13. Absorpce a index lomu – interakce světla s látkou

Popis interakce elektromagnetického záření s látkami můžeme provádět na různých úrovních:

- popisy látky i pole založené na kvantové mechanice a kvantové teorii pole;
- popisy založené na kvantovém popisu látky a „klasickém“ (nekvantovém) popisu pole;
- popisy založené na klasickém (nekvantovém) popisu látky i pole.

V tomto textu se zaměříme na nejjednodušší verzi z poslední možnosti. Budeme se zabývat fenomenologickým (tj. makroskopickým) popisem interakce „klasického“ elektromagnetického pole splňujícího makroskopické Maxwellovy rovnice a látka bude reprezentována souborem klasických oscilátorů (Lorentzův model) a relaxátorů (Drudeův model volných nosičů). Omezíme se na reakci látky na monochromatické elektromagnetické pole. Rovněž se nebudeme zabývat anizotropními látkami, látkami s optickou aktivitou (ve smyslu kruhového dvojlomu a kruhového dichroismu) a nebudeme uvažovat nelineárními procesy. Látku budeme považovat za homogenní a časově stálou, tedy její vlastnosti nejsou závislé ani na prostorových souřadnicích, ani na čase. Pro začátek budeme uvažovat polonekonečné absorbující prostředí pro $z > 0$, na které dopadá z vakua **kolmo** k rozhraní rovinná vlna. Jak vyplyne z dalšího, v tomto případě se v absorbujícím prostředí šíří homogenní, tlumená, rovinná vlna

Slábnutí intenzity postupné rovinné vlny při šíření uvnitř absorbujícího prostředí ve směru osy z je v rámci nejjednoduššího modelu popsáno exponenciálním tlumením

$$I(z) = I(z_0)e^{-\alpha(z-z_o)}, \qquad (13.1)$$

kde $I(z_0)$ je intenzita záření ve vzorku na souřadnici z_0 a parametr v exponenciále je nazývaný **extinkční koeficient.** Pokud je vzorek dostatečně homogenní, takže můžeme zanedbat ztráty výkonu neseného vlnou rozptylovými mechanismy a ztráty výkonu jdou na vrub absorpčním procesům, nazveme tento parametr **absorpční koeficient** (též absorpční „konstanta“, přestože závisí na různých parametrech, mj. hlavně na frekvenci vlny). Rozměr α je m^{-1}. Její fyzikální význam je tloušťka materiálu $d = \frac{1}{\alpha}$, po jejímž průchodu poklesne intenzita záření na $\frac{1}{e}$ původní hodnoty.

V dalším vezměme pro zjednodušení $z_0 = 0$. Exponenciální závislost intenzity je důsledkem předpokladu, že ubývání intenzity vztažené na jednotku délky je úměrné intenzitě v tomto místě

$$dI(z) = -\alpha\, I(z)\, dz,$$

$$\int \frac{dI(z)}{I(z)} = -\alpha \int dz,$$

$$\ln I(z) + C' = -\,\alpha z,$$

$$C\, I(z) = e^{-\alpha z}$$

a integrační konstantu $C = \frac{1}{I_0}$ určíme z podmínky $I(z=0) = I_0$.

Z praktického hlediska je základním experimentem měření propustnosti planparalelního vzorku tloušťky $d,$ kdy zjišťujeme poměr intenzity záření (Poyntingova vektoru) vystupujícího ze vzorku a intenzity do vzorku vstupujícího. Obecně není úloha určení absorpčního koeficientu z tohoto poměru triviální, ale za silně zjednodušujících podmínek (vhodná tloušťka vzorku s ohledem na velikost absorpčního koeficientu, zanedbání vnějších i vnitřních odrazů na rozhraních) je pokles intenzit před a za vzorkem formulován jako Lambertův-Beerův zákon

$$I_{OUT}(d) = I_{IN} e^{-\alpha d}. \tag{13.2}$$

Několik poznámek o poměrech výstupní a vstupní intenzity $\frac{I_{IN}}{I_{OUT}}$ je uvedeno v **Dodatku 13.1**.

Pokles výkonové intenzity při šíření vlny v homogenním absorbujícím prostředí je spojen se zmenšením amplitudy kmitů, a to všech zúčastněných polí. Exponenciální pokles amplitudy lineárně polarizované vlny lze zahrnout v **reálném popisu** jako člen $e^{-\,k_I z}$

$$E_x(z,t) = E_{0x}\, e^{-\,k_I z} \cos(k_R z + \varphi_E) = E_{0x}\, e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z} \cos\left(\frac{\omega}{c} n z + \varphi_E\right),$$

kde k_I, k_R, κ, n jsou reálná čísla, přičemž k_I (resp. κ) charakterizuje exponenciální pokles amplitudy kmitů. Podobně lze napsat i pro další pole potřebná pro spočtení intenzity, ať již ve smyslu Poyntingova vektoru nebo hustoty elektrické energie

$$H_y(z,t) = H_{0y}\, e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z} \cos\left(\frac{\omega}{c} n z + \varphi_H\right),$$

$$D_x(z,t) = D_{0x}\, e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z} \cos\left(\frac{\omega}{c} n z + \varphi_D\right).$$

Z řešení Maxwellových rovni v uvažovaném případě plyne, že fázové posuvy $\varphi_E, \varphi_H, \varphi_D$ nejsou stejné, ale souvisejí s materiálovými parametry absorbující látky. Podobně jako v případě netlumených monochromatických vln je i pro případ tlumených monochromatických vln z početních důvodů mnohem elegantnější používat komplexní symboliku. Popis šíření tlumené vlny lze zcela analogicky popisu vlny v neabsorbujícím prostředí provést pomocí vlnového vektoru a indexu lomu. V absorbujícím prostředí to učiníme přes **komplexní vlnový vektor** $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}} = \boldsymbol{k_R} + i\boldsymbol{k_I}$**.** V obecném případě nemusí mít reálná a imaginární část stejný směr.[1] V dalším textu se omezíme na případ kolmého dopadu na rozhraní vakuum – absorbující prostředí, kdy jsou reálná i imaginární část vlnového vektoru paralelní.

V uvažované geometrii mají tedy reálná i imaginární část tohoto vektoru nenulové pouze z-ové složky. Podobně jako souvisí velikost vlnového vektoru s indexem lomu v neabsorbujícím prostředí, je tomu tak i v případě absorbujícího prostředí. V uvažované geometrii

Např. při šikmém dopadu na rozhraní je směr $\boldsymbol{k_R}$ určen zákonem lomu a je kolmý na roviny konstantní fáze, zatímco směr $\boldsymbol{k_I}$ je kolmý na roviny konstantní amplitudy, které jsou rovnoběžné s rovinou rozhraní. Výsledkem je nehomogenní vlna, ve které se amplituda podél vlnoplochy mění. Nehomogenní vlna pak už není vlnou příčnou, ale (jak plyne z Maxwellových rovnic) má i podélné složky závisející na polarizaci.

$$\widetilde{\mathcal{K}}_z = (\boldsymbol{k}_R)_z + i(\boldsymbol{k}_I)_z = \frac{\omega}{c}(n + i\kappa) = \frac{\omega}{c}\widetilde{\mathcal{N}}, \tag{13.3}$$

$$\widetilde{\mathcal{N}}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega).$$

Tyto parametry vlny jsou frekvenčně závislé. Látka je charakterizována materiálovými parametry, jako jsou susceptibilita, permitivita, vodivost a permeabilita. Pro látky, ve kterých dochází k transformaci energie elektromagnetického pole na jiné formy energie (převážně teplo) je opět výhodné zavést tyto parametry pro monochromatickou excitaci „nemagnetické" látky jako komplexní

$$\tilde{\chi}(\omega) = \chi_R(\omega) + \chi_I(\omega) \tag{13.4}$$

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon_R(\omega) + i\varepsilon_I(\omega),$$

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \sigma_R(\omega) + i\sigma_I(\omega),$$

$$\mu = \mu_0.$$

Prvním důležitým krokem je najít vztahy mezi parametry popisujícími vlnu (komplexní index lomu $\widetilde{\mathcal{N}}$) a parametry popisujícími látku (např. $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$).

Zopakujme makroskopické Maxwellovy rovnice pro „nemagnetické" prostředí s hustotou volných nábojů ϱ a hustotou volných proudů $\boldsymbol{j}$

$$\operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r}, t) = \varrho(\boldsymbol{r}, t), \qquad \operatorname{div} \widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}, t) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}, t) = \tilde{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}$$

doplněné o lokální, izotropní a lineární materiálové vztahy

$$\widetilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_0 \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, t) + \widetilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r}, t) =$$

$$= \varepsilon_0 \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, t)\,(1 + \tilde{\chi}) = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, t),$$

$$\tilde{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}, t) = \tilde{\sigma}\, \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, t),$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}, t).$$

Přitom veličiny $\widetilde{\boldsymbol{E}}, \widetilde{\boldsymbol{D}}, \widetilde{\boldsymbol{P}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{H}}, \tilde{\sigma}$ a $\tilde{\varepsilon}_r$ jsou závislé na frekvenci monochromatické vlny.

Budeme zabývat šířením rovinné, lineárně polarizované, monochromatické vlny ve směru osy z. Budeme uvažovat vlnu tlumenou a homogenní s elektrickým polem v komplexní symbolice

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, t) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_0(\mathrm{z} = 0, t = 0)\, e^{i\widetilde{\mathcal{K}} z}\, e^{-i\omega t},$$

kde $\widetilde{\boldsymbol{E}}_0$ je pole v absorbujícím prostředí v místě $z = 0$ a v čase $t = 0$.

Dosazením homogenní, postupné, monochromatické, tlumené, rovinné a lineárně polarizované vlny do Maxwellových rovnic dostaneme v modelu s předpokladem $\tilde{\sigma}(\omega \neq 0) = 0$ dostaneme, (**Dodatek 13.2**)

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E}_x = E_0\, e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t},\\
&\tilde{D}_x = E_0\varepsilon_0\,(\varepsilon_R + i\varepsilon_I) e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t} = E_0\varepsilon_0\,(n+i\kappa)^2 e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t},\\
&\tilde{H}_y = E_0\varepsilon_0 c\,\frac{\varepsilon_R + i\varepsilon_I}{n+i\kappa} e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t} = E_0\varepsilon_0 c\,(n+i\kappa)\, e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t},\\
&\tilde{B}_y = \frac{1}{c} E_0\,(n+i\kappa)\, e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t}.
\end{aligned}
\tag{13.5}
$$

Protože koeficient úměry mezi $\tilde{D}_x$ a $\tilde{E}_x$, (podobně mezi $\tilde{H}_y$ a $\tilde{E}_x$) je číslo komplexní, tyto veličiny nekmitají ve fázi, ale s fázovým posuvem určeným poměrem komplexní a reálné části indexu lomu. Vztahy 13.5 můžeme přepsat pomocí fázového posunu $\varphi_{\mathcal{N}} = \varphi_H - \varphi_E$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{H}_y = \varepsilon_0 c\,(n+i\kappa)\tilde{E}_x = \varepsilon_0 c\,|\mathcal{N}|\, e^{i\varphi_{\mathcal{N}}}\, \tilde{E}_x,\\
&\tilde{D}_x = \varepsilon_0\,(n+i\kappa)^2\tilde{E}_x = \varepsilon_0\,|\mathcal{N}|^2\, e^{2i\varphi_{\mathcal{N}}}\, \tilde{E}_x,\\
&\tan\varphi_{\mathcal{N}} = \frac{\kappa}{n}, \qquad |\mathcal{N}|^2 = n^2 + \kappa^2.
\end{aligned}
\tag{13.6}
$$

Z rovnosti$(n+i\kappa)^2 = \tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_R + i\varepsilon_I$ vyplývají vztahy

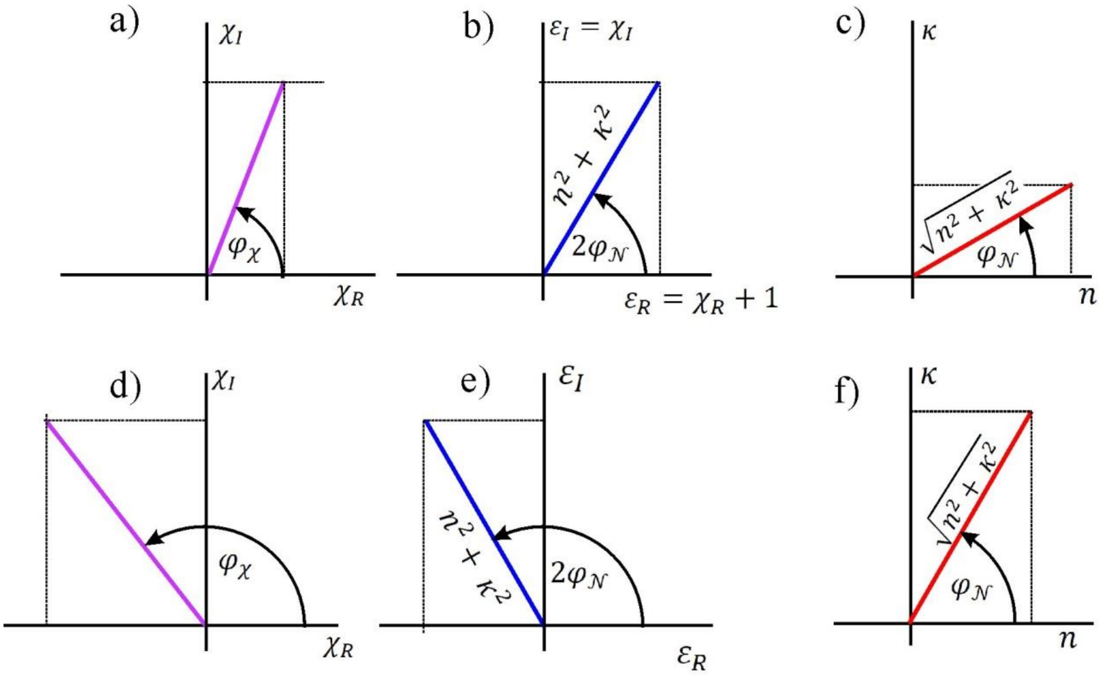
$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\{\tilde{\varepsilon}_r\} = \varepsilon_R = n^2 - \kappa^2, \qquad \mathrm{Im}\{\tilde{\varepsilon}_r\} = \varepsilon_I = 2n\kappa,\\
&n = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2}\right)}, \qquad \kappa = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2}\right)},\\
&e^{i\tilde{\mathcal{K}}z} = e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}\, e^{i\frac{\omega}{c}nz}.
\end{aligned}
\tag{13.7}
$$

Slábnutí intenzity vlny při průchodu prostředím můžeme vypočítat jak ze závislosti hustoty elektrické energie, tak ze závislosti Poyntingova vektoru na souřadnici z (**Dodatek 13.3**). V obou případech dostáváme slábnutí intenzity podél směru šíření popsané závislostí $e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z}$. V diskusí na počátku této kapitoly jsme zavedli absorpční koeficient α, pro jehož hodnotu porovnáním dostáváme

$$
\alpha = 2\frac{\omega}{c}\,\kappa = 2k_I. \tag{13.8}
$$

Z rovnic 13.7 plyne, že pokud dochází k absorpci ($\alpha > 0$), je $\kappa > 0, \varepsilon_I > 0$ a permitivita $\tilde{\varepsilon}_r$ je komplexní. V tomto případě je komplexní i susceptibilita $\tilde{\chi}$ a pro vektor polarizace $\boldsymbol{P}$ můžeme psát v našem uspořádání

$$
\tilde{P}_x(z,t) = \varepsilon_0\tilde{\chi}\,\tilde{E}_x(z,t) = \varepsilon_0\big(\chi_R + i\,\chi_I\big)\tilde{E}_x(z,t) = \varepsilon_0|\tilde{\chi}\,|\, e^{i\varphi_\chi}\tilde{E}_x(z,t). \tag{13.9}
$$



Obr. 13.1 Znázornění významu úhlů φ_χ, $\varphi_\mathcal{N}$ a $2\varphi_\mathcal{N}$. V horní řádce diagramů (a,b,c) pro $\varphi_\mathcal{N} < 45°$ a v dolní řádce diagramů (d,e,f) pro $\varphi_\mathcal{N} > 45°$.

Absorpce v dielektriku je tedy spojena s **fázovým posunem** mezi budícím elektrickým polem $\boldsymbol{E}$ a odezvou látky reprezentovanou vektorem polarizace $\boldsymbol{P}$. V důsledku Maxwellových rovnic dochází i k fázovému posuvu mezi elektrickým a magnetickým polem. Pokud je absorpční koeficient roven nule, jsou nulové i imaginární části permitivity a susceptibility ($\varphi_\chi = 0$) a vektory $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ kmitají ve fázi.

Objemová hustota výkonu odebíraného vlně vztažená na jednotkovou vzdálenost a časově vystředovaná je (**Dodatek 13.3**)

$$\langle -\mathrm{div}\, S\rangle_t = -\left\langle \frac{\partial S_z}{\partial z}\right\rangle_t = \frac{1}{2}\, cn\varepsilon_0 E_0^2\;\, \alpha\, e^{-\alpha z} = \tag{13.10}$$

$$= \;\varepsilon_0 E_0^2\; \omega\, n\, \kappa\, e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\; \omega\; \varepsilon_I\; e^{-\alpha z}.$$

Ke stejnému výsledku dospějeme i tak, že za objemovou hustotu ztrát výkonu budeme považovat Jouleovo teplo Q uvolněné v důsledku součinu polarizačního proudu $\boldsymbol{j}_P = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$ a elektrického pole $\boldsymbol{E}$ (**Dodatek 13.3 a 13.4**) v souladu s tzv. Poyntingovým teorémem, který popisuje energetickou bilanci ve zvoleném elementárním objemu látky. V naší geometrii

$$\langle Q(z)\rangle_t = \langle j_{Px}(z)\cdot E_x(z)\rangle_t = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\; \omega\; \varepsilon_I\; e^{-\alpha z}. \tag{13.11}$$

Ze vztahů 13.10 a 13.11 plyne, že objemová hustota výkonu odebíraného vlně v absorbujícím prostředí je úměrná součinu $\omega n(\omega)\kappa(\omega) = \frac{\omega}{2}\;\varepsilon_I(\omega)$.

Jev absorpce (vedoucí ke komplexnímu indexu lomu) je významný i z hlediska odrazu dopadajícího světla. Fresnelovy amplitudové koeficienty (kapitola 3) jsme definovali jako komplexní veličiny. Při výkladu odrazu na neabsorbujícím dielektriku (s vyloučením totálního odrazu) jsme ukázali, že se jedná o reálná čísla. V případě absorbujícího dielektrika tomu již tak není. Vzhledem k tomu, že dochází k absorpci, je index lomu komplexní. Fresnelovy amplitudové koeficienty odrazu pro obě složky polarizace získáme dosazením komplexních indexů lomu do rovnic 3.31 a 3.35. Speciálně pro případ kolmého dopadu ze vzduchu ($n_1 = 1$) do absorbujícího dielektrika ($\widetilde{\mathcal{N}}_2 = n_2 + i\kappa_2$) dostaneme pro amplitudový koeficient odrazu

$$\tilde{r}_{s,p}(\omega) = \tilde{r}(\omega) = \frac{1 - n_2(\omega) - i\kappa_2(\omega)}{1 + n_2(\omega) + i\kappa_2(\omega)}. \tag{13.12}$$

Pro výkonový koeficient odrazu pro případ kolmého dopadu na absorbující dielektrikum $R(\omega)$ pak platí

$$R(\omega) = r(\omega).r^*(\omega) = \frac{1 - n_2(\omega) - i\kappa_2(\omega)}{1 + n_2(\omega) + i\kappa_2(\omega)} \cdot \frac{1 - n_2(\omega) + i\kappa_2(\omega)}{1 + n_2(\omega) - i\kappa_2(\omega)} = \tag{13.13}$$

$$= \frac{[n_2(\omega) - 1]^2 + \kappa_2^2(\omega)}{[n_2(\omega) + 1]^2 + \kappa_2^2(\omega)}.$$

Dosud jsme diskutovali šíření monochromatické, homogenní, tlumené vlny a vztah komplexního indexu lomu $\widetilde{\mathcal{N}}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega)$ s fenomenologickým parametrem popisu látkového prostředí, komplexní permitivitou $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$ a předpokládali jsme nulovou vodivost $\sigma = 0$. Za takového předpokladu byly odvozeny vztahy 13.5 až 13.11.

Jak se však ukazuje, uvedené omezení vůbec není principiální. Takový popis lze použít při popisu **obecného** ztrátového lineárního látkového prostředí při monochromatické excitaci. Alternativně je možno používat různé varianty sad materiálových parametrů, které lze mezi sebou libovolně převádět, jak je naznačeno v **Dodatku 13.4 a 13.5.** V tomto textu budeme i nadále preferovat popis pomocí $\tilde{\varepsilon}_r(\omega),\ \sigma(\omega \neq 0) = 0$.

V dalším budeme prezentovat dva nejjednodušší modely pro určení frekvenční závislosti $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$, totiž model Lorentzova oscilátoru a Drudeův model pro volně pohyblivé náboje (např. „volné“ elektrony v kovu).

Lorentzův model odezvy dielektrika

Základní nekvantový Lorentzův model vychází z představy látky jako souboru oscilátorů - elektrických dipólů, jejichž náboje vnější elektrické pole vychyluje z jejich rovnovážných poloh. Ve své jednoduché, zde prezentované podobě, neuvažuje vzájemné působení kmitajících objektů přes lokální elektrická (případně magnetická) pole. Toto vnější pole vytváří v látce oscilující polarizaci.

Jednou z možností je, že nabitou částicí je elektron v atomu, který se chová jako klasická částice podle zákona síly ($\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$). Na elektrony působí elastická síla, která jej váže k jádru atomu a dále disipativní síla, která má za následek absorpci energie. Model dále předpokládá, že všechny základní stavební elementy látky (atomy) jsou identické a každý má jeden nebo několik elektronů reagujících na vnější pole. Atomy nebo molekuly jsou rovnoměrně rozloženy v objemu s objemovou koncentrací nábojů N. Při působení elektrického pole dochází k vychýlení elektronu v obalu vůči jádru o výchylku $\boldsymbol{r}$ a ke vzniku elementárního dipólu. Objemovou hustotu dipólového momentu pak vyjadřuje vektor polarizace $\boldsymbol{P}$, který můžeme psát jako

$$\boldsymbol{P}(z,t) = Nq\boldsymbol{r}(z,t), \tag{13.15}$$

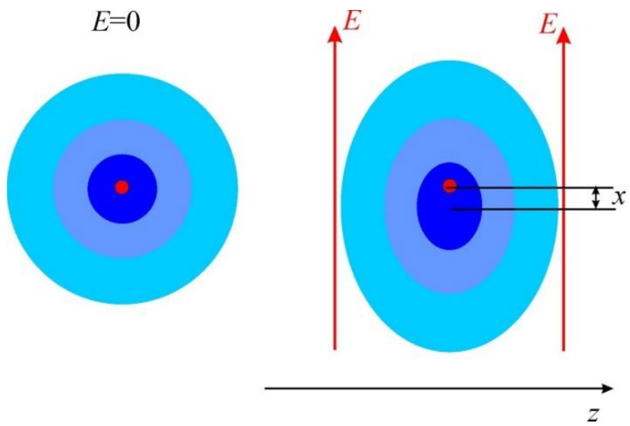
kde q je efektivní náboj tvořící dipól $\pm q$ a jejich objemová koncentrace je N Výchylka $\boldsymbol{r}(z,t)$závisí na velikosti elektrického pole $\boldsymbol{E}(z,t)$ v daném místě**.** V dalším se omezíme na výchylky (a směr dipólových momentů) ve směru osy x.

Na základě Newtonova zákona síly sestavíme pohybovou rovnici popisující výchylku elektronu z rovnováhy $\tilde{x}(t)$. Předpokládáme, že výchylka je komplexní veličina, tj. může dojít k fázovému posunu vůči budícímu elektrickému poli. Použijeme jednorozměrný popis, kdy budeme předpokládat, že elektron se vůči jádru vychyluje ve směru x, ve kterém rovněž působí elektrické pole $\widetilde{\boldsymbol{E}} = \left(E_0 e^{-i\omega t}, 0{,}0\right)$. Elektrické pole tedy působí v místě atomu na elektron silou $qE(t)$. Proti tomu působí síla tření $-\,m\gamma\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}$, která je zodpovědná za absorpci energie a rovněž síla $-k_H x(t)$ zodpovědná za vazbu elektronu k jádru.

$$m\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} + m\gamma\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + k_H\tilde{x}(t) = q\tilde{E}(t), \tag{13.16}$$

$$ma = q\tilde{E}(t) - m\gamma\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} - k_H\tilde{x}(t),$$

kde γ je konstanta popisující tlumení úměrné rychlosti $\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}$ a k_H je konstanta vratné („elastické“) síly vážící elektron k jádru atomu (Hookova konstanta při představě pružinového modelu).



Obr. 13.2 Schématické znázornění vlivu elektrického pole na atom a vznik dipólového momentu

Rovnici 13.16 upravíme a dostaneme

$$\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} + \gamma\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + \omega_0^2\,\tilde{x}(t) = \frac{q}{m}\tilde{E}(t), \tag{13.17}$$

kde jsme zavedli kruhovou frekvenci $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_H}{m}}$ jako vlastní frekvenci kmitů netlumeného oscilátoru.

Rovnice 13.17. je diferenciální rovnicí druhého řádu s nenulovou pravou stranou. Její obecné řešení je součet řešení homogenní rovnice (pravá strana = 0) a partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Řešení homogenní rovnice $\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$ pro $t \to \infty$ konverguje k nule. Vlastní kmity se tedy po dostatečně dlouhé době utlumí. Nebudeme dále diskutovat přechodové jevy, ale budeme se zabývat jen kmity po uplynutí velmi dlouhé ("∞") doby od počátku působení elektrického pole. Řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$. Dosazením $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$ pro **vynucené kmity** dostaneme

$$[(-i\omega)^2\tilde{x}_0 - i\omega\gamma\tilde{x}_0 + \omega_0^2\tilde{x}_0]e^{-i\omega t} = \frac{q}{m}E_0 e^{-i\omega t}, \tag{13.18}$$

$$\tilde{x}_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) = \frac{q}{m}E_0,$$

$$\tilde{x}_0 = \frac{qE_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}.$$

To představuje příspěvek k objemové hustotě dipólového momentu (polarizaci) P od daného typu oscilátoru

$$\Delta\tilde{P}_x(t) = Nq\tilde{x} = Nq\tilde{x}_0 e^{-i\omega t} = \frac{Nq^2E_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}\,e^{-i\omega t} = \tag{13.19}$$

$$= \Delta\tilde{\chi}(\omega)\,E_0\,e^{-i\omega t}$$

a příspěvek k susceptibilitě od tohoto typu oscilátorů je

$$\Delta\tilde{\chi}(\omega) = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\;\frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \tag{13.20}$$

Pokud tlumení γ nelze zanedbat, jsou susceptibilita $\tilde{\chi}(\omega)$, permitivita $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$ a polarizace $\tilde{P}$ komplexní veličiny. Vztah pro příspěvek k susceptibilitě od jednoho typu oscilátoru můžeme upravit pro rozdělení na reálnou a imaginární část

$$\Delta\tilde{\chi}(\omega) = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\;\frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\;\frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} = \tag{13.21}$$

$$= \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\;\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\;\frac{i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} =$$

$$= \Delta\chi_R(\omega) + i\Delta\chi_I(\omega).$$

Uvedený výraz pro $\Delta\tilde{\chi}(\omega)$ představuje příspěvek k susceptibilitě od jednoho typu oscilátorů v látce. Látka, ve které by se vyskytoval pouze jediný typ oscilátoru, neexistuje. Rejstřík mechanismů absorpce elektromagnetického vlnění je velmi široký: od kmitání téměř volných nosičů náboje s $\omega_0 \to 0$, přes reorientace dipólů (např. molekuly vody v mikrovlnné troubě), kmitů iontů v mikrovlnné a infračervené oblasti, kmity elektronových oblaků v atomech či molekulách ve viditelné a ultrafialové oblasti až po oblast rentgenovou. Přitom při námi uvažované podmínce, že výchylky kmitů nejsou příliš veliké (platí lineární superposice polí i výchylek nábojů), je **aditivním parametrem susceptibilita,** což plyne z toho, že se skládají polarizace $\boldsymbol{P}_l$ od jednotlivých typů oscilátorů l

$$\tilde{\chi}(\omega) = \sum_l \tilde{\chi}_l(\omega) = \sum_l \chi_{Rl}(\omega) + i\sum_q \chi_{Il}(\omega),$$

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \tilde{\chi}(\omega) = 1 + \sum_q \chi_{Rl}(\omega) + i\sum_q \chi_{Il}(\omega).$$

Experimentální hodnoty koeficientů $\frac{N_l q_l^2}{\varepsilon_0 m_l}$ obecně neodpovídají hodnotám např. náboje a hmotnosti volných elektronů pro oscilátory, které by měly popisovat polarizaci vyvolanou právě pohybem elektronových oblaků. Proto při odhadech velikosti tohoto členu je potřeba používat efektivní hodnoty, např. efektivní hodnoty elektronů v krystalických látkách či efektivní náboje v popisu kmitů iontů. Ani to však nepostačuje a proto je k tomuto členu přidáván ještě další koeficient zvaný **síla oscilátoru** f_l. V aproximaci, že všechny mechanismy lze popsat uvedeným modelem oscilátoru, bychom dostali

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \sum_l \frac{N_l q_l^2}{\varepsilon_0 m_l} f_l \frac{\omega_{0l}^2 - \omega^2 + i\gamma_l\omega}{(\omega_{0l}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_l\omega)^2},$$

kde $N_l, q_l, m_l, \omega_{0l}, \gamma_l$ jsou efektivní hodnoty parametrů pro oscilátory typu l. Samozřejmě takový model je značně naivní, protože zanedbává vzájemné působení kmitajících objektů přes lokální pole, o kvantových zákonitostech nemluvě. Pro reálnou část permitivity $\mathrm{Re}\{\tilde{\varepsilon}_r\} = \varepsilon_R$ je

$$\begin{aligned}\varepsilon_R(\omega) = n^2 - \kappa^2 = 1 + \sum_l \chi_{Rl}(\omega) = \\ = 1 + \sum_l \frac{N_l q_l^2}{\varepsilon_0 m_l} f_l \frac{\omega_{0l}^2 - \omega^2}{(\omega_{0l}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_l\omega)^2}\end{aligned} \tag{13.22}$$

a pro imaginární část $\mathrm{Im}\{\tilde{\varepsilon}_r\} = \varepsilon_I$ je

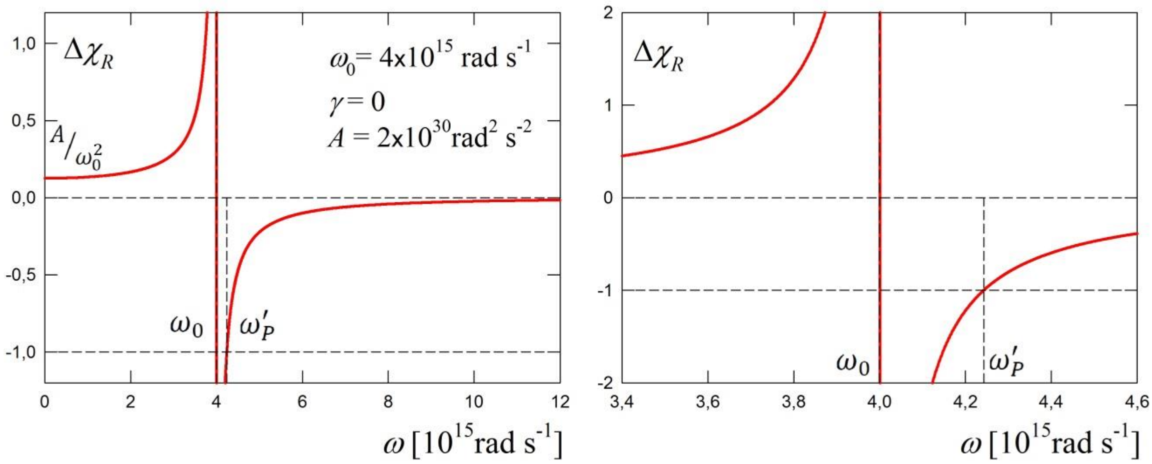
$$\varepsilon_I(\omega) = 2n\kappa = \sum_l \chi_{Il}(\omega) = \sum_l \frac{N_l q_l^2}{\varepsilon_0 m_l} f_l \frac{\gamma_l\omega}{(\omega_{0l}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_l\omega)^2}.$$

Při popisu parametrů v dalších obrázcích budeme užívat zkratku

$$A_l = \frac{N_l q_l^2}{\varepsilon_0 m_l} f_l$$

Síla oscilátoru f_l má vztah ke korektnějšímu pojednání o optických vlastnostech, totiž ke kvantově mechanickému pojmu **pravděpodobnost přechodu**, který je založen na integrálech vlnových funkcí kvantově mechanických stavů, mezi kterými se přechod absorbující foton o energii $\hbar\omega$ uskuteční. Kvantově mechanické modely vedou ke stejným či podobným spektrálním závislostem, ovšem s jiným významem koeficientu před členem popisujícím spektrální závislostí.

Pro osvětlení některých pojmů se podívejme na výsledek modelu pro **jeden typ oscilátoru bez tlumení**, $\gamma = 0$.



Obr. 13.3 Příspěvek k susceptibilitě od jednoho typu netlumeného oscilátoru

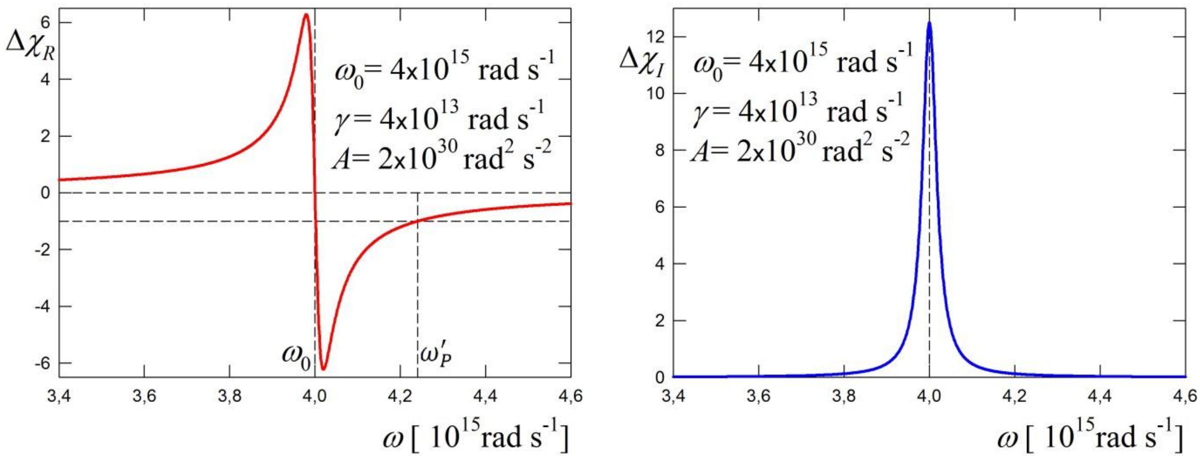
Susceptibilita je reálná. Pro $\omega < \omega_0$ kmitají elektrické pole E, polarizace P i elektrická indukce D ve fázi. V limitě nízkých frekvencí je příspěvek $\Delta\chi_R(\omega \to 0) = \frac{A}{\omega_0^2} > 0$. Pro případ přítomnosti mnoha typů oscilátorů dostaneme $\chi_R(\omega \to 0) = \sum_l \frac{A_l}{\omega_{0l}^2}$.

Při $\omega = \omega_0$ susceptibilita diverguje, polarizace by byla $P(\omega_0) \to \pm\infty$. V případě nenulového tlumení tato potíž odpadá.

Zajímavá je spektrální oblast $\omega_0 < \omega < \omega'_P$, kde $\omega'_P = \sqrt{\omega_0^2 + A}$ dostaneme ze vztahu $\Delta\chi_R(\omega'_P) = -1$ a $\Delta\chi_R(\omega_0 < \omega < \omega'_P) < -1$. Takže v protifázi k vnějšímu elektrickému poli kmitá nejen polarizace, ale dokonce i indukce D. V jednooscilátorovém modelu by byla permitivita $\varepsilon(\omega'_P) = 0$, tj. $D = 0$, neboli $P = -\varepsilon_0 E$. Přítomnost tlumení a přítomnost dalších typů oscilátorů sice situaci v reálných látkách významně komplikují, přesto (pokud podobná situace nastane) je výsledkem vysoká odrazivost v části této spektrální oblasti.

V limitě vysokých frekvencí je $\Delta\chi_R(\omega \to \infty) = 0$, přičemž $\Delta\chi_R(\omega_0 < \omega) < 0$ a to pro všechny typy oscilátorů.

Důsledek zavedení nepříliš silného, ale nenulového tlumení pro uvedený model jediného typu oscilátoru je na obr. 13.4.



Obr. 13.4 Příspěvky k reálné a imaginární části susceptibility od jednoho typu lorentzovského oscilátoru. Kruhové frekvenci $\omega_0 = 4 \times 10^{15}$ rad s^{-1} odpovídá vlnová délka 471 nm.

V další části uvedeme výsledky zjednodušených modelů, které předpokládají pouze jediný typ spektrálně osamoceného lorentzovského oscilátoru (v následujícím bez indexu) ve sledované spektrální oblasti a příspěvky jiných mechanismů interakce (např. interakce pole – elektrony, pole – ionty, pole – natáčení dipólových momentů přítomných v látce atp.) jsou hrubě simulovány jako konstantní příspěvek k reálné části permitivity, tj. i k indexu lomu, viz **Dodatek 13.6.**

$$\varepsilon_R(\omega) = n_{MED}^2 + A\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2},$$
$$\varepsilon_I(\omega) = A\,\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}. \tag{13.23}$$

Obrázky 13.5 až 13.7 jsou nakresleny pro různě silné oscilátory z oblasti typické pro absorpci způsobenou vázanými elektrony. Z obrázků je patrné, že imaginární část susceptibility (a permitivity) má maximum poblíž frekvence ω_0, kdy dochází k maximální absorpci výkonu elektromagnetického pole.

Reálná a imaginární část indexu lomu nejsou aditivní veličiny, jejich průběh nelze vyjádřit jako součet příspěvků jednotlivých oscilátorů. Průběh frekvenční závislosti reálné části indexu lomu n má poměrně komplikovaný průběh. V části I (obr. 13.5) od malých frekvencí až do jisté frekvence index lomu s frekvencí roste. Takovým oblastem frekvencí říkáme oblasti **normální disperze**. Např. při průchodu slunečního světla atmosférou jsou rezonanční frekvence molekul plynů atmosféry výrazně vyšší než frekvence viditelného světla. Z pohledu našeho modelu se tedy viditelný obor spektra nachází v oblasti normální disperze I. To vede k vyšší interakci vln s vyššími frekvencemi s molekulami plynů atmosféry a následně k vyššímu rozptylu na nehomogenitách koncentrace molekul. Více se rozptyluje modrá barva než červená. Pokud se pozorovatel dívá během slunečného dne na oblohu, vidí rozptýlené, tedy převážně modré světlo.

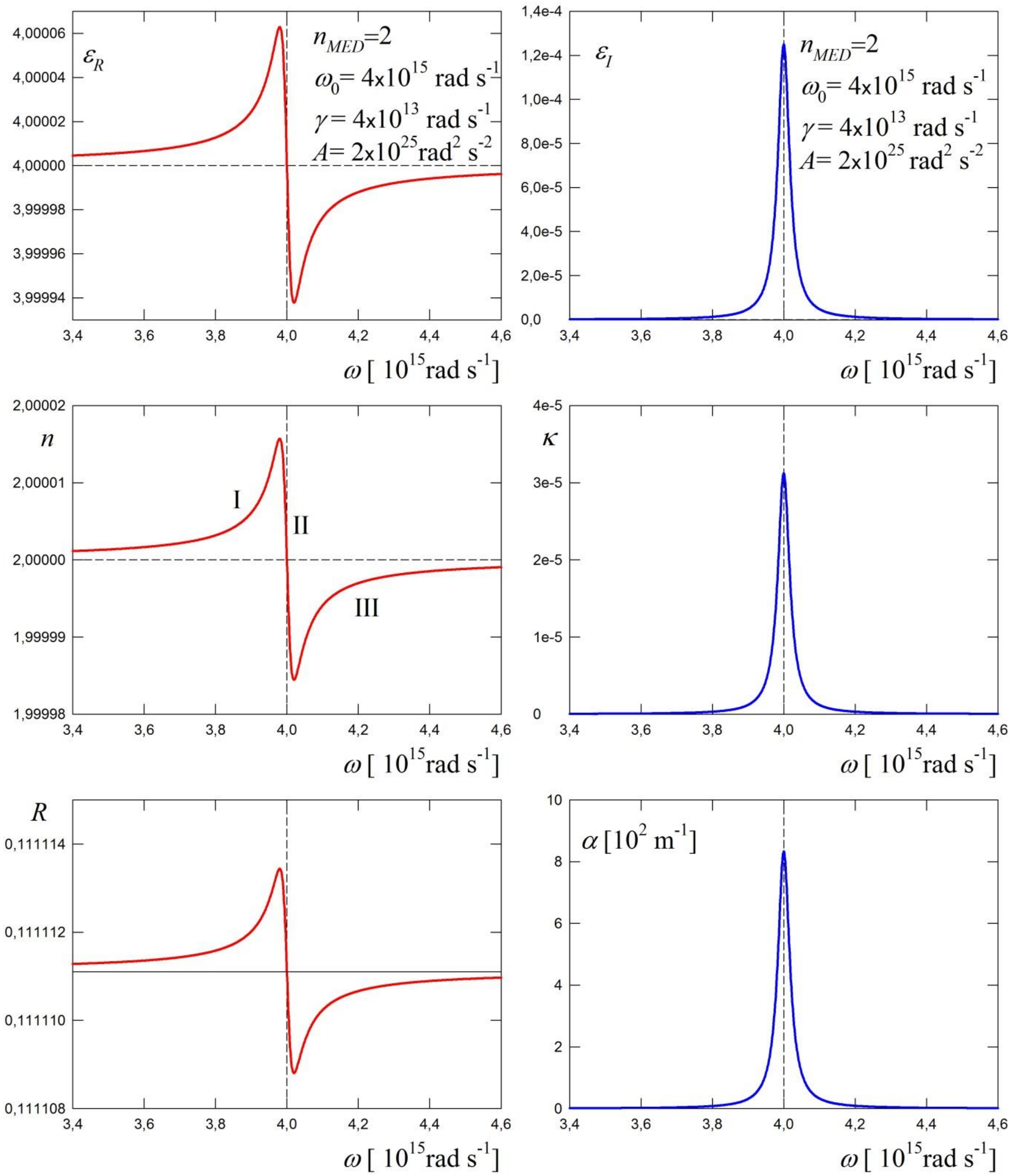
V oblasti kolem rezonanční frekvence naopak index lomu s frekvencí klesá. Tuto oblast nazýváme oblastí **anomální disperze**. Šířka této oblasti souvisí hlavně s velikostí tlumení; s rostoucím tlumením se oblast II rozšiřuje. V této oblasti dochází k silné absorpci záření, protože koeficient κ, a tím i absorpční koeficient $\alpha = 2\frac{\omega}{c}\,\kappa$ nabývají značných hodnot.

Od určité frekvence index lomu opět roste. Jedná se tedy opět o oblast normální disperze (část III v obr. 13.5.

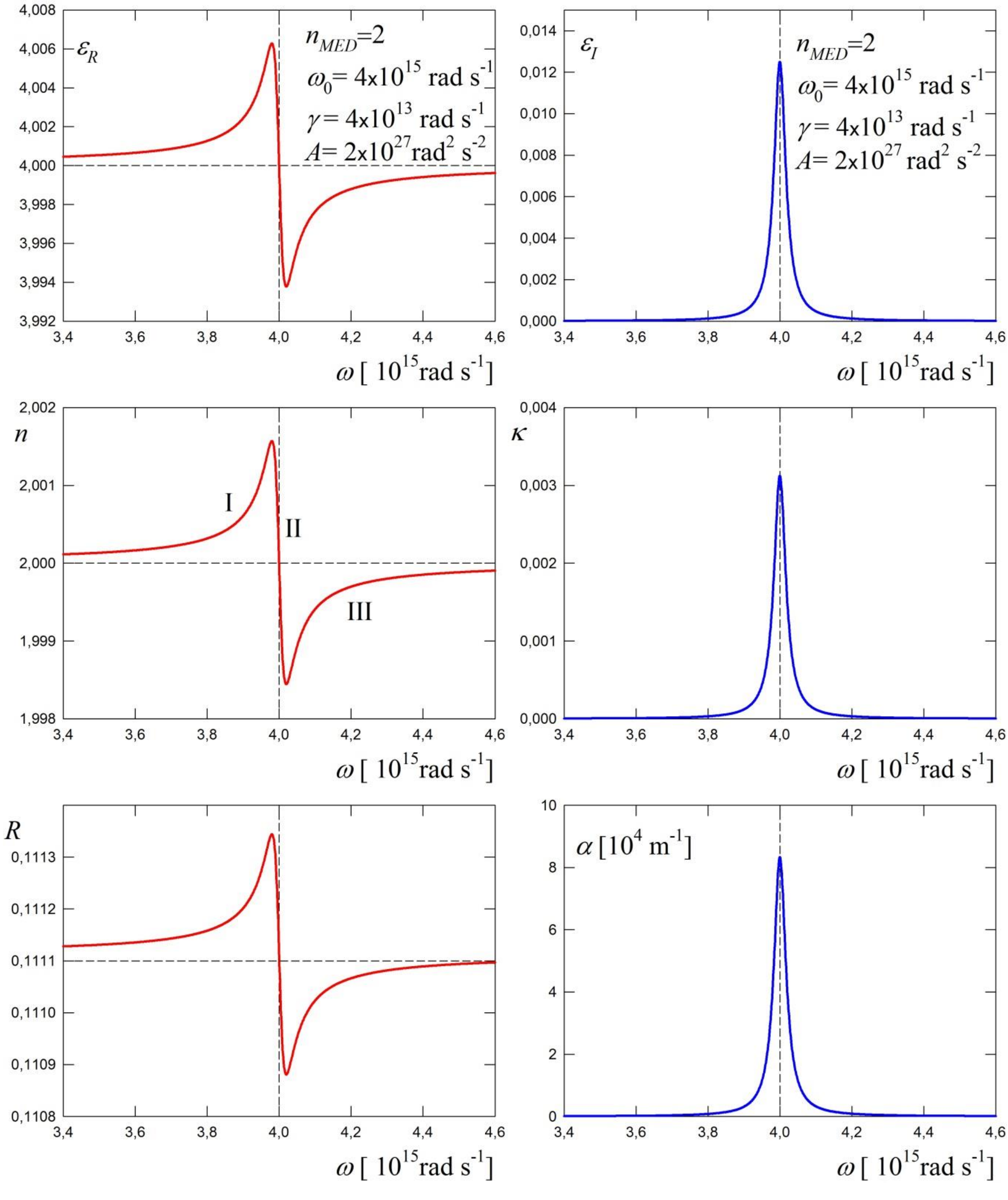
Průběh $R(\omega)$ je zobrazen na obrázcích 13.5 -13.8 pro stejné parametry, pro které byly vypočteny průběhy reálné a imaginární závislosti indexu lomu na frekvenci.

Na obrázku 13.5 jsou uvedeny výsledky modelu vedoucího ke „středním“ hodnotám absorpčního koeficientu α, který lze pohodlně měřit z propustnosti vzorku tvaru destičky. Příslušné změny v reálné části permitivity a indexu lomu jsou velmi nepatrné. S tím souvisí i „pěkný“, symetrický tvar absorpčního pásu kolem frekvence ω_0. Do jisté míry to platí i pro poněkud „silnější“ oscilátor na obr. 13.6.

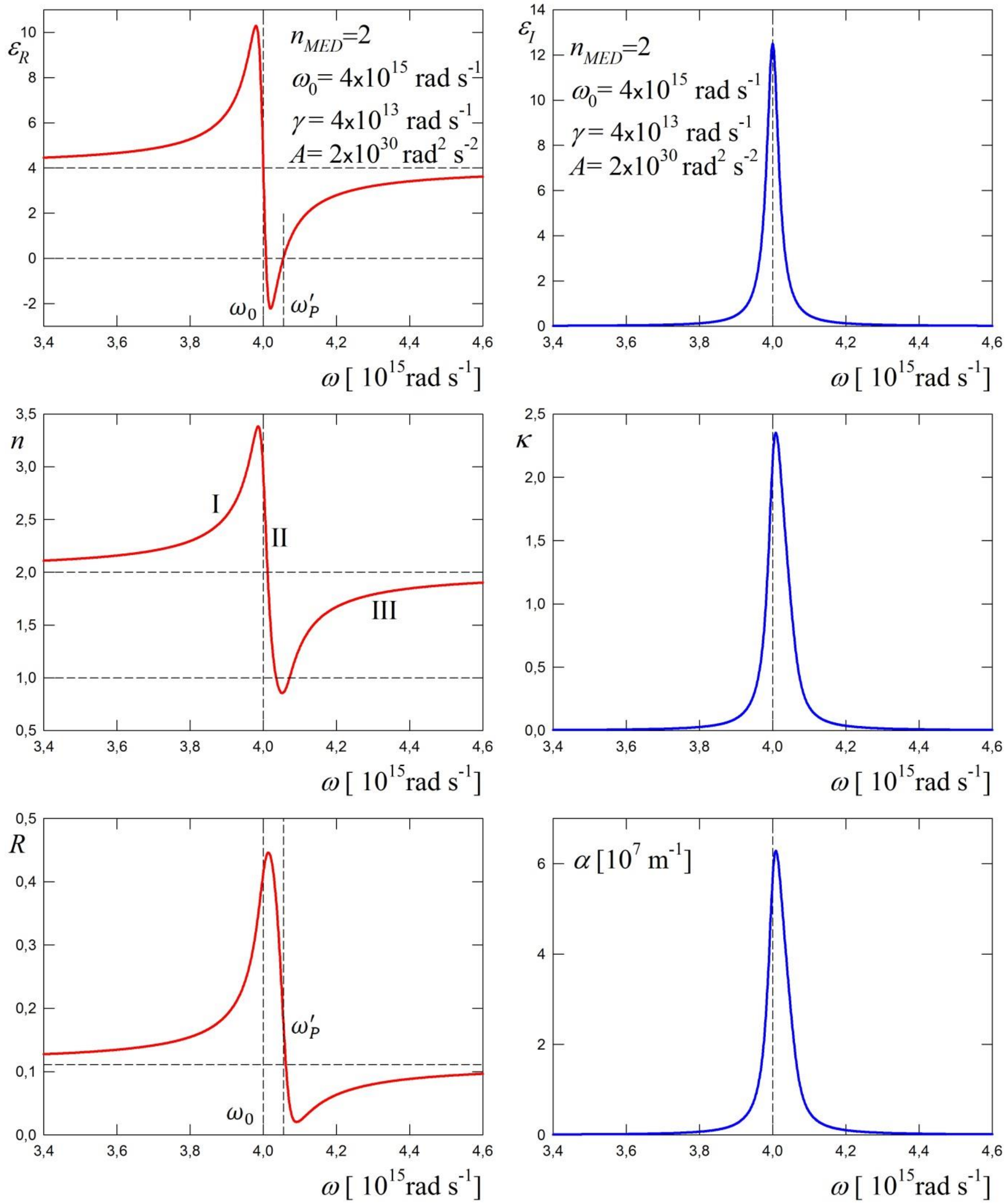
Na obr. 13.7 jsou zakresleny výsledky modelu silného oscilátoru, kdy spektrální závislosti reálné části permitivity i reálné části indexu lomu jsou již podstatné. Pro takto dostatečně silný oscilátor nastává dokonce $\varepsilon_R(\omega_P') = 0$ a v jisté části spektra dojde i k záporné hodnotě ε_R a k indexu lomu $n < 1$. Důsledkem je silná odrazivost poblíž frekvence ω_0 a jasně nesymetrický absorpční pás.



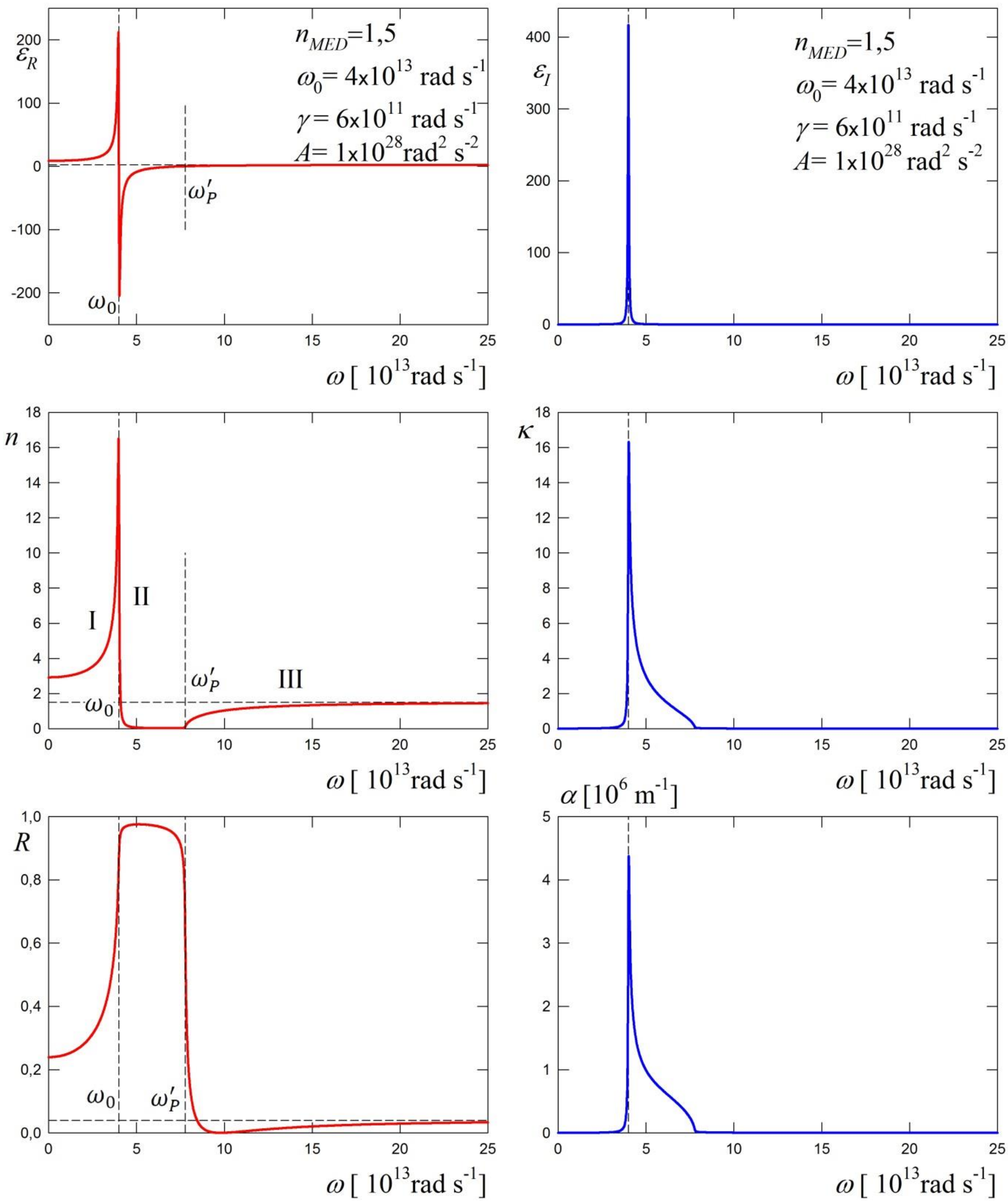
Obr. 13.5 Výsledky modelu s jedním typem nepříliš silného oscilátoru posazeným do materiálu se základním konstantním indexem lomu $n_{MED} = 2$. Absorpční koeficient $\alpha = 800\ \mathrm{m}^{-1} = 8\ \mathrm{cm}^{-1}$ znamená redukci intenzity záření na 1% na dráze 5,8 mm. Změny odrazivosti v oblasti takového absorpčního pásu jsou zcela nepatrné. Takže měření propustnosti je nejpohodlnější metoda, což platí i pro mnohem slabší spektrální absorpční pásy.



Obr. 13.6 Výsledky modelu s jedním typem poměrně silného oscilátoru posazeným do materiálu se základním konstantním indexem lomu $n_{MED} = 2$. Absorpční koeficient $\alpha = 8 \times 10^4 \mathrm{m}^{-1} = 800\ \mathrm{cm}^{-1}$ znamená redukci intenzity záření na 1% na dráze $58\ \mu$m. Změny odrazivosti v oblasti takového absorpčního pásu jsou velmi malé. Příprava vzorků mikronových tlouštěk pro transmisní měření může být u některých materiálů obtížná.



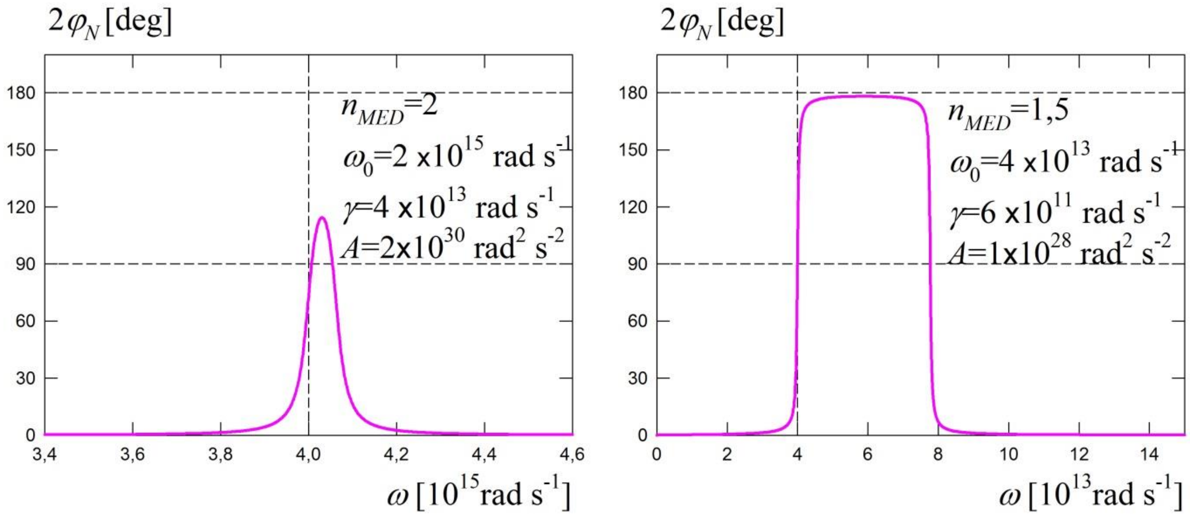
Obr. 13.7 Výsledky modelu s jedním typem extrémně silného oscilátoru posazeným do materiálu se základním konstantním indexem lomu $n_{MED} = 2$. Kruhová frekvence $\omega_0 = 4 \times 10^{15}$ rad s^{-1} odpovídá vlnové délce 471 nm. Index lomu 2 znamená, že výkonová odrazivost je 0,111. Velmi vysoký absorpční koeficient $\alpha = 6 \times 10^7 \mathrm{m}^{-1} = 6 \times 10^5\ \mathrm{cm}^{-1}$ znamená redukci intenzity záření na 1% na dráze 77 nm, což je podstatně kratší než vlnová délka. V takovém případě je adekvátním experimentem měření odrazivosti. Oblasti I a III označují oblasti normální disperze indexu lomu, II je oblast anomální disperze.



Obr. 13.8 Výsledky modelu s jedním typem silného oscilátoru, který v hrubých rysech odpovídá vlastnostem iontových krystalů v infračervené oblasti. Typická je přitom oblast vysoké odrazivosti, kde kmity iontů s vysokým efektivním nábojem zabraňují elektromagnetickému poli vnikat do materiálu. Na vysokofrekvenční konec pásu vysoké odrazivosti navazuje oblast téměř nulové odrazivosti a výborné propustnosti. Oblast rychlého pádu R bývá nazývána reflexní hrana. Oblast vysoké absorpce je omezena na těsné okolí frekvence ω_0, kde je vlna silně utlumena na vzdálenost menší než je vlnová délka.

Na obr. 13.8 jsou výsledky modelu, který zjednodušeně imituje optické vlastnosti iontových krystalů v infračervené oblasti spektra. Typická je oblast velmi malého indexu lomu ($n \to 0$) spojená s velmi vysokou odrazivostí, kdy ionty v látce kmitají v protifázi (obr. 13.9) ke vnějšímu dopadajícímu poli E, vytvářejí velmi silné pole odraženého záření (již od 19. století známé jako „Reststrahlen bands“) a úspěšně zeslabují pole uvnitř látky. Fázová rychlost může být mnohem větší než rychlost c. Jinými slovy: vlnová délka v materiálu je mnohem větší než vlnová délka ve vakuu při stejné frekvenci. Ovšem je třeba si uvědomit, že v těchto případech dochází k výraznému útlumu na vzdálenostech podstatně menších než vlnová délka.

Jak již bylo zmíněno (rovnice 13.6 -13.8), absorpce energie vlny v látce je spojena s fázovými posuvy mezi základními veličinami, totiž o fázový posun $\varphi_{\mathcal{N}}$ mezi magnetickým polem vlny $\boldsymbol{H}$ a elektrickým polem $\boldsymbol{E}$ budícím kmity a o fázový úhel $2\varphi_{\mathcal{N}}$ mezi elektrickou indukcí $\boldsymbol{D}$ a elektrickým polem $\boldsymbol{E}$. K nejvýraznějším fázovým rozdílům dochází v okolí rezonanční frekvence. U velmi silných oscilátorů může dokonce nastat situace, kdy se úhel $2\varphi_{\mathcal{N}}$ blíží k 180° a a elektrická indukce $\boldsymbol{D}$ kmitá téměř v protifázi k budícímu elektrickému poli, jak je naznačeno na obr. 13.9.



Obr. 13.9. Fázové rozdíly mezi elektrickou indukcí a elektrickým polem $2\varphi_{\mathcal{N}}$ pro případy velmi silných absorpčních pásů uvedených na obr. 13.7 a 13.8

Pokud se zajímáme o (téměř) neabsorbující typická dielektrika v blízké a viditelné spektrální oblasti, převažují kladné příspěvky k χ_R od oscilátorů s vyššími ω_{0l} (normální disperze v oblasti I). Z toho plyne typická spektrální závislost indexu lomu $n(\omega) = \sqrt{1 + \chi_R(\omega)}$, který se monotónně zvyšuje s rostoucí frekvencí (klesající vlnovou délkou). Tyto závislosti bývají aproximovány různými, více či méně složitými vztahy a pro technicky významné látky (např. různé typy skel) jsou tabelovány. Jen jako jednoduché příklady **uveďme Cauchyovu disperzní formuli** pro neabsorbující plyny

$$n(\lambda) \cong 1 + A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) \tag{13.26}$$

nebo **Sellmeierovu rovnici** běžně užívanou pro technickou charakterizaci optických skel

$$n^2(\lambda) \cong 1 + \sum_{l=1}^{3} \frac{B_l \lambda^2}{\lambda^2 - C_l}, \tag{13.27}$$

kde koeficienty B_l a C_l jsou pro jednotlivé typy skel tabelovány.

Pro spektrálně „osamocené“ oscilátory, které nejsou extrémně silné, se používá pro absorpční koeficient aproximace zvaná **Lorentzův tvar absorpčního pásu**. Příslušné aproximace spočívají v tom, že:

- reálná část indexu lomu se v oblasti pásu nemění $n(\omega) \cong n = konst.$
- $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \cong 2\omega\,(\omega_0 - \omega)$

$$\alpha(\omega) = 2\frac{\omega}{c}\kappa = 2\frac{\omega}{c}\frac{\chi_I}{2n} = \frac{\omega}{nc}A\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \cong \tag{13.28}$$

$$\cong A\frac{\omega^2}{nc}\frac{1}{\omega^2}\frac{\gamma}{4\,(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} = \frac{A}{4nc}\frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4}.$$

Drudeův model – odezva vodivého prostředí na elektromagnetickou vlnu

Drudeův model popisuje odezvu látek s volně pohyblivými náboji (ionty v plynném plazmatu, např. v zemské ionosféře, elektrony v dopovaných polovodičích a v kovech), které nejsou vázány k rovnovážným polohám, na budící harmonickou monochromatickou elektromagnetickou vlnu. V souladu s předchozím výkladem se omezíme na model zahrnující pouze vliv elektrické složky pole. V pohybové rovnici 13.14 položíme vazební konstantu $k_H = 0.$ Pro tento případ z rovnice 13.23 dostaneme pro relativní permitivitu modelové látky, která obsahuje pouze **1 typ volných nosičů** náboje a **žádné lorentzovské oscilátory** či jiné mechanismy interakce elektromagnetického pole s látkou

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{-i\gamma\omega - \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{i\gamma\omega + \omega^2},$$

kde $\sqrt{\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}} = \omega_p$ je nazývána **plazmová frekvence**. Jedná se o charakteristickou frekvenci prostředí, pokud uvažujeme pouze volně pohyblivé (nevázané) náboje V kovech se nachází v ultrafialové části spektra, v polovodičích je v infračervené oblasti.

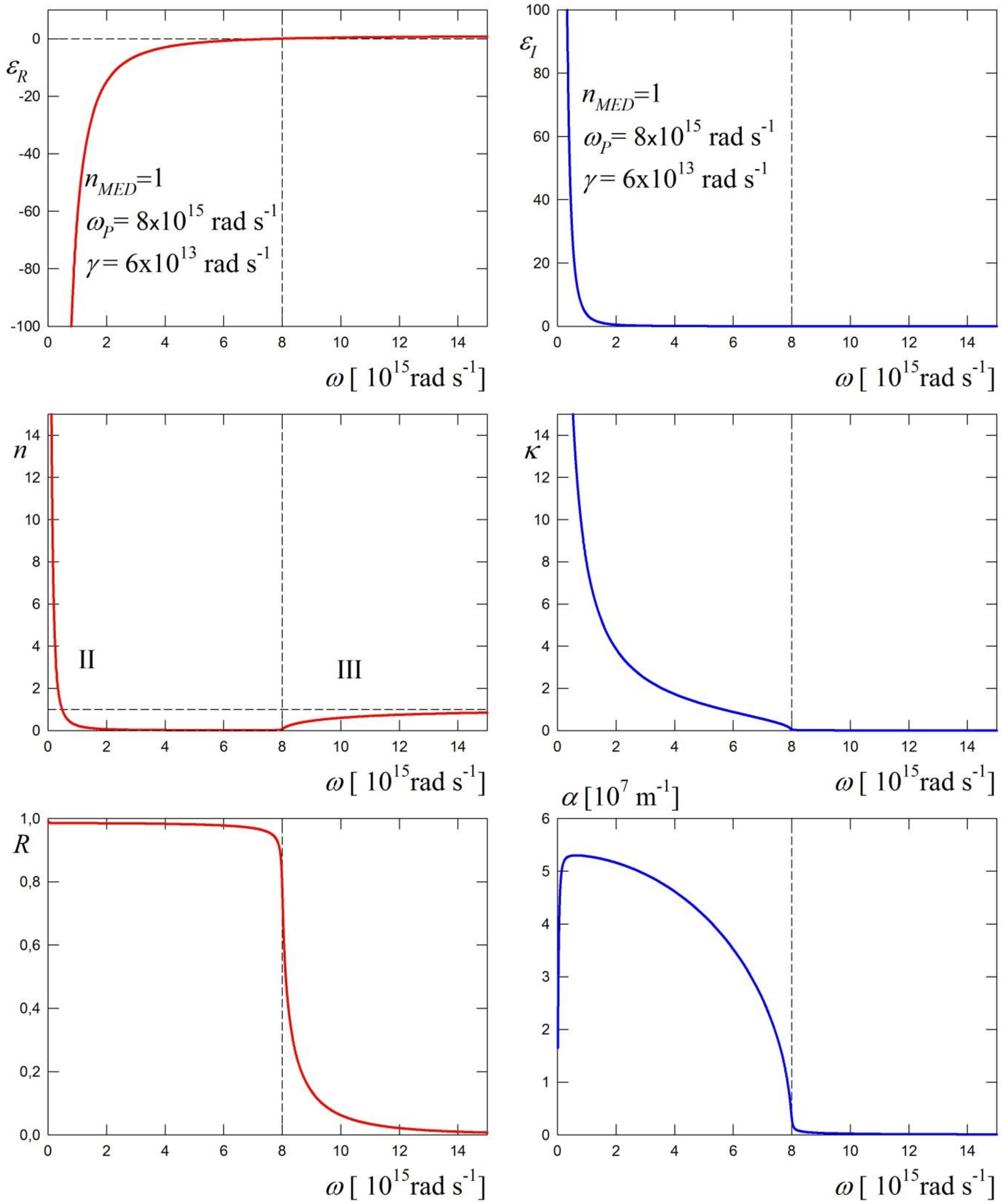
Výpočtem reálné a imaginární části výrazu dostaneme pro reálnou a imaginární část permitivity takové modelové látky¨

$$\varepsilon_R = n^2 - \kappa^2 = 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\omega^4 + \gamma^2 \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2},$$

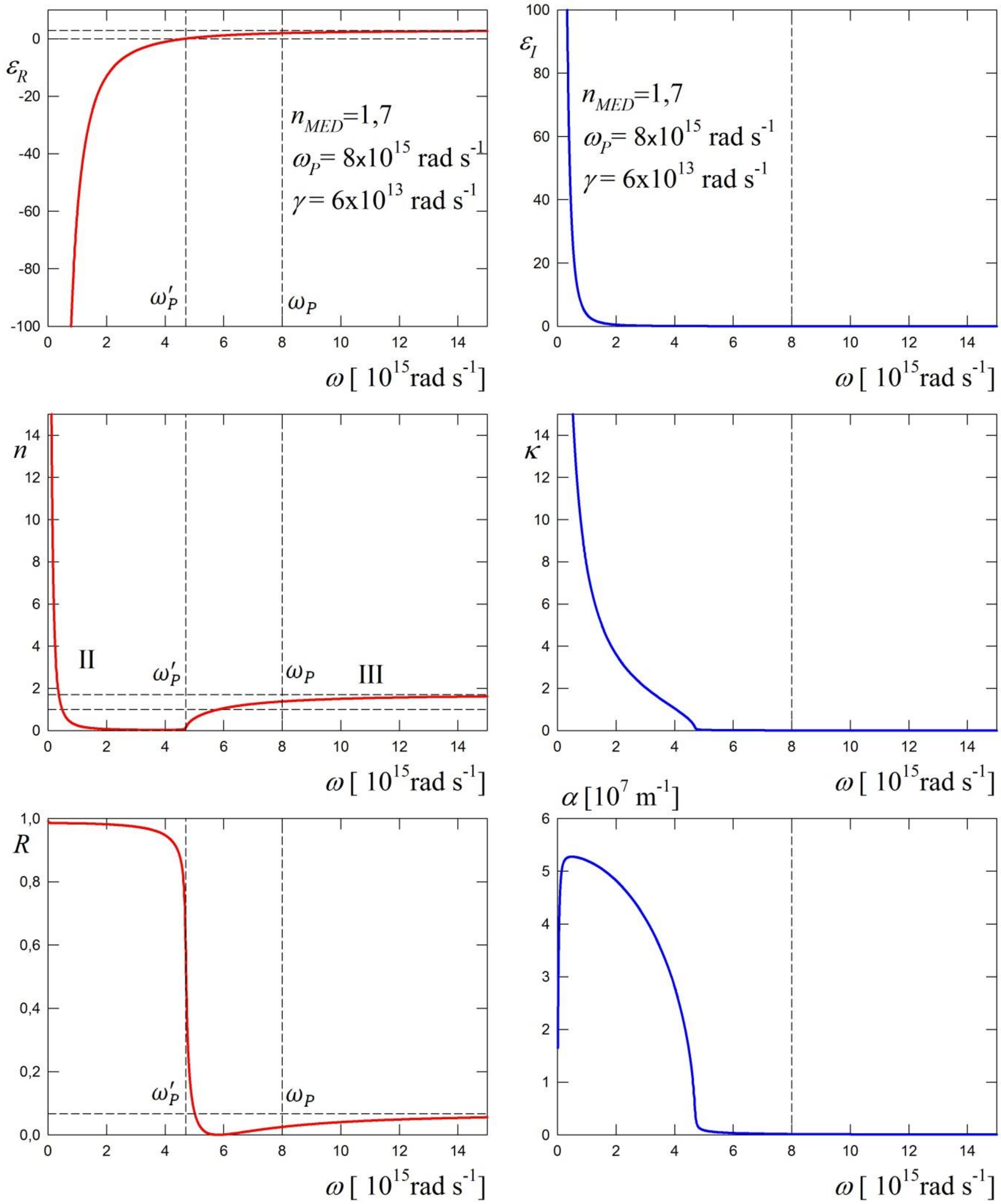
$$\varepsilon_I = 2n\kappa = \frac{\gamma \omega_p^2}{\omega^3 + \gamma^2 \omega}.$$

Z těchto rovnic pak můžeme vyjádřit $n(\omega)$ a $\kappa(\omega)$. Frekvenční závislost těchto veličin je zobrazena na obr. 13.10. Jako velmi typický rys se jeví silný pokles odrazivosti s rostoucí frekvencí právě u plasmové frekvence ω_p, též nazývaný reflexní hrana. Je zjevné, že pod plazmovou frekvencí dochází k silné absorpci záření ($\kappa > 0,$ a tedy i absorpční koeficient $\alpha > 0$). Naopak nad plazmovou frekvencí jsou tyto veličiny malé a vodivé prostředí elektromagnetické záření daných frekvencí propouští.

Stejně jako v případě Lorentzových oscilátorů, i v případě Drudeova modelu jsou závislosti $n(\omega)$ a $\kappa(\omega)$ ovlivněny přítomností další mechanismů interakce. Na obr.13.11. je nakreslen zjednodušený model, kdy jsou optické parametry ovlivněny pouze přidáním konstantního reálného indexu lomu n_{MED}. Důsledkem je změna frekvence, při které je $\varepsilon_R = 0$. Je též patrné odsunutí reflexní hrany od plasmové frekvence. Tento jev je velmi výrazně pozorovatelný např. ve spektrální závislosti odrazivosti zlata, kdy plasmová frekvence spočtená z koncentrace volných elektronů a jejich parametrů (efektivní hmotnost) se nachází podobně jako u mnoha jiných kovů v ultrafialové oblasti spektra, ale vlivem právě jiných absorpčních mechanismů je posunuta z UV oblasti k vlnové délce zhruba 540 nm, tj. do viditelné oblasti. Zlato tak v menší míře odráží zelené a modré světlo než světlo červené a to způsobuje jeho žlutavou barvu. V jiných kovech (stříbro, hliník) ovlivnění posuvu reflexní hrany od plasmové není tak silné a tyto kovy odrážejí dobře v celém viditelném oboru.



Obr. 13.10 Základní parametry (reálná a imaginární část relativní permitivity, reálná a imaginární část indexu lomu, výkonový koeficient odrazivosti a absorpční koeficient) v „čistém" Drudeově modelu, když předpokládáme, že k vlastnostem nepřispívají jiné mechanismy než pohyb volných nábojů. Takový případ však není reálný.



Obr. 13.11 Základní parametry (reálná a imaginární část relativní permitivity, reálná a imaginární část indexu lomu, výkonový koeficient odrazivosti a absorpční koeficient) v modelu, když předpokládáme, že k vlastnostem přispívají i jiné mechanismy než pohyb volných nábojů. V uvedeném modelu jsou tyto mechanismy velmi hrubě zahrnuty jako příspěvek n_{MED} k indexu lomu nezávislý na frekvenci. V porovnání s obr. 13.10 je zřejmé, že i taková „malá“ úprava (pouze posunutí hranice spektrální oblasti, kde je $\varepsilon_R < 0$) má významné důsledky v posunu spektrálních charakteristik, jako je např. odsunutí reflexní hrany od plasmové frekvence.

Dodatek 13.1 Poznámky k propustnosti planparalelní desky

Vztah mezi propustností (její spektrální závislostí) zkoumaného vzorku ve tvaru (přibližně) planparalelní desky a absorpčním koeficientem není jednoduchý a závisí na geometrických charakteristikách vzorku i na charakteristice záření.

a) Poměrně složitý je případ ideální geometrie vzorku ve tvaru přesně planparalelní desky a téměř monochromatického vlnění (velmi dlouhá koherenční délka podstatně větší než tloušťka vzorku d). Pokud absorpční koeficient není příliš velký a umožňuje efektivní uplatnění vícenásobných odrazů uvnitř vzorku, je propustnost vzorku modulována podobně jako pro neabsorbující vzorek v důsledku interferenčních jevů. Komplikací přitom je i skutečnost, že amplitudové koeficienty odrazu na rozhraní mají obecné fázové posuvy, tedy nejen 0 nebo π jako v případě neabsorbujících prostředí. Dosti složitý výraz pro propustnost vzorku v tomto případě zde nebudeme uvádět.

b) Druhý limitní případ je charakteristický tím, že dojde k úplnému rozrušení interference ve smyslu sčítání příslušných polí, ale několikanásobné odrazy vedou k nekoherentnímu sčítání příslušných výkonových intenzit. K tomu dojde např. v důsledku geometrie vzorku, který má v různých místech různé tloušťky, jejichž rozdíly jsou větší než vlnová délka, nebo záření má menší koherenční délku než je tloušťka vzorku. Příslušný vztah pro propustnost vzorku T_S pak je

$$T_S = \frac{I_{OUT}}{I_{IN}} = \frac{(1-R)^2\, e^{-\alpha d}}{1 - R^2\, e^{-2\alpha d}},$$

kde I_{OUT} a I_{IN} jsou intenzity záření v prostředí obklopujícím vzorek (tj. za vzorkem a před vzorkem) a R je výkonová odrazivost na rozhraních.

Obzvlášť nepříjemnou konfigurací je stav, který můžeme označit jako přechod mezi možnostmi a) a b), kdy dojde pouze k útlumu interferenčních oscilací. V případě, kdy jsou interferenční oscilace spektrálně podstatně hustší než spektrální šířka absorpčních pásů, lze jejich vliv odstranit matematickým zpracováním.

Připomeňme, že výkonový koeficient odrazu pro kolmý dopad z vakua je

$$R = \frac{n + i\kappa - 1}{n + i\kappa + 1}\,\frac{n - i\kappa - 1}{n - i\kappa + 1} = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}.$$

c) Situace se podstatně zjednoduší pro dostatečně tlusté vzorky s dostatečným absorpčním koeficientem, kdy je $R^2 e^{-2\alpha d} \ll 1$ a vztah pro propustnost je

$$T_S = \frac{I_{OUT}}{I_{IN}} \cong (1-R)^2\, e^{-\alpha d}.$$

d) V řadě případů můžeme vliv R eliminovat buď výpočtem, nebo porovnáním s podobným vzorkem, který neobsahuje absorbující látku. Typickým příkladem (hojně aplikovaným v chemii, biochemii apod.) je porovnání propustnosti roztoku látky v kyvetě s propustností rozpouštědla v kyvetě týchž parametrů. Tato měření zhusta slouží ke stanovení koncentrací látek v roztocích, viz Beerův příspěvek k Lambertovu–Beerovu zákonu.

V řadě případů nás nemusí zajímat velmi přesné hodnoty absorpčních koeficientů, ale jen jejich relativní změny ve spektru. Navíc v mnoha případech (nízké indexy lomu) je $(1 - R)^2 \cong 1$ a tak se dostáváme k často uváděnému „Lambertovu-Beerovu zákonu“

$$T_S = \frac{I_{OUT}}{I_{IN}} \cong e^{-\alpha d}.$$

V komerčních spektrometrech určených hlavně pro chemické a biochemické laboratoře je výsledek uváděn (vedle propustnosti vzorku) v hodnotách **absorbance**, což je záporný dekadický (nikoli přirozený) logaritmus propustnosti. Nezahrnuje tedy žádné zohlednění tloušťky vzorku ani jeho odrazivosti.

Lambertův zákon objevil a publikoval v roce 1729 Pierre **Bouguer**. V roce 1760 ho citoval Johann Heinrich Lambert.

Johann Heinrich **Lambert**, 1728 – 1777, švýcarský polyhistor (matematika, logika, filosofie, fyzika, optika, astronomie, kartografie,...): „Ztráty světelné intenzity při šíření v prostředí jsou přímo úměrné intenzitě a délce dráhy)“.

August **Beer**, 1825 – 1863, německý fyzik, chemik, matematik: „Optická propustnost roztoku je konstantní, je-li konstantní součin koncentrace látky a délky dráhy“, (rok 1852).

Dodatek 13.2 Tlumená vlna splňuje Maxwellovy rovnice

V tomto Dodatku ověříme, že tlumená vlna zapsaná v komplexním formalismu, splňuje Maxwellovy rovnice. Alternativně bychom mohli předpokládaný tvar tlumeného elektrického pole $\tilde{E}_x$ do Maxwellových rovnic dosadit a z nich dostat závislosti pro $\tilde{H}_y$ a $\tilde{D}_x$.

Ověřme tedy, že vlna

$$\tilde{E}_x = E_0\, e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t},$$

$$\tilde{D}_x = E_0 \varepsilon_0\, (n + i\kappa)^2 e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t},$$

$$\tilde{H}_y = E_0 \varepsilon_0 c\, (n + i\kappa)\, e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t},$$

$$\tilde{B}_y = \frac{1}{c} E_0\, (n + i\kappa)\, e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t}$$

splňuje Maxwellovy rovnice.

$$\operatorname{div}\widetilde{\boldsymbol{D}} = \frac{\partial \widetilde{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{D}_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$\operatorname{div}\widetilde{\boldsymbol{B}} = 0.$$

$$\operatorname{rot}\widetilde{\boldsymbol{H}} = \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{D}}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\widetilde{\boldsymbol{H}} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}, 0{,}0\right),$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = -i\,\mathcal{K}\varepsilon_0 c\,(n + i\kappa)\,E_0 e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\,e^{-i\omega t} =$$

$$= -\frac{i\omega}{c}\varepsilon_0 c\,(n + i\kappa)^2\quad E_0 e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\,e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = -i\omega\varepsilon_0\,(n + i\kappa)^2\,E_0 e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\,e^{-i\omega t}.$$

$$\operatorname{rot}\widetilde{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{B}}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\widetilde{\boldsymbol{E}} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \left(0, \frac{\partial E_x}{\partial z}, 0\right),$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\,\mathcal{K}\,E_0 e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\,e^{-i\omega t} = \frac{i\omega}{c}(n + i\kappa)\;E_0 e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\,e^{-i\omega t},$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{i\omega}{c}(n + i\kappa)\;E_0 e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\,e^{-i\omega t}.$$

Uvedená monochromatická, rovinná, homogenní, tlumená, lineárně polarizovaná vlna splňuje všechny 4 Maxwellovy rovnice.

Dodatek 13.3 Objemová hustota energie elektromagnetické vlny a její ztráty

Časová střední hodnota **hustoty elektrické energie** v místě z v *reálném popisu*

$$\langle w_E \rangle_t = \frac{1}{2} \langle \mathrm{Re}\{E_x\} \, \mathrm{Re}\{D_x\} \rangle_t =$$

$$= \frac{1}{2} \langle E_0 \, e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z} \cos\xi \; \varepsilon_0 \, E_0 \, e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z} \; (\varepsilon_R \cos\xi - \varepsilon_I \sin\xi) \rangle_t =$$

$$= \frac{1}{2} \, \varepsilon_0 E_0^2 \; e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z} \left[\varepsilon_R \langle \cos^2\xi \rangle_t - \varepsilon_I \langle \cos\xi \sin\xi \rangle_t \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \, \varepsilon_0 \varepsilon_R E_0^2 \; e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z} = \frac{1}{4} \, \varepsilon_0 (n^2 - \kappa^2) E_0^2 \; e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z},$$

kde byla pro zkrácení zápisu zavedena zkratka

$$\xi = \frac{\omega}{c} nz - \omega t = k_R z - \omega t$$

a použito $\langle \cos^2\xi \rangle_t = {}^1\!/_2$ a $\langle \cos\xi \sin\xi \rangle_t = 0$.

Totéž za použití *komplexní symboliky*

$$\mathrm{Re}\{\tilde{E}\} = \frac{1}{2} \, (E_R + iE_I + E_R - iE_I) = \frac{1}{2} \left(\tilde{E} + \tilde{E}^* \right),$$

$$\langle w_E \rangle_t = \frac{1}{8} \left(\tilde{E}\tilde{D}^* + \tilde{E}^*\tilde{D} \right) = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \, E_0^2 \; e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z} \; \times$$

$$\times \left[e^{i\frac{\omega}{c}nz} e^{-i\omega t} \, (\varepsilon_R - i\varepsilon_I) e^{-i\frac{\omega}{c}nz} e^{i\omega t} + e^{-i\frac{\omega}{c}nz} e^{i\omega t} \, (\varepsilon_R + i\varepsilon_I) e^{i\frac{\omega}{c}nz} e^{-i\omega t} \right] =$$

$$= \frac{1}{8} \varepsilon_0 \, E_0^2 \; e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z} \, 2\varepsilon_R = \frac{1}{4} \, \varepsilon_0 \varepsilon_R E_0^2 \; e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z}.$$

Pro střední hodnotu velikosti **Poyntingova vektoru** můžeme napsat

$$\langle S_z(z) \rangle_t = \frac{1}{4} \left(\tilde{E}_x \tilde{H}_y^* + \tilde{E}_x^* \tilde{H}_y \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \, c\varepsilon_0 E_0^2 \; e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z} \left[e^{i\frac{\omega}{c}nz} e^{-i\omega t} \frac{\varepsilon_R - i\varepsilon_I}{n - i\kappa} \; e^{-i\frac{\omega}{c}nz} e^{i\omega t} + \right.$$

$$\left. + e^{-i\frac{\omega}{c}nz} e^{i\omega t} \frac{\varepsilon_R + i\varepsilon_I}{n + i\kappa} \; e^{i\frac{\omega}{c}nz} e^{-i\omega t} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \, c\varepsilon_0 E_0^2 \; e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z} \; \frac{(\varepsilon_R - i\varepsilon_I)(n + i\kappa) + (\varepsilon_R + i\varepsilon_I)(n - i\kappa)}{n^2 + \kappa^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \, cn\varepsilon_0 E_0^2 \; e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z}.$$

Totéž můžeme dostat s využitím úhlu fázového posunu $\varphi_{\mathcal{N}}$ mezi $\tilde{E}_x$ a $\tilde{H}_y$

$$S_z(z,t) = \mathrm{Re}\{\tilde{E}_x\}\,\mathrm{Re}\{\tilde{H}_y\} =$$
$$= E_0 e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}\,\mathrm{Re}\left\{e^{i\left(\frac{\omega}{c}nz-\omega t\right)}\right\}\,\varepsilon_0 c\,|\mathcal{N}|\;E_0 e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}\,\mathrm{Re}\left\{e^{i\left(\frac{\omega}{c}nz-\omega t\right)}\,e^{i\varphi_{\mathcal{N}}}\right\} =$$
$$= \varepsilon_0 c\,|\mathcal{N}|\,E_0^2 e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z}\cos\left(\frac{\omega}{c}nz-\omega t\right)\cos\left(\frac{\omega}{c}nz-\omega t+\varphi_{\mathcal{N}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\,|\mathcal{N}|\,E_0^2 e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z}\left[\cos\varphi_{\mathcal{N}} + \cos\left(2\frac{\omega}{c}nz - 2\omega t + \varphi_{\mathcal{N}}\right)\right],$$

$$\langle S_z(z)\rangle_t = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\,|\mathcal{N}|\,E_0^2 e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z}\;\cos\varphi_{\mathcal{N}} =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\,E_0^2 e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z}\;\sqrt{n^2+\kappa^2}\cos\varphi_{\mathcal{N}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 cn\,E_0^2 e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z},$$

protože $\sqrt{n^2+\kappa^2}\cos\varphi_{\mathcal{N}} = n$, viz obr. 13.1.

Nezávisle na tom, zda posuzujeme intenzitu vlny pomocí střední hodnoty intenzity elektrického pole, nebo pomocí Poyntingova vektoru, dostáváme slábnutí intenzity podél směru šíření popsané závislostí $e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z}$. Absorpční koeficient jsme zavedli jako $\alpha = 2\frac{\omega}{c}\,\kappa$ a připomeňme $\varepsilon_I = 2n\kappa$.

Objemová hustota výkonu odebíraného vlně je

$$\langle -\mathrm{div}\,S\rangle_t = -\left\langle\frac{\partial S_z}{\partial z}\right\rangle_t = \frac{1}{2}\;cn\varepsilon_0 E_0^2\;\;\alpha e^{-\alpha z} = \;\varepsilon_0 E_0^2\;\omega\,n\,\kappa\,e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z} =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\;\omega\;\varepsilon_I e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z}.$$

Alternativní odvození pro objemovou hustotu odebíraného výkonu může vycházet z výrazu pro objemovou hustotu uvolňovaného Jouleova tepla

$$Q = \mathrm{Re}\{\tilde{\boldsymbol{j}}\}\cdot\;\mathrm{Re}\{\tilde{\boldsymbol{E}}\}.$$

V případě bez volných proudů je nenulový proud polarizační a v naší geometrii je

$$\tilde{j}_{Px} = \frac{\partial\tilde{P}_x}{\partial t} = \varepsilon_0(\chi_R + i\chi_I)\frac{\partial\tilde{E}_x}{\partial t}.$$

Pro zkrácení zápisu opět zvolme zkratku $\xi = k_R z - \omega t$

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\boldsymbol{E}}\} = E_0 e^{-k_I z}\cos\xi,$$
$$\mathrm{Re}\{\tilde{\boldsymbol{j}}_P\} = \varepsilon_0 E_0 e^{-k_I z}\mathrm{Re}\{-i\omega(\chi_R + i\chi_I)\,(\cos\xi + i\sin\xi)\} =$$
$$= \varepsilon_0 E_0 e^{-k_I z}\;\mathrm{Re}\{-i\omega\chi_R\cos\xi - i\omega\chi_R i\sin\xi -$$
$$-i\omega i\chi_I\cos\xi - i\omega\,i\chi_I i\sin\xi\} =$$
$$= \varepsilon_0 E_0 e^{-k_I z}(\,\omega\chi_R\;\sin\xi + \omega\chi_I\cos\xi).$$

Součin reálných částí a jeho časová střední hodnota

$$Q(z,t) = \varepsilon_0 E_0^2 e^{-2k_I z}\, \omega\, [\chi_R\, \sin\xi\, \cos\xi + + \chi_I \cos^2\xi],$$

$$\langle Q(z)\rangle_t = \frac{1}{2}\, \omega \chi_I \varepsilon_0\, E_0^2 e^{-2k_I z} = \frac{1}{2}\, \omega \varepsilon_I \varepsilon_0\, E_0^2 e^{-2k_I z} = \langle -\mathrm{div}\, S\rangle_t$$

v souladu s Poyntingovým teorémem (bilance výkonu) pro stacionární děj, kdy se střední hodnota energie elektromagnetického pole v látce nemění

Dodatek 13.4

Prostředí s nenulovými volnými proudy j_f a fázovým posuvem mezi E a D

V látkách nejsou přítomny jen náboje vázané ke svým rovnovážným polohám, ale vyskytují se i náboje volně pohyblivé. Jejich příspěvek k optickým parametrům je v nejjednodušší verzi popsán Drudeovým modelem, který vychází z pohybové rovnice volného náboje v elektrickém poli monochromatické vlny. Volný náboj není vracen do žádné rovnovážné polohy a kmitá pouze vlivem střídavého elektrického pole. Příslušná proudová odezva může být charakterizována komplexní vodivostí $\sigma_R + i\sigma_I$. Na rozdíl od popisu prováděném v základním textu, zde budeme předpokládat, že komplexní vodivost i komplexní permitivita jsou nenulové, tj. že bychom nějakým způsobem uměli odlišit ohmický proud $\boldsymbol{j}_f$, s nímž jsou spojené ztráty Jouleovým teplem, a ztráty spojené s fázovým posuvem mezi E a D. Příslušné parametry oindexujeme (1), tedy $\sigma_R^{(1)}, \sigma_I^{(1)},\ \varepsilon_R^{(1)}, \varepsilon_I^{(1)}$.

Pro jednoduchost se opět zabývejme homogenní, rovinnou, monochromatickou a lineárně polarizovanou vlnou, pro kterou jsou nenulové složky $E_x, D_x, H_y, B_y, \widetilde{\mathcal{K}}_z$. Předpokládejme exponenciální tlumení vlny v závislosti na souřadnici z.

$$\tilde{E}_x(z,t) = E_{0x}(z=0) e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}\, e^{i\frac{\omega}{c} n z}\, e^{-i\omega t} = \tilde{E}_{0x}(z) e^{-i\omega t}.$$

Z Maxwellovy rovnice rot $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ tak zůstane

$$-\frac{\partial \tilde{H}_y(z,t)}{\partial z} = \left(\sigma_R^{(1)} + i\sigma_I^{(1)}\right)\tilde{E}_x(z,t) + \varepsilon_0\left(\varepsilon_R^{(1)} + i\varepsilon_I^{(1)}\right)\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial t}(z,t).$$

Protože $\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial t} = -i\omega\tilde{E}_x(z)$, lze oba členy spojit

$$-\frac{\partial \tilde{H}_y(z,t)}{\partial z} = \left(\sigma_R^{(1)} + i\sigma_I^{(1)}\right)\tilde{E}_x(z,t) - i\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon_R^{(1)} + i\varepsilon_I^{(1)}\right)\tilde{E}_x(z,t)$$

a zavést buď souhrnný parametr vodivosti

$$\tilde{\sigma}^{(2)} = \sigma_R^{(2)} + i\sigma_I^{(2)} = \sigma_R^{(1)} + \omega\varepsilon_0\varepsilon_I^{(1)} + \ i\sigma_I^{(1)} - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_R^{(1)}$$

nebo souhrnnou permitivitu, kterou jsme užívali v základním textu této kapitoly (zde bez indexu)

$$\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_R + i\varepsilon_I = -\frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega} + \varepsilon_R^{(1)} + \frac{i\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega} + i\varepsilon_I^{(1)} =$$

$$= 1 + \chi_R^{(1)} + i\chi_I^{(1)} - \frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega} + \frac{i\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}.$$

Tento krok umožní spojit např. nerezonanční příspěvek k permitivitě od volného proudu (Drudeův model) s rezonančními příspěvky od oscilátorů (Lorentzův model) v jedné permitivitě $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = 1 - \frac{N_q q^2}{\varepsilon_0 m_q}\frac{1}{\omega^2 + i\omega\gamma_q} + \sum_j \frac{N_j q_j^2}{\varepsilon_0 m_j}\frac{f_j}{\Omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j},$$

kde N_q, m_q, γ_q jsou koncentrace, hmotnost a tlumení pohybu volných nábojů q a N_j, q_j, m_j, Ω_j, γ_j jsou koncentrace, efektivní náboje kmitajícího dipólu, efektivní hmotnost kmitajících nábojů, vlastní frekvence kmitajícího dipólu a příslušné tlumení, kde se sčítá přes jednotlivé typy kmitajících dipólů. Uvedený vztah vychází z toho, že v případě více příspěvků k odezvě látky na elektrické pole vlny se sčítají polarizace, tedy i susceptibility, $\tilde{\varepsilon}_r^{(total)}(\omega) = 1 + \sum_j \chi_j\,(\omega)$.

Podívejme se, jak dopadne dosazení sady parametrů (1) do Maxwellových rovnic. Chceme získat vztah mezi $n + i\kappa$ a $\sigma_R^{(1)}, \sigma_I^{(1)},\ \varepsilon_R^{(1)}, \varepsilon_I^{(1)}$.

$$\tilde{E}_x(z,t) = E_{0x}(z=0)e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}\, e^{i\frac{\omega}{c}nz}\, e^{-i\omega t} = \tilde{E}_{0x}(z)e^{-i\omega t},$$

$$\tilde{D}_x(z,t) = \varepsilon_0\left(\varepsilon_R^{(1)} + i\varepsilon_I^{(1)}\right)E_{0x}(z=0)e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}\, e^{i\frac{\omega}{c}nz}\, e^{-i\omega t} =$$

$$= \tilde{E}_{0x}(z)\,\varepsilon_0\left(\varepsilon_R^{(1)} + i\varepsilon_I^{(1)}\right)(\cos\omega t - i\sin\omega t),$$

$$\frac{\partial\tilde{D}_x(z,t)}{\partial t} = \tilde{E}_{0x}(z)\Big(-\varepsilon_0\,\omega\ \varepsilon_R^{(1)}\sin\omega t + \varepsilon_0\,\omega\,\varepsilon_I^{(1)}\cos\omega t -$$

$$-i\varepsilon_0\,\omega\,\varepsilon_R^{(1)}\cos\omega t - i\varepsilon_0\omega\varepsilon_I^{(1)}\sin\omega t\Big),$$

$$\tilde{j}_x(z,t) = \left(\sigma_R^{(1)} + i\sigma_I^{(1)}\right)\ \tilde{E}_x(z,t) =$$

$$= \tilde{E}_{0x}(z)\left(\sigma_R^{(1)}\cos\omega t + \sigma_I^{(1)}\sin\omega t - i\sigma_R^{(1)}\sin\omega t + i\,\sigma_I^{(1)}\cos\omega t\right),$$

$$-\frac{\partial\tilde{H}_y(z,t)}{\partial z} = \tilde{E}_{0x}(z)\ \left[\left(\sigma_R^{(1)} + i\sigma_I^{(1)}\right)e^{-i\omega t} - i\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon_R^{(1)} + i\varepsilon_I^{(1)}\right)e^{-i\omega t}\right] =$$

$$= \tilde{E}_{0x}(z)\ \Big[\left(\sigma_R^{(1)} + i\sigma_I^{(1)}\right)(\cos\omega t - i\sin\omega t) -$$

$$- i\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon_R^{(1)} + i\varepsilon_I^{(1)}\right)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\Big] =$$

$$= \tilde{E}_{0x}(z)\left[\sigma_R^{(1)}\cos\omega t + \sigma_I^{(1)}\sin\omega t - i\,\sigma_R^{(1)}\sin\omega t + i\sigma_I^{(1)}\cos\omega t + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_0\,\omega\,\left(\varepsilon_I^{(1)}\cos\omega t - \varepsilon_R^{(1)}\sin\ \omega t - i\varepsilon_R^{(1)}\cos\omega t - i\varepsilon_I^{(1)}\sin\omega t\right)\right] =$$

$$= \tilde{E}_{0x}(z)\,[a(\omega t) + ib(\omega t)] = E_{0x}(z=0)e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}\,e^{i\frac{\omega}{c}nz}\,[a(\omega t) + ib(\omega t)].$$

Integrací dostaneme

$$\widetilde{H}_y(z,t) = -E_{0x}(z=0)[a(\omega t) + ib(\omega t)]\int e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}\,e^{i\frac{\omega}{c}nz}\,dz =$$

$$= \frac{-c}{i\omega(n+i\kappa)}\tilde{E}_{0x}(z)\,[a(\omega t) + ib(\omega t)],$$

$$\tilde{B}_y(z,t) = \mu_0\widetilde{H}_y(z,t) = \frac{-\mu_0 c}{i\omega(n+i\kappa)}\tilde{E}_{0x}(z)\,[a(\omega t) + ib(\omega t)].$$

Z další Maxwellovy rovnice dostaneme

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})_y = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z},$$

$$-\frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial t} = \frac{\mu_0 c}{i\omega(n+i\kappa)}\tilde{E}_{0x}(z)$$

$$\times$$

$$\times\left[\omega\left(-\sigma_R^{(1)}\sin\omega t + \sigma_I^{(1)}\cos\omega t - i\sigma_R^{(1)}\cos\ \omega t - i\sigma_I^{(1)}\sin\omega t\right)\right.$$

$$+$$

$$\left. + \varepsilon_0\omega^2\left(-\varepsilon_I^{(1)}\sin\omega t - \varepsilon_R^{(1)}\cos\ \omega t + i\varepsilon_R^{(1)}\sin\omega t - i\varepsilon_I^{(1)}\cos\omega t\right)\right],$$

$$\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = \frac{\mu_0 c}{i\omega(n+i\kappa)}\tilde{E}_{0x}(z)\ \ \varepsilon_0\omega^2\times$$

$$\times\left[\frac{-\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\sin\omega t + \frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\cos\omega t - i\frac{\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\cos\ \omega t - i\frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\sin\omega t + \right.$$

$$\left. -\varepsilon_I^{(1)}\sin\omega t - \varepsilon_R^{(1)}\cos\ \omega t - i\varepsilon_I^{(1)}\cos\omega t + i\varepsilon_R^{(1)}\sin\omega t\right]$$

a integrací

$$\tilde{E}_x(z,t) = \frac{\varepsilon_0\mu_0 c^2}{-(n+i\kappa)^2}\tilde{E}_{0x}(z)\ \ \times$$

$$\times\left[\frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\cos\omega t - \varepsilon_R^{(1)}\cos\omega t - \frac{\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\sin\ \omega t - \varepsilon_I^{(1)}\sin\omega t + \right.$$

$$+ i\left(-\frac{\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\cos\omega t - \varepsilon_I^{(1)}\cos\omega t - \frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\sin\omega t + \varepsilon_R^{(1)}\sin\omega t\right)\Bigg],$$

$$\tilde{E}_x(z,t) = \frac{1}{(n+i\kappa)^2}\tilde{E}_{0x}(z) \;\times$$

$$\times\left[\left(\varepsilon_R^{(1)} - \frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\right)\cos\omega t - i\left(\varepsilon_R^{(1)} - \frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\right)\sin\ \omega t -\right.$$

$$\left.-i\left(i\varepsilon_I^{(1)} + \frac{i\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\right)\sin\omega t + \left(i\varepsilon_I^{(1)} + \frac{i\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\right)\cos\omega t\right],$$

$$\tilde{E}_x(z,t) = \frac{1}{(n+i\kappa)^2}\tilde{E}_{0x}(z)\,\left[\left(\varepsilon_R^{(1)} - \frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\right)e^{-i\omega t}\right.$$
$$\left.+\left(i\varepsilon_I^{(1)} + \frac{i\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\right)e^{-i\omega t}\right] =$$
$$= \frac{1}{(n+i\kappa)^2}\left(\varepsilon_R^{(1)} - \frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega} + i\varepsilon_I^{(1)} + \frac{i\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}\right)\tilde{E}_{0x}(z)e^{-i\omega t}$$

Požadavek, aby pole v z odpovídalo zadané vlně

$$\tilde{E}_x(z,t) = E_{0x}(z=0)e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}\,e^{i\frac{\omega}{c}nz}\,e^{-i\omega t} = \tilde{E}_{0x}(z)e^{-i\omega t},$$

je splněn, když

$$(n+i\kappa)^2 = \varepsilon_R^{(1)} - \frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega} + i\varepsilon_I^{(1)} + \frac{i\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}.$$

Pro izolant $\sigma_R = \sigma_I = 0$ dostáváme známý vztah $(n+i\kappa)^2 = \varepsilon_R + i\varepsilon_I$.

Tak jsme ukázali, že prostředí, která obsahují jak volné nosiče náboje, tak i oscilátory, lze souhrnně zcela ekvivalentně popsat buď relativní permitivitou (bez indexů, užívali jsme v základním textu)

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\varepsilon}_r\} = \varepsilon_R = \varepsilon_R^{(1)} - \frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}, \qquad \mathrm{Im}\{\tilde{\varepsilon}_r\} = \varepsilon_I = \varepsilon_I^{(1)} + \frac{\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0\omega}$$

nebo vodivostí (2)

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\sigma}^{(2)}\} = \sigma_R^{(2)} = \sigma_R^{(1)} + \omega\varepsilon_0\varepsilon_I^{(1)},$$

$$\mathrm{Im}\{\tilde{\sigma}^{(2)}\} = \sigma_I^{(2)} = \sigma_I^{(1)} - \omega\varepsilon_0\varepsilon_R^{(1)}.$$

V souhrnu zopakujme vztahy mezi indexem lomu a materiálovými parametry uvedených sad

$$(n + i\kappa)^2 = \varepsilon_R + i\varepsilon_I =$$

$$= \varepsilon_R^{(1)} - \frac{\sigma_I^{(1)}}{\varepsilon_0 \omega} + i\varepsilon_I^{(1)} + i\frac{\sigma_R^{(1)}}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{1}{\varepsilon_0 \omega}\left(-\sigma_I^{(2)} + i\sigma_R^{(2)}\right)$$

aniž by byl důležitý mechanismus interakce. Takže lze bez problémů vyjádřit i původem čistě vodivostní příspěvek (volně pohyblivé náboje) k optickým parametrům pomocí $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$ a naopak čistě dielektrický příspěvek (polarizace dielektrika) přes vodivost $\tilde{\sigma}(\omega)$.

Dodatek 13.5 Rovinná vlna a Poyntingův teorém

Zákon zachování energie (ve stacionárním případě zachování výkonu) byl obecně formulován jako tzv.**Poyntingův teorém**, který není omezen na monochromatický případ. V obecném (nemonochromatickém) případě nemůžeme zavést fázové posuvy.

Vyjádření ztrát pomocí $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{E}$

Vyjdeme z Maxwellových rotačních rovnic pro případ, že ztráty jsou vyjádřeny pomocí proudu $\boldsymbol{j}$ jako uvolněné Jouleovo teplo

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

První rovnici skalárně vynásobíme vektorem $\boldsymbol{H}$, druhou vektorem $\boldsymbol{E}$ a obě rovnice odečteme

$$\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Dále využijeme vektorovou identitu

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{S} = \mathrm{div}\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} =$$

$$= -\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},$$

z čehož dostaneme **Poyntingův teorém** v diferenciálním tvaru

$$-\mathrm{div}\,\boldsymbol{S} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

Pro poslední dva členy napíšeme v lineárním případě a v případě, že změny indukce $\boldsymbol{D}$ probíhají současně se změnami pole $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial(\varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E})}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E})}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2)}{\partial t} = \frac{\partial u_E}{\partial t}, \qquad)$$

kde jsme použili $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$, $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ jsou reálná čísla. Podobně

$$\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial u_B}{\partial t}.$$

Celkově dostaneme zákon zachování výkonu

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial (u_E + u_B)}{\partial t} = \frac{\partial u_{pole}}{\partial t},$$

$$-\mathrm{div}\, \boldsymbol{S} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{\partial (u_E + u_B)}{\partial t},$$

kde ztráty elektromagnetické energie jsou ve vodivostním členu $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}$ jako Jouleovo teplo **a** změny energie elektromagnetického pole v látce jsou $\frac{\partial (u_E + u_B)}{\partial t}$. Člen $-\mathrm{div}\, \boldsymbol{S}$ představuje rozdíl výkonových toků do infinitesimálního objemu a z něho ven.

Vyjádření ztrát pomocí $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$

Aniž bychom předpokládali $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$ (stačí obecný vztah $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$**)**, lze odvodit pro časovou změnu hustoty elektrické energie

$$\frac{\partial (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D})}{\partial t} = \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{D} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{\partial (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D})}{\partial t} - \boldsymbol{D} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\partial (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D})}{\partial t} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{P} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D})}{\partial t} - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} - \boldsymbol{P} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

kde jsme využili $\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$. Po převodu členu $\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ na levou stranu

$$2\, \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{\partial (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D})}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} - \boldsymbol{P} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

což je výraz pro $\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ vystupující v Poyntingově teorému. Podobně i pro magnetické pole.

$$-\mathrm{div}\, \boldsymbol{S} = \boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{E} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}) + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} - \boldsymbol{P} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) +$$
$$+ \frac{\mu_0}{2} \left(\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} - \boldsymbol{M} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right).$$

Pro nemagnetické prostředí je ovšem $\boldsymbol{M} = 0$.

Zkusme výpočet pro **časový harmonický průběh** v nějakém místě $\boldsymbol{r}$**.** Předpokládejme izotropní prostředí, vektory $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{D}$ rovnoběžné, vlnu lineárně polarizovanou, homogenní a tlumenou. V **monochromatickém** případě můžeme zavést **fázové posuny**. Popisujme stacionární případ. Požadavek homogenity souvisí se způsobem vstupu vlny do absorbujícího prostředí, např. kolmý dopad na rovinné rozhraní vakuum – látka. Jak jsme ukázali v **Dodatku 13.4**), je

$$\sigma_R^{(1)}, \sigma_I^{(1)}, \qquad \varepsilon_R^{(1)}, \varepsilon_I^{(1)}.$$

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = -\frac{\sigma_I^{(1)}(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} + \varepsilon_R^{(1)}(\omega) + \frac{i\sigma_R^{(1)}(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} + i\varepsilon_I^{(1)}(\omega) =$$

$$= 1 + \chi_R + i\,\chi_I = \varepsilon_R(\omega) + i\varepsilon_I(\omega)$$

a lze spojit popis ohmického proudu a dipólových kmitů do jedné komplexní permitivity a tedy i do jednoho komplexního indexu lomu. Obojí harmonicky kmitá, příspěvky jsou jen fázově posunuty. Stacionárnost je vyjádřena harmonickým kmitáním a v souvislosti s tím amplitudy nezávisí na čase, jen na prostorové souřadnici. V níže uvedených vztazích jsou $\chi_R{}'$ a $\chi_I{}'$ výše zmíněné spojené parametry proudů a polarizace. V reálné symbolice

$$E_x(z,t) = E_0(z=0)\ \mathrm{Re}\left\{e^{i\,(n+i\kappa)\frac{\omega}{c}z} e^{-i\omega t}\right\} = E_0(z)\cos\left(\omega t - \frac{n\omega}{c}\right), \tag{1.64}$$

$$E_0(z) = E_{00}\, e^{-\kappa\frac{\omega}{c}z}, \qquad t' = t - \frac{n}{c}z, \quad E_{00} \text{ amplituda v } z = 0$$

$$E_x(z,t') = E_0(z)\ \mathrm{Re}\left\{e^{-i\omega t'}\right\} = E_0(z)\cos\omega t',$$

$$P_x(z,t') = \varepsilon_0 E_0(z)\ \mathrm{Re}\left\{(\chi_R + i\chi_I)(\cos\omega t' - i\sin\omega t')\right\} =$$

$$= \varepsilon_0 E_0(z)(\chi_R\cos\omega t' + \chi_I\sin\omega t'),$$

$$j_x(z,t') = \varepsilon_0 E_0(z)(-\omega\chi_R\sin\omega t' + \boldsymbol{\omega}\chi_I\cos\omega t'),$$

$$D_x(z,t') = \varepsilon_0 E_0(z)\,(1 + \chi_R\cos\omega t' + \chi_I\sin\omega t'),$$

$$B_y(z,t') = E_0(z)\ \mathrm{Re}\left\{\frac{n+i\kappa}{c}(\cos\omega t' - i\sin\omega t')\right\} =$$

$$= E_0(z)\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,(n\cos\omega t' + \kappa\sin\omega t'),$$

$$H_y(z,t') = \frac{1}{\mu_0}B_y(z,t') = E_0(z)\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,(n\cos\omega t' + \kappa\sin\omega t'),$$

$$1 + \chi_R + i\chi_I = (n+i\kappa)^2 = n^2 - \kappa^2 + 2in\kappa.$$

Udělejme výkonovou bilanci pro uvedený stacionární případ a zajímejme se o časové střední hodnoty v místě z

$$\langle S_z(z,t')\rangle_T = \langle E_x H_y\rangle_T = E_0^2(z)\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\langle n\cos^2\omega t' + \kappa\sin\omega t'\cos\omega t'\rangle_T$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2}\ \varepsilon_0 c\ n\ E_0^2(z) = \frac{1}{2}\ \varepsilon_0 c\ n\ E_{00}^2\ e^{-2\kappa\frac{\omega}{c}z},$$

$$\langle \mathrm{div}\ \boldsymbol{S}(z)\rangle_T = \left\langle \frac{\partial S_z}{\partial z} \right\rangle_T = -\varepsilon_0 \omega n \kappa\ E_0^2(z)$$
$$= -\varepsilon_0 \omega n \kappa\ E_{00}^2\ e^{-2\kappa\frac{\omega}{c}z}.$$

Znaménko – znamená, že do oblasti kolem roviny $z = konst.$ více výkonu vtéká než vytéká.

Kmitání $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}$ je zahrnuto do kmitání $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{D}$. Z důvodu požadované stacionárnosti jsou střední hodnoty časových změn hustot energií nulové:

$$\frac{\partial}{\partial t'}(\ \mathrm{Re}\ \{E_x\}\ \cdot \mathrm{Re}\ \{D_x\}) = \frac{\partial}{\partial t'}\ [\varepsilon_0 E_0^2(z) \cos \omega t'\ \ (1 + \chi_R \cos \omega t' +\ \chi_I \sin \omega t')]$$
$$= \varepsilon_0 E_0^2(z)\ \frac{\partial}{\partial t'} (\cos \omega t'\ + \chi_R\ \cos^2 \omega t' + \chi_I \sin \omega t'\ \cos \omega t'\ ) =$$
$$= \omega \varepsilon_0 E_0^2(z)[-\sin \omega t' - 2\,\chi_R\ \cos \omega t' \sin \omega t' + \chi_I\ (\cos^2 \omega t'\ - \sin^2 \omega t')] =$$
$$= \omega \varepsilon_0 E_0^2(z)\ (-\sin \omega t' - \chi_R\ \sin 2\omega t' + \chi_I \cos 2\omega t'),$$
$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t'}(\ \mathrm{Re}\ \{E_x\}\ \cdot \mathrm{Re}\ \{D_x\}) \right\rangle_T = 0.$$

Pro výpočet středních hodnot absorbovaných hustot výkonů použijme

$$\frac{\partial P_x(z)}{\partial t} = -i\omega \varepsilon_0 (\chi_R + i\chi_I)\ E_0(z) = \omega \varepsilon_0 E_0(z)(-i\chi_R + \chi_I),$$
$$\frac{\partial P_x^*(z)}{\partial t} = \omega \varepsilon_0 E_0(z)(i\chi_R + \chi_I)$$

$$\left\langle \boldsymbol{E}\ \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \right\rangle_T =$$
$$= \frac{1}{4}\left(E_x^* \cdot \frac{\partial P_x}{\partial t} + E_x \cdot \frac{\partial P_x^*}{\partial t}\right) = \frac{1}{4}\omega \varepsilon_0 E_0^2(z)(-i\chi_R + \chi_I + i\chi_R + \chi_I) =$$
$$= \frac{1}{2}\omega \varepsilon_0 E_0^2(z)\chi_I,$$

$$\left\langle \boldsymbol{P}\ \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right\rangle_T =$$
$$= \frac{1}{4}\left(P_x^* \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t} + P_x \cdot \frac{\partial E_x^*}{\partial t}\right) = \frac{1}{4}\omega \varepsilon_0 E_0^2(z)(-i\chi_R - \chi_I + i\chi_R - \chi_I) =$$
$$= \frac{-\ \omega \varepsilon_0}{2} E_0^2(z)\ \chi_I,$$

$$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}-\boldsymbol{P}\,\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\omega\varepsilon_0 E_0^2(z)\,\frac{\chi_I}{2}=n\kappa\,\varepsilon_0\omega\,E_0^2(z),$$

$$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t}-\boldsymbol{M}\,\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)=0.$$

Porovnejme $\langle \mathrm{div}\,\boldsymbol{S}(z)\rangle_T=\langle\frac{\partial S_z}{\partial z}\rangle_T=-n\kappa\,\varepsilon_0\omega\,E_0^2(z)$, což je rozdíl mezi plošnou hustotou výkonu odtékajícího z místa z a přitékající do místa z, zatímco $\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}-\boldsymbol{P}\,\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=n\kappa\varepsilon_0\omega E_0^2(z)$ je hustota výkonu, který je předán v tomto místě do látky z elektromagnetické vlny. Aby byl realizován stacionární případ (aby se látka neohřívala a tím se podmínky – např. parametry n,κ neměnily), je třeba tuto energii (např. ve formě tepla) odvádět.

Jednotky:

$\boldsymbol{S}(z)$	div $\boldsymbol{S}(z)$	$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D},\ \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}$
W m^{-2}	W m^{-3}	J m^{-3}	J s^{-1} m^{-3}=W m^{-3}

Udělejme bilanci pro průchod tlumené vlny prostředím o tloušťce d. Stále budeme uvažovat stacionární případ. Pro jednoduchost zanedbáme vnější i vnitřní odrazy; lze si představit antireflexně upravené povrchy. Výkony na vstupu a výstupu jsou

$$\langle S_z(z=0)\rangle_T=\frac{1}{2}\,\varepsilon_0 c\,n\,E_{00}^2,$$

$$\langle S_z(z=d)\rangle_T=\frac{1}{2}\,\varepsilon_0 c\,n\,E_{00}^2(d)=\frac{1}{2}\,\varepsilon_0 c\,n\,E_{00}^2\,e^{-2\kappa\frac{\omega}{c}d}.$$

Rozdíl mezi výkonem vstupujícím a vystupujícím (oslabení elektromagnetické vlny) můžeme napsat v integrálním tvaru časově vystředovaného Poyntingova teorému

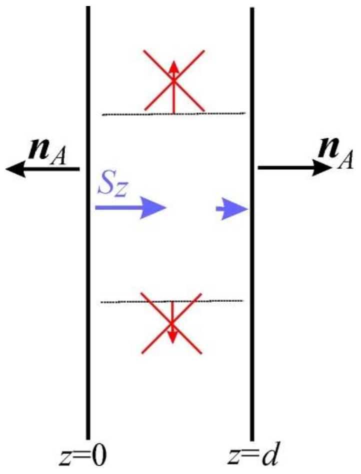
$$\oint_{A(V)}\langle\boldsymbol{S}\rangle_{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{n}_A\,dA=$$

$$=[\langle -S_z(z=0)\rangle_T+\langle S_z(z=d)\rangle_T]\,A_\perp=\frac{1}{2}\,\varepsilon_0 c\,n\,E_{00}^2\,\left(e^{-2\kappa\frac{\omega}{c}d}-1\right)\,A_\perp.$$

Přitom předpokládáme, že „bočními“ částmi integrační plochy žádný elektromagnetický výkon ani neuniká ani nevstupuje. $\boldsymbol{n}_A$ jsou vnější normály k integrační ploše A**.** Zkontrolujme výkon uvolněný z elektromagnetické vlny po dráze uvnitř absorbující látky vztažený na jednotkový průřez $A_\perp=1$.

$$\int_0^d\langle \mathrm{div}\,\boldsymbol{S}(z)\rangle_T\,dz=-\,n\kappa\varepsilon_0\omega E_{00}^2\int_0^d e^{-2\kappa\frac{\omega}{c}z}\,dz=$$

$$= -n\kappa\varepsilon_0\omega E_{00}^2 \, \frac{c\, E_{00}^2}{-2\kappa\omega} \left[e^{-2\kappa\frac{\omega}{c} z}\right]_0^d = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0 c\, n\, E_{00}^2 \, \left(e^{-2\kappa\frac{\omega}{c} d} - 1\right).$$



Obr. 13.12 Schéma pro výkonovou bilanci vlny procházející absorbujícím prostředím.

Dodatek 13.6. Započtení příspěvků od spektrálně vzdálených oscilátorů

V našich hrubých kvalitativních modelech (obr. 13.5 až 13.8) jsme se pokusili ukázat vliv přítomnosti více typů oscilátorů na výsledky pro relativně spektrálně osamocený lorentzovský oscilátor:

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \sum_l \frac{N_l q_l^2}{\varepsilon_0 m_l} f_l \frac{1}{\omega_{0l}^2 - i\gamma_l\omega - \omega^2} + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} + \\ + \sum_n \frac{N_n q_n^2}{\varepsilon_0 m_n} f_n \frac{1}{\omega_{0n}^2 - i\gamma_n\omega - \omega^2},$$

kde index l označuje oscilátory s frekvencí $\omega_{0l} < \omega_0$ a index n oscilátory s frekvencí $\omega_0 < \omega_{0n}$ a přitom spektrálně dostatečně vzdálené $\omega_0 - \omega_{0l} \gg \gamma_l, \gamma$ a též $\omega_{0n} - \omega_0 \gg \gamma_n, \gamma$. Pak lze aproximovat příspěvky od indexovaných oscilátorů

$$1 + \sum_l \frac{N_l q_l^2}{\varepsilon_0 m_l} f_l \frac{1}{\omega_{0l}^2 - i\gamma_l\omega - \omega^2} + \sum_n \frac{N_n q_n^2}{\varepsilon_0 m_n} f_n \frac{1}{\omega_{0n}^2 - i\gamma_n\omega - \omega^2} \cong \\ \cong \varepsilon_{R,MED}(\omega) = n_{MED}^2(\omega),$$

protože imaginární část od příspěvků oscilátorů l a m $\varepsilon_{I,MED}(\omega)$ klesá s rozdíly $\omega - \omega_{0l}$ a $\omega_{0n} - \omega$ mnohem rychleji než příspěvky k reálné části, jak je vidět i na obr. 13.3. Pro příspěvky oscilátorů $\omega_{0l} < \omega_0$ dostáváme záporná $\Delta\chi_R$ a pro příspěvky od $\omega_0 < \omega_{0n}$ jsou $\Delta\chi_R$ kladná. Ale pro oba typy příspěvků l i n dostáváme $n_{MED}^2(\omega)$ jako rostoucí funkci (normální disperze indexu lomu). V našich hrubých kvalitativních modelech jsme si dovolili navíc aproximaci $n_{MED}^2(\omega) = konstanta$.