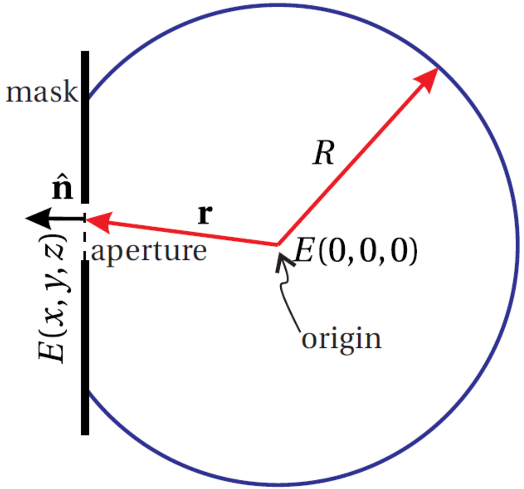
$$E(0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_2} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right] ds_2$$



Pokud tedy známe funkci vpravo, můžeme vypočítat podobu pole v počátku.

(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Opět bez újmy na obecnosti vezměme tuto plochu



Pro $R \to \infty$

všude kromě masky funkce v integrálu vymizí

Na masce předpokládejme $E = 0$ a $\frac{\partial E}{\partial n} = 0$

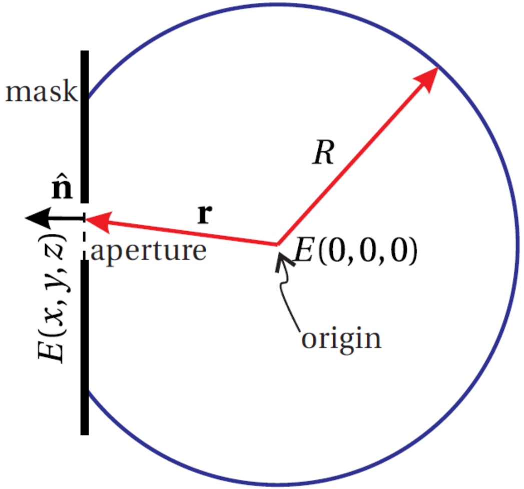
(Rychlé) Odvození Fresnelova integrálu

Dostaneme tedy

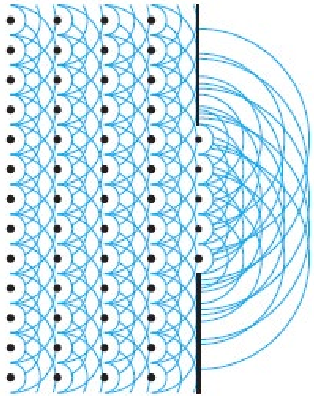
$$E(0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{apertura} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right] da$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \rightarrow \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr} \cos(\boldsymbol{r}, \widehat{\boldsymbol{n}}) \xrightarrow[r \gg \lambda]{} \frac{ike^{ikr}}{r} \cos(\boldsymbol{r}, \widehat{\boldsymbol{n}})$$

$$E(0) = \frac{-i}{\lambda} \iint\limits_{apertura} E \frac{e^{ikr}}{r} \left[\frac{1 + \cos(\boldsymbol{r}, \widehat{\boldsymbol{n}})}{2} \right] da$$

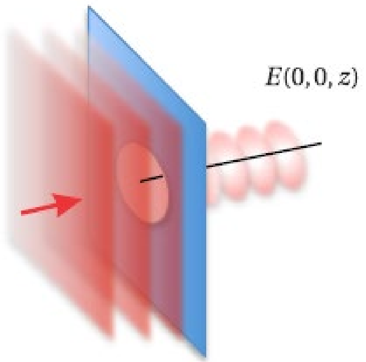


Difrakce



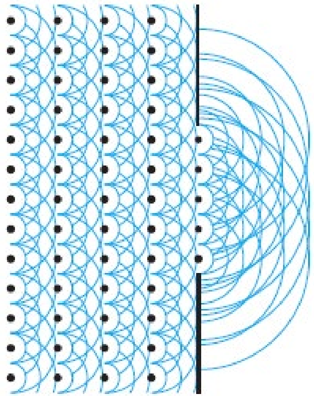
Použití Huygensova principu
a vypočítání podoby pole při znalosti pole v apertuře

Jak vypadá pole na ose z za kruhovou aperturou?



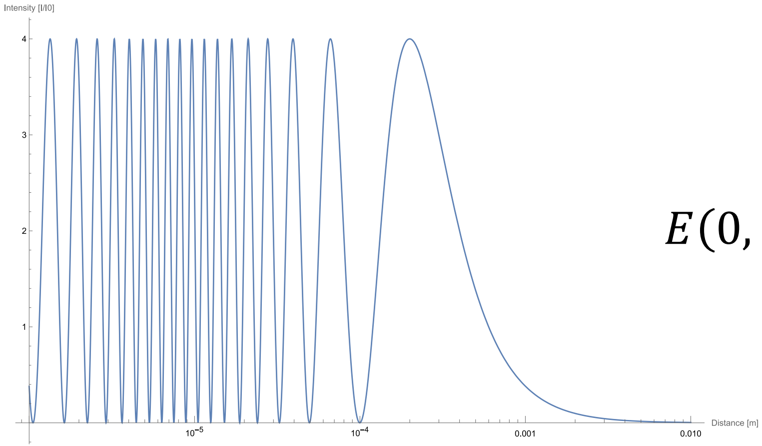
$$E(0,0,z) = -\frac{i\,E_0}{\lambda}\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\frac{D}{2}} \frac{e^{ik\sqrt{\rho'^2+z^2}}}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}\rho' d\rho'$$

Difrakce



Použití Huygensova principu (https://www.walter-fendt.de/html5/phen/refractionhuygens_en.htm)
a vypočítání podoby pole při znalosti pole v apertuře

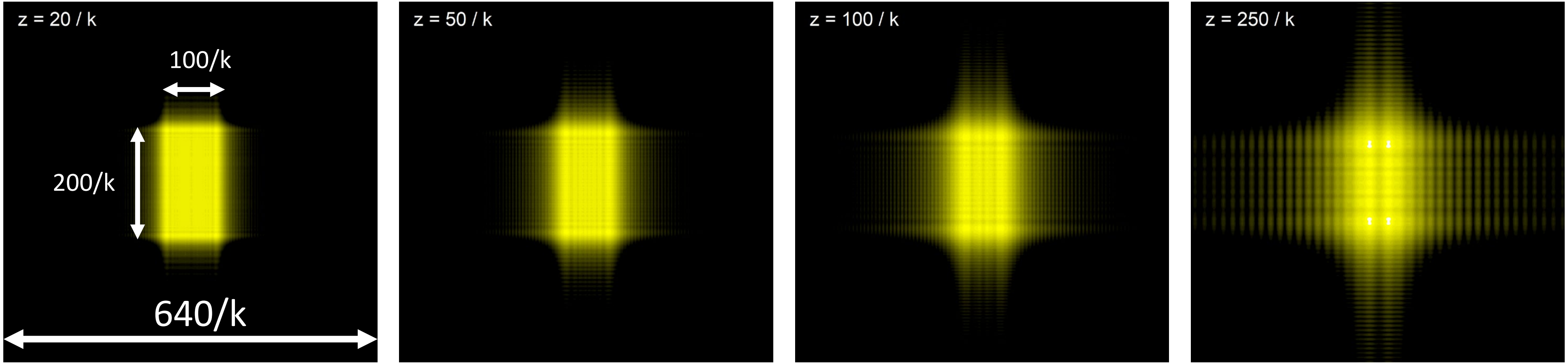
Jak vypadá pole na ose z za kruhovou aperturou?



$$E(0,0,z) = 2\,|E_0|^2\left[1-\cos\left(k\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+z^2}-kz\right)\right]$$

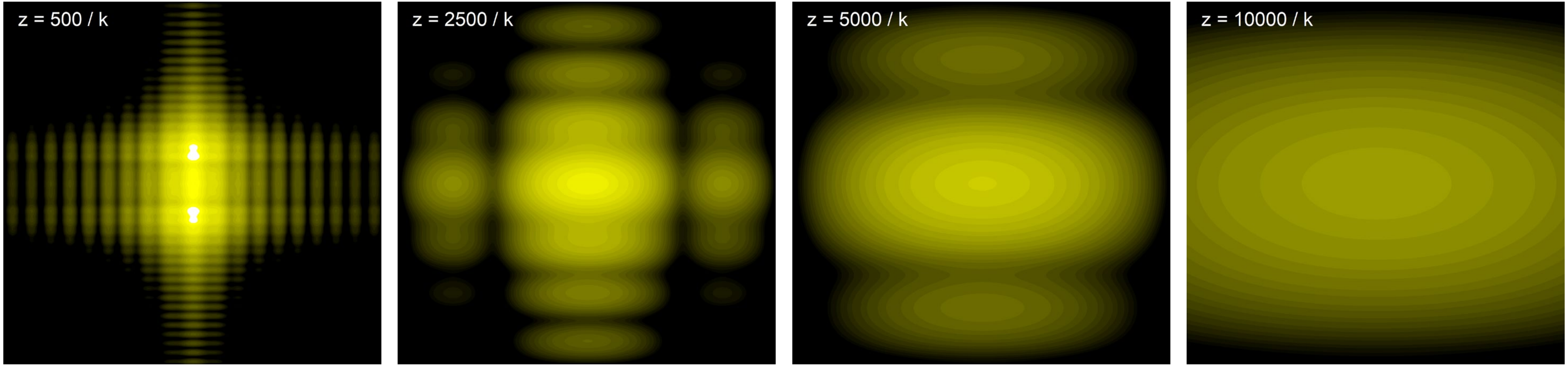
Difrakce

Difrakce na obdélníkové štěrbině – Fresnelův integrál – numerická integrace



Difrakce

Difrakce na obdélníkové štěrbině – Fresnelův integrál – numerická integrace



Frauenhoferova difrakce

Difrakce v dalekém poli

$$e^{\frac{ik}{2z}\left(x'^2+y'^2\right)} \cong 1$$

$$E(x,y,z) = -\frac{i}{\lambda}\frac{e^{ikz}}{z}\, e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \iint\limits_{apertura} E(x',y',0)e^{-i\frac{k}{z}(x\,x'+y\,y')}dx'dy'$$

Splněno pro

$$z \gg \frac{k}{2}(poloměr\ apertury)^2$$

Pro naše výpočty $z \gg \frac{k}{2}\frac{dx}{2}\frac{dy}{2} = \frac{2500}{\mathrm{k}}$

Frauenhoferova difrakce na štěrbině

Difrakce v dalekém poli

$$E(x,y,z) = -\frac{i}{\lambda}\frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E(x',y',0)\, e^{-\frac{ik}{z}(xx'+yy')dx'}$$

$$E(x,y,z) = C \cdot E_0 \left[-\frac{z}{ikx} e^{-\frac{ikx\,x'}{z}}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cong \frac{2z\,a}{kx\,a} \sin\left(\frac{ka\,x}{2z}\right)$$

$$E(x,y,z) \cong a \cdot \frac{\sin\left(\frac{kax}{2z}\right)}{\left(\frac{kax}{2z}\right)} = a \cdot sinc\left(\frac{kax}{2z}\right)$$

Frauenhoferova difrakce na 2D štěrbině

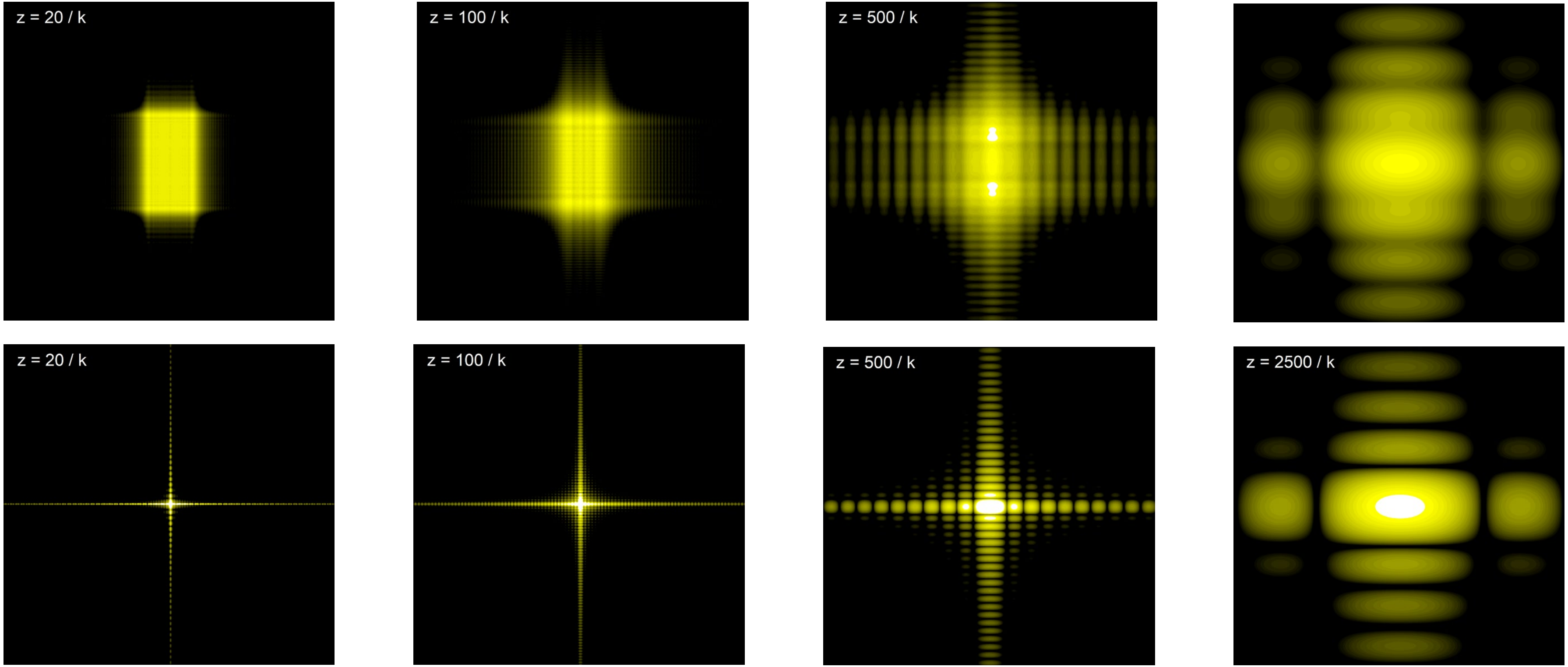
Difrakce v dalekém poli

$$E(x,y,z) = -\frac{i}{\lambda}\frac{e^{ikz}}{z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E(x',y',0)\, e^{-\frac{ik}{z}xx'} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-\frac{ik}{z}yy'} dy'$$

$$E(x,y,z) \cong \frac{2z\, a}{kx\, a} \sin\left(\frac{ka\, x}{2z}\right) \cdot \frac{2z\, b}{ky\, b} \sin\left(\frac{kb\, y}{2z}\right)$$

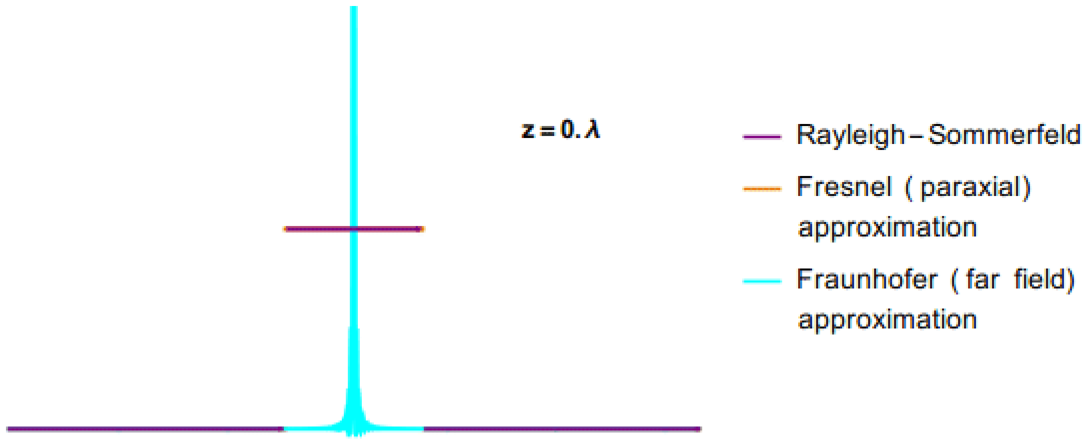
$$E(x,y,z) \cong ab \cdot sinc\left(\frac{kax}{2z}\right) \cdot sinc\left(\frac{kby}{2z}\right)$$

Difrakce



Difrakce

Porovnání difrakce při různých aproximacích



Difrakce na kruhové apertuře

Předpokládáme kruhovou symetrii apertury a tedy použijeme válcové souřadnice

$$x = \rho \cdot \cos\phi \quad x' = \rho' \cdot \cos\phi'$$

$$y = \rho \cdot \sin\phi \quad y' = \rho' \cdot \sin\phi'$$

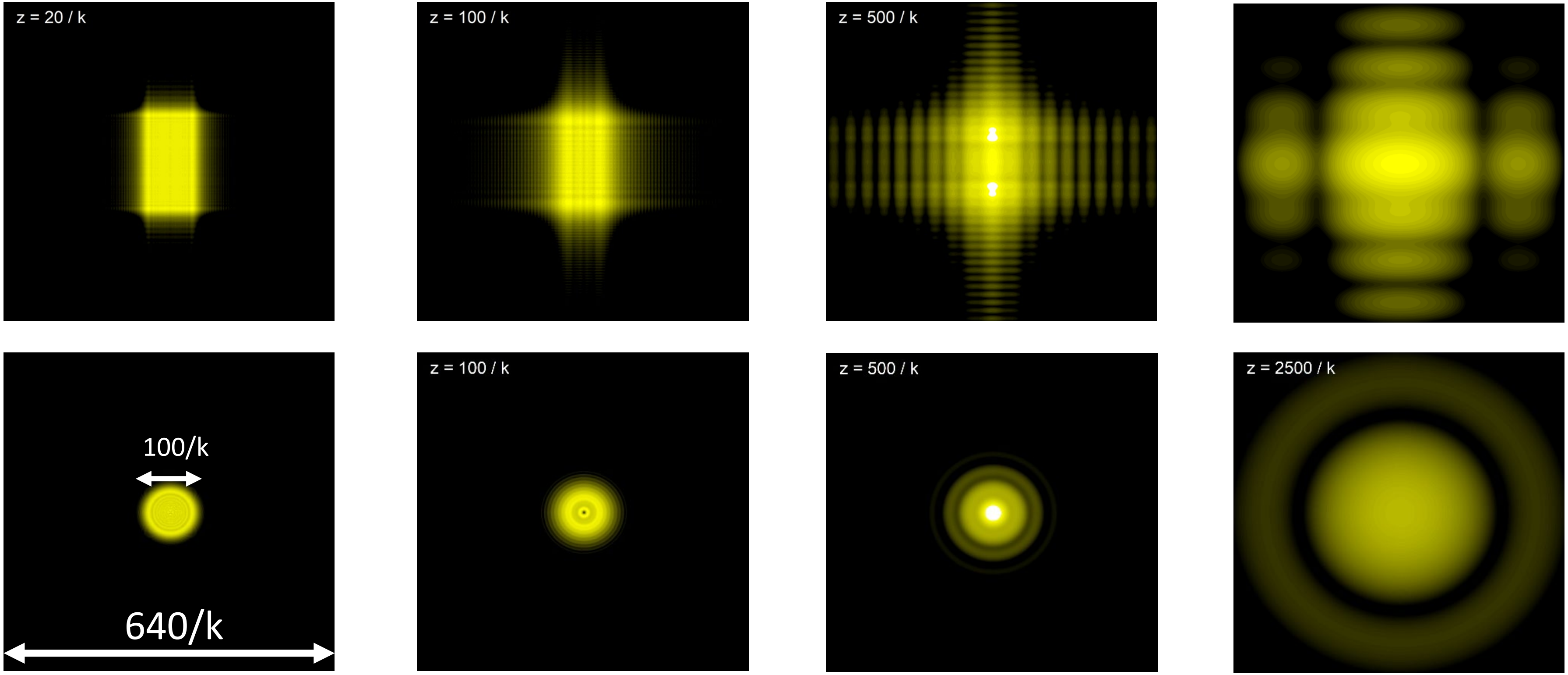
Difrakční integrál (ve Fresnelově aproximace) bude mít podobu

$$E(\rho, z) = -\frac{i}{\lambda}\frac{e^{ikz}}{z}\, e^{\frac{ik\rho^2}{2z}} \int_0^{2\pi}\int_0^R E(\rho', 0)\, e^{\frac{ik\rho'^2}{2z}}\, e^{-\frac{ik(\rho\rho'\cos\phi\cos\phi' + \rho\rho'\sin\phi\sin\phi')}{z}} \rho' d\rho' d\phi'$$

Po úpravě

$$E(\rho, z) = -\frac{2\pi\, i}{\lambda}\frac{e^{ikz}}{z}\, e^{\frac{ik\rho^2}{2z}} \int_0^R E(\rho', 0)\, e^{\frac{ik\rho'^2}{2z}} J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right) \rho' d\rho'$$

Difrakce



Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

Ve Frauenhoferově aproximaci

$$E(\rho, z) = -\frac{2\pi\, i}{\lambda}\frac{e^{ikz}}{z}\, e^{\frac{ik\rho^2}{2z}} \int_0^R E(\rho', 0)\, J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{z}\right)\rho' d\rho'$$

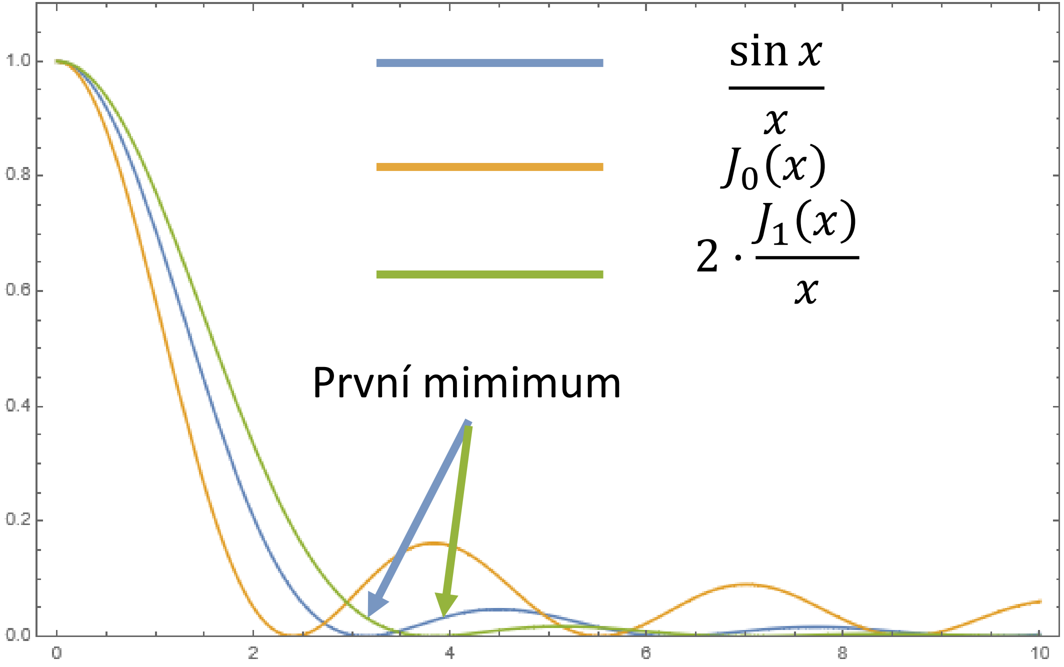
Využití tabelovaného integrálu (Hankelova transformace)

$$E(\rho, z) = -\frac{2\pi\, i}{\lambda}\frac{e^{ikz}}{z}\, e^{\frac{ik\rho^2}{2z}} \frac{Rz}{k\rho} J_1\left(\frac{Rk\rho}{z}\right)$$

$$I(\rho, z) \approx \left(2 \cdot \frac{J_1\left(\frac{Rk\rho}{z}\right)}{\left(\frac{Rk\rho}{z}\right)}\right)^2$$

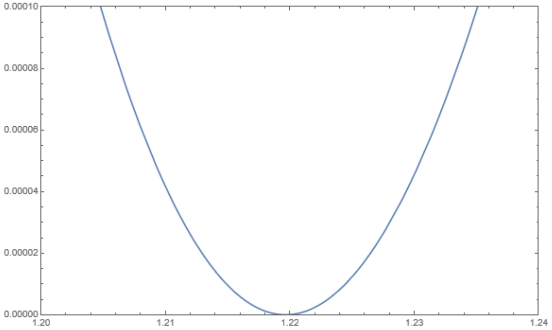
FACULTY
OF MATHEMATICS
AND PHYSICS
Charles University

Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře



Minimum pro $\frac{\sin x}{x} \rightarrow \pi$

Pro $\frac{J_1(x)}{x} \rightarrow 1{,}22\,\pi$



Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

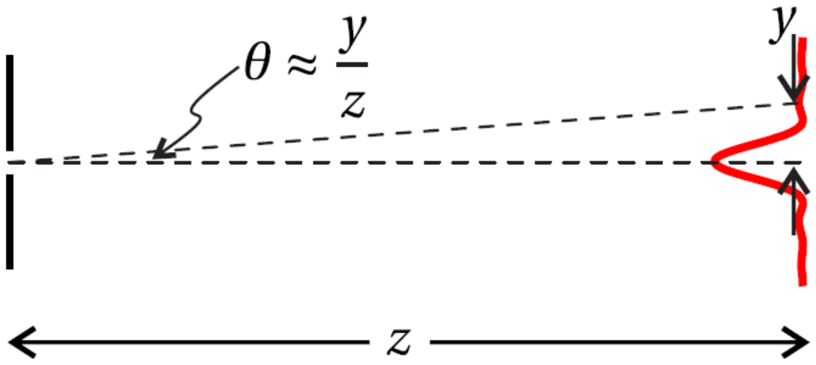
Čistě matematicky můžeme napsat

$$I(x,y,z) = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \left| \frac{1}{\lambda z} \iint_{ap} E(x',y',0)\, e^{-ik\left(\frac{x}{z}x' + \frac{y}{z}y'\right)} dx'dy' \right|^2$$

Prostorová závislost na stínítku je vyjádřena pomocí úhlů

$\theta_x \cong \frac{x}{z}, \theta_y \cong \frac{y}{z}$

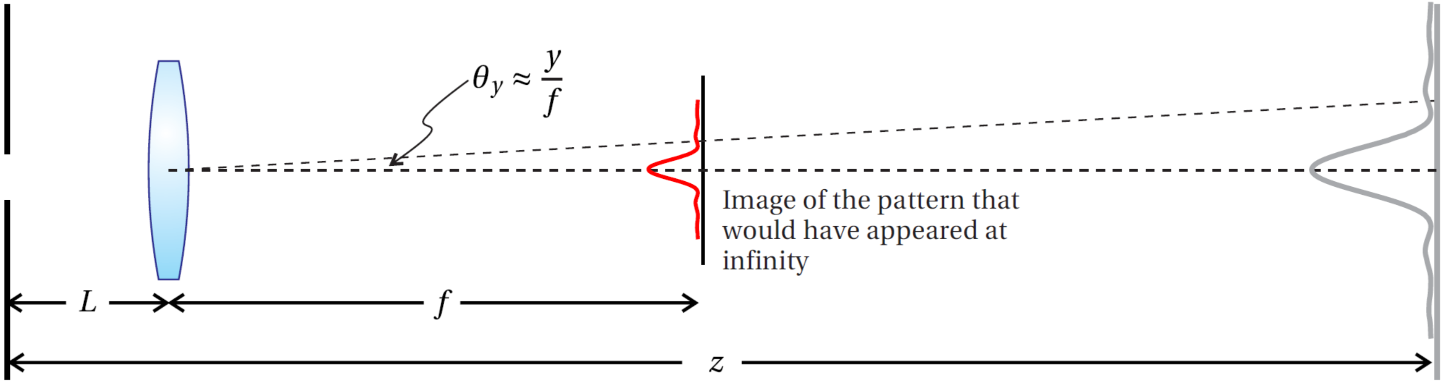
Zachovává se úhlová šířka svazku



Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

Podmínka dalekého pole

$$z \gg \frac{\pi r^2}{\lambda}$$



Obraz Frauenhoferovy difrakce je virtuální předmět $\frac{1}{f} = \frac{1}{-(z-L)} + \frac{1}{d}$

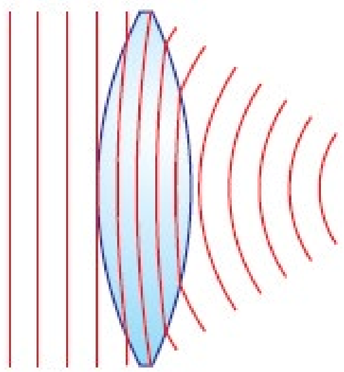
Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

Čočka zobrazí Frauenhoferovu difrakci do ohniskové vzdálenosti, tedy

$$I(x,y,L+F) \cong \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 \left| \frac{1}{\lambda f} \iint_{ap} E(x',y',0) e^{-\frac{ik}{f}(xx'+yy')} dx'dy' \right|^2$$

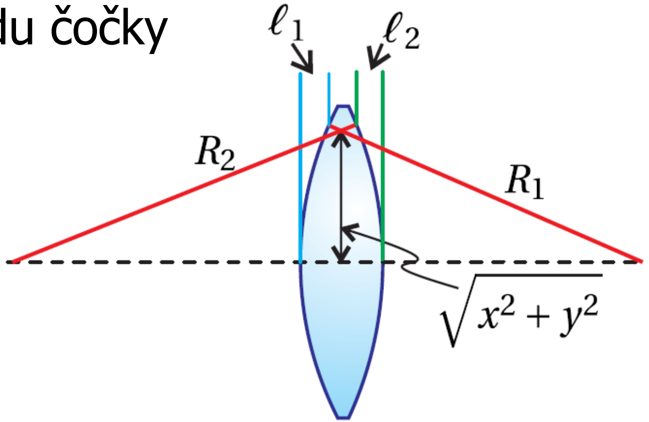
Ale průchod čočkou mění fázi elektrického pole.
Tedy $E(x',y',0)$ nutno dopočítat

Jakou fázi získají vlny po průchodu čočkou?



Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

Fázový rozdíl je závislý na radiální vzdálenosti od středu čočky



$$\Delta\phi = -k(n-1)(l_1 + l_2)$$

Pomocí paraxiální aproximace

$$l_1 \cong \frac{x^2+y^2}{2R_1}, l_2 \cong \frac{x^2+y^2}{2R_2}$$

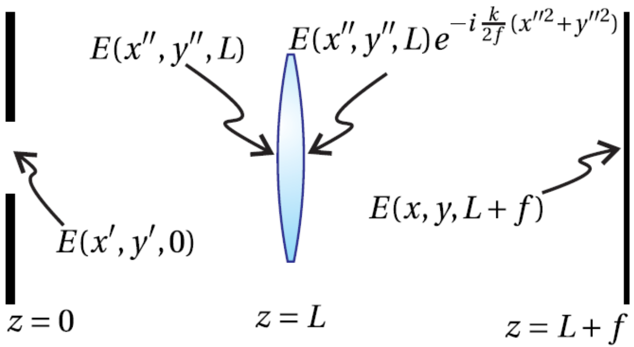
Po dosazení dostaneme

$$\Delta\phi = -k(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)(x^2+y^2)$$

Frauenhoferova difrakce na kruhové apertuře

Po průchodu tenkou čočkou se změní fáze

$$E(x, y, z_{za\ čočkou}) = E\left(x, y, z_{před\ čočkou}\right)e^{-i\frac{k}{2f}\left(x^2+y^2\right)}$$



$$E(x, y, L+f)$$

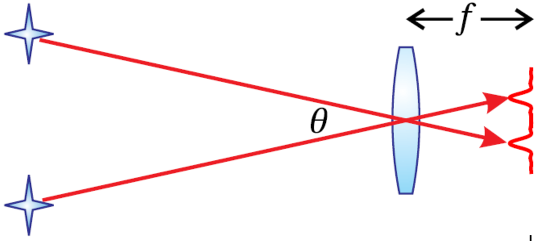
$$= -i\frac{e^{ik(L+f)}\, e^{i\frac{k}{2f}\left(x^2+y^2\right)} e^{i\frac{kL}{2f^2}\left(x^2+y^2\right)}}{\lambda f} \times$$

$$\times \iint_{ap} E(x', y', 0)e^{i\frac{k}{f}\left(xx'+yy'\right)} dx'dy'$$

Rayleighovo kritérium (mez)

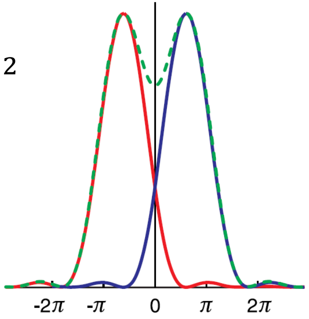
John William Strutt (3rd Baron Rayleigh) (1842–1919, British) was

pozorování vzdálených objektů
– difrakční obrazec v ohnisku čočky → rozmytí obrazu



Dva předměty lze rozeznat pokud maximum difrakčního obrazce jednoho se nachází alespoň ve vzdálenosti prvního minima difračního obrazce druhého předmětu

$$I(\rho, f) \approx \left[2 \frac{J_1\left(\frac{kD\rho}{2f}\right)}{\left(\frac{kD\rho}{2f}\right)} \right]^2$$



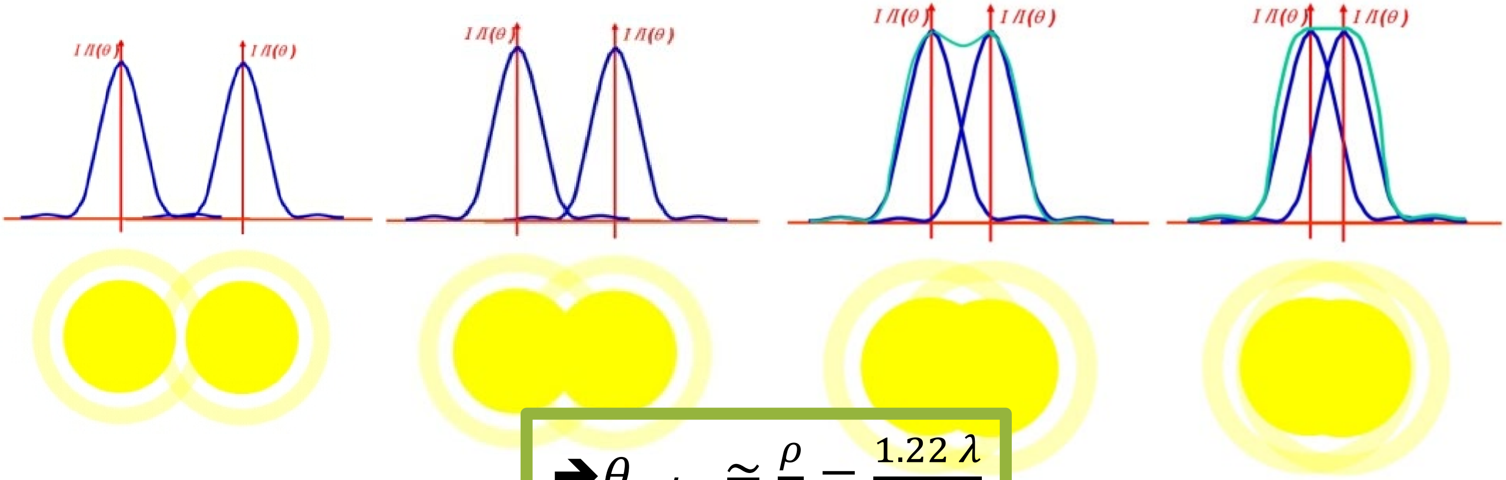
$$\frac{kD\rho}{2f} = 1.22\pi$$

$$\rightarrow \theta_{min} \cong \boxed{\frac{\rho}{f} = \frac{1.22\,\lambda}{D}}$$

Rayleighovo kritérium (mez)

John William Strutt (3rd Baron Rayleigh) (1842–1919, British) was

pozorování vzdálených objektů
– difrakční obrazec v ohnisku čočky → rozmytí obrazu



$$\rightarrow \theta_{min} \cong \frac{\rho}{f} = \frac{1.22\,\lambda}{D}$$

Rayleighovo kritérium (mez)

John William Strutt (3rd Baron Rayleigh) (1842–1919, British) was

jsou i další kritéria, která udávají rozlišení menší než Rayleigho mez

- Používáno v moderních metodách fotografie a spektroskopie

Rayleigh criterion	Houston criterion.	Abbe criterion.	Sparrow criterion
$d=\frac{0.61\lambda}{NA}$	$d=\frac{0.515\lambda}{NA}$	$d=\frac{0.5\lambda}{NA}$	$d=\frac{0.47\lambda}{NA}$

Reference

Peatross, Ware, Physics of Light and Optics, BYU, 2021 Revision.
Jan Franc, skripta Optika, 2021.
Štefan Višňovský, Optika – poznámky k přednášce.
P. Malý, Optika, Karolinum, 2008

https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/r/rayleigh+criterion
https://www.parabolixlight.com/fresnel-lens-and-parabolic-reflectors
https://cs.wikipedia.org/wiki/Fresnelova_%C4%8Do%C4%8Dka
https://www.edmundoptics.com/knowledge-center/application-notes/optics/advantages-of-fresnel-lenses/
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d1/Lentille_de_fresnel.gif
https://en.wikipedia.org/wiki/Zone_plate
http://zoneplate.lbl.gov/theory
https://www.researchgate.net/publication/258683913_Hard-X-ray_Zone_Plates_Recent_Progress/figures?lo=1
https://xdb.lbl.gov/Section4/Sec_4-4.html
https://www.nicepng.com/ourpic/u2w7i1i1o0t4t4o0_zone-plate-spacing-fresnel-zone-plate/
Markus Weigand. *Realization of a New Magnetic Scanning X-ray Microscope and Investigation of Landau Structures Under Pulsed Field Excitation*. Cuvillier, E, 2015.
https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/r/resolution
https://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens
https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
https://cs.wikipedia.org/wiki/Alfred_Cornu
http://sdsu-physics.org/physics180/physics180B/Topics/light/phys180Bch24.html
https://www.researchgate.net/publication/299437011_Comparative_Analysis_of_Path_Loss_Models_in_Mobile_Communications_for_Urban_Case/figures?lo=1
https://www.optixs.cz/spektrometry-29k/vlaknove-spektrometry-55k/flame-vlaknovy-spektrometr-53p
By User:Patrick87 - Own work, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=21807350
By Cmglee - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19051904