

Proseminář z Optiky

Difrakce III – Fresnelovy zóny

2.12.2021



FACULTY
OF MATHEMATICS
AND PHYSICS
Charles University

Fresnelovy zóny

Pro zjištění rozložení pole za aperturou musíme řešit

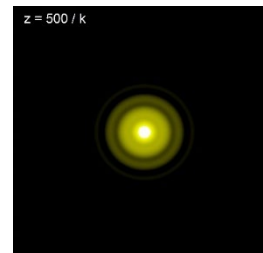
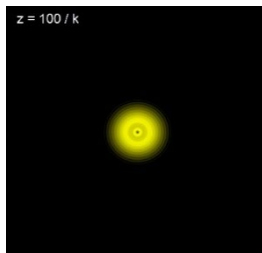
$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\text{apertura}} E(x', y', 0) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \left(\frac{1 + \cos(R, z)}{2} \right) da$$

Fresnelovy zóny

Pro zjištění rozložení pole za aperturou musíme řešit

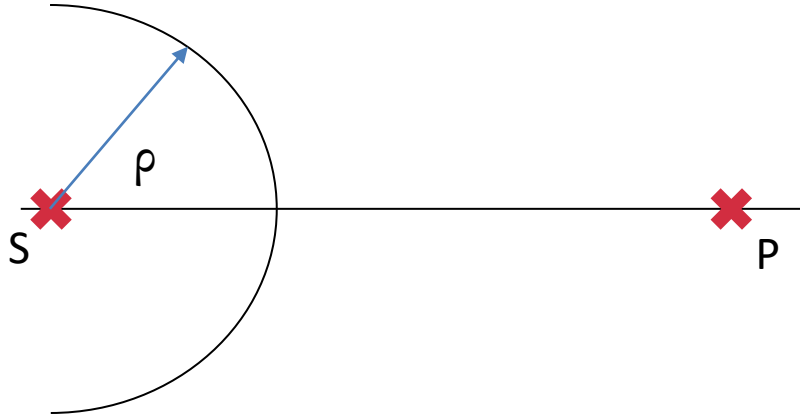
$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\text{apertura}} E(x', y', 0) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \left(\frac{1 + \cos(R, z)}{2} \right) da$$

Ale z difrakce na kruhovém otvoru víme, že existují oblasti v apertuře, ze kterých se světlo skládá v protifázi



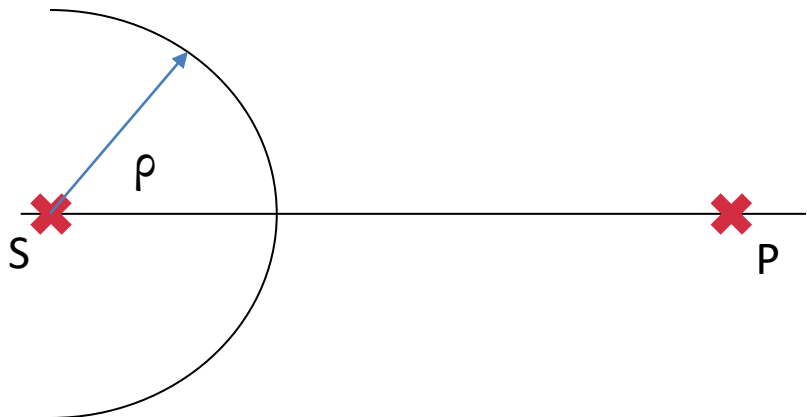
Fresnelovy zóny

Předpokládejme šíření kulové vlny prostorem, bez překážky



Fresnelovy zóny

Předpokládejme šíření kulové vlny prostorem, bez překážky

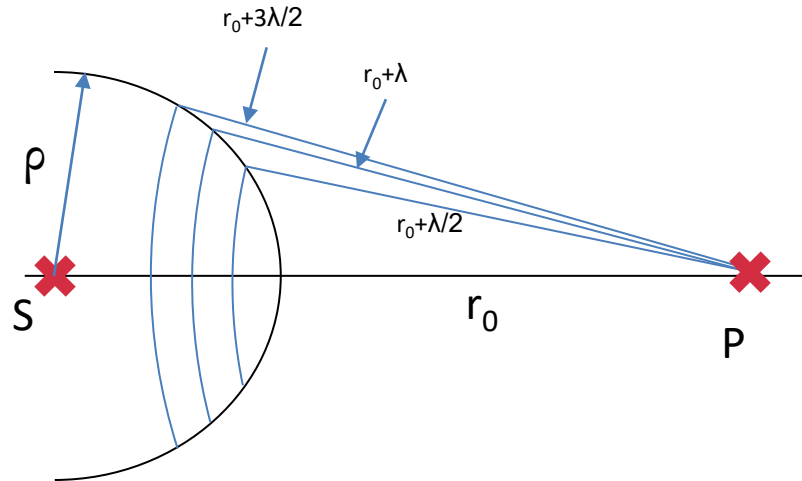


Sférická vlna vyzářená v $t=0$ z bodového zdroje dospěje v čase $t=t'$ na povrchu koule o poloměru ρ .

Body na povrchu koule jsou sekundární zdroje. Ale bez překážky se musí v bodě P zrekonstruovat původní vlna z bodu S.

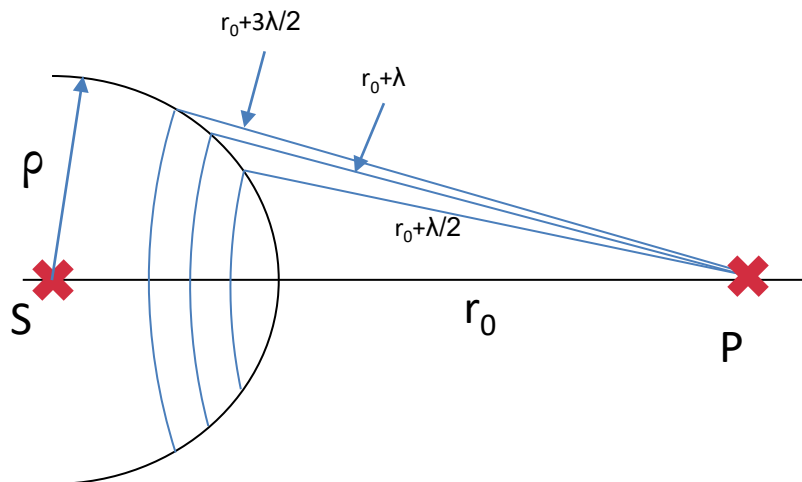
Fresnelovy zóny

Předpokládejme šíření kulové vlny prostorem, bez překážky



Fresnelovy zóny

Předpokládejme šíření kulové vlny prostorem, bez překážky



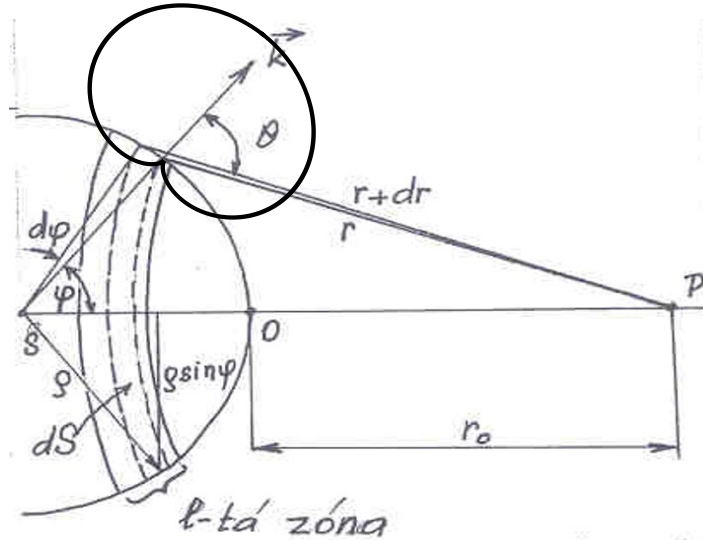
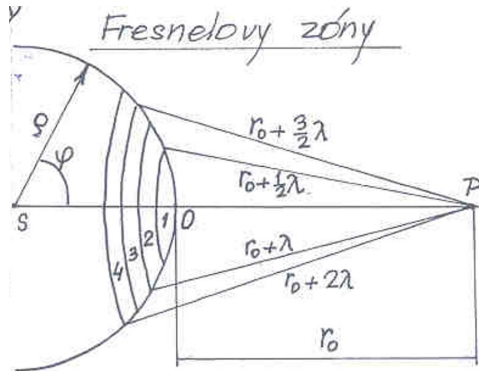
Ke každému sekundárnímu zdroji v dané Fresnelově zóně existuje v sousední zóně bodový zdroj, že jeho vzdálenost od bode P je o $\lambda/2$ jiná.

Oba k výslednému poli v bodě P přispívají s opačnou fází.

Fresnelovy zóny

Amplituda pole je modifikována úhlovou závislostí

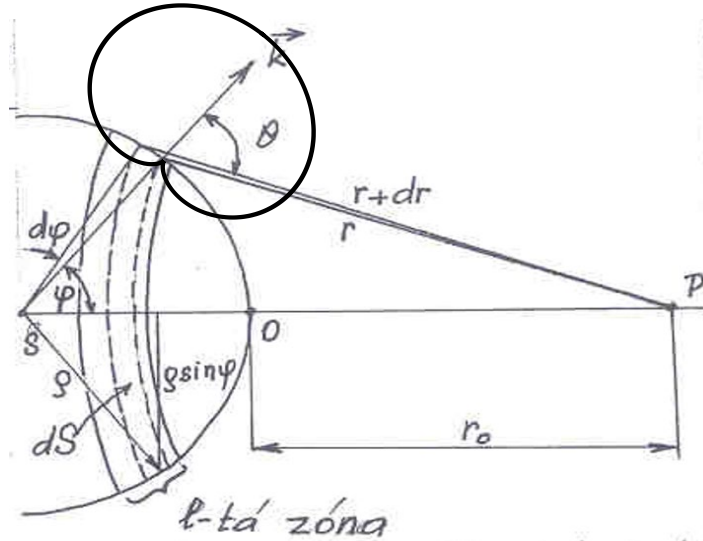
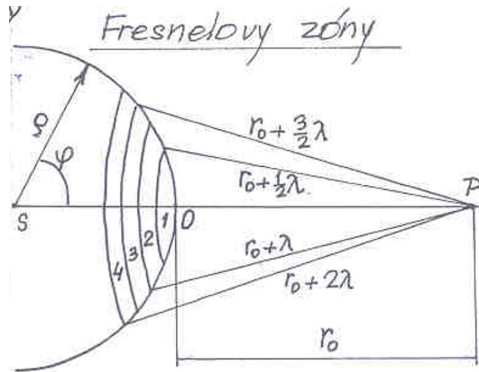
$$K(\theta) \Rightarrow r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$



Fresnelovy zóny

Amplituda pole je modifikována úhlovou závislostí

$$K(\theta) \Rightarrow r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$



Chceme najít amplitudu pole od l-té Fresnelovy zóny

Nutno spočítat příspěvek pole na plochu dS

Zavedeme poloměr zóny r

$$dS = 2\pi \frac{\rho}{\rho + r_0} r dr$$

Fresnelovy zóny

Příspěvek v bodě P od l-té zóny

$$E_l = K_l(\theta) \frac{2\pi \varepsilon_A \rho}{\rho + r_0} \int_{r_l}^{r_{l+1}} \frac{\cos[\omega t - k(\rho + r)]}{r} r \, dr$$

ε_A je síla
sekundárních
zdrojů na
jednotku plochy

Fresnelovy zóny

Příspěvek v bodě P od l-té zóny

$$E_l = K_l(\theta) \frac{2\pi \varepsilon_A \rho}{\rho + r_0} \int_{r_l}^{r_{l+1}} \frac{\cos[\omega t - k(\rho + r)]}{r} r \, dr$$

ε_A je síla
sekundárních
zdrojů na
jednotku plochy

Předpokládáme, že v rámci zóny se $K(\theta)$ mění pozvolna

$$E_l = 2 \cdot (-1)^{l+1} \cdot \frac{K_l \varepsilon_A \rho \lambda}{\rho + r_0} \sin[\omega t - k(\rho + r_0)]$$

Fresnelovy zóny

Příspěvek v bodě P od l-té zóny

$$E_l = K_l(\theta) \frac{2\pi \varepsilon_A \rho}{\rho + r_0} \int_{r_l}^{r_{l+1}} \frac{\cos[\omega t - k(\rho + r)]}{r} r \, dr$$

ε_A je síla
sekundárních
zdrojů na
jednotku plochy

Předpokládáme, že v rámci zóny se $K(\theta)$ mění pozvolna

$$E_l = 2 \cdot (-1)^{l+1} \cdot \frac{K_l \varepsilon_A \rho \lambda}{\rho + r_0} \sin[\omega t - k(\rho + r_0)]$$

➔ Bez úhlové závislosti by se příspěvky ze sousedních zón vyrušily!

Střední vzdálenost l-té zóny od bodu P

$$\bar{r}_l = r_0 + (2l - 1) \frac{\lambda}{4}$$

Fresnelovy zóny

Pole v bodě P bude dáno sumou příspěvků z jednotlivých zón

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_m$$

Fresnelovy zóny

Pole v bodě P bude dáno sumou příspěvků z jednotlivých zón

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_m$$

Ale díky faktoru před předpisem pole můžeme napsat

$$E = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \cdots \pm |E_m|$$

Fresnelovy zóny

Pole v bodě P bude dáno sumou příspěvků z jednotlivých zón

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_m$$

Ale díky faktoru před předpisem pole můžeme napsat

$$E = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \cdots \pm |E_m|$$

Je-li m liché

$$E = \frac{|E_1|}{2} + \left(\frac{|E_1|}{2} - |E_2| + \frac{|E_3|}{2} \right) + \cdots + \left(\frac{|E_{m-2}|}{2} - |E_{m-1}| + \frac{|E_m|}{2} \right) + \frac{|E_m|}{2}$$

Fresnelovy zóny

Pole v bodě P bude dáno sumou příspěvků z jednotlivých zón

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_m$$

Ale díky faktoru před předpisem pole můžeme napsat

$$E = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \dots \pm |E_m|$$

Je-li m liché

$$E = \frac{|E_1|}{2} + \left(\frac{|E_1|}{2} - |E_2| + \frac{|E_3|}{2} \right) + \dots + \left(\frac{|E_{m-2}|}{2} - |E_{m-1}| + \frac{|E_m|}{2} \right) + \frac{|E_m|}{2}$$

Je-li m sudé

$$E = |E_1| - \frac{|E_2|}{2} - \left(\frac{|E_2|}{2} - |E_3| + \frac{|E_4|}{2} \right) + \dots + \left(\frac{|E_{m-2}|}{2} - |E_{m-1}| + \frac{|E_m|}{2} \right) - \frac{|E_m|}{2}$$

Fresnelovy zóny

Pokud bud m poslední zóna, pak $K(\theta)=0$ a dostaneme

$$E \approx \frac{|E_1|}{2}$$

Optická porucha tvořená neomezenou vlnoplochou je přibližně polovina příspěvku první Fresnelovy zóny.

Pokud tedy dáme mezi body S a P překážku, dostane se do bodu P jenom součet vln z Fresnelových zón, které jsou dané rozměrem apertury.

Fresnelovy zóny

Rozdělme první (polární) Fresnelovu zónu na N podzón kulovými řezy se středem v P o poloměrech

$$r_0 + \frac{\lambda}{2N}, r_0 + \frac{\lambda}{N}, r_0 + \frac{3\lambda}{2N}, \dots, r_0 + \frac{(N-1)\lambda}{2N}, r_0 + \frac{\lambda}{2}$$

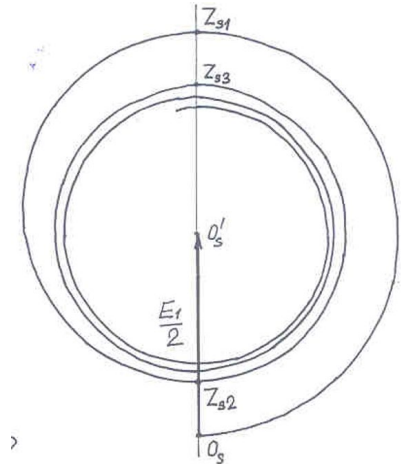
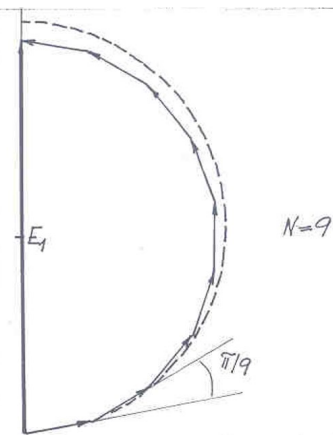
Fresnelovy zóny

Rozdělme první (polární) Fresnelovu zónu na N podzón kulovými řezy se středem v P o poloměrech

$$r_0 + \frac{\lambda}{2N}, r_0 + \frac{\lambda}{N}, r_0 + \frac{3\lambda}{2N}, \dots, r_0 + \frac{(N-1)\lambda}{2N}, r_0 + \frac{\lambda}{2}$$

Superpozice podzón dává výslednou poruchu od první zóny E_1 . Fázový rozdíl napříč zónou je π , každá podzóna je vůči předchozí posunutá o π/N .

Na každou zónu připadá fázový posun π , amplituda klesá díky $K(\theta)$

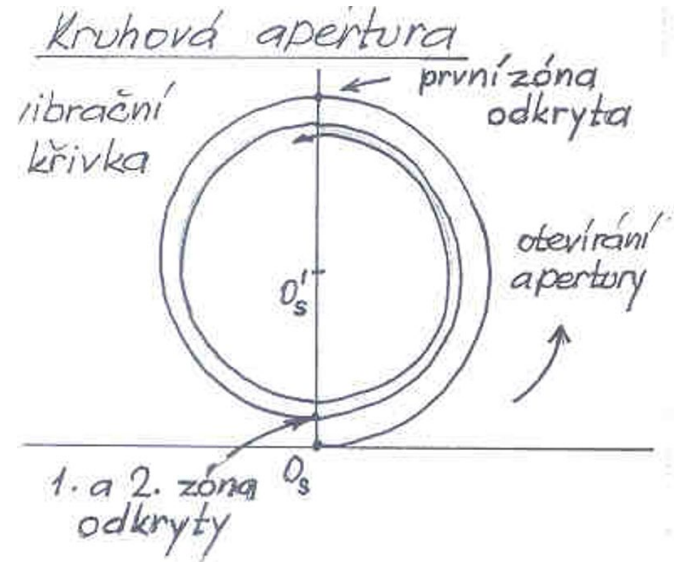


Fresnelovy zóny

Na kruhové apertuře pokud odkryjeme malý počet zón

Sudých

$$E = (|E_1| - |E_2|) + (|E_3| - |E_4|) + \dots + (|E_{m-1}| - |E_m|) \approx 0$$



Fresnelovy zóny

Na kruhové apertuře pokud odkryjeme malý počet zón

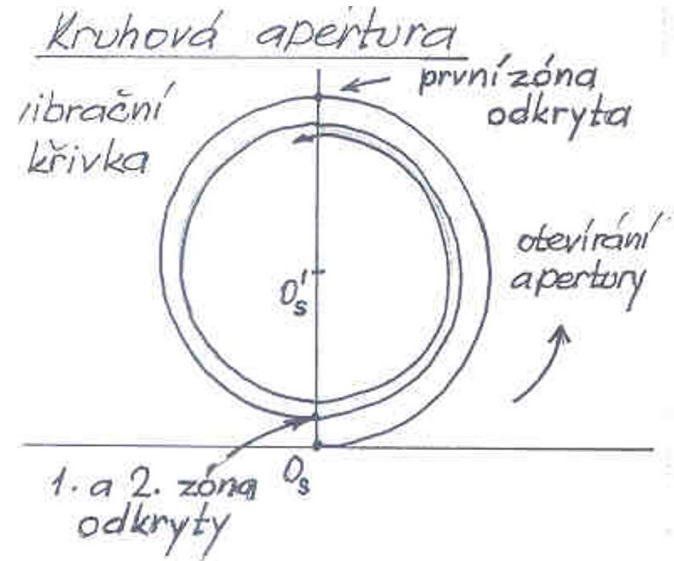
Sudých

$$E = (|E_1| - |E_2|) + (|E_3| - |E_4|) + \dots + (|E_{m-1}| - |E_m|) \approx 0$$

Lichých – zvýšíme počet zón o jednu

$$E = |E_1| - (|E_2| - |E_3|) - (|E_4| - |E_5|) - \dots - (|E_m| - |E_{m+1}|) \approx |E_1|$$

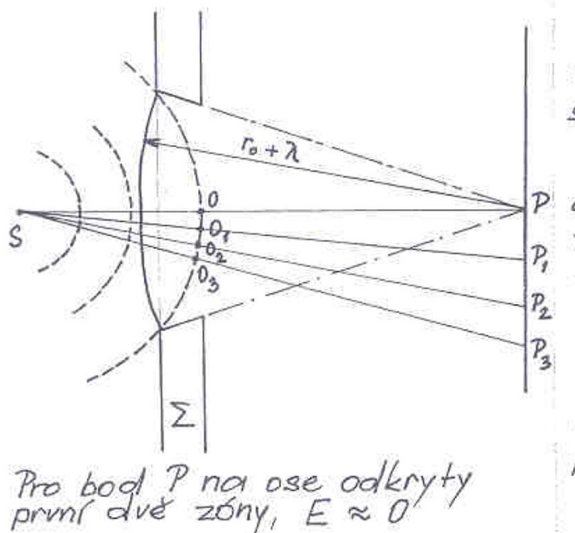
S odkrýváním dalších zón se mění amplituda pole na bodě P mezi 0 a $E_1 \rightarrow E_1/2$



Fresnelovy zóny

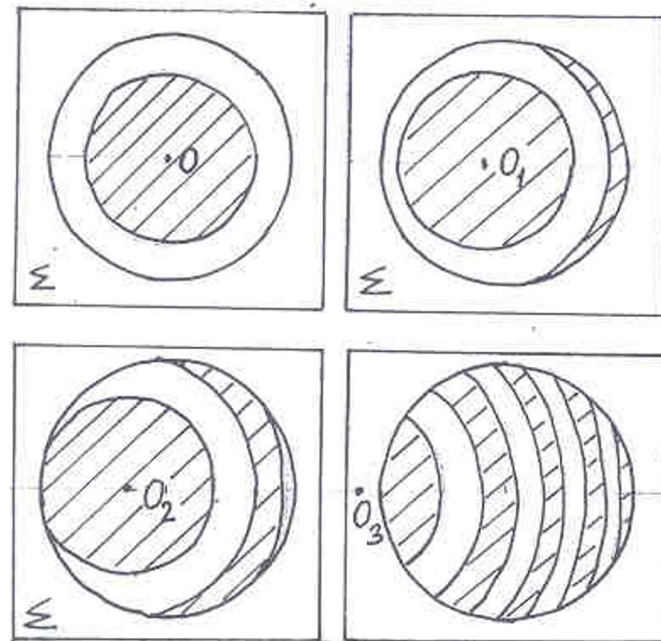
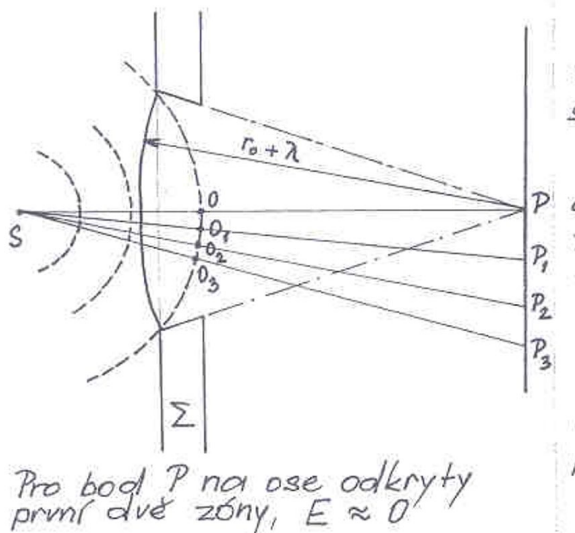
Rozdělení do Fresnelových zón můžeme provést pro všechny body na stínítku.

Bude jiný poměr zakrytých a nezakrytých zón



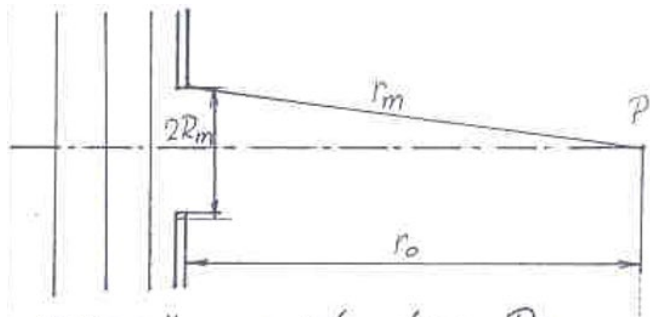
Fresnelovy zóny

Rozdělení do Fresnelových zón můžeme provést pro všechny body na stínítku.
Bude jiný poměr zakrytých a nezakrytých zón



Fresnelovy zóny

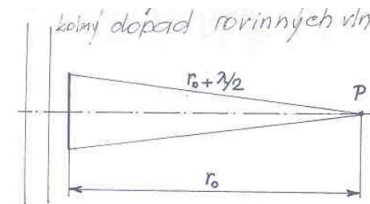
Pro rovinné vlny:



Poloměr m -té zóny R_m

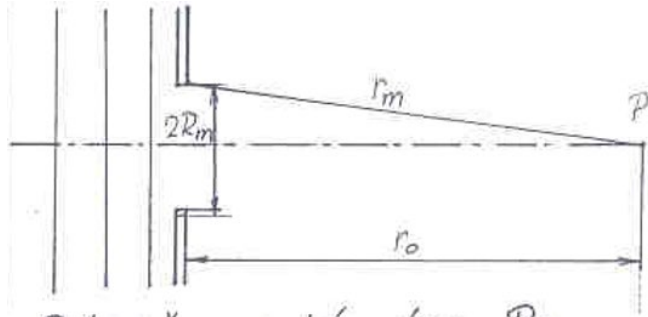
$$R_m^2 = (r_0 + m\lambda/2)^2 - r_0^2$$
$$= r_0 2m\lambda/2 + (m\lambda/2)^2 \approx m r_0 \lambda$$
$$R_m = (m r_0 \lambda)^{1/2}$$

R_m je úměrný $m^{1/2}$.



Fresnelovy zóny

Pro rovinné vlny:



Poloměr m -té zóny R_m

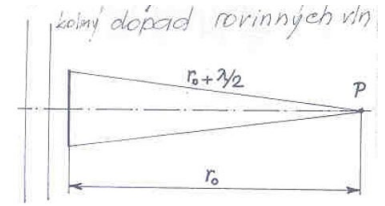
$$R_m^2 = (r_0 + m\lambda/2)^2 - r_0^2$$

$$= r_0 2m\lambda/2 + (m\lambda/2)^2 \approx m r_0 \lambda$$

$$R_m = (m r_0 \lambda)^{1/2}$$

R_m je úměrný $m^{1/2}$.

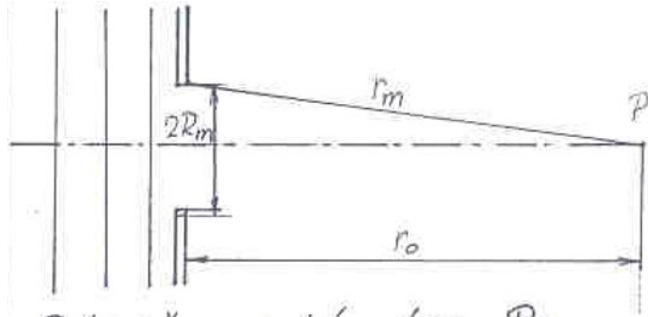
Poissonova skrvna znovu:
Zakrytí první zóny



$$E = |E_1| - \frac{|E_2|}{2} - \left(\frac{|E_2|}{2} - |E_3| + \frac{|E_4|}{2} \right) + \dots +$$

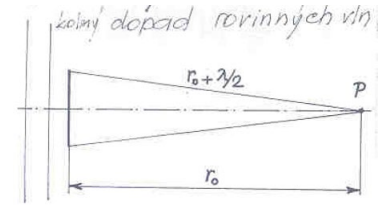
Fresnelovy zóny

Pro rovinné vlny:



Poloměr m -té zóny R_m
 $R_m^2 = (r_0 + m\lambda/2)^2 - r_0^2$
 $= r_0 2m\lambda/2 + (m\lambda/2)^2 \approx m r_0 \lambda$
 $R_m = (m r_0 \lambda)^{1/2}$
 R_m je úměrný $m^{1/2}$.

Poissonova skrvna znovu:
 Zakrytí první zóny



$$E = |E_1| - \frac{|E_2|}{2} - \left(\frac{|E_2|}{2} - |E_3| + \frac{|E_4|}{2} \right) + \dots +$$

Neboli, pokud odkryjeme pouze první zónu $E = |E_1|$, pokud odkryjeme všechny zóny

$$E = \frac{|E_1|}{2}$$

Pokud zakryjeme první zónu

$$E = \frac{|E_1|}{2} - |E_1| = -\frac{|E_1|}{2}$$

Fresnelovy zóny

Stínítko, kde se zakryje každá druhá Fresnelova zóna – zakrytí všech sudých nebo lichých zón

→ při sčítání příspěvků chybí záporné členy a výsledné pole bude velké
(zakrytí prvních 20 sudých zón $E = E_1 + E_3 + E_5 + \dots + E_{39} \approx 20 E_1$)

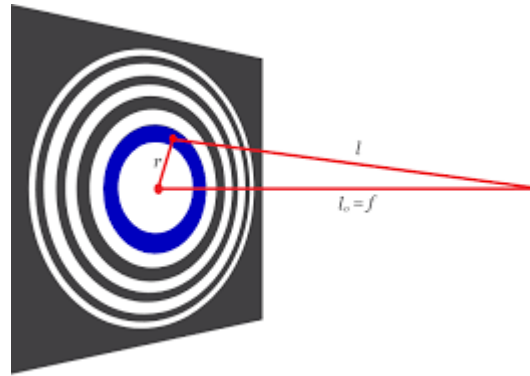
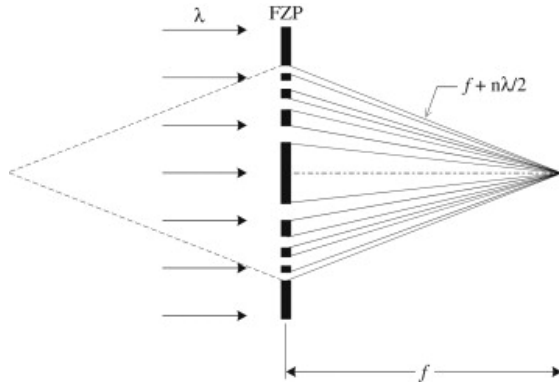
Fresnelovy zóny

Stínítko, kde se zakryje každá druhá Fresnelova zóna – zakrytí všech sudých nebo lichých zón

→ při sčítání příspěvků chybí záporné členy a výsledné pole bude velké

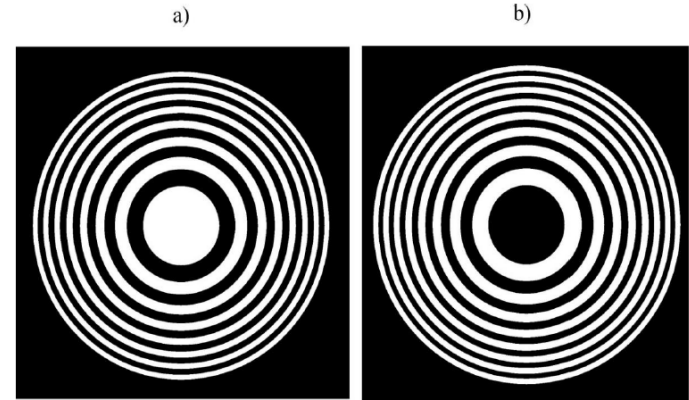
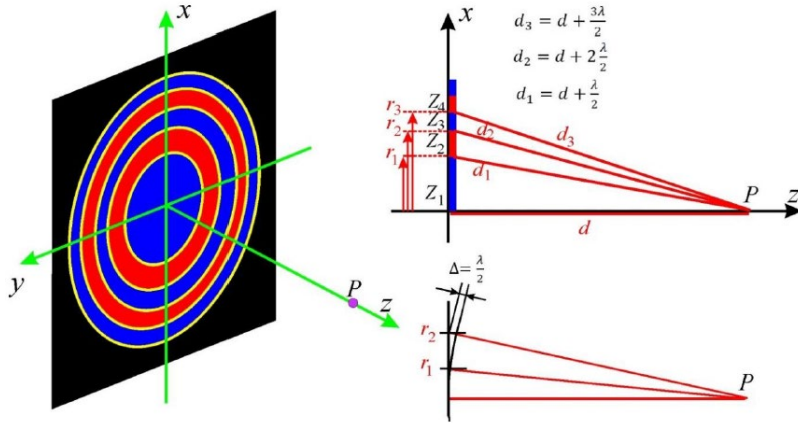
(zakrytí prvních 20 sudých zón $E = E_1 + E_3 + E_5 + \dots + E_{39} \approx 20 E_1$)

→ Fresnelova zónová deska



Fresnelovy zóny

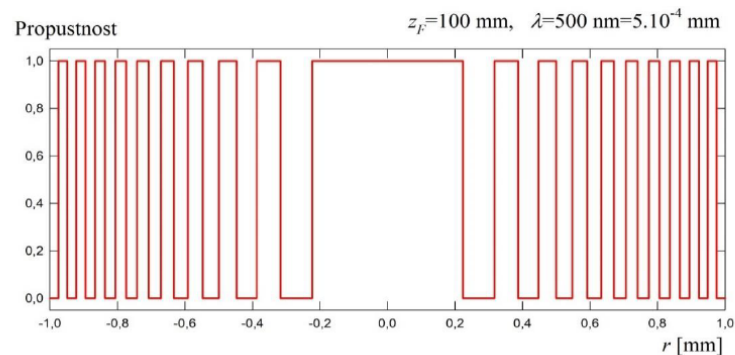
Binární amplitudové Fresnelovy zónové desky jsou tvořeny kruhově symetrickými aperturami, přičemž se střídají propustná a nepropustná mezikruží tak, že odpovídají sudým a lichým Fresnelovým zónám.



Fresnelova zónová deska

- a) lichá (pozitivní, propustná pro liché zóny)
- b) sudá (negativní)

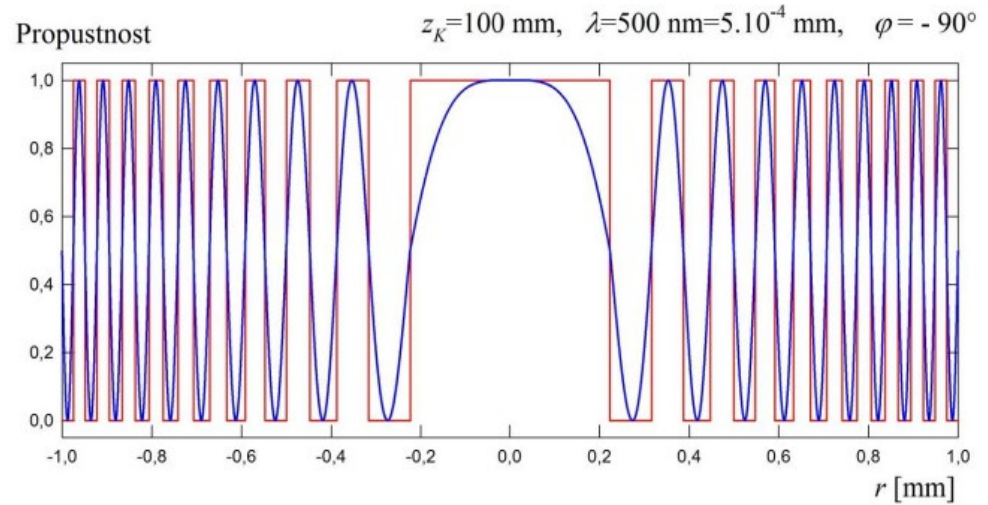
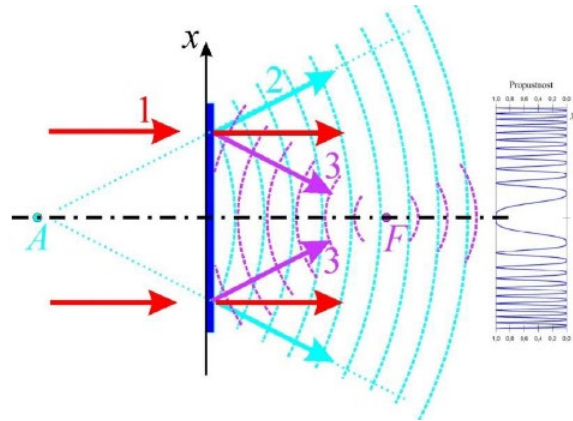
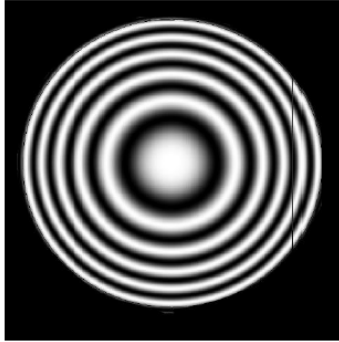
Fresnelovy zóny



Radiální závislost propustnosti Fresnelovy zónové desky se základní ohniskovou vzdáleností $z_F = 10 \text{ cm}$ spočtená podle vztahu

$$r_m = \sqrt{m\lambda f_{ZP} + \frac{1}{4}m^2\lambda^2}.$$

Fresnelovy zóny



Difrakce rovinné vlny na kruhové symetrické mřížce s kosinově modulovanou propustností Fresnelových zón.

1 dopadající rovinná vlna

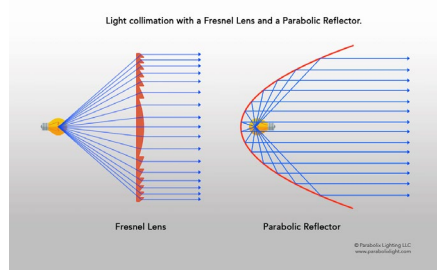
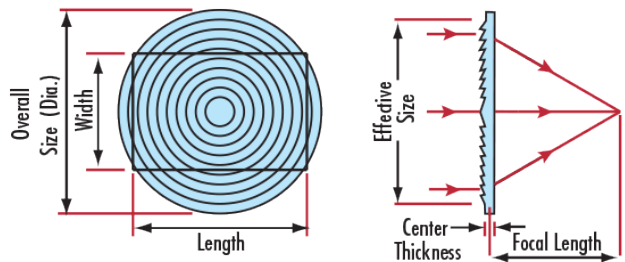
2 divergující kulová vlna tvořící virtuální obraz bodu A

3 konvergující kulová vlna směřující do reálného ohniska F

Fresnelova čočka

Nemusíme jenom zakrývat sudé nebo liché zóny

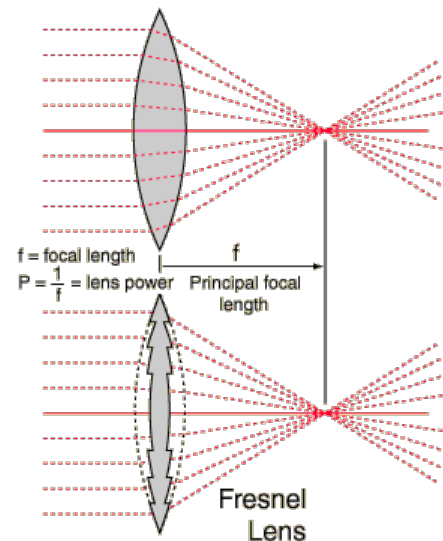
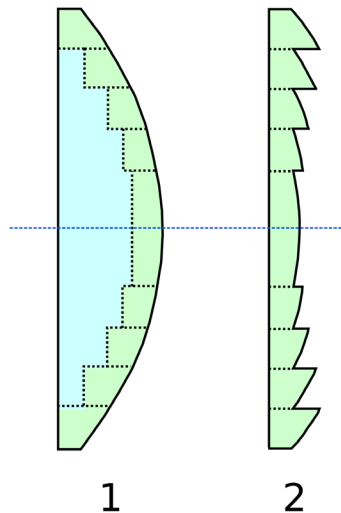
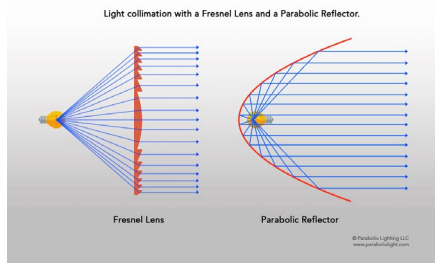
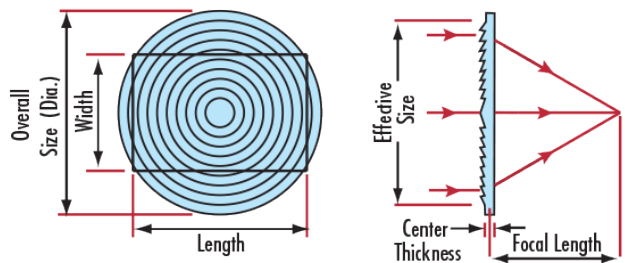
Můžeme zónám opačné parity změnit fázi o π a tím sečíst všechny příspěvky



Fresnelova čočka

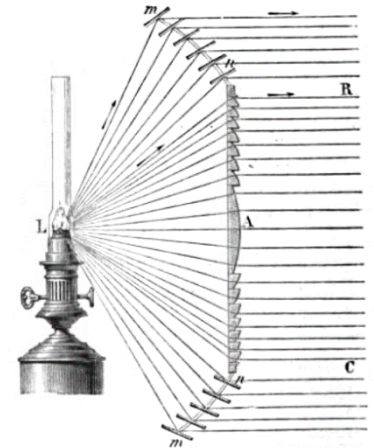
Nemusíme jenom zakrývat sudé nebo liché zóny

Můžeme zónám opačné parity změnit fázi o π a tím sečíst všechny příspěvky



Fresnelova čočka

- 1819 – úkol od Arago – zjistit možná vylepšení osvětlení v majácích
Podobný koncept už existoval,
ale Fresnel navrhl plano-konvexní čočku
- 1821 – demonstrace a porovnání s používanými reflektory
- 1822 – vylepšení a test na nedokončeném Vítězném oblouku
Louis XVIII viděl světlo ve vzdálenosti 32 km



Fresnelova čočka

1819 – úkol od Arago – zjistit možná vylepšení osvětlení v majácích

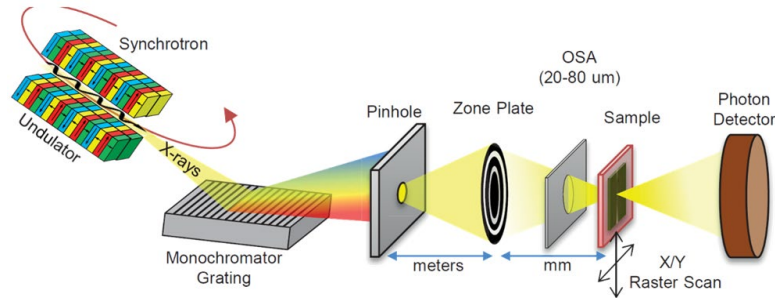
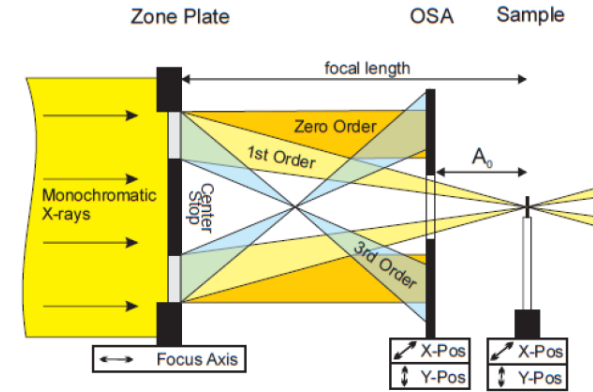
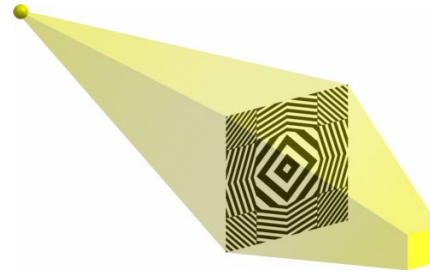
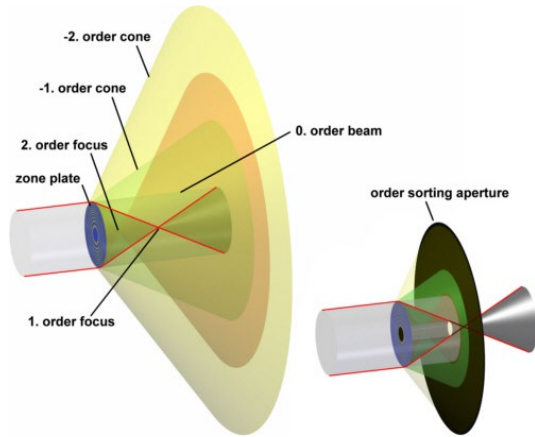
Podobný koncept už existoval,
ale Fresnel navrhl plano-konvexní čočku

1821 – demonstrace a porovnání s používanými reflektory

1822 – vylepšení a test na nedokončeném Vítězném oblouku
Louis XVIII viděl světlo ve vzdálenosti 32 km



Fresnelovy zóny

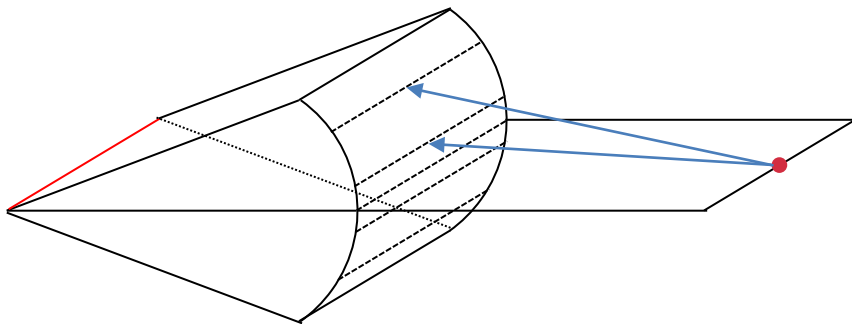


Cornuova spirála

Difrakce na hraně – není splněna podmínka pro Fraunhoferovu aproximaci

Vezmeme v potaz úzkou štěrbinu

- válcové vlny
- Fresnelovy zóny jsou obdélníky
- velikosti pro vyšší zóny klesají rychleji

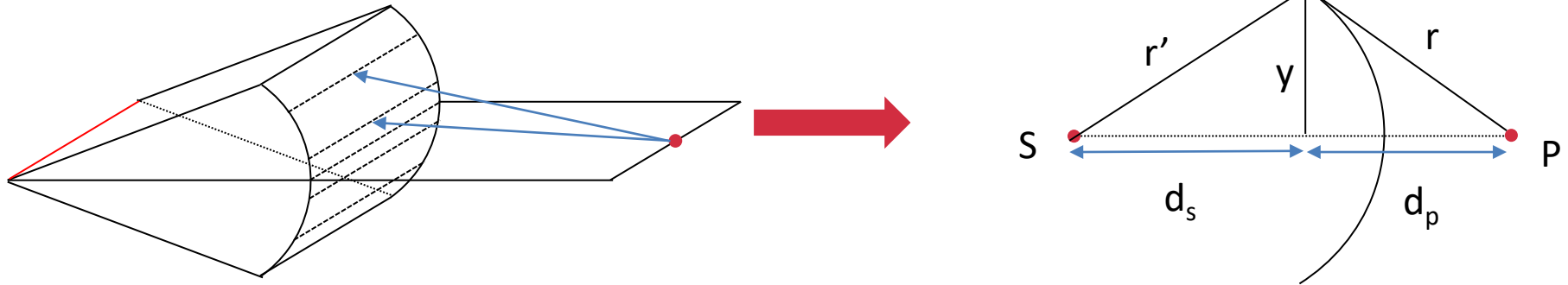


Cornuova spirála

Difrakce na hraně – není splněna podmínka pro Fraunhoferovu aproximaci

Vezmeme v potaz úzkou štěrbinu

- válcové vlny
- Fresnelovy zóny jsou obdélníky
- velikosti pro vyšší zóny klesají rychleji



Cornuova spirála

Přepsání integrálu (ignorace snižování amplitudy apod.)

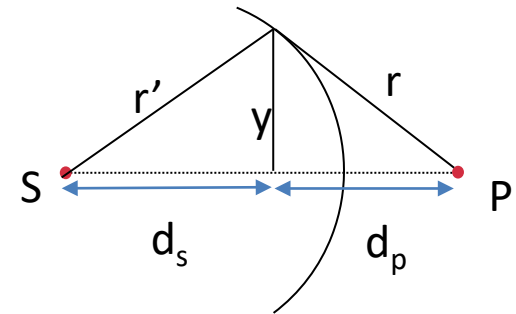
$$E_p \cong K \iint_{ap} e^{ik(r+r')} dS$$

Uvažujme paraxiální aproximaci

$$r = d_p + \frac{y^2}{2d_p}, r' = d_s + \frac{y^2}{2d_s}$$

$$r'^2 = d_s^2 + y^2$$

$$r^2 = d_p^2 + y^2$$



Cornuova spirála

Přepsání integrálu (ignorace snižování amplitudy apod.)

$$E_p \cong K \iint_{ap} e^{ik(r+r')} dS$$

Uvažujme paraxiální aproximaci

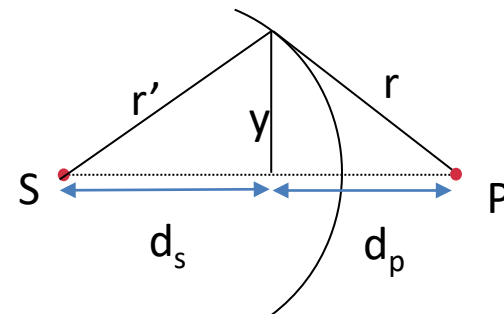
$$r = d_p + \frac{y^2}{2d_p}, r' = d_s + \frac{y^2}{2d_s}$$

Dostaneme

$$r + r' = \underbrace{d_s + d_p} + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{d_p} + \frac{1}{d_s} \right)$$

$$r'^2 = d_s^2 + y^2$$

$$r^2 = d_p^2 + y^2$$



Cornuova spirála

Přeznačíme proměnnou

$$v = \frac{y^2}{\lambda L}$$

A dostaneme

$$E_p = K \int e^{\frac{i\pi v^2}{2}} dv = K[C(v) + i S(v)]$$

Cornuova spirála

Přeznačíme proměnnou

$$v = \frac{y^2}{\lambda L}$$

A dostaneme

$$E_p = K \int e^{\frac{i\pi v^2}{2}} dv = K[C(v) + i S(v)]$$

Kde zavedeme Fresnelovy integrály

$$C(v) = \int_0^v \cos\left(\pi \frac{v'^2}{2}\right) dv', S(v) = \int_0^v \sin\left(\pi \frac{v'^2}{2}\right) dv'$$

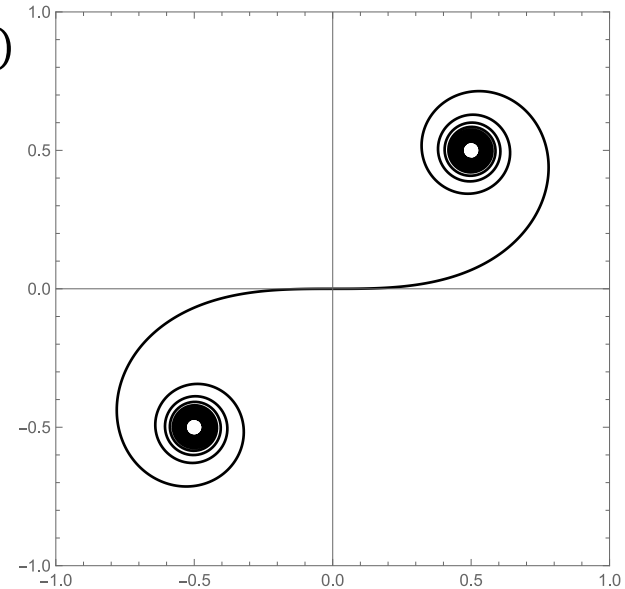
Cornuova spirála

Intenzita na stínítku tedy bude dána

$$I \cong \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 |E_p|^2 \sim \frac{1}{2} I_0 (C^2 + S^2)$$

→ Eulerova spirála (1734)

– křivost stoupá s délkou křivky



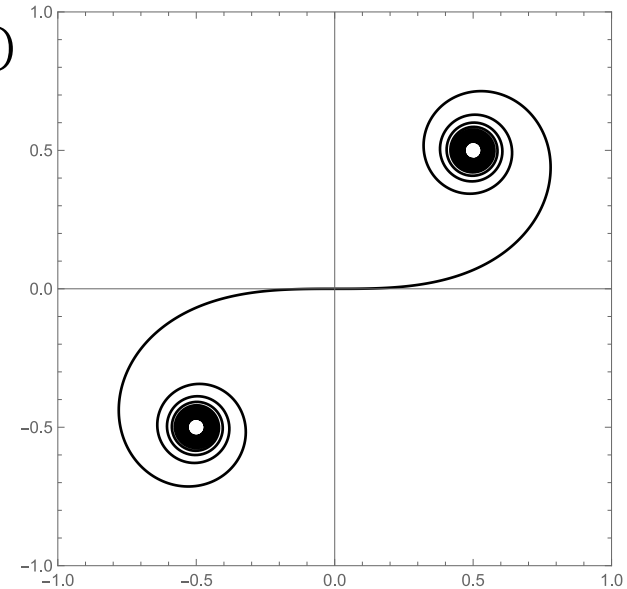
Cornuova spirála

Intenzita na stínítku tedy bude dána

$$I \cong \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 |E_p|^2 \sim \frac{1}{2} I_0 (C^2 + S^2)$$

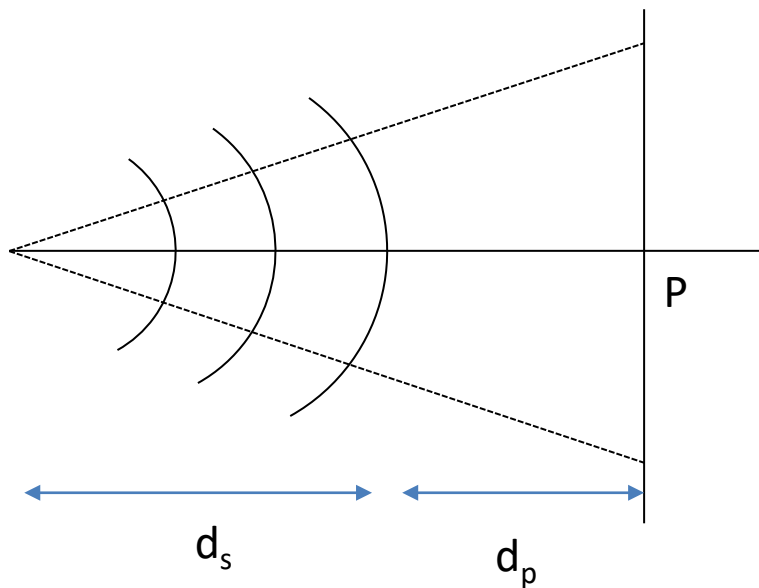
→ Eulerova spirála (1734)

- křivost stoupá s délkou křivky
- Cornu (1874) znovu odvodil pro difrakci
- Použití při výpočtu difrakce na hraně



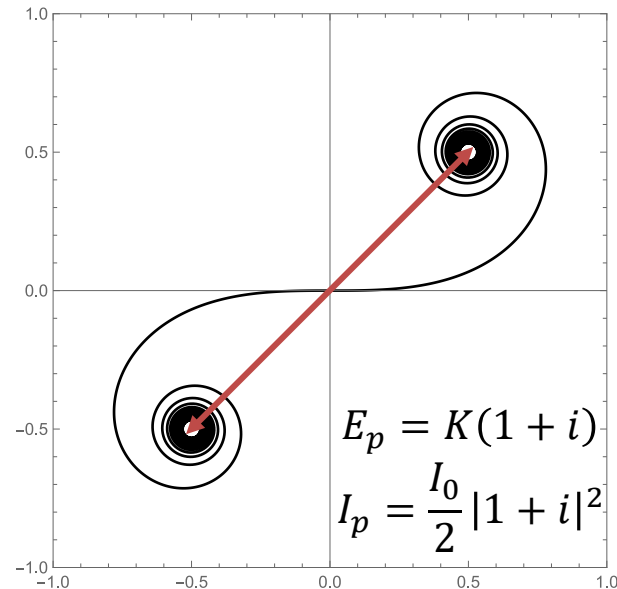
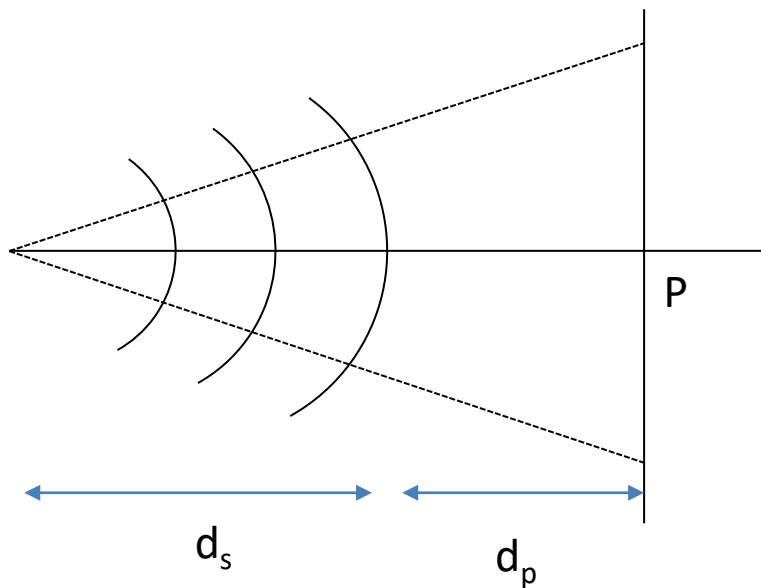
Difrakce na hraně

Pokud není překážka



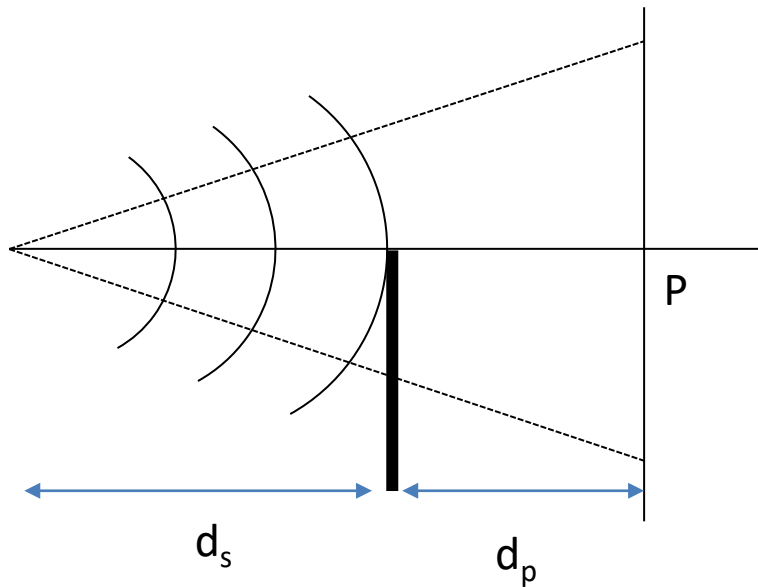
Difrakce na hraně

Pokud není překážka



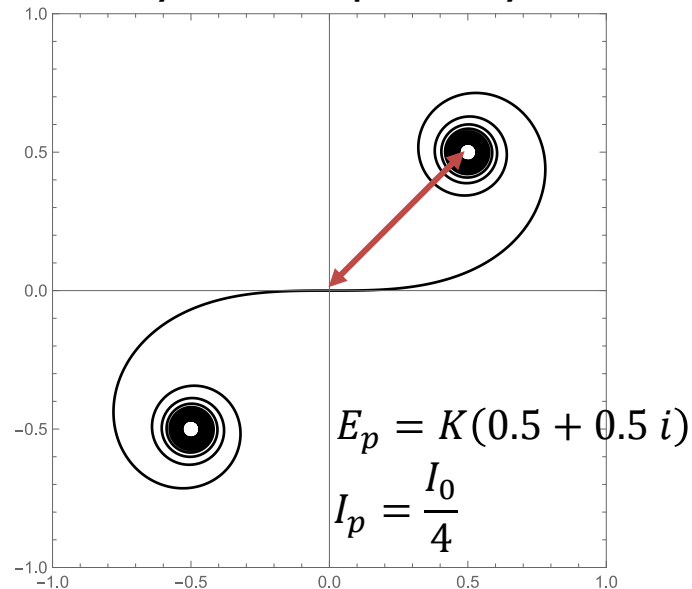
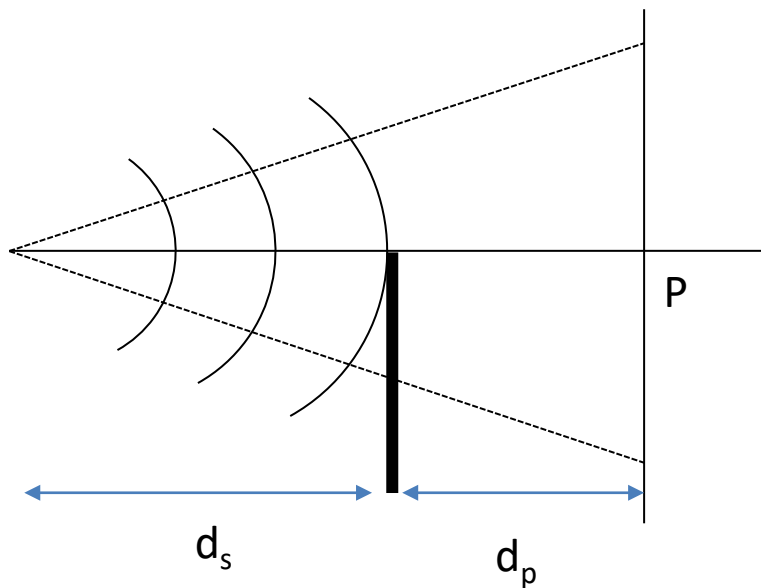
Difrakce na hraně

Překážka – hrana – na bod P dopadnou jenom vlny z horní poloviny



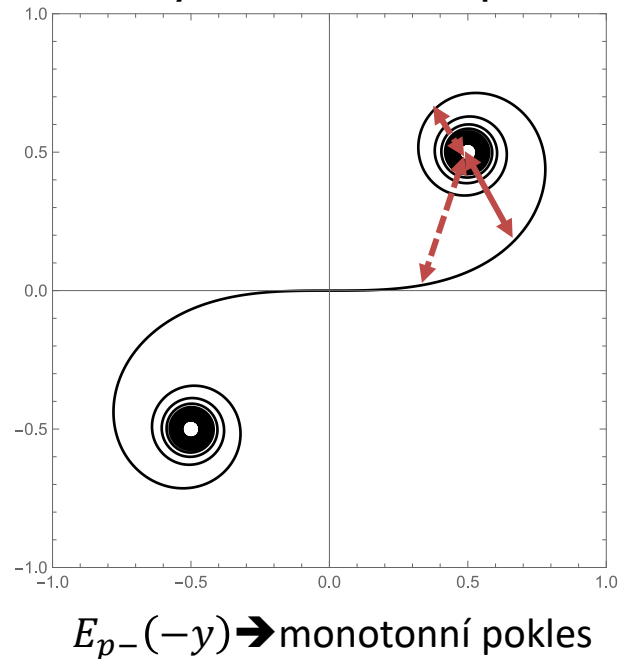
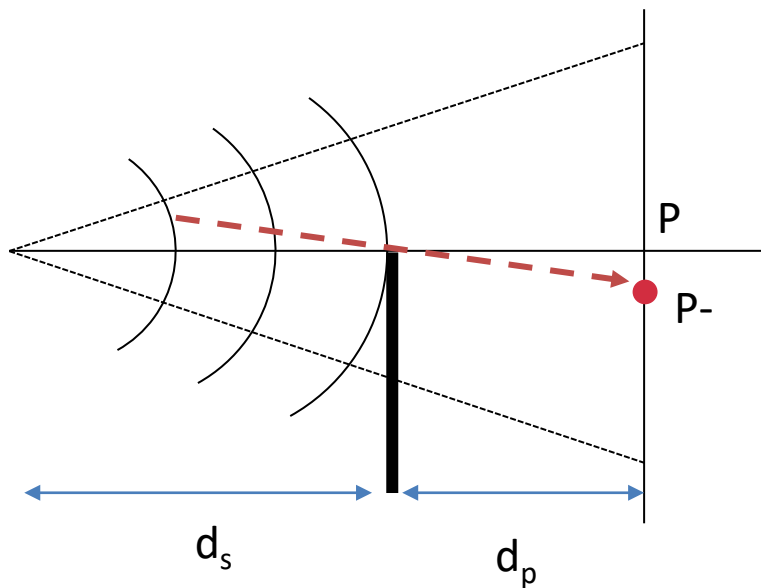
Difrakce na hraně

Překážka – hrana – na bod P dopadnou jenom vlny z horní poloviny



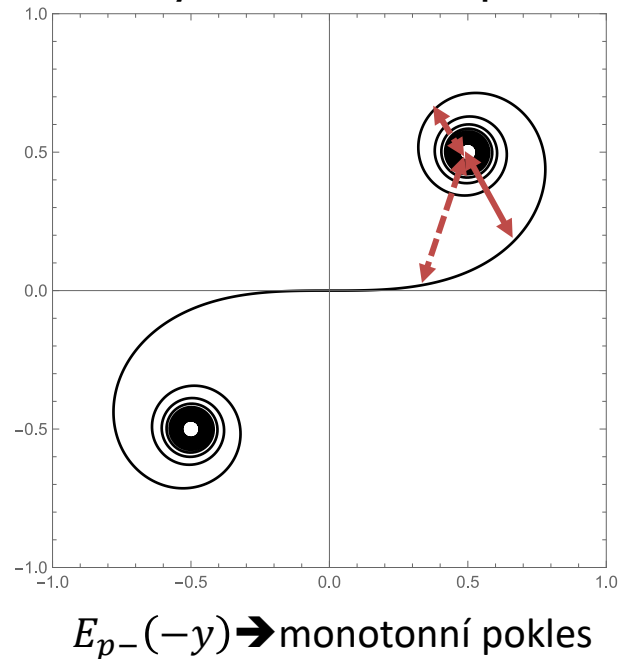
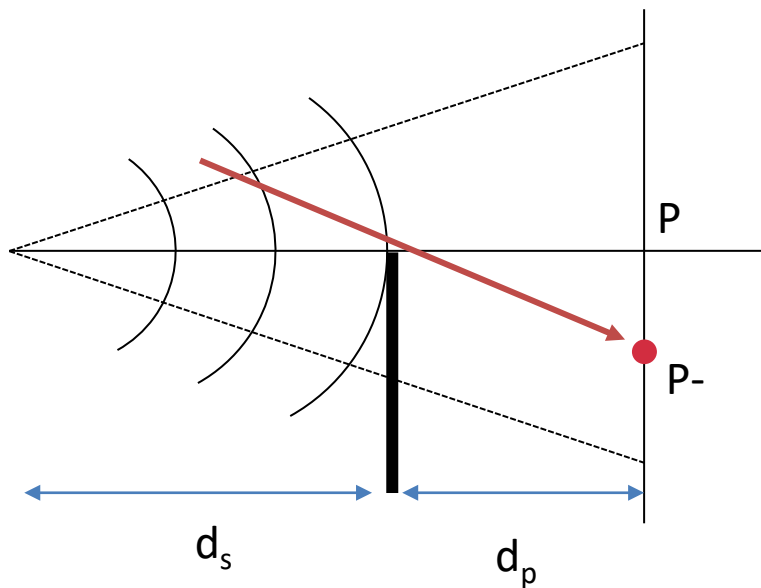
Difrakce na hraně

Překážka – hrana – na bod P- dopadnou jenom vlny z části horní poloviny



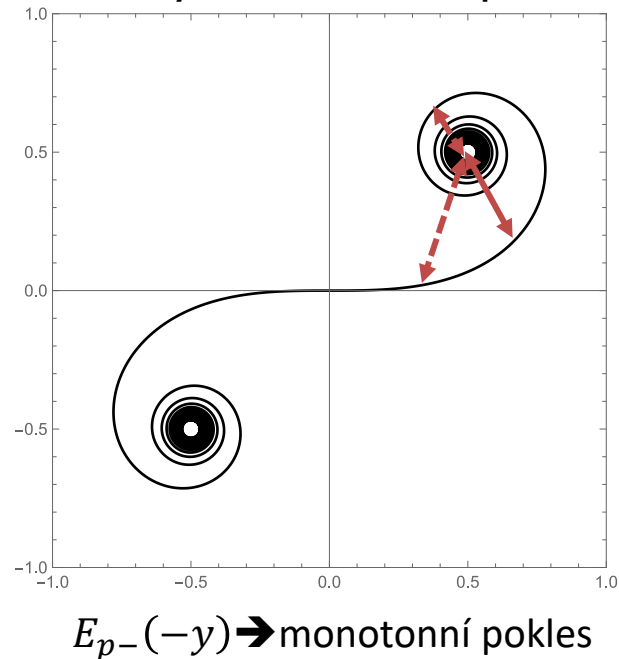
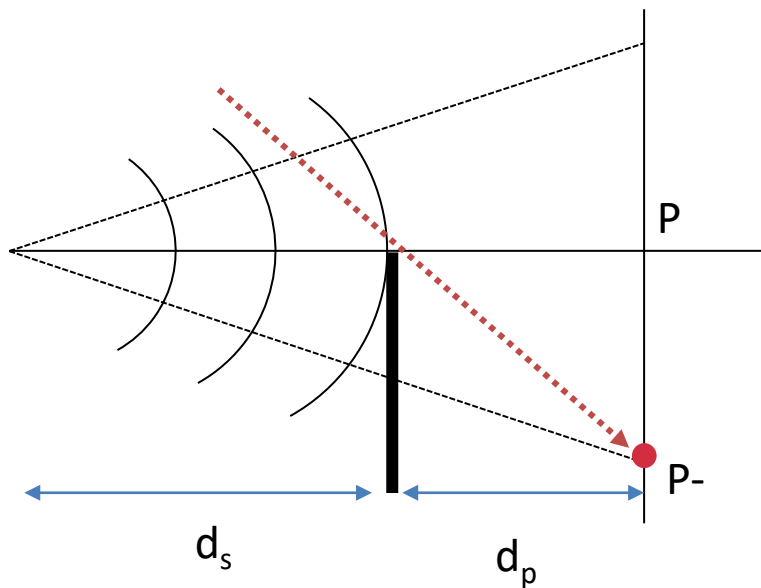
Difrakce na hraně

Překážka – hrana – na bod P- dopadnou jenom vlny z části horní poloviny



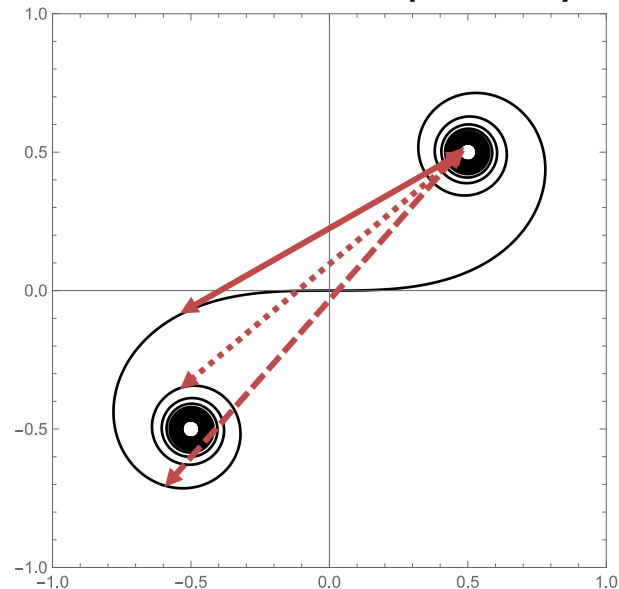
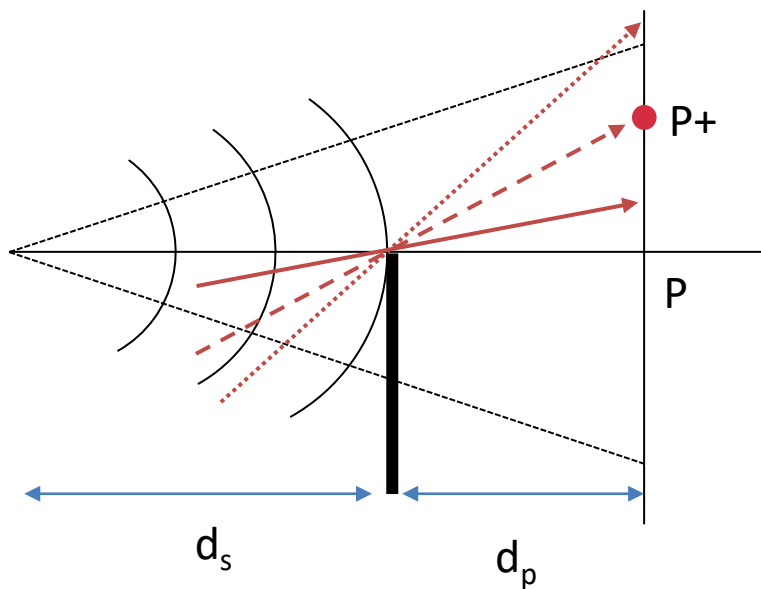
Difrakce na hraně

Překážka – hrana – na bod P- dopadnou jenom vlny z části horní poloviny



Difrakce na hraně

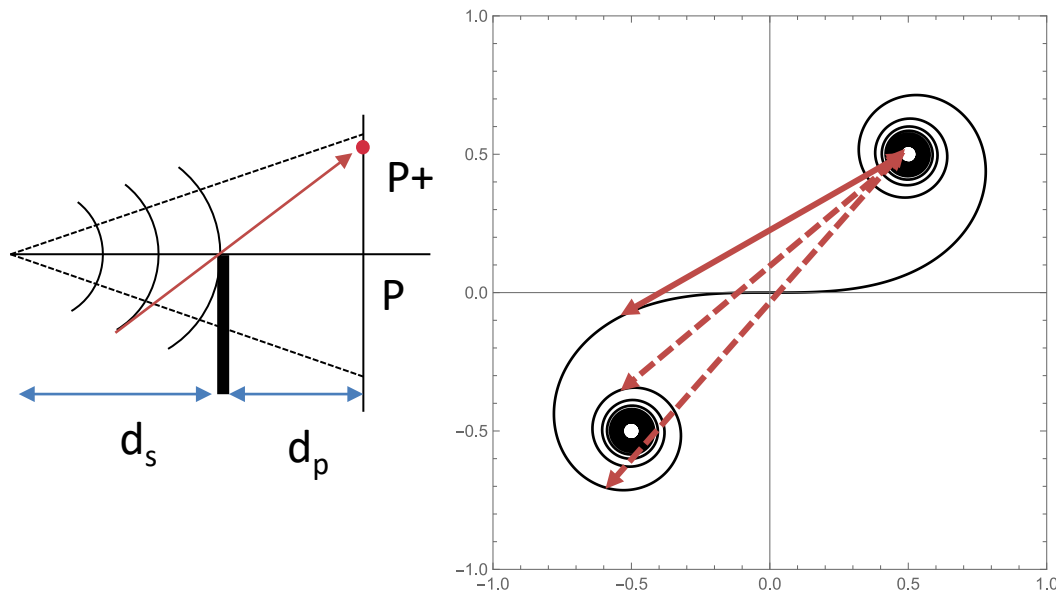
Překážka – hrana – na bod $P+$ dopadnou z horní a části dolní poloviny



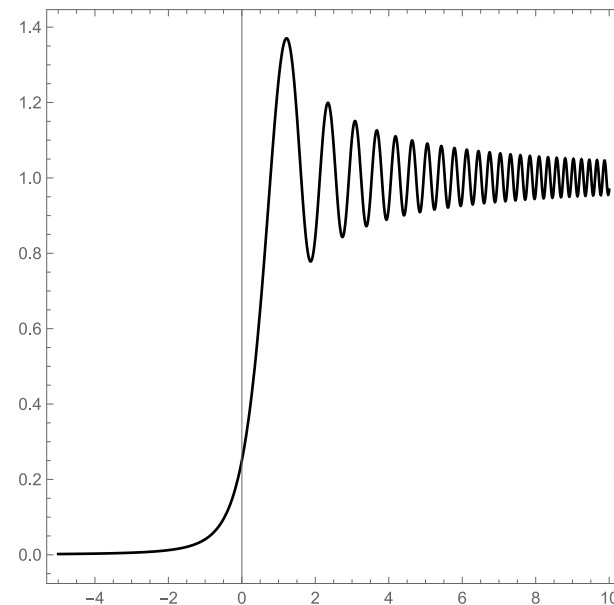
$E_{p+}(y) \rightarrow$ růst a pak oscilace

Difrakce na hraně

Překážka – hrana – na bod P+ dopadnou z horní a části dolní poloviny

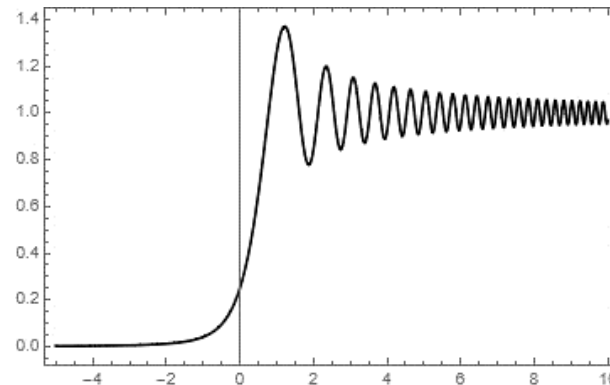
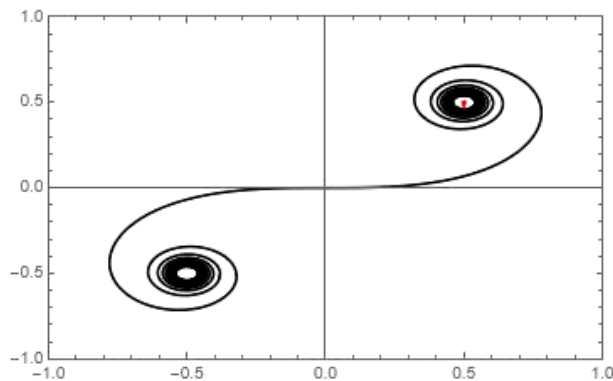
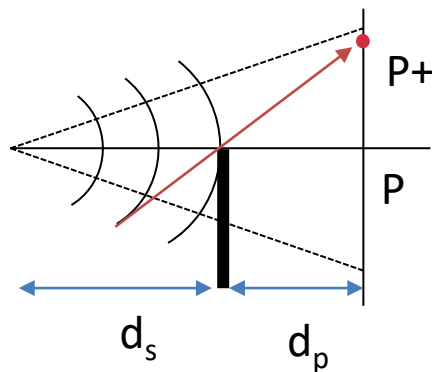


$E_{p+}(y) \rightarrow$ růst a pak oscilace



Difrakce na hraně

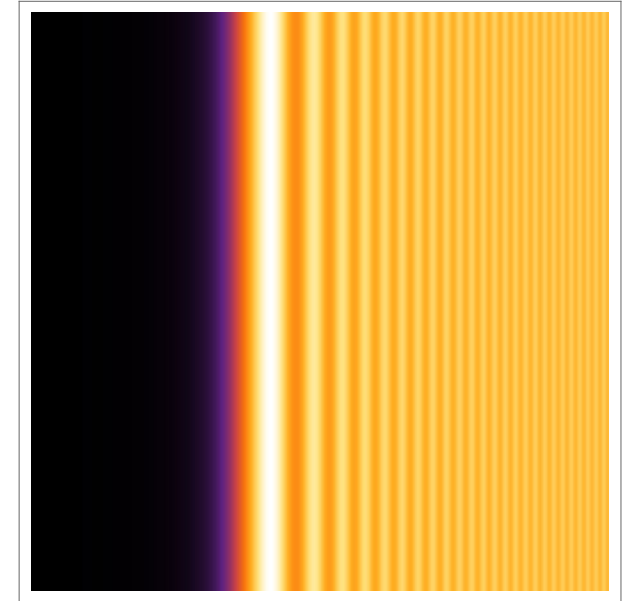
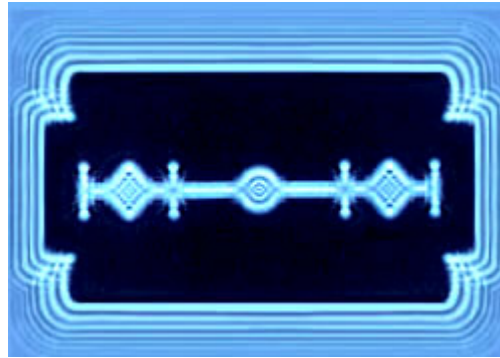
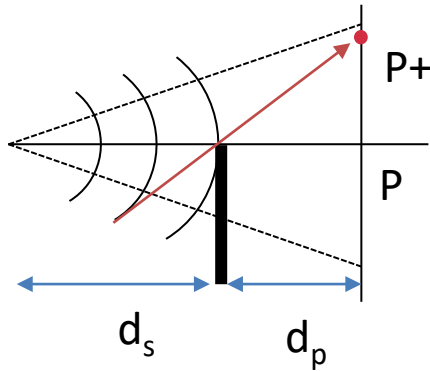
Překážka – hrana – na bod P+ dopadnou z horní a části dolní poloviny



$E_{p+}(y) \rightarrow$ růst a pak oscilace

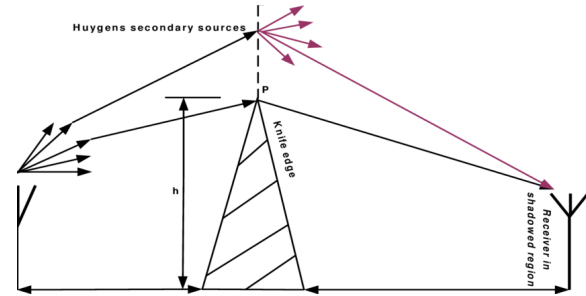
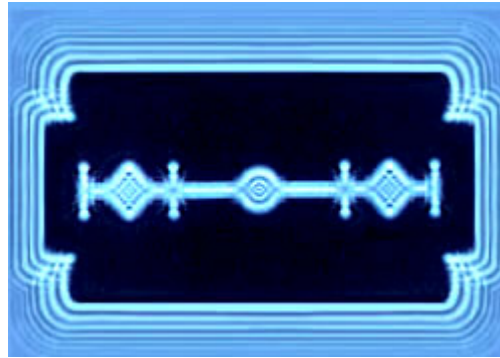
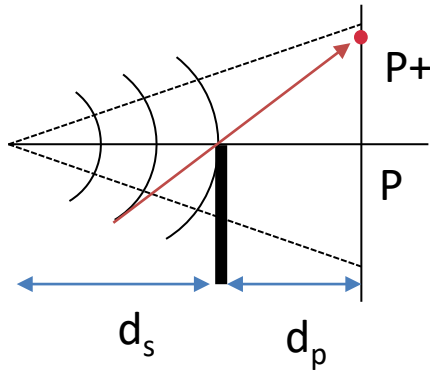
Difrakce na hraně

Překážka – hrana – na bod P+ dopadnou z horní a části dolní poloviny



Difrakce na hraně

Překážka – hrana – na bod P+ dopadnou z horní a části dolní poloviny



Reference

Peatross, Ware, Physics of Light and Optics, BYU, 2021 Revision.

Jan Franc, skripta Optika, 2021.

Štefan Višňovský, Optika – poznámky k přednášce.

P. Malý, Optika, Karolinum, 2008

<https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/r/rayleigh+criterion>

<https://www.parabolixlight.com/fresnel-lens-and-parabolic-reflectors>

https://cs.wikipedia.org/wiki/Fresnelova_%C4%8Do%C4%8Dka

<https://www.edmundoptics.com/knowledge-center/application-notes/optics/advantages-of-fresnel-lenses/>

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d1/Lentille_de_fresnel.gif

https://en.wikipedia.org/wiki/Zone_plate

<http://zoneplate.lbl.gov/theory>

https://www.researchgate.net/publication/258683913_Hard-X-ray_Zone_Plates_Recent_Progress/figures?lo=1

https://xdb.lbl.gov/Section4/Sec_4-4.html

https://www.nicepng.com/ourpic/u2w7i1i1o0t4t4o0_zone-plate-spacing-fresnel-zone-plate/

Markus Weigand. *Realization of a New Magnetic Scanning X-ray Microscope and Investigation of Landau Structures Under Pulsed Field Excitation*. Cuvillier, E, 2015.

<https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/r/resolution>

https://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens

https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

https://cs.wikipedia.org/wiki/Alfred_Cornu

<http://sdsu-physics.org/physics180/physics180B/Topics/light/phys180Bch24.html>

https://www.researchgate.net/publication/299437011_Comparative_Analysis_of_Path_Loss_Models_in_Mobile_Communications_for_Urban_Case/figures?lo=1

<https://www.optixs.cz/spektrometry-29k/vlaknove-spektrometry-55k/flame-vlaknovy-spektrometr-53p>

By User:Patrick87 - Own work, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=21807350>

By Cmglee - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19051904>

https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_lens

https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_lens#History