Plánovaná témata na přednášku 13.10

Radiační tlak. Vlnová rovnice v izotropním dielektriku, index lomu. Polarizace světla. Světlo lineárně, kruhově a elipticky polarizované. Maticový popis polarizace, Jonesovy vektory. Polarizační zařízení – polarizátor, rotátor, fázová destička. Malusův zákon.

Následující text popisuje odvození vlnové rovnice pro izotropní nemagnetické prostředí s volnými náboji a proudy.

Odvození vlnové rovnice

VR1

$$\operatorname{div}\vec{D} = \varrho_f \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \mu = \mu_0\mu_r$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{j}_f = \sigma\vec{E} \qquad \varepsilon_r = f(\vec{r})$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \mu_r = f(\vec{r})$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{E}\right) = -\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} = -\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (*)$$

Dále použijeme vztahu

$$\operatorname{rot}(u\vec{a}) = u\operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{grad}u\times\vec{a}.$$

kde $u = \frac{1}{\mu}$ $\quad \vec{a} = \operatorname{rot}\vec{E}$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{E}\right) = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \operatorname{grad}\frac{1}{\mu}\times\operatorname{rot}\vec{E}$$

z rovnice $(*)$ $\quad \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{E}\right) + \varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$

$\downarrow$

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \operatorname{grad}\frac{1}{\mu}\times\operatorname{rot}\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}\right) + \operatorname{grad}\frac{1}{\mu}\times\operatorname{rot}\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

Pomocný výpočet

$$\operatorname{grad}\ln\mu = -\operatorname{grad}\ln\frac{1}{\mu} = -\mu\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}\frac{1}{\mu} = -\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\ln\mu$$

Proto

$$\frac{1}{\mu}\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E}-\Delta\vec{E}\right)-\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\ln\mu\times\operatorname{rot}\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0$$

$$\downarrow\quad \Delta\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\operatorname{grad}\ln\mu\times\operatorname{rot}\vec{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E}=0$$

Obecný tvar vlnové rovnice

a) V prostředí bez nábojů

$$\rho_{free}=0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{div}\vec{D}=0$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E})=0 \qquad \varepsilon\operatorname{div}\vec{E}+\vec{E}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon=0$$

$$\operatorname{grad}\ln\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\varepsilon$$

$$\operatorname{div}\vec{E}+\vec{E}\cdot\frac{\operatorname{grad}\varepsilon}{\varepsilon}=0$$

$$\operatorname{div}\vec{E}=-\vec{E}\cdot\operatorname{grad}\ln\varepsilon$$

$$\Delta\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\operatorname{grad}\ln\mu\times\operatorname{rot}\vec{E}+\operatorname{grad}\left(\vec{E}\cdot\operatorname{grad}\ln\varepsilon\right)=0$$

b) homogenní prostředí

$$\varepsilon=\text{konst}\qquad \mu=\text{konst}$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{grad}\ln\mu=0 \qquad \operatorname{grad}\ln\varepsilon=0$$

$$\Rightarrow\quad \Delta\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0$$

c) Nevodivé prostředí $\sigma=0$

$$\Rightarrow\quad \Delta\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

Z porovnání s obecnou vlnovou rovnicí $\Delta\Psi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$

plyne, že $\varepsilon\mu = \varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r = \frac{1}{v^2}$

ve vakuu $\varepsilon_r = 1 \quad \mu_r = 1$

$$\Rightarrow \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$$

Zavedeme tzv. index lomu

$$n = \frac{c}{v} \qquad \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

V nemagnetickém prostředí ($\mu_r = 1$)

je $n = \sqrt{\varepsilon_r} \Rightarrow n^2 = \varepsilon_r$

analogicky lze odvodit

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(ve vakuu)}$$

Dále ukážeme, že rovinná vlna, tj. funkce $f(\vec{s}\cdot\vec{r} - vt)$ je řešením vlnové rovnice

$$\Delta f - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(s_x x + s_y y + s_z z - vt)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\quad)}{\partial y^2} + \frac{\partial(\quad)}{\partial z^2} - \varepsilon\mu v^2 f = 0$$

$$\underbrace{(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2)}_{1} f - \varepsilon\mu v^2 f = 0$$

$$\Rightarrow f(1 - \varepsilon\mu v^2) = 0$$

$\vec{s}$ = jednotkový vektor

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} \qquad \text{Platí}$$

Středování $\cos^2(\ )$

$$\langle \cos^2\omega t\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\, dt + \frac{1}{2T}\int_0^T \cos 2\omega t\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\omega}\left[\sin 2\omega t\right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega T}\left[\sin\frac{4\pi t}{T} - \sin 0\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega T}\left[\sin 4\pi - \sin 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos^2(kz-\omega t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kz-\omega t)\, dt = \qquad \begin{array}{l} kz-\omega t = \xi \\ -\omega\, dt = d\xi \end{array}$$

$$= -\frac{1}{\omega T}\int_{kz}^{kz-\omega T} \cos^2\xi\, d\xi = -\frac{1}{\omega T}\int_{kz}^{kz-\omega T} \frac{1}{2}(1+\cos 2\xi)\, d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2\omega T}\left[\xi\right]_{kz}^{kz-\omega T} - \frac{1}{2\omega T}\left[\frac{1}{2}\sin 2\xi\right]_{kz}^{kz-\omega T} =$$

$$= -\frac{1}{2\omega T}\cdot(-\omega T) - \frac{1}{4\omega T}\left[\sin 2(kz-\omega T) - \sin kz\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega T}\left[\sin 2kz \cos 2\omega T - \cos 2kz \sin 2\omega T\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}\left[\sin 2kz \underbrace{\cos 4\pi}_{=1} - \cos 2kz \underbrace{\sin 4\pi}_{=0} - \sin 2kz\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}\left[\sin 2kz - \sin 2kz\right] = \frac{1}{2}$$