

Pokud na potenciálu nezáleží, položíme jej roven nule, $V(\mathbf{r}) = 0$. Vlnová funkce elektronu je pak prostá rovinná vlna

$$\psi_s(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (156)$$

kde s je spin. Energie tohoto stavu je

$$\varepsilon_{s\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (157)$$

7.1 Chemický potenciál

Počet elektronů v krystalu je součtem přes všechny stavy vážený pravděpodobností jejich obsazení

$$N = \sum_s \sum_{\mathbf{k}} n_{s\mathbf{k}} = 2 \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} + 1}. \quad (158)$$

Hustota elektronů $n = N/\Omega$ tedy splňuje

$$n = 2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} + 1} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}. \quad (159)$$

Protože hustota elektronů je dána, tato podmínka slouží k určení chemického potenciálu μ jako funkce hustoty.

Hodnota chemického potenciálu závisí na teplotě $\beta = 1/k_B T$. Při nulové teplotě přechází Fermi-Diracovo rozdělení na skokovou funkci, $\lim_{T \rightarrow 0} n_{\mathbf{k}} = 0$ pro $\varepsilon_k > \mu$ a $\lim_{T \rightarrow 0} n_{\mathbf{k}} = 1$ pro $\varepsilon_k < \mu$. Hraniční hodnota se nazývá Fermiho impulz, $\hbar k_F = \sqrt{2m\mu}$, kinetická energie pro Fermiho impulz se nazývá Fermiho energie, $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$. Pro nulovou teplotu

$$n = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 n_{\mathbf{k}} = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \quad \text{pro} \quad T = 0. \quad (160)$$

Hustoty elektronů v kovech jsou v rozmezí $10^{28} - 2 \cdot 10^{29}/\text{m}^3$. To odpovídá Fermiho impulzům v rozsahu $6 \cdot 10^9 - 2 \cdot 10^{10}/\text{m}$ a Fermiho energiím $1 - 15 \text{ eV}$ neboli $10^{-19} - 10^{-18} \text{ J}$. Pokojová teplota odpovídá energii $300 \text{ K} \times k_B \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$. Protože $E_F \gg k_B T$, elektrony v krystalu tvoří poměrně chladný plyn.

Podívejme se, jak model jelia odpovídá skutečným kovům. Fermiho energie je měřitelná z emisních spekter. Nejprve je Roentgenovským

zářením vyražen elektron z vnitřní slupky atomu s vazebnou energií E_b . Tato díra je zaplněna vazebným elektronem s energií ε_k ležící mezi ε_{k_F} a $\varepsilon_{k=0}$. Při tom se vyzáří Roentgenovské záření o frekvenci $\hbar\omega = \varepsilon_k - E_b$. Šířka vyzářených frekvencí je $E_F = \varepsilon_{k_F} - \varepsilon_{k=0}$. Tabulka porovnává hodnoty spočtené z hustoty s měřenými. Jak vidno, pro uvedené kovy je souhlas celkem dobrý.

(eV)	Li	Na	Be	Mg	Al
E_F	4.8	3.2	14.6	7.3	11.9
$\hbar\Delta\omega$	3.7	3.5	13.8	6.2	11.8

7.2 Hustoty stavů

Oblast, kde se Fermi-Diracovo rozdělení liší od skokové funkce je úzká na škále Fermiho energie. To umožňuje spočítat chemický potenciál při konečné teplotě přibližně.

Za tím účelem si hustotu elektronů nejprve vyjádříme tak, abychom oddělili energetickou závislost od pásové struktury,

$$n = 2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d\omega \delta(\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}}) \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} + 1} = \int_0^\infty d\omega \mathcal{D}(\omega) n_\omega. \quad (161)$$

Funkce

$$\mathcal{D}(\omega) = 2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}}) \quad (162)$$

se nazývá hustota stavů. Je zřejmé, že ji stejným způsobem můžeme zavést i pro libovolně složitou strukturu energetických pásů $\varepsilon_{\mathbf{k}}$. Pro volné elektrony je její výpočet jednoduchý⁶

$$\mathcal{D}(\omega) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\omega}. \quad (163)$$

Vztah (161) pro hustotu elektronů formálně rozložíme na hodnotu při nulové teplotě a teplotní opravu,

$$n = \int_0^{E_F} d\omega \mathcal{D}(\omega) + \int_0^\infty d\omega \mathcal{D}(\omega) (n_\omega - \Theta(E_F - \omega)). \quad (164)$$

⁶ $\int d\mathbf{k} \delta(\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}}) = 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \delta\left(\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) = 2\pi \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} \delta(\omega - \epsilon) = 2\pi \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\omega} \theta(\omega)$

První člen je hustota n a zruší se s levou stranou. Druhý člen spočteme přibližně. Rozdelení n_ω se liší od skokové funkce jen v úzkém okolí E_F , proto rozvineme hustotu stavů, $\mathcal{D}(\omega) \approx \mathcal{D}_F + \mathcal{D}'_F(\omega - E_F)$, kolem Fermiho energie, kde $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}(E_F)$ a $\mathcal{D}'_F = \partial_\omega \mathcal{D}(E_F)$. Rovnice (164) přejde na podmítku

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{D}_F \int d\omega (n_\omega - \Theta(E_F - \omega)) \\ &+ \mathcal{D}'_F \int d\omega (\omega - E_F) (n_\omega - \Theta(E_F - \omega)) \\ &= \mathcal{D}_F (\mu - E_F) - \frac{1}{2} \mathcal{D}'_F \int d\omega (\omega - E_F)^2 \frac{\partial n_\omega}{\partial \omega} \\ &= \mathcal{D}_F (\mu - E_F) - \frac{1}{2} \mathcal{D}'_F (\mu - E_F)^2 + k_B^2 T^2 \mathcal{D}'_F \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned} \quad (165)$$

Využili jsme toho, že funkce $n_\omega - \frac{1}{2}$ je lichá kolem hodnoty μ a funkce $\Theta - \frac{1}{2}$ je lichá kolem hodnoty E_F . Druhý člen je řádu T^4 , takže je zanedbatelný v rámci lineárního rozvoje hustoty stavů. Pro vyhodnocení posledního člena jsme použili integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{\pi^2}{3}. \quad (166)$$

Ze (165) najdeme, že při nízkých teplotách chemický potenciál klesá kvadraticky s teplotou,

$$\mu = E_F - \frac{\pi^2}{6} \frac{\mathcal{D}'_F}{\mathcal{D}_F} k_B^2 T^2 = E_F - \frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{12 E_F}. \quad (167)$$

7.3 Měrné teplo

Energie elektronového plynu je součet jednoelektronových energií započtených úměrně pravděpodobnosti obsazení stavu,

$$U = \sum_s \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{s\mathbf{k}} n_{s\mathbf{k}} = 2 \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \varepsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = \int_0^\infty d\omega \omega \mathcal{D}(\omega) n_\omega. \quad (168)$$

Při nulové teplotě

$$U_0 = \int_0^{E_F} d\omega \omega \mathcal{D}(\omega) = \frac{3}{5} n E_F. \quad (169)$$

Při konečné teplotě

$$\begin{aligned}
 U - U_0 &= \int d\omega \omega \mathcal{D}(\omega) (n_\omega - \Theta(E_F - \omega)) \\
 &= E_F \mathcal{D}_F \int d\omega (n_\omega - \Theta(E_F - \omega)) \\
 &+ (\mathcal{D}_F + E_F \mathcal{D}'_F) \int d\omega (\omega - E_F) (n_\omega - \Theta(E_F - \omega)) \\
 &= \frac{\pi^2}{6} \mathcal{D}_F k_B^2 T^2.
 \end{aligned} \tag{170}$$

Vztah (170) je znám především jako lineární závislost měrného tepla kovů při nízkých teplotách,

$$c_V^{\text{el}} = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = \gamma T, \quad \text{kde} \quad \gamma = \frac{\pi^2}{3} \mathcal{D}_F k_B^2. \tag{171}$$

Měřené hodnoty γ slouží k experimentálnímu stanovení hustoty stavů na Fermiho mezi. Ta se obvykle vyjadřuje přes renormalizaci hmoty, neboť hustota stavů je hmotě úměrná

$$\mathcal{D}_F = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E_F} = \frac{mk_F}{\pi^2 \hbar^2}. \tag{172}$$

Tabulka ukazuje, nakolik se efektivní hmota m^* stanovené z měřené hustoty stavů liší od hmoty elektronu.

	Cu	Ag	Be	Mg	Ca	Zn	Cd	Hg	Al	Ga
m^*/m	1.5	1.0	0.46	1.33	0.8	0.9	0.75	2.0	1.6	0.4

Změny efektivní hmoty jsou způsobeny jednak zanedbaným jednoelektronovým potenciálem V , jednak interakcí elektronů s fonony. Účinek potenciálu je poměrně snadné teoreticky spočítat. Ze zbývajícího příspěvku elektron-fononové interakce se stanovuje síla interakce nutná k výpočtu supravodivého stavu.

8 Magnetické vlastnosti volných elektronů

Magnetické pole snadno proniká elektronovým plynem a modifikuje jeho vlastnosti. Pomocí magnetického pole lze tedy měřit odezvu elektronů na vnější pole, aniž bychom systém vyvedli z rovnováhy.

8.1 Spinová susceptibilita

V magnetickém poli závisí energie elektronu na spinu,

$$\varepsilon_{\uparrow k} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_B B \quad \varepsilon_{\downarrow k} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu_B B, \quad (173)$$

kde B je magnetická indukce a $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.2 \cdot 10^{-24}$ J/T je magnetický moment elektronu zvaný Bohrův magneton. V důsledku nerovnosti energií jsou hustoty obou spinových pod systémů různé,

$$n_{\uparrow} = \frac{n}{2}(1+p) = \frac{k_{\uparrow}^3}{6\pi^2} \quad n_{\downarrow} = \frac{n}{2}(1-p) = \frac{k_{\downarrow}^3}{6\pi^2}, \quad (174)$$

kde p vyjadřuje bezrozměrnou míru polarizace při zachování celkové hustoty. Fermiho impulzy jsou $k_{\uparrow} = k_F(1+p)^{1/3}$ a $k_{\downarrow} = k_F(1-p)^{1/3}$.

Hodnotu polarizace najdeme z podmínky, že chemický potenciál je pro oba spinové pod systémy společný,

$$\frac{\hbar^2 k_{\uparrow}^2}{2m} - \mu_B B = \mu \quad \frac{\hbar^2 k_{\downarrow}^2}{2m} + \mu_B B = \mu. \quad (175)$$

Odečtením obou vztahů najdeme míru polarizace,

$$E_F \left((1+p)^{\frac{2}{3}} - (1-p)^{\frac{2}{3}} \right) = 2\mu_B B, \quad \text{takže} \quad p \approx \frac{3\mu_B B}{2E_F}. \quad (176)$$

Susceptibilitu spočteme z energetické bilance. Z definice je hustota energie magnetického pole v prostředí

$$\frac{1}{2\Omega} \int d\mathbf{r} HB = \frac{1}{2} HB = \frac{B^2}{2\mu_0(1+\chi)} \approx \frac{B^2}{2\mu_0} - \chi \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (177)$$

Susceptibilita χ popisuje změnu energie interakcí s kovem,

$$-\chi \frac{B^2}{2\mu_0} = U_B - U_0. \quad (178)$$

Hustota energie elektronů v kovu za přítomnosti magnetického pole je součet energií pod systémů se spiny \uparrow a \downarrow

$$\begin{aligned} U_B &= \frac{3}{5}n_{\uparrow}E_{\uparrow} - n_{\uparrow}\mu_B B + \frac{3}{5}n_{\downarrow}E_{\downarrow} + n_{\downarrow}\mu_B B \\ &= \frac{3}{5}nE_F \frac{1}{2} \left((1+p)^{\frac{5}{3}} + (1-p)^{\frac{5}{3}} \right) - np\mu_B B \end{aligned}$$

vých rovnic

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} & \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \\ \dot{x} &= \frac{p_x}{m} & \dot{p}_x &= -\omega_c(p_y + m\omega_c x) . \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{m} + \omega_c x & \dot{p}_y &= 0 \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{m} & \dot{p}_z &= 0\end{aligned}\quad (183)$$

Hybnosti p_y a p_z jsou integrály pohybu. Pohyb ve směru magnetického pole nezávisí na poli, $z = z_0 + \frac{p_z}{m}t$. V rovině $x - y$ částice krouží

$$x = -\frac{p_y}{m\omega_c} + R \cos \omega_c t, \quad y = y_0 + R \sin \omega_c t. \quad (184)$$

Střed kružnice v rovině kolmé k poli je v této kalibraci zadán hodnotami souřadnice a impulzu ve směru y .

Pro susceptibilitu potřebujeme popis kvantový. Jelikož p_y a p_z jsou integrály pohybu, vlnová funkce má tvar

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ik_z z} e^{ik_y y} \psi(x). \quad (185)$$

Schrödingerova rovnice

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(k_y + \frac{m\omega_c}{\hbar} x \right)^2 + k_z^2 \right) \psi(x) = E \psi(x) \quad (186)$$

odpovídá rovnici pro oscilátor se středem v $\bar{x} = -\frac{\hbar k_y}{m\omega_c}$, což je střed klasického pohybu. Energie kvantového stavu

$$E_{j\mathbf{k}} = \frac{k_z^2 \hbar^2}{2m} + \hbar \omega_c \left(j + \frac{1}{2} \right) \quad (187)$$

nezávisí na k_y .

Ze známých energií jednočásticových stavů spočteme hustotu stavů. Uvažujme kvádr $L_x \times L_y \times L_z = \Omega$. Celková hustota stavů kvádru je

$$\Omega \mathcal{D}(E) = 2 \sum_{k_z} \sum_{k_y} \sum_{j=0}^{\infty} \delta(E - E_{j\mathbf{k}}). \quad (188)$$

Energie nezávisí na k_y , takže k_y můžeme vysčítat. Stav musí ležet v kvádru, $-\frac{1}{2}L_x < \bar{x} < \frac{1}{2}L_x$, neboli $-\frac{1}{2\hbar}L_x m\omega_c < k_y < \frac{1}{2\hbar}L_x m\omega_c$. Vzdálenost impulzů je $2\pi/L_y$, takže

$$\mathcal{D}(E) = \frac{2}{\Omega} \frac{L_x m\omega_c}{\hbar} \frac{L_y}{2\pi} \sum_{k_z} \sum_{j=0}^{\infty} \delta(E - E_{j\mathbf{k}})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m\omega_c}{2\pi^2\hbar} \sum_j \int dk_z \delta(E - E_{jk}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \hbar\omega_c \sum_{j=0}^{j_{\max}} \frac{1}{\sqrt{E - \hbar\omega_c(j + \frac{1}{2})}}. \quad (189)
\end{aligned}$$

Při úpravě jsme převedli součet přes k_z na integrál, $\sum_{k_z} \rightarrow \frac{L_z}{2\pi} \int dk_z$, dosadili energii (187) a provedli integraci. Horní mez součtu přes j nedovoluje odmocniny se záporným argumentem.

Hustota energie pro jednočásticové stavy je

$$U = \int^\mu dE E \mathcal{D}^{(1)}(\mu) - \int^\mu dE \mathcal{D}^{(1)} = \mu \mathcal{D}^{(1)}(\mu) - \mathcal{D}^{(2)}(\mu). \quad (190)$$

Zavedli jsme $\mathcal{D}^{(1)}(E) = \int^E dE' \mathcal{D}(E')$ a $\mathcal{D}^{(2)}(E) = \int^E dE' \mathcal{D}^{(1)}(E')$. Funkce $\mathcal{D}^{(1)}$ se někdy nazývá integrovaná hustota stavů. Pro Fermiho energii μ je $\mathcal{D}^{(1)}(\mu) = n$, kde n je hustota elektronů.

Zavedeme odchylky způsobené magnetickým polem, $U = U_0 + \delta U$. Hustota elektronů se polem nemění, takže $\mathcal{D}_0^{(1)}(\mu_0) = \mathcal{D}^{(1)}(\mu)$. Odtud

$$\delta U = \delta \mu \mathcal{D}_0^{(1)}(\mu_0) - \delta \mathcal{D}^{(2)}(\mu_0) - \delta \mu \left. \frac{\partial}{\partial E} \mathcal{D}^{(2)} \right|_{E=\mu_0} = -\delta \mathcal{D}^{(2)}(\mu_0). \quad (191)$$

Potřebujeme tedy nalézt pouze změnu druhého integrálu hustoty stavů na nezměněné Fermiho mezi.

Z hustoty stavů (189) plyne

$$\mathcal{D}^{(2)}(E) = S \hbar\omega_c \sum_j \left(E - \hbar\omega_c \left(j + \frac{1}{2} \right) \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{kde} \quad S = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (192)$$

Pro malá pole $\omega_c \rightarrow 0$, tento výraz přechází na integrál

$$\mathcal{D}_0^{(2)}(E) = S \int_0^E dt (E - t)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} S E^{\frac{5}{2}}. \quad (193)$$

Sumu (192) spočteme pomocí integrálu a nejnižší opravy.⁷

$$\mathcal{D}_0^{(2)}(E) = \mathcal{D}_0^{(2)}(E) - \frac{1}{6} \left(\frac{\hbar\omega_c}{2} \right)^2 \mathcal{D}_0(E) \quad (194)$$

⁷Hledáme součet řady $R = \Delta \sum_0^{j_{\max}} f(t_j)$, kde $t_j = (j + \frac{1}{2}) \Delta$. Vyjádříme j -tý sčítanec jako integrál

$$f(t_j)\Delta = \int_{j\Delta}^{(j+1)\Delta} dt f(t_j) \approx -\frac{1}{3} \left(\frac{\Delta}{2} \right)^3 f''(t_j) + \int_{j\Delta}^{(j+1)\Delta} dt f(t).$$

V přibližném kroku jsme použili rozvoj $f(t) \approx f(t_j) + (t - t_j)f'(t_j) + \frac{1}{2}(t - t_j)^2 f''(t_j)$ pro odhad $f(t_j)$ z $f(t)$.

Nakonec dosadíme $\hbar\omega_c = 2\mu_B B$ a $\mu_0 = E_F$ do (191), takže

$$\delta U = \mathcal{D}_0^{(2)}(E_F) - \mathcal{D}^{(2)}(E_F) = \frac{1}{6}\mu_B^2 B^2 \mathcal{D}_F. \quad (195)$$

Použili jsme původní značení $\mathcal{D}(E_F) \equiv \mathcal{D}_F$. Energie s magnetickým polem roste, příspěvek je tedy diamagnetický. Nazývá se Landaův diamagnetismus.

Srovnáním s termodynamickým výrazem (178) dostaneme velikost Landaovy susceptibility

$$\chi_{\text{Landau}} = -\frac{1}{3}\mu_B^2 \mu_0 \mathcal{D}_F = -\frac{1}{3}\chi_{\text{Pauli}}. \quad (196)$$

Je třetinová proti Pauliho paramagnetismu a ještě zhoršuje souhlas s experimentálními hodnotami.

Jak Pauliho paramagnetismus tak Landaův diamagnetismus závisí jen slabě na teplotě. Pro jednočásticové pozorovatelné teplotní závislost snadno odvodíme z nulové teploty, neboť libovolnou funkci energie středovanou přes Fermiho-Diracovo rozdelení $f(E - \nu)$ můžeme přepsat

$$A = \int dE f(E - \nu) a(E) = - \int dE \frac{\partial f}{\partial E} \int^E dE' a(E'). \quad (197)$$

Funkce $-\frac{\partial f}{\partial E}$ je rozmanitá δ funkce s šírkou $k_B T$. Integrál $\int^E dE' a(E')$ je hodnota pozorovatelné při nulové teplotě.

8.3 de Haas-van Alphenův jev

Hustota energie roste s magnetickým polem. Vzorec (196) zachycuje pouze střední nárůst. Z původního výrazu (192) je patrné, že skutečná energie kolem střední hodnoty osciluje a pro $\hbar\omega_c (j + \frac{1}{2}) = E_F$, tj. pro

$$B = \frac{1}{2j+1} \frac{E_F}{\mu_B}, \quad (198)$$

Integrál přes lineární člen je nulový, přispívá pouze kvadratický člen. Součet přes všechny členy

$$R = \int_0^T dt f(t) - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \Delta \sum_0^J f''(t_j) \approx R_0 - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \int_0^T dt f(t) = R_0 - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 (f'(T) - f'(0)),$$

kde $T = (j_{\max} + 1)\Delta$ a R_0 je integrál odpovídající limitě $\Delta \rightarrow 0$ při konstantním T . V opravném členu řádu Δ^2 jsme použili opět rozklad na integrál a opravu, kterou jsme zanedbali neboť je řádu Δ^2 a vede tedy na příspěvek řádu Δ^4 .

V rozvoji (192) je krok $\Delta = \hbar\omega_c$, horní mez je energetický argument $T = E$, hledaná suma je $R \equiv \overset{(3)}{\mathcal{D}}(E)$, a integrál je její hodnota v nulovém magnetickém poli, $R_0 \equiv \mathcal{D}_0(E)$. Funkce $f(t) = S(E - t)^{\frac{3}{2}} = \mathcal{D}_0^{(1)}(E - t)$, takže opravu můžeme vyjádřit přes hustotu stavů nemagnetického systému, $f'(T) = -\mathcal{D}_0(0) = 0$ a $f'(0) = -\mathcal{D}_0(E)$.

má neanalytické body singulární ve druhé derivaci. Perioda magnetického pole, se kterou se tyto body vyskytují

$$\Delta B = \left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j+1} \right) \frac{E_F}{\mu_B} = \frac{2}{(2j)^2 - 1} \frac{E_F}{\mu_B} \approx 2B^2 \frac{\mu_B}{E_F} = \frac{2e}{\hbar} \frac{B^2}{k_F^2}, \quad \checkmark \quad (199)$$

je dobře měřitelná a poskytuje přímou informaci o k_F^2 . Ze vztahu (197) je patrné, že oscilace zaniknou při teplotách $k_B T \gg \hbar\omega_c$.

8.4 Kvantování orbit v magnetickém poli

Předpokládejme, že elektron je v krystalu bez magnetického pole popisán impulzem \mathbf{p} a energií ε_p , která se může lišit od parabolické závislosti volných elektronů. Klasický pohyb elektronu plyne z Newtonovy rovnice $\dot{\mathbf{p}} = e \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$. Beze změny značení považujeme \mathbf{r} a \mathbf{p} za jejich složky kolmé na pole \mathbf{B} , tedy $\mathbf{r}\mathbf{B} = 0$ i $\mathbf{p}\mathbf{B} = 0$.

Kvantování energií je určeno podmínkou na fázi po dráze

$$2\pi\hbar \left(j + \frac{1}{2} \right) = \oint d\mathbf{r} (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) = e \oint d\mathbf{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{B} + \mathbf{A}). \quad (200)$$

Použili jsme řešení Newtonovy rovnice, $\mathbf{p} = e \mathbf{r} \times \mathbf{B} + \mathbf{p}_0$, kde \mathbf{p}_0 vypadne pod kruhovým integrálem. Druhý člen je úměrný magnetickému toku Φ plochou S_r ohraničenou drahou elektronu,

$$\oint d\mathbf{r} \mathbf{A} = \int_{S_r} d\mathbf{r} \nabla \times \mathbf{A} = BS_r = \Phi. \quad (201)$$

První člen (200) je úměrný zápornému dvojnásobku magnetického toku

$$\oint d\mathbf{r} \mathbf{r} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = -2BS_r = -2\Phi. \quad (202)$$

Jak vidno, tok uzavřený drahou elektronu je kvantován,

$$-e\Phi = 2\pi\hbar \left(j + \frac{1}{2} \right). \quad (203)$$

Základním kvantem magnetického toku je $\Phi_{el} = 2\pi\hbar/e$.⁸

Z kvantování orbit lze vyjádřit de Haas-van Alphenův jev. Kruhový integrál skaláru je nula, $0 = \oint d(\mathbf{pr})$, takže rovnici (200) můžeme

⁸V supravodiči je základním kvantem magnetického toku $\Phi_0 = \Phi_{el}/2$. Toto je jedním z hlavních argumentů ve prospěch představy, že supravodivý stav je spojen s párováním elektronů, tj. s vytvářením efektivních částic s nábojem $2e$.