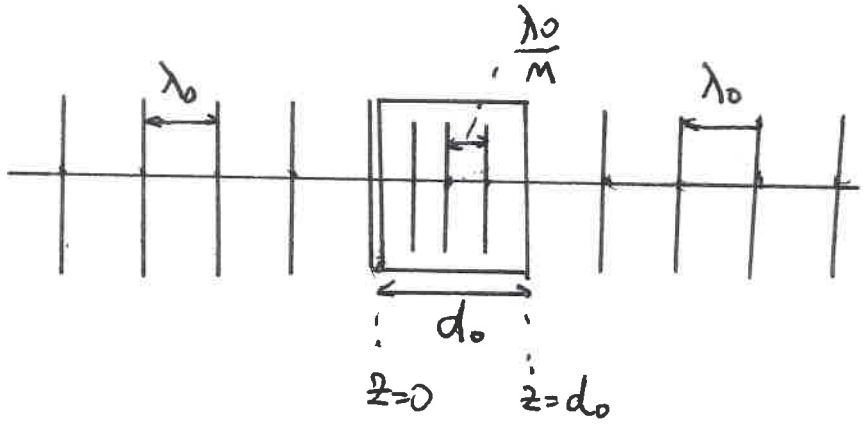
Průchod vln optickými prvky



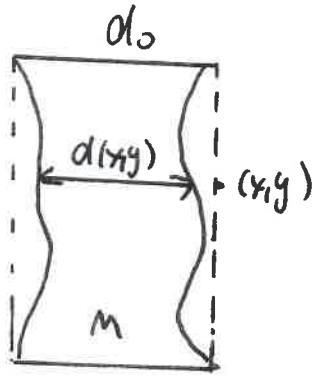
$U_1 = U(x,y,z) = A e^{ikoz} e^{-i\omega t}$ $\quad z \le 0$

$U_2 = U(x,y,z) = A e^{inkod_0} e^{iko(z-d_0)} e^{-i\omega t}$

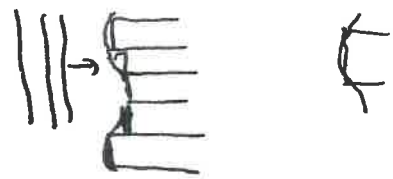
Komplexní amplitudová propustnost

$$t(x,y) = \frac{U_2}{U_1} = e^{ink_0d_0}$$

Tenká transparentní destička proměnné tloušťky



V každém okolí (x,y) popisujeme dopad jako rovinný



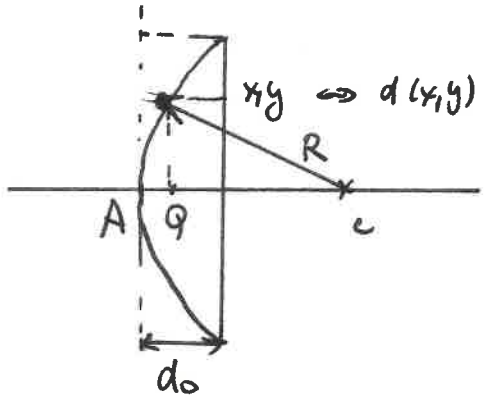
optická dráha ve směru z

$$OD = n \cdot d(x,y) + 1 \cdot (d_0 - d(x,y))$$

$$t(x,y) = e^{ink_0 d(x,y)} e^{ik_0(d_0 - d(x,y))} =$$

$$= e^{ik_0 d_0} e^{i(n-1)k_0 d(x,y)}$$

Plankovypuklá čočka



$$\overline{QC} = \sqrt{R^2 - (x^2+y^2)} =$$

$$= R\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}} \approx$$

$$\approx R\left(1 - \frac{x^2+y^2}{2R^2}\right)$$

$$\overline{AQ} = R - \overline{QC} = \frac{x^2+y^2}{2R} = d_0 - d(x,y)$$

Vlna prochází vzdálenost $d_0 - d(x,y)$ s indexem lomu 1

$d(x,y)$ ... s indexem lomu n

opt. dráha = $OD = d_0 - d(x,y) + n\,d(x,y) = d_0 + (n-1)d(x,y)$

Nalbeh fáze $= k_0 (d_0 + (n-1)d(x,y))$

$$d(x,y) = d_0 - \frac{x^2+y^2}{2R}$$

$$\Delta\varphi = k_0 \left(d_0 + (n-1)\cdot d_0 - (n-1)\cdot \frac{x^2+y^2}{2R} \right) =$$

$$= k_0 \left(n d_0 - (n-1)\cdot \frac{x^2+y^2}{2R} \right)$$

$$t(x,y) = e^{i n k_0 d_0}\, e^{-i(n-1)k_0 \frac{x^2+y^2}{2R}}$$

Přichází-li na čočku vlna $e^{ik_z z}$, vychází z ní $t(x,y)e^{ik_z z} =$

$$= k_0\, e^{-i(n-1)k_0 \frac{x^2+y^2}{2R}}\, e^{ik_z z}$$ ... Parabolická vlna

$U(x,y,z) = h_0 e^{-k_0 \frac{x^2+y^2}{2f}}$ $\quad h_0 = e^{ink_0 d_0}$

z za čočkou

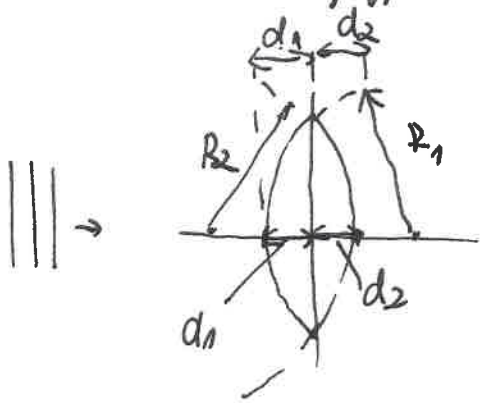
$$f = \frac{R}{n-1}$$

h_0 ... konstantní fázový faktor, nemá význam

$e^{-k_0 \frac{(x^2+y^2)}{2f}}$ ... kružnice

= parabolická plocha sbíhající se do ohniska (Fresnelova přiblížení, kulové plochy dané Taylorovým rozvojem při aproximaci $\overline{QC}$.

Dvojvypuklá (bikonvexní čočka)



$d_1 + d_2 = d_0$

Znaménková konvence

$R_1 > 0$

$R_2 < 0$

$$\rightarrow \sim e^{ink_0 d_0} e^{-i(n-1)k_0 \frac{x^2+y^2}{2R_1}} e^{ink_0 d_2} e^{+i(n-1)k_0 \frac{(x^2+y^2)}{2R_2}}$$

$$= e^{ink_0(d_1+d_2)} e^{-i(n-1)k_0 (x^2+y^2)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} =$$

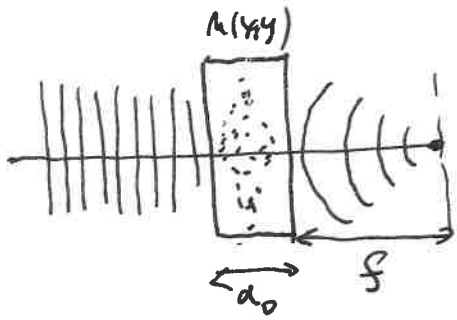
$$= e^{ink_0 d_0} e^{+i(n-1)k_0 (x^2+y^2)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} =$$

$$= e^{ink_0 d_0} e^{-i\frac{k_0 (x^2+y^2)}{2f}} \qquad \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Působení čočky, hranolu apod. na světelnou vlnu spočívá ve fázovém posunu dopadající vlny, který způsobí zakřivení vlnoplochy určitým způsobem. Tento fázový posun závisí na tloušťce materiálu v příčné vzdálenosti od optické osy. Změna optické dráhy je tedy realizována změnou geometrické tloušťky prostředí s indexem lomu n.

Stejný fázový posun může způsobit transparentní rovinná destička o konstantní tloušťce, ale s proměnným indexem lomu.

$$t(x,y) = e^{i n(x,y) k_0 d_0}$$



$$f = \frac{1}{n_0 \alpha^2 d_0}$$

$$n(x,y) = n_0\left[1 - \frac{1}{2}\alpha^2(x^2+y^2)\right]$$

Kromě změny optické dráhy (tj. fáze) mohou optické prvky snižovat amplitudu absorpcí. Index lomu je v tomto případě imaginární!

$$\tilde{n} = n + i\gamma$$

$$t(x,y,z) = e^{i(n+i\gamma)k_0 d_0} = e^{i n k_0 d_0} \cdot e^{-\gamma k_0 d_0}$$

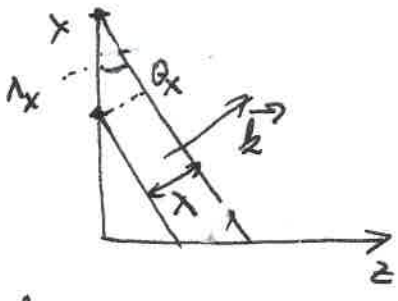
(případ destičky s homogenním tloušťkou d_0 a konstantním indexem lomu)

Fourierovská optika

Popisuje šíření světla na základě harmonické analýzy (Fourierovy transformace)

Vztah mezi prostorovou harmonickou funkcí a rovinnou vlnou

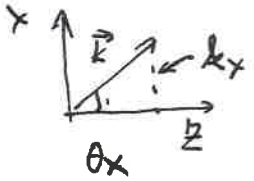
Předpokládejme nejprve, že se rovinná vlna šíří prostorem tak, že $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$



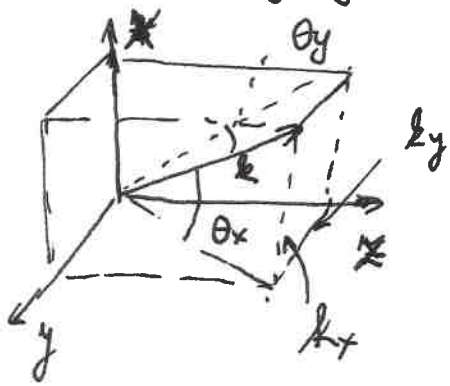
$$\sin\theta_x = \frac{\lambda}{\Lambda_x} = \Lambda_x = \frac{1}{\nu_x}$$

$$\lambda\nu_x = \frac{2\pi}{k}\nu_x = \frac{k_x}{k} \qquad \nu_x = \frac{k_x}{2\pi} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad k_x = 2\pi\nu_x$$

θ_x ... úhel s rovinou yz



Analogicky pro obecný případ $\vec{k} = (k_x\ k_y\ k_z)$



θ_y .. úhel s rovinou xz

Pro malé úhly

$k_x \ll k$, $k_y \ll k$

$$\theta_x = \frac{\lambda}{\Lambda_x} = \lambda\nu_x = \frac{2\pi\nu_x}{k} = \frac{k_x}{k}$$

$$\theta_y = \frac{\lambda}{\Lambda_y} = \lambda\nu_y = \frac{2\pi\nu_y}{k} = \frac{k_y}{k}$$

Rovinná vlna

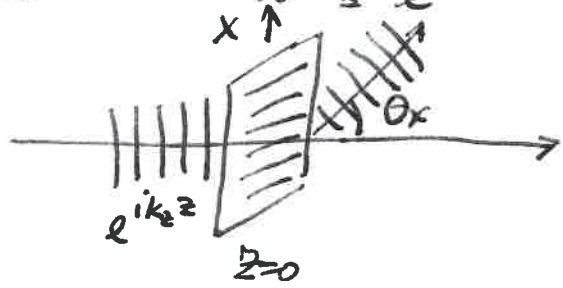
$V(x,y,z) = A e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$ lze psát jako

$$V(x,y,z) = V(x,y,0)\cdot e^{i k_z z} = f(x,y)\, e^{i k_z z}$$

Prostorová spektrální analýza

Vedeme rovinnou vlnu s jednotkovou amplitudou postupující ve směru z dopadá na destičku s komplexní amplitudovou propustností

$$f(x,y) = e^{i(k_x x + k_y y)} = e^{i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)}$$



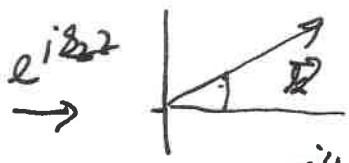
$$\theta_x = \arcsin \lambda \nu_x = \arcsin \frac{\lambda}{\Lambda_x}$$

$$\theta_y = \arcsin \lambda \nu_y$$

Na obrázku zobrazeno pro zjednodušení pro případ $\theta_y = 0$ ($k_y = 0$, $\Lambda_x \to \infty$)

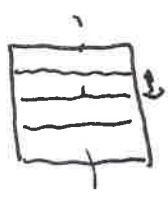
$$z > 0 \qquad U(x,y,z) = f(x,y)\, e^{ik_z z}$$

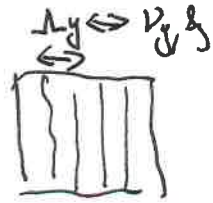
⇒ Stínítko s propustností $f(x,y) = e^{i(k_x x + k_y y)}$ způsobí, že dopadající vlna změní směr a zamíří do směru daného úhly θ_x, θ_y



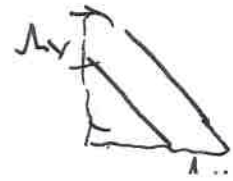
$$\rightarrow e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$f(x,y) = e^{i(k_x x + k_y y)} = e^{i(2\pi\nu_x x + 2\pi\nu_y y)}$$





velká



Nechť $V(x,y,0) = f(x,y)$

$$k_z = \pm\sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Musí platit $k_x^2 + k_y^2 < k^2$

Znaménka $\pm$ reprezentují vlny postupující v opačných směrech

$$k_z = \pm\sqrt{2^2 - (k_x^2 + k_y^2)} = \sqrt{(k\pi)^2\left(\frac{1}{\lambda^2} - (\nu_x^2 + \nu_y^2)\right)} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - (\nu_x^2 + \nu_y^2)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda^2} \geq (\nu_x^2 + \nu_y^2)$$

$$\frac{1}{\lambda} \geq \nu$$

Podmínka $\nu_x^2 + \nu_y^2 > \frac{1}{\lambda^2}$ $\left(\propto \nu \geq \frac{1}{\lambda}\right)$

je číslo pod $\sqrt{\ }$ < 0, lze je psát jako $(-1)\cdot b$, $b>0$ $\Rightarrow \sqrt{-1} = i$ $\Rightarrow$ to nese k útlumu a evanescentní vlně

Velké ν $\Leftrightarrow$ Malý detail $\Leftrightarrow$ $d = \frac{1}{\nu}$

$\frac{1}{d} < \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda < d$

ti informace obsažená v prost. frekvenci $\nu = \frac{1}{d}$ nemůže být přenesena vlnou větší než d (to nedělá $> \lambda$)

Obecně – nechť nejprve $f(x,y) = f(x)$

Funkci $f(x)$ lze obecně vyjádřit podle Fourierovy analýzy jako $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{k_x} e^{\pm i k_x x} dk_x$, kde

F_{k_x} jsou příslušné Fourierovy koeficienty rozvoje do harmonických funkcí:

$$F_{k_x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{\mp i k_x x} dx$$

Tento postup lze zobecnit do 2 dimenzí

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int F_{k_x k_y} e^{\pm i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

kde $$F_{k_x k_y} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int f(x,y) e^{\mp i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Libovolný průběh komplexní amplitudové propustnosti lze tedy vyjádřit jako integrál z rovinných vln s amplitudami, jež jsou Fourierovými koeficienty rozvoje.

Vlnu prošlou takovým stínítkem lze pak psát jako

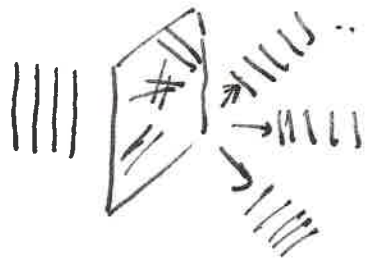
$$V(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int F_{k_x k_y} e^{\pm i(k_x x + k_y y)} e^{\pm i k_z z} dk_x dk_y$$

Místo zavedení prostorových kmitočtů k_x, k_y lze psát integrály do prostorových frekvencí ν_x, ν_y, kde

$$k_x = 2\pi \nu_x \qquad k_y = 2\pi \nu_y$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda^2} - \nu_x^2 - \nu_y^2 \right)^{1/2}$$

Je-li propustnost optického elementu $f(x,y)$ součtem nějakého počtu harmonických funkcí o různých prostorových frekvencích, pak prošlá optická vlna je součtem stejného počtu rovinných vln rozptýlených do různých směrů – každá prostorná frekvence je svázána s příslušejícím směrem.



Máme-li tedy v bodě $z = 0$ rovinu s komplexní amplitudovou propustností $f(x,y)$ složenou z harmonických funkcí různých prostorových frekvencí, každá harmonická vlna na výstupu odpovídá rovinné vlně směřující do směru daného směrovými úhly $\theta_x = \arcsin \frac{\lambda}{\Lambda_x} = \arcsin \lambda \nu_x =$

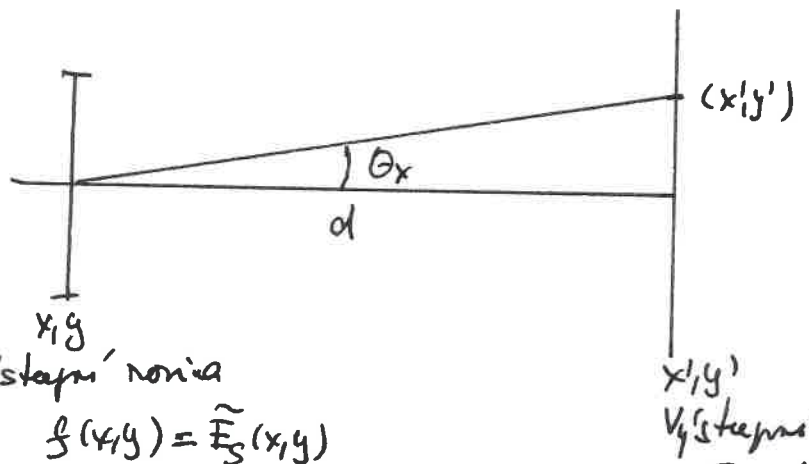
$$= \arcsin \frac{k_x}{k} \quad a \quad \theta_y$$

Tato vlna má amplitudu $F(k_x, k_y)$, jež je Fourierovou transformací $f(x,y)$. Z toho plyne, že světlo lze použít k výpočtu Fourierovy transformace 2d funkce $f(x,y)$ jednoduše tak, že vytvoříme stínítko s touto amplitudovou propustností, přes které necháme projít rovinnou harmonickou vlnu jednotkové amplitudy.

Protože každá rovinná vlna je nekonečná, překrývá se s ostatními vlnami, je třeba najít metodu, jak tyto vlny separovat tak, aby na výstupní rovině k signálu v bodě $(x'y')$ přispívala pouze jedina rovinná vlna.

Rozborem velmi podobným postupu, který jsme použili při aproximacích Kirchhoff Fresnelova integrálu v difrakci, lze dospět k závěru, že shora uvedená podmínka lze splnit buď použitím Fraunhoferovy aproximace (zobrazení v dalekém poli) nebo s využitím spojné čočky.

1) Fraunhoferova aproximace

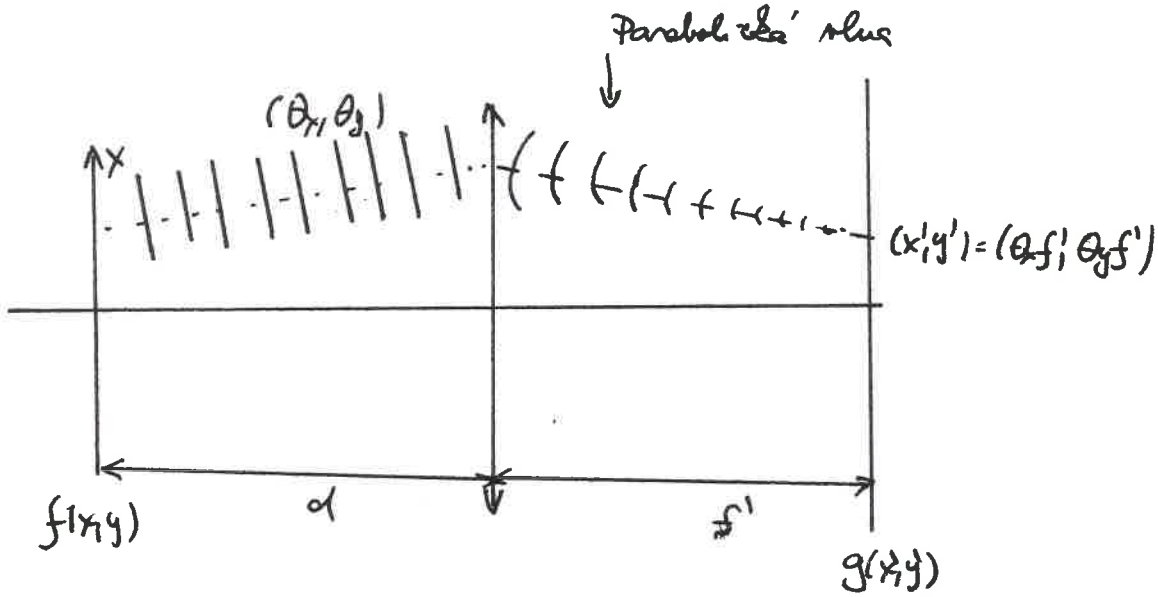


$$\tilde{E}(x'y') = \tilde{A} \int \tilde{E}_s(x,y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, dx\,dy$$

$\tilde{A}$ … komplexní amplituda; $\tilde{E}_s(x,y)$ … Vstupní rovina; $k_y = \frac{k y'}{d}$

$$\theta_x = \frac{k_x}{k} = \lambda \nu_x \qquad \theta_x = \frac{x'}{d} \Rightarrow k_x = k\frac{x'}{d} \qquad \nu_x = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{x'}{d}$$

Povrch spojné čočky



$$\theta_x = \frac{k_x}{k} = \lambda \nu_x \qquad \theta_x = \frac{x'}{f'} = \frac{k_x}{k} \Rightarrow k_x = k\frac{x'}{f'}$$

$$\theta_y = \frac{k_y}{k} = \lambda \nu_y \qquad \theta_y = \frac{y'}{f'} \qquad k_y = k\frac{y'}{f'}$$

Při dopadu rovinné vlny se směrovými úhly θ_x, θ_y ve čočce se vlna na výstupu čočky mění ve vlnu paraboloidovou a dopadá v ohniskové rovině do bodu $(x',y') = (\theta_x f', \theta_y f')$

Je-li $f(x,y) = E_S(x,y)$, lze ukázat, že

$$g(x',y') = E(x',y') = B \int E_S(x,y)\, e^{i(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy$$

Pole v rovině $x'y'$ je tedy Fourierovou transformací pole $E_S(x,y)$ na vstupní rovině.

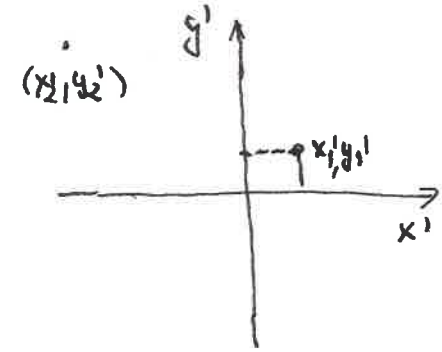
$$k_x = k \cdot \frac{x'}{f'} \qquad k_y = k \cdot \frac{y'}{f'}$$

Filtrace obrazu

K filtraci obrazu se používá fakta, že rovinné vlny generované v vstupní rovině $f(x,y)$ různými prostorovými frekvencemi k_x (ν_x), k_y (ν_y) dopadají na výstupní rovinu $g(x',y')$ pod různými úhly θ_x, θ_y. Ve Fourierovské rovině se tedy nacházejí dále od středu optického systému. Ze základního rozboru Fourierovy analýzy víme, že menší motivy vyžadují při Fourierově rozkladu vyšší prostorové frekvence

Malý motiv v obrazu → vyšší k_x, k_y → vyšší θ_x, θ_y

Větší motiv v obrazu → menší prostorové frekvence k_x, k_y → menší úhly θ_x, θ_y



Fourierovská rovina

x'_1, y'_1	x'_2, y'_2
$x'_1 = \theta_{x_1} f'$	$x'_2 = \theta_{x_2} f'$
$y'_1 = \theta_{y_1} f'$	$y'_2 = \theta_{y_2} f'$

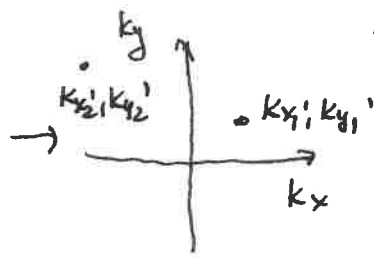
$\Rightarrow k_2 - k_1 \cdot \theta_{x_2} > \theta_{x_1}$

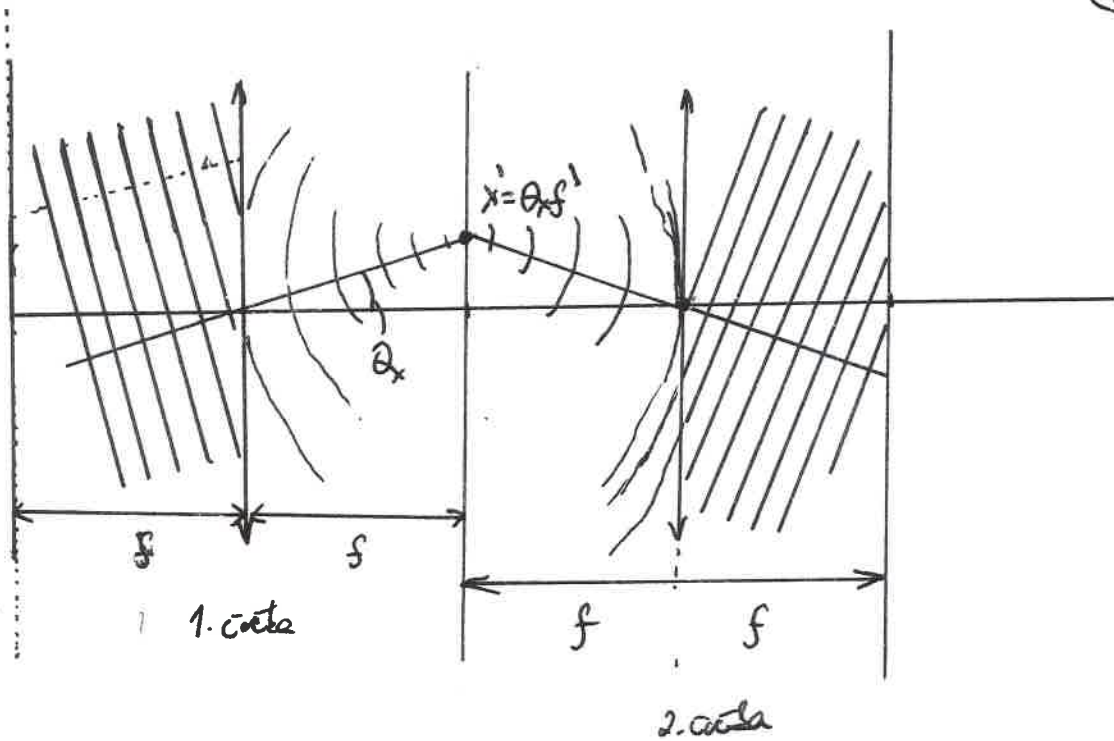
je $x'_2 > x'_1$ atd.

k můžeme též zobrazit v k prostoru s využitím vztahů

$k \cdot \theta_x = k_x \qquad k_x = k \frac{x'}{f'}$

$k \cdot \theta_y = k_y \qquad k_y = k \cdot \frac{y'}{f'}$



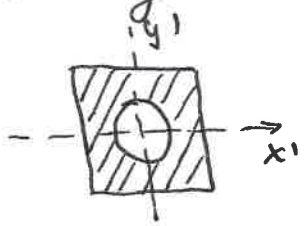


Fourierova rovina

Filtry - dolní propust - pustí nízké prostorové frekvence

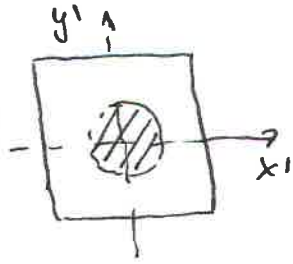
→ tj. odstraníme vysoké prostorové frekvence

→ Výsledný obraz nebude obsahovat jemné detaily



Dolní propust

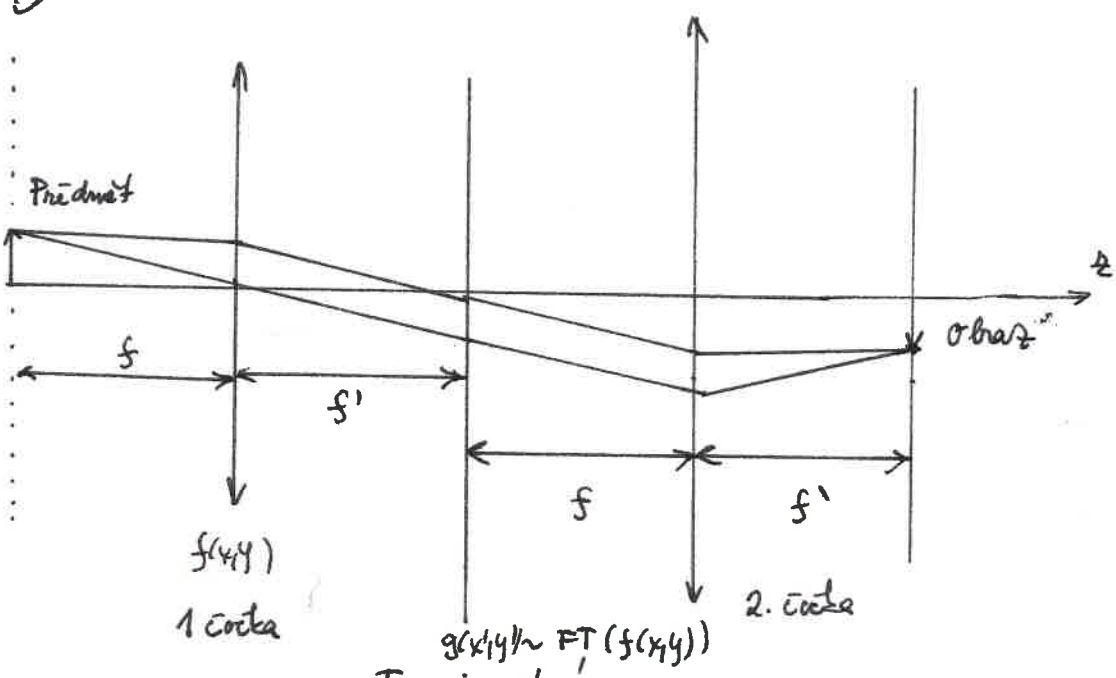
Horní propust - odfiltruje nízké prostorové frekvence - vynikají plochy v obrazu, zůstanou obrysy



Horní propust

K prostorové filtraci obrazu se využívá tzv. 4f zobrazovací systém

Předmět se umístí do předmětového ohniska 1. čočky ($d=f$). Čočka zobrazením předmětu do své obrazové ohniskové roviny provede Fourierovu transformaci předmětu. 2. čočka se umístí tak, že její předmětová ohnisková rovina je totožná s obrazovou ohniskovou rovinou 1. čočky. 2. čočka pak zobrazením do své obrazové ohniskové roviny provede zpětnou Fourierovu transformaci. Jestliže do Fourierovy roviny (obrazová ohnisková rovina 1. čočky = předmětová ohnisková rovina 2. čočky) umístíme filtr (nepropustné stínítko), které odstíní část signálu dopadajícího v určitém intervalu směrových úhlů θ_x, θ_y, pak bude tato informace na výstupu (v obrazové ohniskové rovině 2. čočky) chybět.



Záření černého tělesa

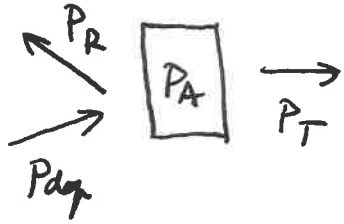
Tělesa mohou záření reflektovat, absorbovat nebo propouštět. Záření tělesem absorbované musí být v rovnovážném stavu opět emitováno.

P_R výkon reflektovaného záření

P_A výkon absorbovaného záření

P_T výkon transmitovaného záření

P_{dop} výkon záření dopadajícího na těleso



$$P_{dop} = P_R + P_A + P_T$$

$$R = \frac{P_R}{P_{dop}} \quad \text{reflektance}$$

$$A = \frac{P_A}{P_{dop}} \quad \text{absorbance}$$

$$T = \frac{P_T}{P_{dop}} \quad \text{transmitance}$$

P_E ... výkon emitovaného záření tělesem

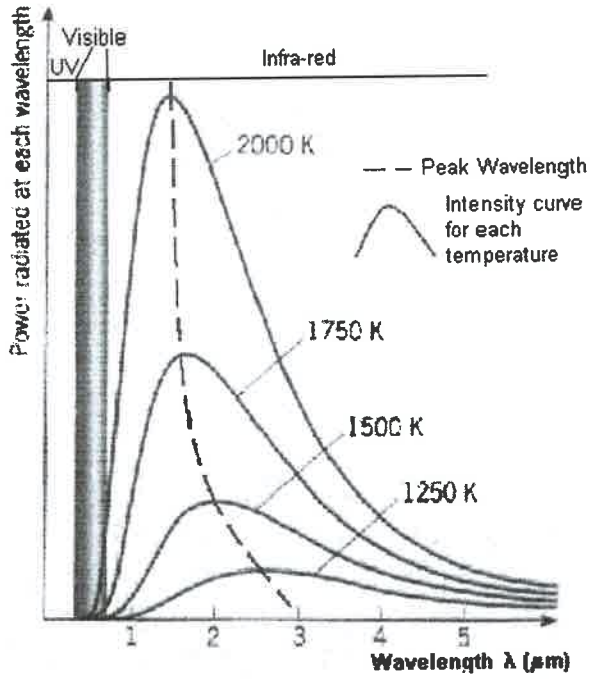
V rovnováze $P_A = P_E$ $\quad \varepsilon = \frac{P_E}{P_{dop}}$ emisivita

$$1 = R + A + T$$

Je-li $R = T = 0$, je všechno dopadající záření absorbováno. V tomto případě je v rovnováze

$$A = \varepsilon = 1$$

Takové těleso se nazývá černé.



Experimentálně bylo pozorováno, jak záření černého tělesa záleží na vlnové délce a na teplotě.

Teoretický průběh spektra dlouho nedařilo vysvětlit.

Mnoho pokusů o vysvětlení pomocí klasické vlnové teorie vedlo podle Plancka a Einsteina k závěru, že světlo se skládá z jednotlivých kvant.

Pokusy o vysvětlení spektra záření černého tělesa

Rayleigh 1900

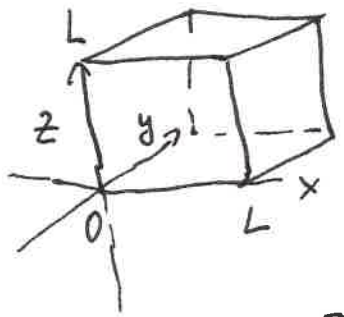
1 mód EM pole ⟷ 1 vlnový vektor $\vec{k}$ =

$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ $\quad k = \frac{\omega}{c}$ = 1 frekvence ω

Libovolné EM pole lze psát pomocí Fourierova rozvoje

$$E = Re \left\{ \sum_{k_x k_y k_z} E_{k_x k_y k_z} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \right\}$$

Zvolme v prostoru krychli o hraně L



Ve záření uplatníme tzv. periodickou okrajovou podmínku

$E(0) = E(L)$ pro všechny 3 dimenze

L ... velké vůči λ – daná podmínka jen malo omezující

$\Rightarrow$ $e^{ik_x L} = e^{ik_y L} = e^{ik_z L} = 1 = e^{i 2n\pi}$ $\quad n \in Z$ $\quad :x$

$e^{i 2m\pi}$ $\quad m \in Z$ $\quad :y$

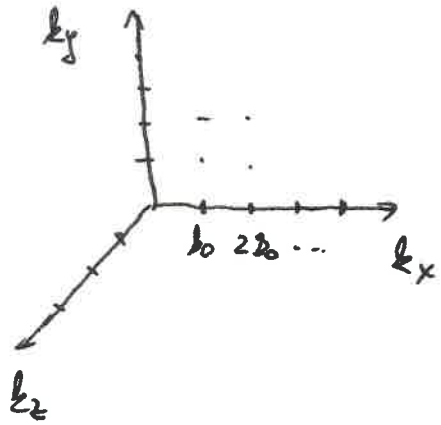
$e^{i 2l\pi}$ $\quad l \in Z$ $\quad :z$

$\Rightarrow k_x L = 2n\pi$

$k_x = \frac{2\pi}{L} \cdot n = k_0 \cdot n$ $\quad k_y = \frac{2\pi}{L} \cdot m = k_0 m$

$k_z = \frac{2\pi}{L} \cdot l = k_0 l$

$$E = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{n} \sum_{m} \sum_{l} e^{i(k_0 n x + k_0 m y + k_0 l z)} \right\} \bar{E}_{k_x k_y k_z}$$



$$k_0 = \frac{2\pi}{L}$$

1 stav v k prostoru zabírá $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$ objemu

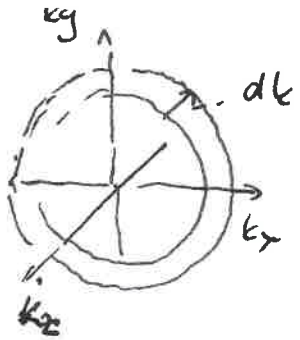
$$k_x = n k_0 \qquad k_y = m k_0 \qquad k_z = l k_0$$

$$k^2 = (n^2 + m^2 + l^2) k_0^2$$

n, m, l ... kladné i záporné

→ Vlny se mohou pohybovat v (+) i (−) směrech

2. Kolik existuje způsobů kombinací n, m, l jestliže se k zvýší o dk?



Objem $4\pi k^2 dk$

Počet stavů

$$\frac{4\pi k^2 dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{4\pi k^2 dk}{k_0^3}$$

Rayleigh předpokládal, že každý stav módu nese energii $k_B T$. Navíc je nutno vzít v úvahu, že každý mód má 2 různé polarizace.

Celková hustota energie záření pak je

$$u = \int_0^\infty 2 \cdot \frac{k_B T}{L^3} \cdot \frac{4\pi k^2 \cdot L^3}{8\pi^3} dk =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\pi^2} \cdot k_B T \cdot k^2 dk = k_B T \int_0^\infty \frac{k^2}{\pi^2} dk$$

$\rightarrow$ Vychází $\sim T$ (Stefan-Boltzmannův zákon $\sim T^4$)

Navíc diverguje pro velké k (malé λ))

$$u = k_B T \int_0^\infty \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \qquad \left(k = \frac{\omega}{c}, \; dk = \frac{d\omega}{c}\right)$$

$$u = \int \rho(\omega)\, d\omega \qquad \rho(\omega) = \frac{k_B T\, \omega^2}{\pi^2 c^3} = \rho_{Rayleigh}$$

Wien použil empirický vztah

$$\rho_{Wien} = \frac{\hbar \omega^3 e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\pi^2 c^3}$$

Planck postoupil na základě přesnějších experimentálních dat Wienovu formuli mírně revidoval

$$\rho_{Planck} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 \left[e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right]}$$

Odvození Planckovy formule

- Planck předpokládal, že každý mód neobsahuje $k_B T$ energii, ale obsahuje nějaké diskrétní množství energie, oddělené $\hbar\omega$ – kvantum.

Ze statistické fyziky plyne tz. Boltzmannův faktor, tj. že pravděpodobnost že daný mód obsahuje $n\hbar\omega$ energie je $P_n \sim e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}}$

$$P_n = A \cdot e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}}$$

$$\sum P_n = \sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}} = 1 \qquad A = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)$$

Celková energie módu

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \cdot P_n = \hbar\omega\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}} =$$

$$= -\hbar\omega\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{k_B T}} \right) =$$

$$= -\hbar\omega\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} \right)$$

$$= -\hbar\omega\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)\left[\frac{-1 \cdot e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{\hbar\omega\, e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (*)$$

Dále spočteme u stejně jako Rayleigh, ale namísto energie 1 módu $k_B T$ dosadíme vztah $*$

$$u = \int_0^\infty 2 \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \cdot \frac{1}{L^3} \cdot 4\pi \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{L^3}{8\pi^3} \cdot \frac{d\omega}{c} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right)} d\omega$$

$$\wp_{Planck}(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right)} \qquad \frac{\hbar\omega}{k_B T} = x$$

$$\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right)} d\omega = \frac{(k_B T)^4}{\hbar^4} \cdot \hbar \frac{1}{\pi^2 c^3} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{\frac{\pi^4}{15}} =$$

$$= \frac{k_B^4 T^4}{\hbar^3 \pi^2 c^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{k_B^4 T^4}{\hbar^3} \frac{\cdot 8\pi^3 \pi^4}{\pi^2 c^3 \cdot 15} =$$

$$= \frac{8\pi^5 k_B^4 T^4}{15 h^3 c^3} = \sigma T^4$$

Stefan-Boltzmannův zákon