

Nerovinné postupné vlny

Hertzův dipól – zdroj kulové vlny

Vektorový *versus* skalární popis

Mikroskopický popis indexu lomu (Ewald – Oseen)

Skalární paraxiální aproximace

Omezení svazku – difrakce

Sbíhavá vlna – zobrazení

Gaussovský svazek

Kmitající dipól - zdroj elektromagnetické vlny

Maxwellovy rovnice

obvyklý tvar pro kurz optiky

vhodné průměrování v látkovém prostředí

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{VOLNÉ}}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{VOLNÉ}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

+ materiálové vztahy (mohou být i dost složité:
nelokálnost v čase i prostoru \Rightarrow časová a prostor.
disperze;
nelinearity, ...)

Zde: zjednodušení na volné nábíje a proudy
ve vakuu

1) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ vektorový potenciál

2) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \phi$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{skalární potenciál}$$

3) $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{VOLNÉ}} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j}_{\text{VOLNÉ}}$$

Lorenzova kalibrační podmínka

$$4) \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{vol}}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{\rho_{\text{vol}}}{\epsilon_0}$$

Řešení vlnových rovnic pro $\vec{A}(\vec{r}, t)$, $\phi(\vec{r}, t)$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}_0(\vec{r}', t^*)}{R} dV'$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_v(\vec{r}', t^*)}{R} dV'$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|, \quad t^* = t - \frac{R}{c}$$

Speciálně pro zdroje ve tvaru kmitajícího dipólu
 lze odvodit vlnové rovnice pro
 Hertzovy vektory.

$\vec{\Pi}_e$ pro pole elektrických dipólů

$\vec{\Pi}_m$ pro pole magnetických dipólů (proudové
 smyčky)

Zde se omezíme na elektrické dipóly $\vec{P}(\vec{r}', t^*)$
 pouze lineárně kmitající proud

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad \rho = -\operatorname{div} \vec{P}$$

\vec{P} objemová hustota dipólového momentu

Osvědčí se

$$\vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} \quad \phi = -\operatorname{div} \vec{\Pi}_e$$

\Rightarrow vlnová rovnice pro $\vec{\Pi}_e(\vec{r}, t)$

$$\nabla^2 \vec{\Pi}_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_e}{\partial t^2} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

A řešením

$$\vec{\Pi}_e(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{r}', t^*)}{R} dV'$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_e}{\partial t^2}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{c^2} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t}$$

Velmi malý kmitající dipól ($\ll \lambda$) v počátku s.s.

$$\vec{P}(\vec{r}', t^*) = \vec{p}(t^*) \cdot \delta(\vec{r}) = p(t^*) \cdot \delta(\vec{r}) \cdot \vec{m}$$

$|\vec{m}| = 1$

V delším zkrácení máme

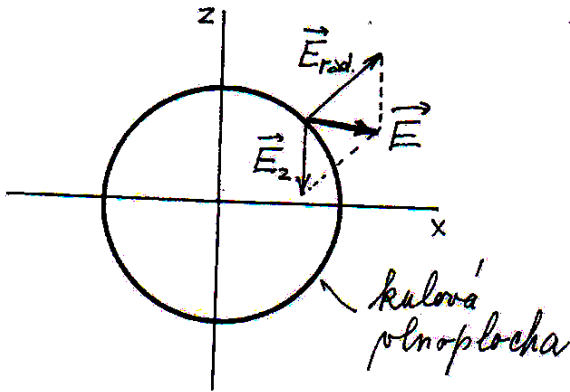
$$[p] = p\left(t - \frac{R}{c}\right) \approx p(t^*)$$

a orientace dipólu $\vec{m} \approx (0, 0, 1)$

Pro orientaci dipólu podél osy z $\vec{n} = (0, 0, 1)$

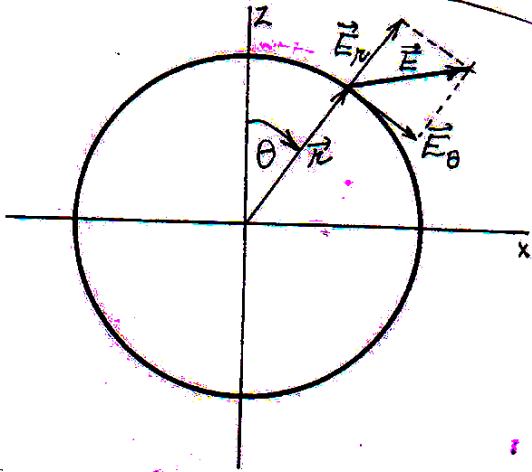
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left(\frac{3[\dot{p}]}{r^3} + \frac{3[\ddot{p}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2r} \right) \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} - \left(\frac{[\dot{p}]}{r^3} + \frac{[\ddot{p}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2r} \right) \cdot \vec{n} \right\}$$

$$= \vec{E}_{\text{radiální}} + \vec{E}_z$$



$\vec{E}_{\text{radiální}}$ je kolmá
na plochu
směr \vec{E}_z je stále vz

$B_z = 0$
 $\vec{B} \in$ roviny (x, y)
k roviny $z = \text{konst.}$



pravoúhlí (x, y, z)
sférické $(r, \theta, \alpha)_{ss}$

$$\frac{\vec{r}}{r} = (1, 0, 0)_{ss}$$

$$\vec{n}(r, \theta, \alpha) = (\cos \theta, -\sin \theta, 0)_{ss}$$

při $\vec{n} = (0, 0, 1)$ pravoúhlí

Ve sférických souřadnicích (r, Θ, α)
radiální složky

$$\left(\vec{E}(\vec{r}, t)\right)_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{[\rho]}{r^3} + \frac{[\dot{\rho}]}{cr^2} \right) \cdot \cos \Theta$$

$$\left(\vec{B}(\vec{r}, t)\right)_r = 0$$

složky ležící ke kulové vlnoploše

$$\left(\vec{E}(\vec{r}, t)\right)_\Theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{[\rho]}{r^3} + \frac{[\dot{\rho}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{\rho}]}{c^2 r} \right) \cdot \sin \Theta$$

$$\left(\vec{B}(\vec{r}, t)\right)_\Theta = 0$$

$$\left(\vec{E}(\vec{r}, t)\right)_\alpha = 0$$

$$\left(\vec{B}(\vec{r}, t)\right)_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{[\dot{\rho}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{\rho}]}{c^2 r} \right) \cdot \sin \Theta$$

Tato vlna splňuje MR. ve vakuu.

Nechť malinký dipól kmitá monochromaticky

$$[p] = p_0 \cdot \cos \omega t^* \quad [\dot{p}] = -\omega p_0 \sin \omega t^*$$

$$[\ddot{p}] = -\omega^2 p_0 \cos \omega t^*$$

Přispívky kmitají fázově posunutě, jejich relativní velikost závisí na frekvenci

V komplexním popisu^{*})

$$[p] = p_0 \exp[i(kr - \omega t)] \quad [\dot{p}] = -i\omega p_0 \exp[i(kr - \omega t)]$$

$$[\ddot{p}] = -\omega^2 p_0 \exp[i(kr - \omega t)] \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Nemulová složky polí ve sférických souřadnicích

$$E_\theta(r, \theta, \alpha, t) = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \sin \theta e^{i(kr - \omega t)} \quad (r, \theta, \alpha)$$

$$E_r(r, \theta, \alpha, t) = \frac{p_0}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) \cdot \cos \theta e^{i(kr - \omega t)}$$

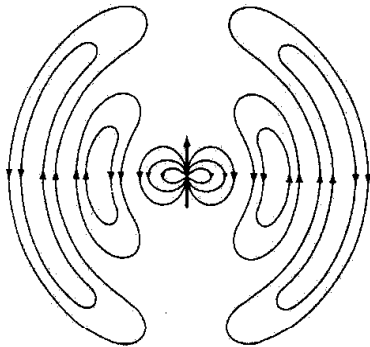
$$B_\alpha(r, \theta, \alpha, t) = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{-ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \cdot \sin \theta e^{i(kr - \omega t)}$$

osová symetrie - není závislost na α

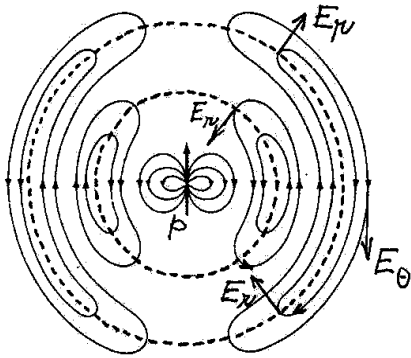
pro velká r : E_θ a B_α kmitají ve fázi

$$\begin{aligned} *) [p] &= p_0 \cdot e^{-i\omega t^*} & t^* &= t - \frac{r}{c} \\ &= p_0 \cdot e^{-i\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)} & &= p_0 e^{i\frac{\omega}{c}r} \cdot e^{-i\omega t} = p_0 e^{i(kr - \omega t)} \end{aligned}$$

Znárodní plochy elektrického pole Hertzova dipólu

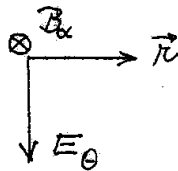
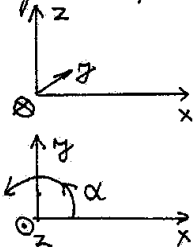


$\text{div } \vec{E} = 0$
 Siločáry mají být uzavřené.
 Uzávěrní mají být radiační složky pole
 Obr. pro jeden čas t .



Čárkování jsou rozdílné
 vlnoplochy se směrem \vec{p}
 E_θ maxima
 E_r maximální
 $p_z > 0 \vec{p} \uparrow$.. orientace v obřadku
 statická zóna $E_\theta > 0 \vec{E} \downarrow$
 radiační zóna ve vzdálenosti
 celistvých násotků \vec{E}
 $E_\theta < 0 \vec{E} \uparrow$

Magnetické siločáry jsou kružnice se středy na ose dipólu.



Orientace v radiační
 zóně podobná jako
 u rovinné vlny

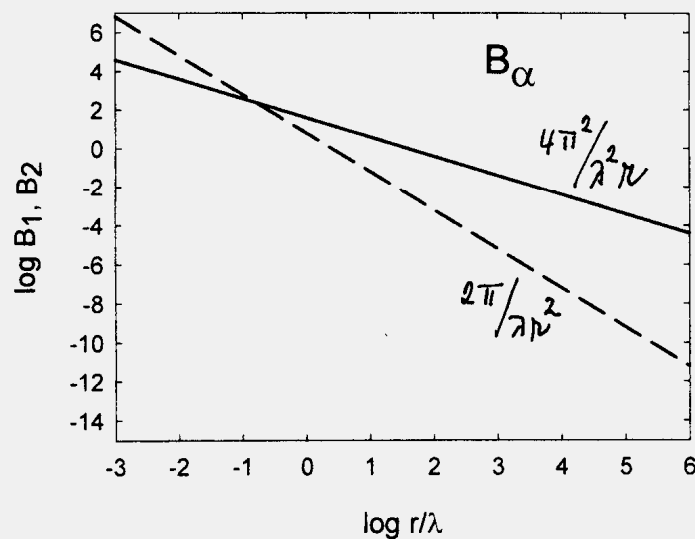
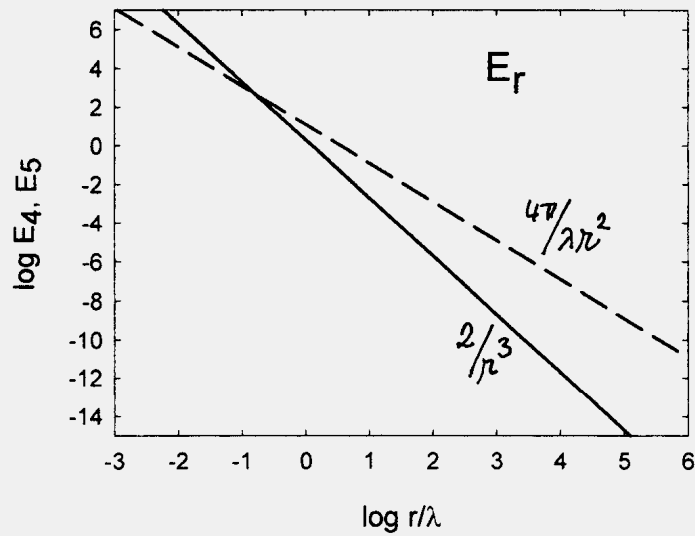
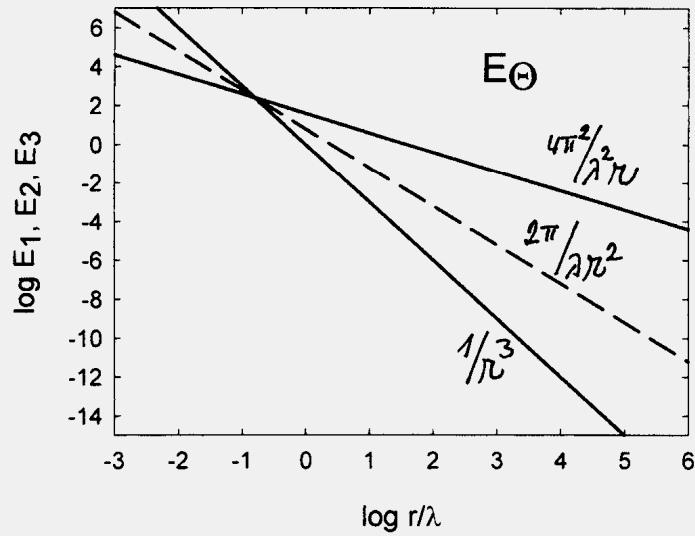
Vlnoplocha: plocha konstantní fáze vlny

Siločára: křivka, jejíž tečny mají v každém místě směr vektoru \vec{E} , příp. \vec{B}

Paprsek: křivka, jejíž tečny mají v každém místě směr normály k vlnoploše

Poyntingův vektor: plošná hustota toku výkonu; isotropní prostředí $\langle \vec{S} \rangle$ normála k vlnoploše

Relativní velikosti jednotlivých příspěvků



Vlna vyvolaná Hertzovým dipólem ve volném prostoru

- splňuje Maxwellovy rovnice ve vakuu
- má rovinné vlnové čáry
- splňuje vektorové Helmholtzovy rovnice

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) + k^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) + k^2 \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

Poyntingův vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$; \vec{E}, \vec{H} reálné

V monochromatickém případě snadné použít komplexní symboliky pro výpočty časové střední hodnoty

$$\langle \vec{S} \rangle_t = \left\langle \frac{1}{2} (\vec{E} + \vec{E}^*) \times \frac{1}{2} (\vec{H} + \vec{H}^*) \right\rangle_t =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle_t + \langle \vec{E}^* \times \vec{H} \rangle_t + \langle \vec{E} \times \vec{H}^* \rangle_t + \langle \vec{E}^* \times \vec{H}^* \rangle_t \right)$$

$$\langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle_t \sim \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2i\omega t} dt = 0 \quad \begin{array}{l} E \sim e^{-i\omega t} \\ E^* \sim e^{+i\omega t} \end{array}$$

$$\langle \vec{E}^* \times \vec{H} \rangle_t \sim \frac{1}{T} \int_0^T dt = 1$$

$$\langle \vec{E} \times \vec{H}^* \rangle_t \sim \frac{1}{T} \int_0^T dt = 1$$

$$\langle \vec{E}^* \times \vec{H}^* \rangle_t \sim \frac{1}{T} \int_0^T e^{2i\omega t} dt = 0$$

$$\langle \vec{S} \rangle_t = \frac{1}{4} \left(\langle \vec{E}^* \times \vec{H} \rangle_t + \langle \vec{E} \times \vec{H}^* \rangle_t \right) = \frac{1}{4} \left(\langle \vec{E}^* \times \vec{H} \rangle_t + \langle \vec{E}^* \times \vec{H} \rangle_t^* \right)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \langle \vec{E}^* \times \vec{H} \rangle_t \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \langle \vec{E} \times \vec{H}^* \rangle_t \right\}$$

Střední hodnota Poyntingova vektoru

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{S} \rangle_r &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{E_\theta B_\alpha^*}_{\vec{\theta}} - \underbrace{E_\alpha B_\theta^*}_{\vec{\theta}} \right\} \\
 &= \frac{p_0^2 \sin^2 \Theta}{32\pi^2 \mu_0 \varepsilon_0^2 c} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \left(i\frac{k}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \right\} \\
 &= \frac{p_0^2 c}{32\pi^2 \varepsilon_0} \cdot \sin^2 \Theta \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{ik}{r^5} + \frac{k^2}{r^4} - \frac{ik^3}{r^3} - \frac{k^2}{r^4} + \frac{ik^3}{r^3} + \frac{k^4}{r^2} \right\} \\
 &= \frac{p_0^2 c}{32\pi^2 \varepsilon_0} \cdot \sin^2 \Theta \cdot \frac{k^4}{r^2} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \varepsilon_0} \cdot \sin^2 \Theta \cdot \frac{1}{r^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{S} \rangle_\theta &= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{E_\alpha B_r^*}_{\vec{\theta}} - \underbrace{E_r B_\alpha^*}_{\vec{\theta}} \right\} \\
 &= \frac{-p_0^2 \cos \Theta \sin \Theta}{32\pi^2 \mu_0 \varepsilon_0^2 c} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) \left(\frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \right\} \\
 &= \frac{-p_0^2 \cos \Theta \sin \Theta}{32\pi^2 \mu_0 \varepsilon_0^2 c} \operatorname{Re} \left\{ \frac{ik}{r^5} + \frac{k^2}{r^4} - \frac{k^2}{r^4} + \frac{ik^3}{r^3} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$$\langle \vec{S} \rangle_\alpha = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{E_r B_\theta^*}_{\vec{\theta}} - \underbrace{E_\theta B_r^*}_{\vec{\theta}} \right\} = 0$$

Střední (časová střední) Poyntingova vektoru má jen radiální složku

$$\begin{aligned}
 \langle S_r \rangle_r &\sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4} \\
 &\sim \sin^2 \Theta \\
 &\sim \frac{1}{r^2}
 \end{aligned}$$

Výkon vyžárá z kvadrupólu v "kružových průřezích"



plochy $\sim r^2$

hustota toku výkonu $\frac{1}{r^2}$

zákon zachování energie
(zde: výkonu)

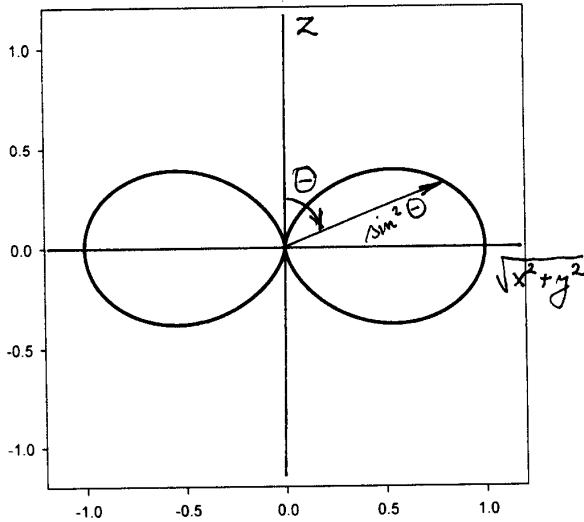
$$\operatorname{div} \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \langle S_r \rangle) = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \Theta}{32\pi^2 c^3 \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

29

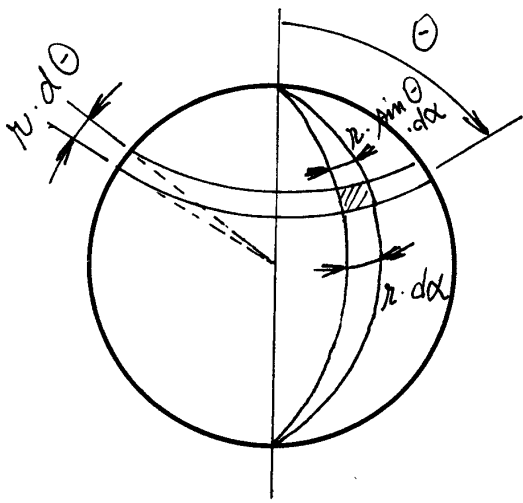
Vzácnovací diagram
Hertzova dipólu:

délka úsečky $\sim \sin^2 \Theta$.

Význam: jaký výkon
vyšle dipól do
směru Θ



Celkový vyzařovaný výkon



$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \langle S_r \rangle \cdot \overbrace{r^2 \sin \Theta d\Theta dx}^{\text{vyzařovaná ploška}}$$

$$= 2\pi \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{r^2}{r^2} \int_0^{\pi} \sin^3 \Theta d\Theta$$

pozor! $\sin^3 = \sin(1 - \cos^2)$

$$\int_{\pi}^{\pi} \sin \Theta d\Theta = [-\cos \Theta]_{\pi}^{\pi} = 2$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta \quad \begin{matrix} t = \cos \Theta \\ dt = -\sin \Theta d\Theta \end{matrix}$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \Theta d\Theta = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}; \quad \frac{2\pi}{32\pi^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{12\pi}$$

Vyzařovaný výkon do všech směrů $P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{p_0^2 \omega^4 \mu_0}{12\pi c}$

To je v souladu s obecnějším Larmorovým vztahem, který udává výkon vyzařovaný nabítkou částicí, která se pohybuje se zrychlením a

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

Dipól: $p_0 = q \cdot z_0$
 $z = z_0 \cdot \cos(\omega t)$

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z_0 \cdot \cos \omega t \quad \langle \cos^2 \omega t \rangle_t = \frac{1}{2}$$

$$\langle P \rangle_t = \frac{q^2 \omega^4 z_0^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle_t}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

K pojmu skalární vlna
 2 velmi odlišné významy:

1) „matematický“ hledání:

řešení skalární Helmholtzovy rovnice ve volném
 prostoru $(\nabla^2 + k^2) u = 0$

Řízení se ke středu $(0,0,0)$ a $u(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$,

vychovají $u_{n,m}(r, \theta, \alpha) = h_n(kr) \cdot Y_n^m(\theta, \alpha) \cdot e^{-i\omega t}$

h_n Hankelovy funkce splňující

$$r^2 \frac{d^2 h_n}{dr^2} + 2r \frac{dh_n}{dr} + [k^2 r^2 - n(n+1)] h_n = 0$$

např.: $h_0(kr) = -i \frac{e^{ikr}}{kr}$

$$h_1(kr) = \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \frac{e^{-ikr}}{kr}$$

svází se řešením
 dipólu $Y_1^0 \propto \cos \theta$

$Y_n^m(\theta, \alpha)$ kulové funkce $-n \leq m \leq n, n > 0$

Pomocí těchto řešení skalární rovnice lze generovat
 vektorové pole \vec{E}, \vec{H} v multipólovím rozvoji

$$\vec{E} = \sum_{n,m} a_{nm} \text{rot rot}(\vec{r} \cdot \mu_{nm}) + \text{elektrické multipóly}$$

$$+ i\omega\mu_0 \sum_{n,m} b_{nm} \text{rot}(\vec{r} \cdot \mu_{nm}) \quad \text{magnetické multipóly}$$

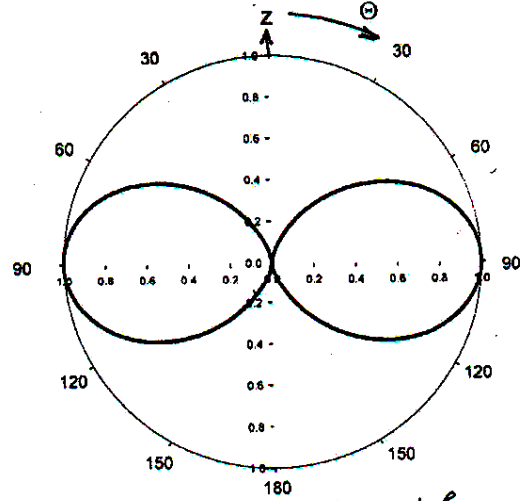
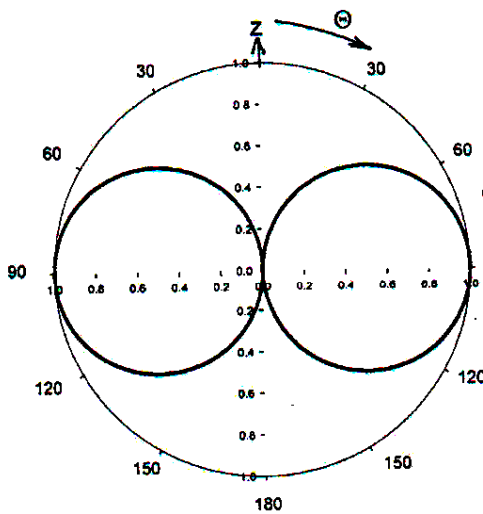
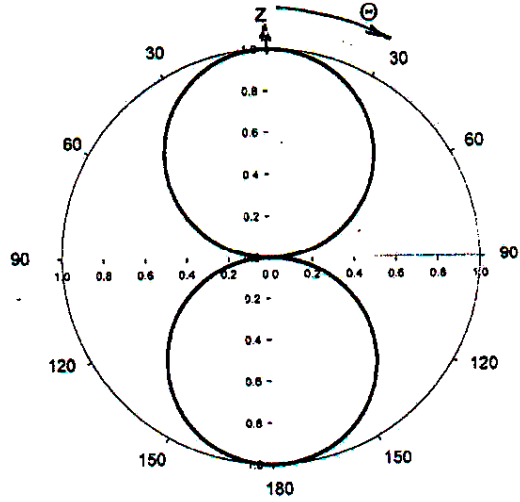
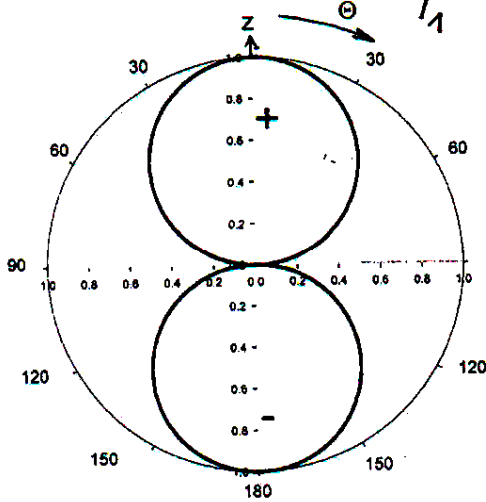
$$\vec{H} = -i\omega\mu_0 \sum_{n,m} a_{nm} \text{rot}(\vec{r} \cdot \mu_{nm}) +$$

$$+ \sum_{n,m} b_{nm} \text{rot rot}(\vec{r} \cdot \mu_{nm})$$

Řezy směrorybní diagramy veličin pro elektrický (38)
 Hertrio-dipól koničičí ve směru osy z

skalární funkce $u_{10} \sim \cos \Theta$

radiální složka
 $E_r \sim \cos \Theta$



příčné složky
 $E_\Theta, H_\alpha \sim \sin \Theta$

vyráňovaný výkon
 $\langle S \rangle \sim \sin^2 \Theta$

Všechny diagramy jsou osově symetrické kolem
 směru dipólového momentu, tj. kolem osy z.

speciálně a) $u_{00} = \frac{e^{ikr}}{kr} \Rightarrow \vec{E} = 0$
 $\vec{H} = 0$

b) $u_{10} = -e^{ikr} \left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \cos \Theta = k_1 \cdot Y_1^0$

generuje pole Hertzova elektrického dipólu

A použítim se prozářím $a_{10} = \frac{i p_0}{4\pi \epsilon_0} k^2$

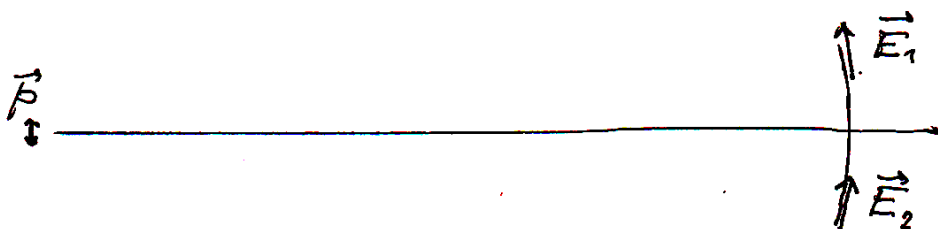
2) „fyzikální“ použití pojmu skalární (aproximace):

v uvažované oblasti prostoru se orientace vektorů \vec{E} , \vec{H} mění jen málo, vektorový charakter lze zanedbat, takže se velké chyby nedopustíme když např. $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \rightarrow E_1 + E_2$

Velmi často spojená a paraxiální aproximací

- nahradíme se jen částí vlny šířící se podél nějakého významného směru

Příklad: část kulové vlny od Hertzova dipólu šířící se podél vybraného směru kolmého na směr kmitání dipólu, navíc daleko od dipólu



aproximace $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$

Příklad nutnosti používat úplných vlnění:
mikroskopický popis šíření vlny v látkovém
prostředí složeném z polarizovatelných atomů
(molekul, ...)

Ty jsou rozkmitávané dopadající (např. rovinnou)
vlnou a zároveň i polem rozkmitávaných
dalších atomů (v blízkém i vzdáleném okolí);
vzdálenosti blízkých sousedů $\ll \lambda$.

Ewaldův - Oseenův teorém:

interferenci dopadající vlny a vln od rozkmitávaných
"atomů" dojde k vytvoření vlny, která
se šíří fázovou rychlostí c/n ,

přičemž jednotlivé komponenty (např. rovinná
excitující vlna i záření jednotlivých "droje")
se šíří rychlostí c .

Rovněž je to zdůvodněním Lorenzovy - Lorentzovy
formule spojující polarizovatelnost "atomů" β
s makroskopickým indexem lomu

$$\frac{N \cdot \beta}{3 \epsilon_0} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$$

$$p = \beta \cdot E'$$

lokální pole
v místě atomu

Interferencí rovinné a mnoha kulových vln, všechny s fázovou rychlostí c ,
dostaneme rovinnou vlnu s fázovou rychlostí c/n .

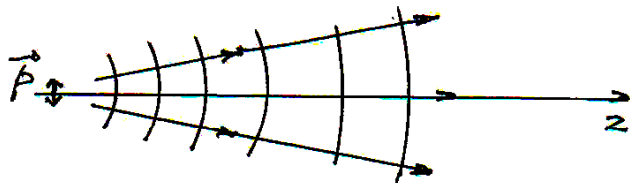
V mnoha případech je úplný popis křivěsné složité a lze použít aproximaci: často ve směru, kde kulová vlna je nejvíce „podobná“ rovinné vlně

Aj. na „rovničku“ $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $r \gg \lambda$, $\alpha \approx 0$
 (nelo jiné úzký interval)

co $\Theta \rightarrow 1$ přeládá tečná složka, orientace \vec{E} , \vec{B} v tomto prostoru jsou málo závislé

\Rightarrow skalární paraciální aproximace světelného svazku

ZMĚNA značení os $x \rightarrow z$ osa svazku



Možný přístup: vlna je podobná rovinné vlně

a odchylky lze zahrnout do amplitudy (prostorově závislé, komplexní)

$$E(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r}) \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

"Skutečnou" kulovou plnou v úzké oblasti kolem osy šíření lze nahradit jednodušší skalárem (ve "fyzikálním" smyslu)

$$E \doteq \frac{E_A(r=1)}{r} e^{i(kr - \omega t)}$$

kteřá nevyhovuje Maxwellovým rovnicím.

V souladu s tím, kde ji lze použít, lze udělat paraxiální aproximaci:

$$\frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{z}$$

$$k \cdot r = k \cdot \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\text{malé}} + \underbrace{z}_{\text{velké}} \quad r \doteq z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

$$E(x, y, z, t) \doteq E_A \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

parabolická oprava ke tvaru vlnoploch, lze přeradit ke komplexní amplitudě

$$E_0(x, y, z) = E_A \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)}$$

kteřá splňuje paraxiální aproximaci skalární Helmholtzovy rovnice

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} = 0$$

Použít např. při Fresnelově popisu difrakčních jevů.

Vlnová rovnice pro monochromatickou vlnu
(Helmholtzova)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left[E_0(x, y, z) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \right] + k^2 E_0(x, y, z) \cdot e^{i(kz - \omega t)} = 0$$

Předpoklad: E_0 se mění ve směru z pomalu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[E_0(x, y, z) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \right] &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial E_0}{\partial z} e^{i(\cdot)} + ik E_0 e^{i(\cdot)} \right] \\ &= \left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + ik \frac{\partial E_0}{\partial z} + ik \frac{\partial E_0}{\partial z} + ik E_0 \right) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ &= \left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} - k^2 E_0 \right) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned}$$

Aproximace $\left| 2k \frac{\partial E_0}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} \right| \doteq 0$

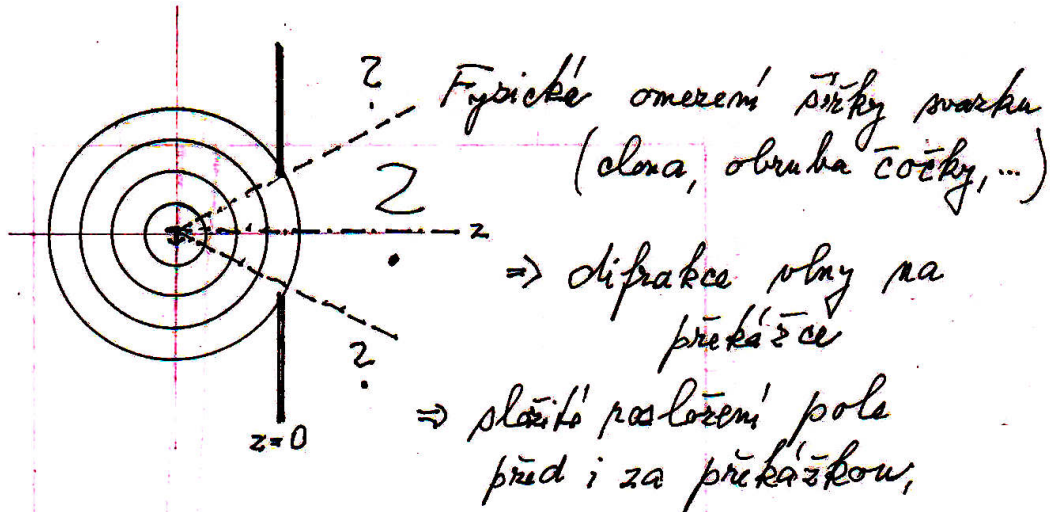
Paraxiální aproximace skalární Helmholtzovy rovnice

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} = 0$$

$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}_{\nabla_T^2 E_0}$ Transverzální Laplaceův operátor

Dosud vše ve volném prostoru.

Co se stane, když vlnu násilně ořízneme (clona, apertura, ...)?



různé úrovně popisu difrakčních jevů.

Nejedná se jen o „konce“ na rozhraní geometrického světla a stínu, ale difrakce obecně ovlivňuje i pole uvnitř prostoru geometrického světla a vyvolá pole i v prostoru geometrického stínu.

Skalární popisy difrakce:

(vesměs bez uvážení vlastností materiálu překážky)

apertura x', y' v $z=0$

rovina, ve které se rekurzivně rozloží pole $x, y, z = \text{konst}$

Huygens - Fresnel

$$E(x, y, z) = \frac{-i}{\lambda} \iint_{\text{aper.}} E(x', y', 0) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} dx' dy'$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$$

Kirchhoff: zabnutí směrového faktoru

Fresnel - Kirchhoff

$$E(x, y, z) = \frac{-i}{\lambda} \int\int_{\text{aper.}} E(x', y', 0) \cdot \frac{e^{i\vec{k}R}}{R} \left[\frac{1 + \cos(\vec{R}, \vec{z}_0)}{2} \right] dx' dy'$$

Fresnelova (= paraxiální) aproximace ($\cos(\vec{R}, \vec{z}_0) = 1$)

$$E(x, y, z) = \frac{-i}{\lambda} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{\frac{i\vec{k}}{2z}(x^2+y^2)} \cdot e^{i\vec{k}z} \cdot \int\int_{\text{aper.}} E(x', y', 0) \cdot e^{\frac{i\vec{k}}{2z}(x'^2+y'^2)} \cdot e^{-\frac{i\vec{k}}{z}(xx'+yy')} dx' dy'$$

Fraunhoferova aproximace pro $z \gg \frac{\pi}{\lambda} \cdot (\text{apertúra})^2$

$$E(x, y, z) = \frac{-i}{\lambda} \cdot \frac{1}{z} e^{\frac{i\vec{k}}{2z}(x^2+y^2)} \cdot e^{i\vec{k}z} \cdot \int\int_{\text{aper.}} E(x', y', 0) \cdot e^{-\frac{i\vec{k}}{z}(xx'+yy')} dx' dy'$$

páso: dopadájí rovinná vlna $\vec{k} \perp$ rovina apertury

$$E(x', y', 0) \equiv E_0$$

Složitější:

vektorové popisy difrakce

vázání vlastností materiálu „clony“, ...

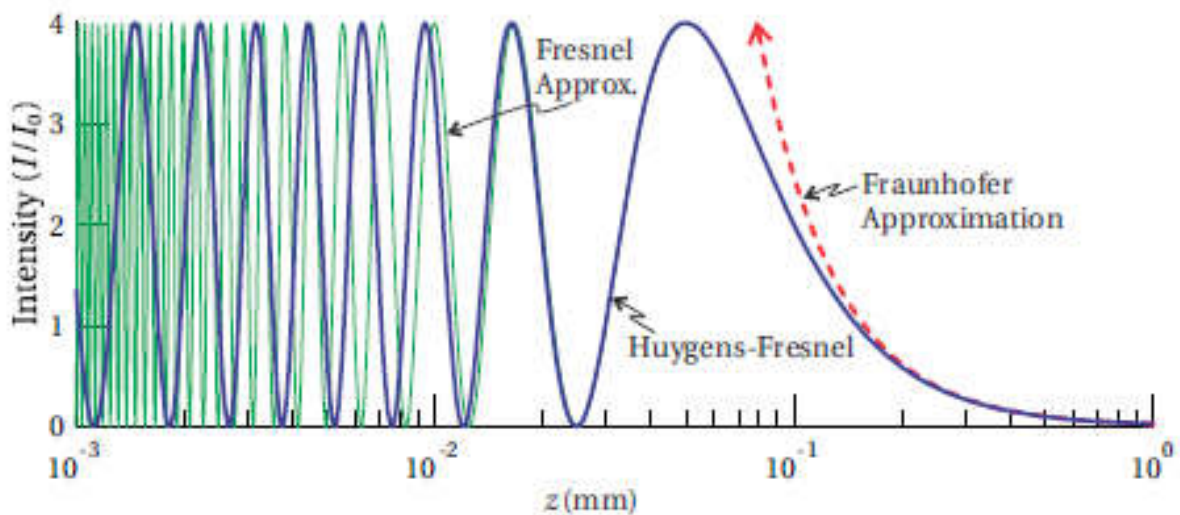
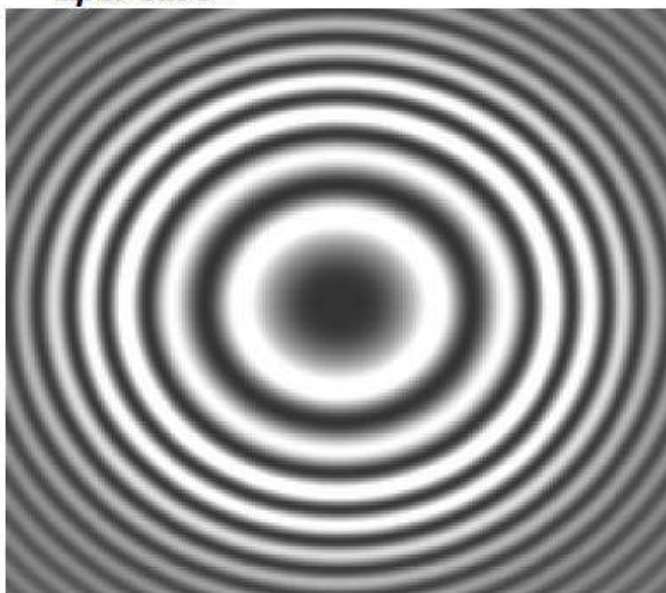


Figure 10.17 On-axis intensity behind a circular aperture calculated using the Fresnel diffraction formula (10.1), the Fresnel approximation (10.27), and the Fraunhofer approximation (10.28).

J.Peatross, M. Ware Physics of Light and Optics, <http://optics.byu.edu/>

Oscilace intenzity $I(x=0, y=0, z) \propto E \cdot E^*$ **na ose** za kruhovým otvorem o průměru $10 \mu\text{m}$, na který dopadá rovinná vlna, $\lambda = 500 \text{ nm}$.

Fresnel diffraction of circular aperture"



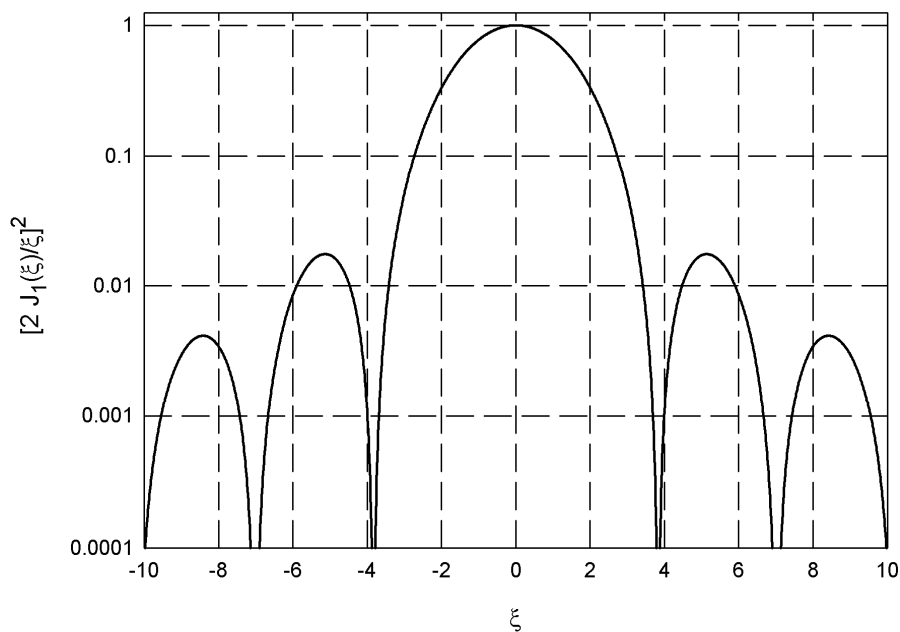
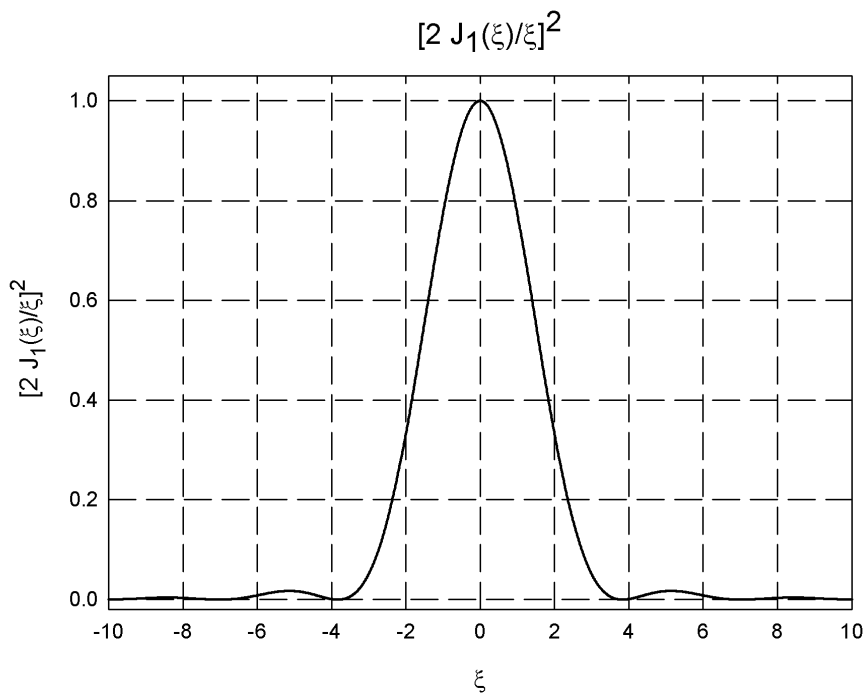
Naopak za kruhovou překážkou světlá Poissonova skvrna.

Fraunhoferova aproximace: rozbíhavá kulová vlna s příčně modulovanou intenzitou, klesající se vzdáleností $I(x, y, z) \propto \frac{1}{z^2}$. Příčná modulace popsána Besselovou funkcí. Maximum intenzity je na ose. $\xi = 0$

$$EE^*(x, y, z) \propto \frac{\pi^2}{16\lambda^2} \frac{E_0^2}{z^2} \left[\frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right]^2,$$

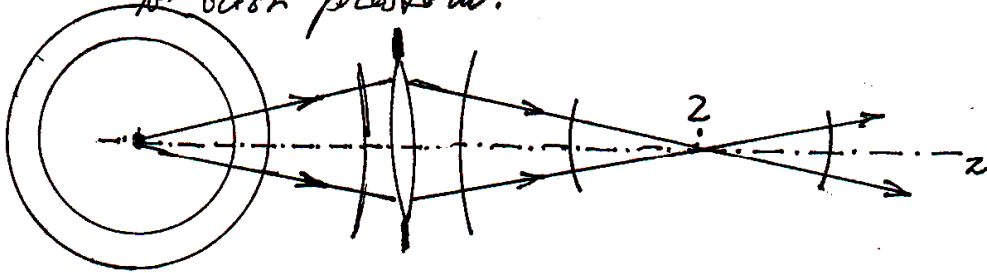
$$\xi = \frac{\pi}{\lambda} D \sin \vartheta, \quad \sin \vartheta \approx \tan \vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

To je ovšem hodně odlišné od vlny Hertzova dipólu.



Dosud rozbíhavá kulová vlna.

Za pomoci optických prvků (čočka, zrcadlo) lze vyrobit sbíhavou vlnu, alespoň přibližně v úzké prostoru:



čočka: má síť fázový posuv závislý na souřadnicích $\perp z$

$$\Delta\varphi = -\frac{k}{2f}(x^2 + y^2) \quad f \text{ ohnisková vzdálenost}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vak}}}$$

Na vznik obrazu se podílí jen část ploch vlnoploch
 \Rightarrow difrakční jevy \Rightarrow obrazem malinkého předmětu je podstatně větší světelná „skvrna“.

Pro dopadající rovinnou vlnu v ohniskové rovině čočky bude intenzita (Fraunhofer aproximace)

$$I(\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, z = F, D, \lambda) =$$

$$= I_0 \left(\frac{\pi D^2}{4\lambda f} \right)^2 \left[\frac{2 J_1 \left(\frac{k D \rho}{2f} \right)}{\frac{k D \rho}{2f}} \right]^2$$

1. nulový kruh $I=0$ pro

$$\frac{k D \rho}{2f} = 1,22\pi \quad \text{tj} \quad \rho = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot f$$

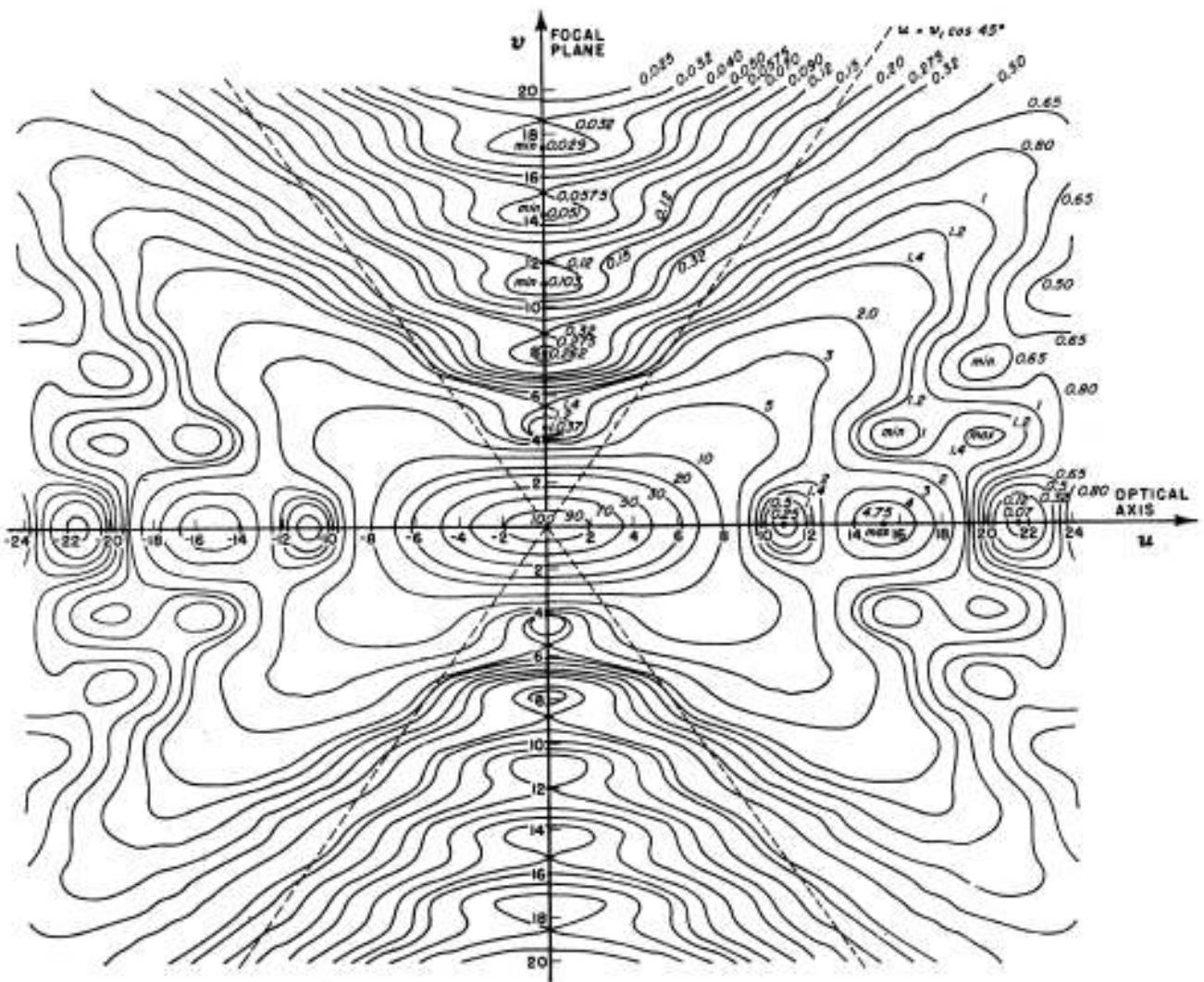


FIG. 3. Contours of the time-averaged electric energy density $\langle w_e \rangle$ near focus in the meridional plane $\phi=0$ ($\alpha=45^\circ$).

Rozložení intenzity (čáry spojující místa o stejné hustotě elektrické energie v okolí ohniska, vektorový popis difrakce).
 Vodorovně optická osa, svisle rovina polarizace vlny dopadající na aplanatický optický systém ((bez kulové vady, silná fokusace s velkým výstupním úhlem $\alpha=45^\circ$).
 Difrakční obrázek není osově symetrický, v jiných řezech je poněkud odlišný (rozdíl oproti skalárnímu popisu). Elektrické pole má silné longitudinální složky.

A. Boivin, E. Wolf, Phys. Rev. 138 (6B), 1561 – 1565 (1965)

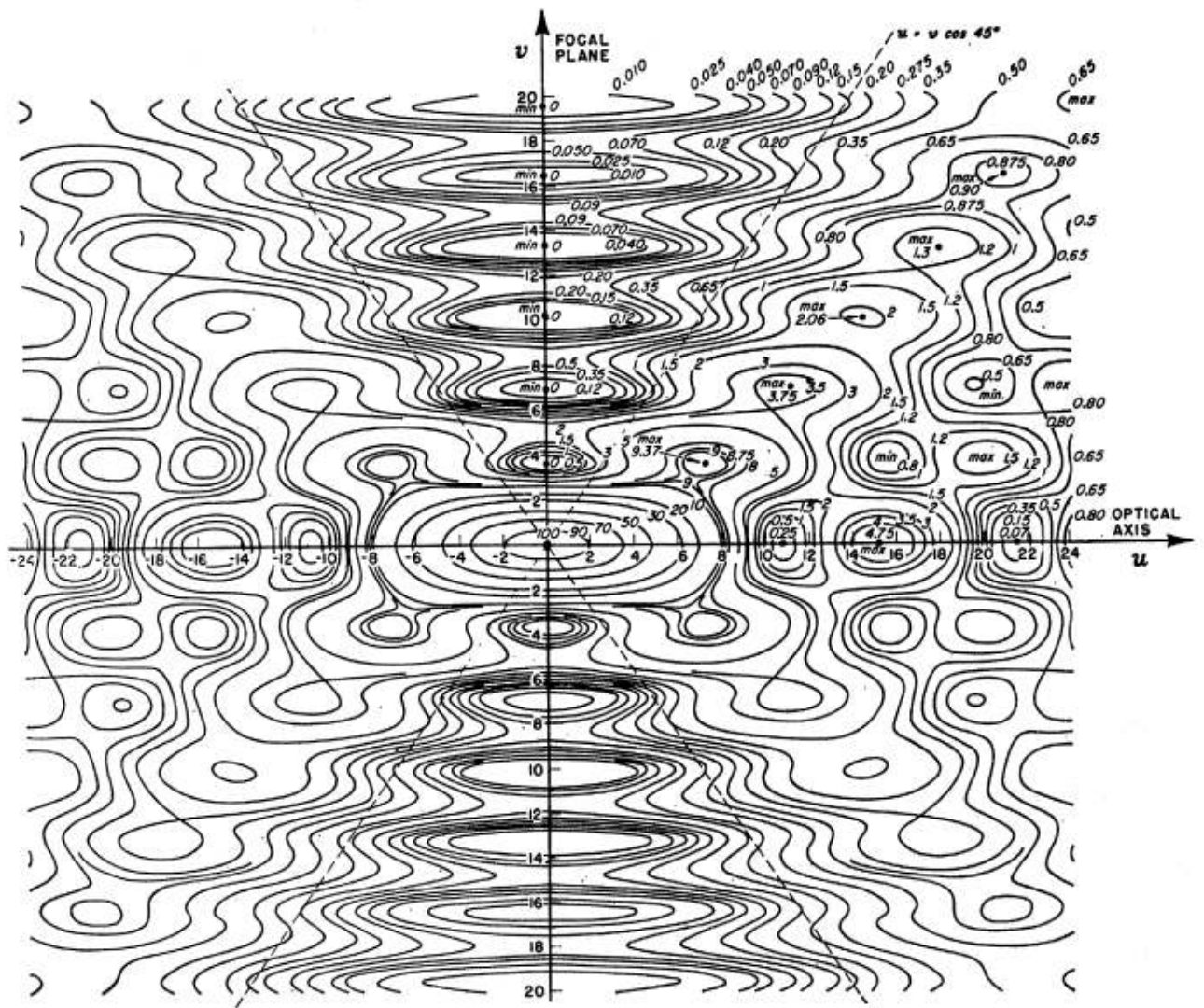


FIG. 4. Contours of the time-averaged electric energy density $\langle w_e \rangle$ near focus in the meridional plane $\phi = \frac{1}{2}\pi$ ($\alpha = 45^\circ$).

Rozložení hustoty elektrické energie v řezu kolmém na polarizaci vstupující vlny, vodorovně směr šíření, svislý směr kolmý na polarizaci vstupující vlny.

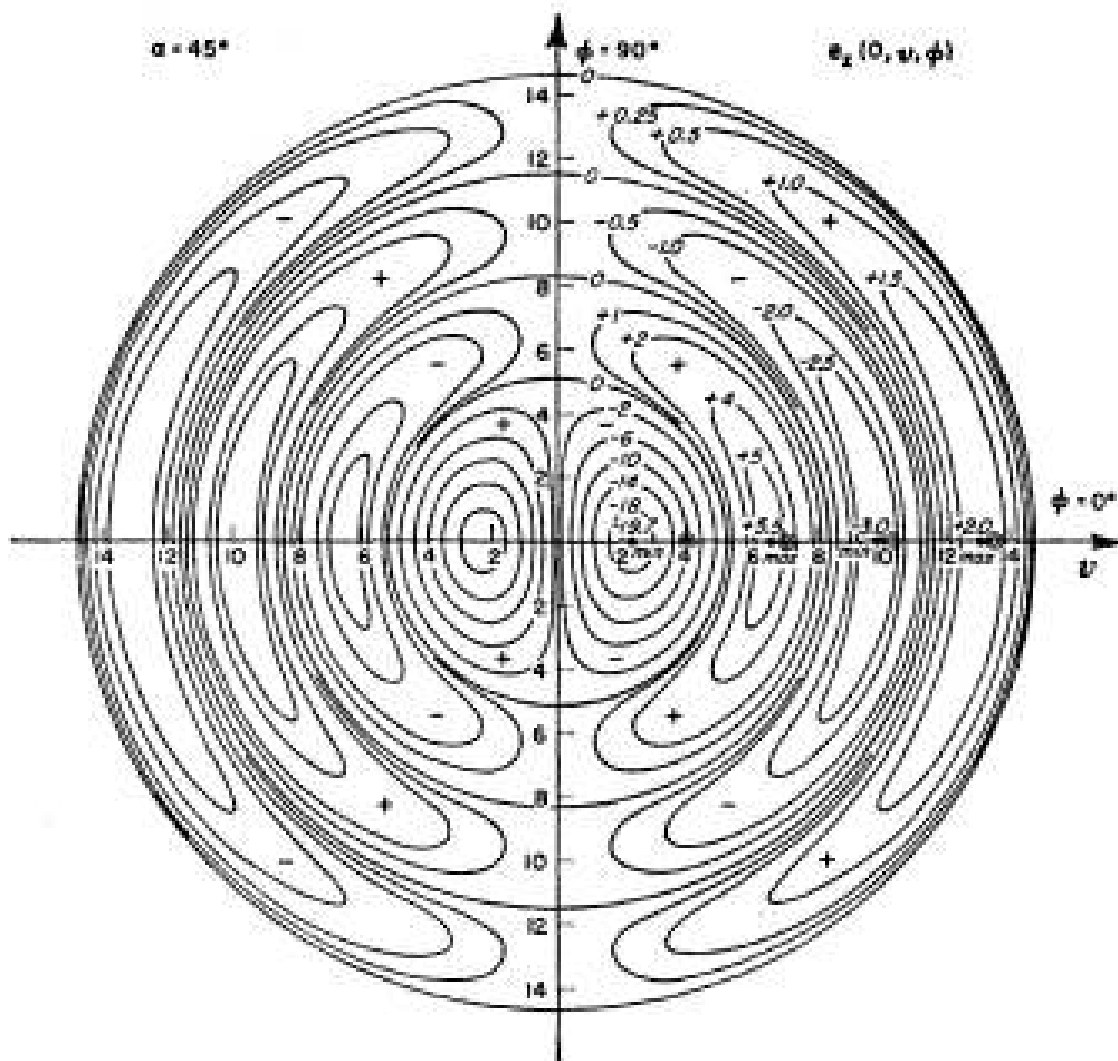


FIG. 5. Contours of the time-independent part e_z associated with the longitudinal component of the complex electric field $E_z = \text{Re}\{e_z e^{-i\omega t}\}$ in the focal plane $\psi = 0$ ($\alpha = 45^\circ$).

Složka pole příslušná longitudinálnímu poli.
 Řez v ohniskové rovině; vodorovně směr polarizace vstupující vlny.
 V tomto směru je longitudinální složka nejsilnější, důsledek divergenční MR.

Ostré ořeznutí vlny aperturou vede k dost složitému chování. lze zmírnit postupným slabnutím svazku do stran. Vhodným příkladem je svazek s gaussowským rozložení pole
 $E(x, y; z = \text{konst})$

Aby byla splněna alespoň paraxiální aproximace skalární Helmholtzovy rovnice, je závislost $E(\rho, z)$ [$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ - pořadujeme osou souměrně] poněkud složitější.

Pro nejvzší místo svazku w $z = 0$ (pas svazku)

$$E(\rho, z, t) = E_0 \cdot \frac{w_0}{w(z)} \cdot \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right] \cdot \exp\left[\frac{i k \rho^2}{2 R(z)}\right] \cdot \exp\left[-i \arctg \frac{z}{z_0}\right] \cdot \exp[i(kz - \omega t)]$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{\frac{z^2}{z_0^2} + 1}$$

šířka svazku
(pokles na $1/e$ průmě)

$$R(z) = z + \frac{z_0^2}{z}$$

poloměr ploch
v místě z

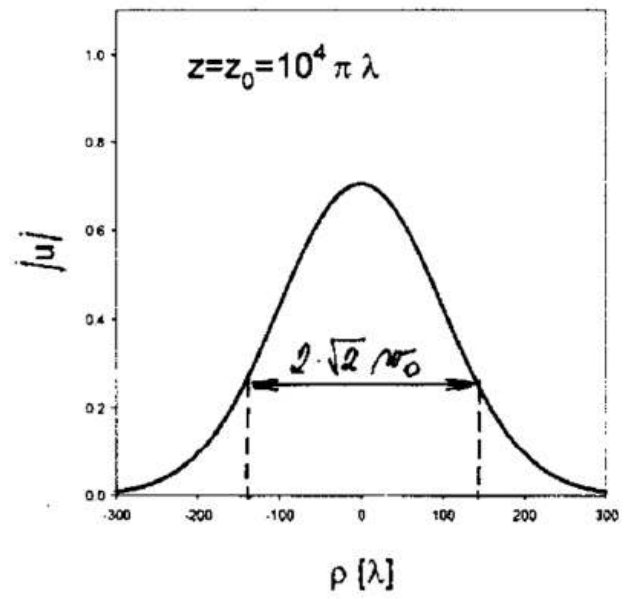
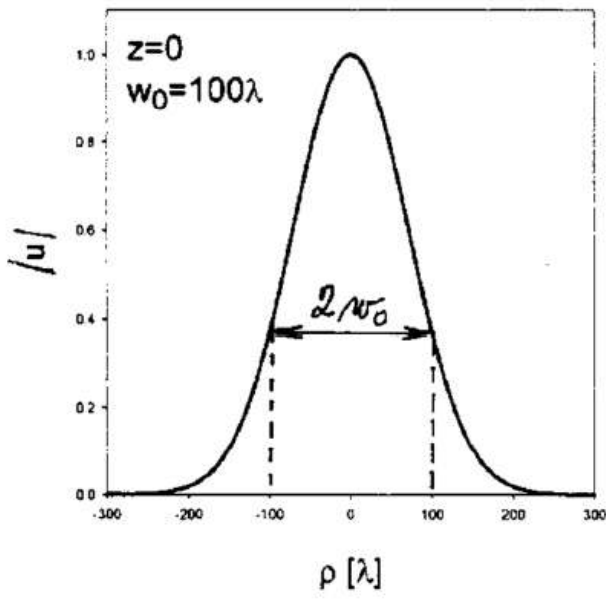
$$z_0 = \frac{k}{2} w_0^2$$

konfokální parametr
= Rayleighova vzdálenost

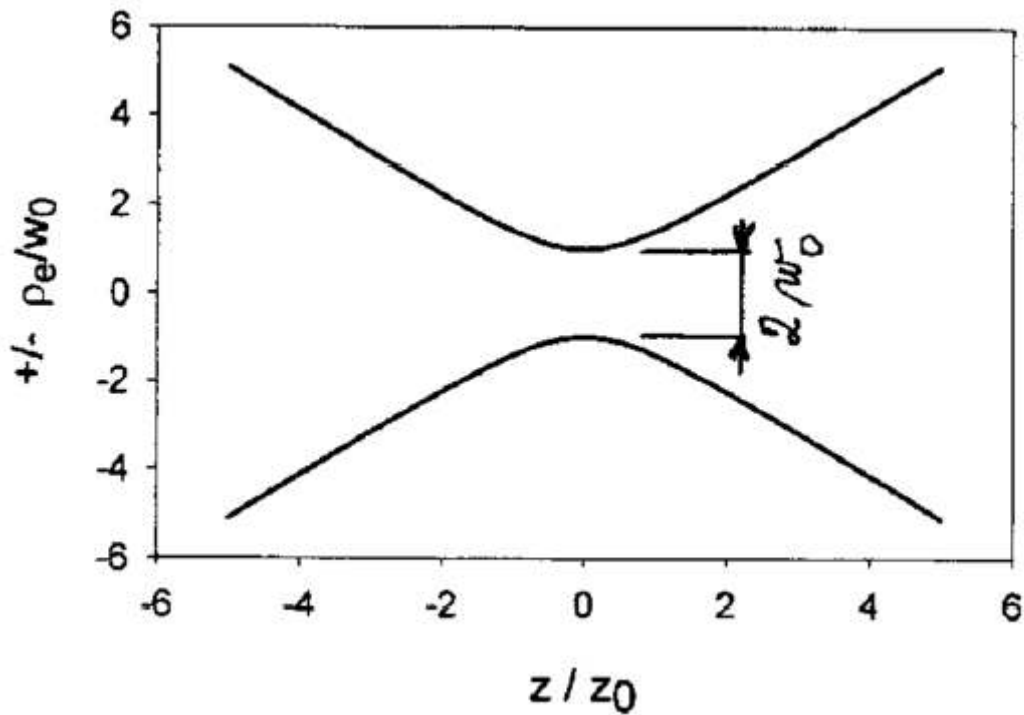
$$\arctg \frac{z}{z_0}$$

Gouyův posuv fáze
(obecný jiv při přechodu vlny ohniskem - "úzkým" místem; souvislé s podmínkou minima či maxima ve Fermatově principu)

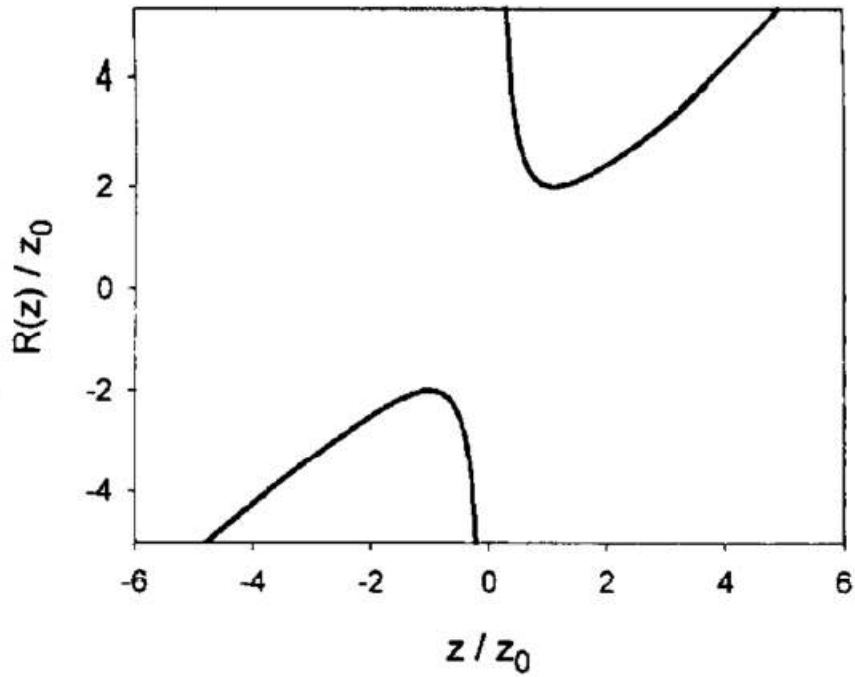
$w(z_0) = w_0 \sqrt{2}$



Příčné rozložení $E(\rho)$ pro $z=0$ a $z=z_0$

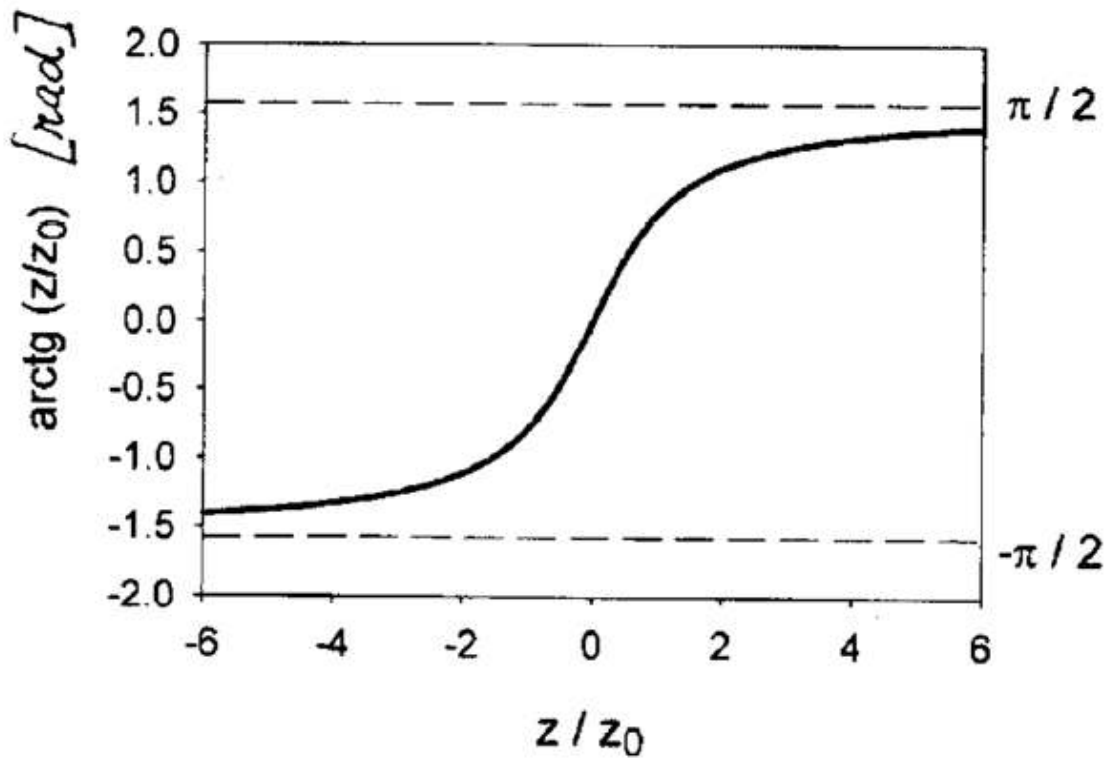


Poloha míst podél svazku, kde $E(\rho_e, z) = \frac{1}{e} E(0, z)$

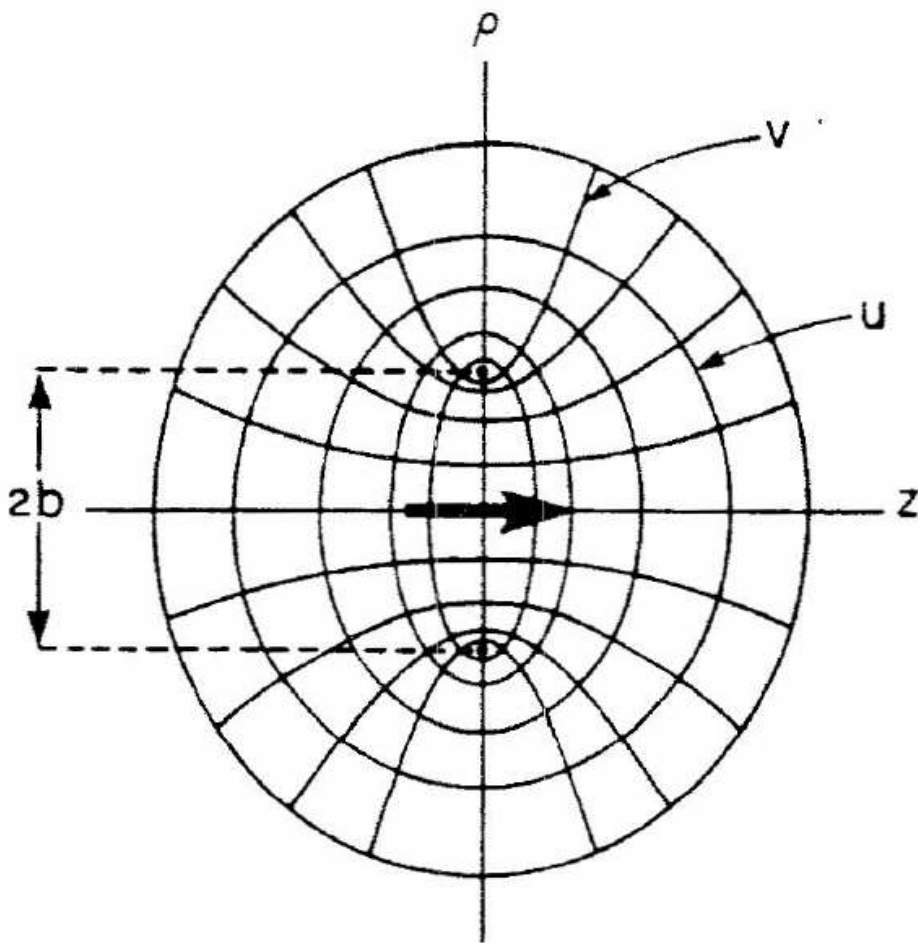
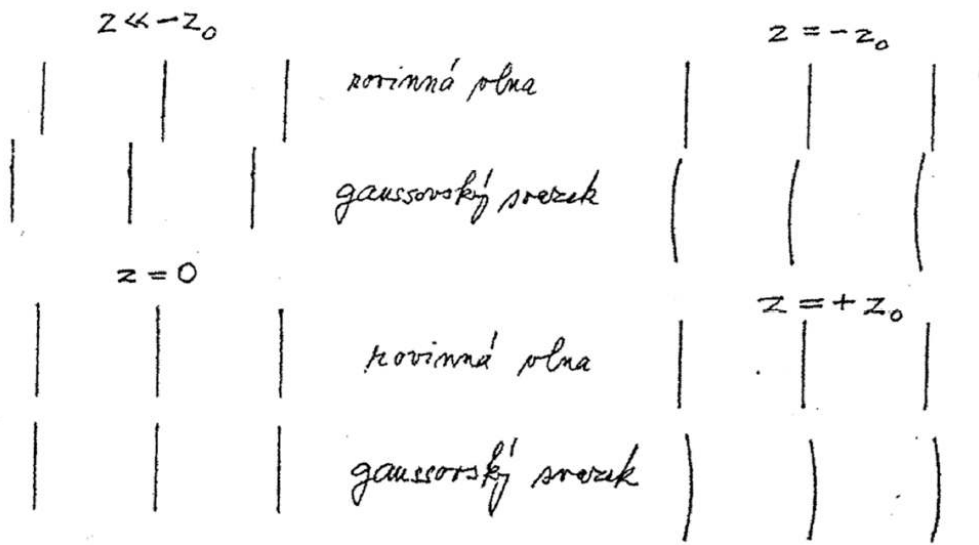


Relativní poloměr křivosti vlnoploch podél svazku

$$\frac{R(z)}{z_0} = \frac{z_0}{z} + \frac{z}{z_0}$$



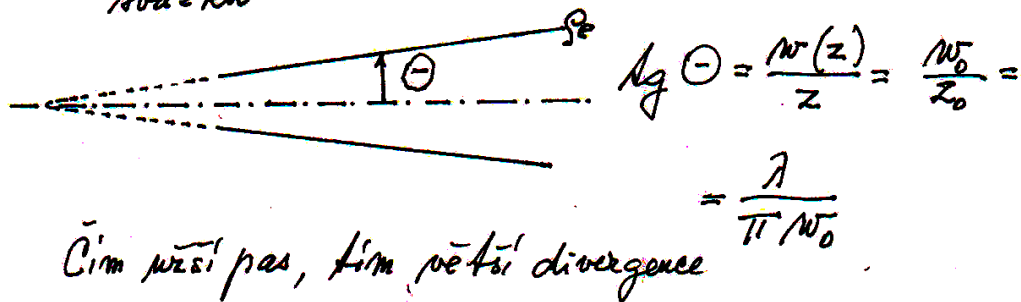
Gouyův fázový posuv (příspevek k fázovému rozdílu Gaussovského svazku proti rovinné vlně).



Elipsoidální vlnoplochy $u = \text{Konst}$, $b \equiv z_0$.
 S.D. Brorson, IEEE j. Quant. Electron. 24(3), 512 – 515 (1988)

Gaussovský svazek je (asi) nejjednodušším příkladem svazku, který je "průměrně omezen" (i když ne tak zcela). Jeho skalární paraxiální aproximace:

- Splňuje paraxiální Helmholtzovu rovnici
- vyhovuje Fresnelově difrakci (paraxiální aproximace bez smírového faktoru)
 - Fraunhoferově popisu difrakce: ve velké vzdálenosti od pasu je divergence svazku



Lze gaussovský svazek odvodit "zobecněním" aprox. kulové vlny

$$E_r(\rho, z, t) = \frac{A}{z} \cdot e^{\frac{i k \rho^2}{2z}} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

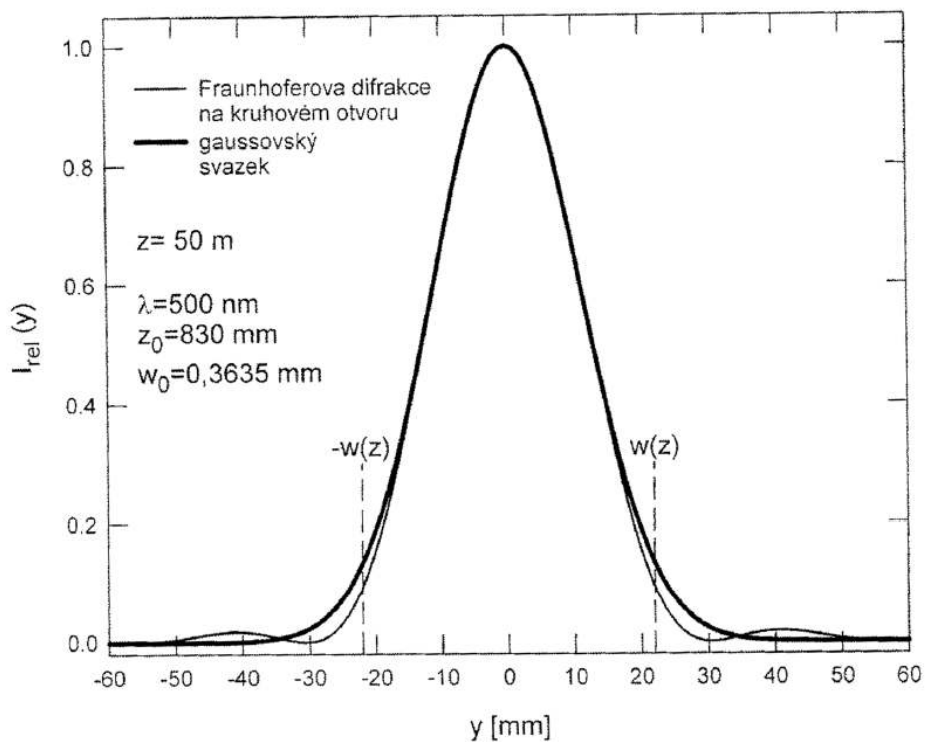
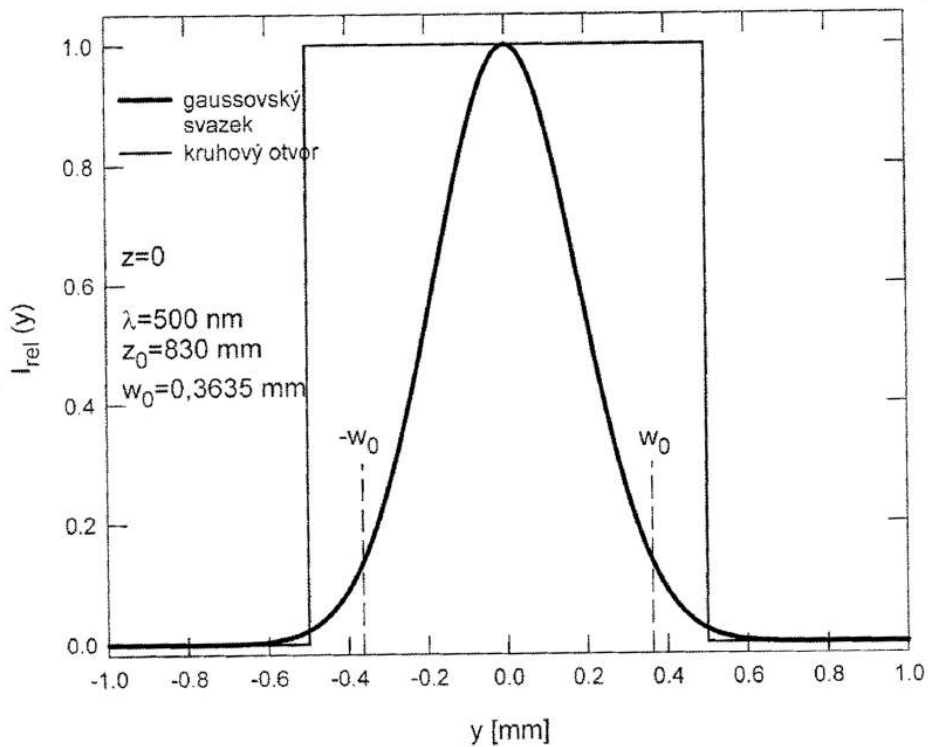
$z \rightarrow z - iz_0$

gaussovský svazek

$$E_g(\rho, z, t) = \frac{A}{z - iz_0} e^{\frac{i k \rho^2}{2(z - iz_0)}} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

$$A = -iz_0 E_0$$

\Rightarrow dříve uvedený vztah



Porovnání rozložení intenzity
Fraunhoferovy difrakce rovinné vlny na kruhovém otvoru
s gaussovským svazkem.
Obojí kulové, téměř rovinné vlnoplochy v parabolické aproximaci.

Rovinná, homogenní vlna je velkou idealizací,
přesto při objasnování mnoha jevů je vhodná.

Podobně i monochromatická: zcela nereálný
předpoklad, přesto má popis chování
monochromatických vln značný význam.

Skutečné časové průběhy lze např. popísat
rozkladem na příspěvky jednotlivých frekvencí
Fourierovou transformací.

Související témata:

spektrometrie

interferometrie

spektrální hustota záření

stupeň koherence (prostorová i časová)

⋮

Christiaan **Huygens**, 1629 – 1695, Holanďan

Pierre-Simon, marquis de **Laplace**, 1749 – 1827, Francouz

Jean-Baptiste Joseph **Fourier**, 1768 – 1830, Francouz

Johann Carl Friedrich **Gauss**, 1777 – 1855, Němec

Joseph **Fraunhofer**, 1787 – 1826, Němec

Augustin-Jean **Fresnel**, 1788 – 1827, Francouz

Hermann Ludwig Ferdinand von **Helmholtz**, 1824 – 1894, Němec

Gustav Robert **Kirchhoff**, 1824 – 1887, Němec

Ludwig Valentine **Lorenz**, 1829 – 1891, Dán

James Clerk **Maxwell**, 1831 -1879, Skot

John Henry **Poynting**, 1852 – 1914, Angličan

Hendrik Antoon **Lorentz**, 1853 – 1928, Holanďan

Louis Georges **Gouy**, 1854 – 1926, Francouz

Heinrich Rudolf **Hertz**, 1857 - 1894 Němec

Arnold Johannes Wilhelm **Sommerfeld**, 1868 – 1951, Němec

Carl Wilhelm **Oseen**, 1879 – 1944, (narozen a pracoval ve Švédsku)

Paul Peter **Ewald**, 1888 – 1985, Němec