

2. Polarizace rovinné monochromatické vlny

Polarizace elektromagnetické vlny popisuje směry oscilace vektoru elektrické intenzity. Pokud se tento vektor v prostoru a čase vyvíjí předpověditelným způsobem (deterministicky), říkáme, že světlo je **polarizované**. Pokud je tento vývoj zcela náhodný (stochastický), světlo je **nepolarizované**. Záření z termálních zdrojů (např. Slunce, žárovka) se vyznačuje tím, že směr vektoru elektrického pole se rychle a náhodně mění. Často můžeme světelný svazek charakterizovat jako směs polarizovaného a nepolarizovaného světla. Takové světlo se nazývá **částečně polarizované**.

V této kapitole se budeme zabývat rovinnou vlnou, která má dobře definovanou polarizaci (lineární, kruhovou nebo eliptickou), což je užitečný model pro polarizované světlo, např. záření laseru nebo záření po průchodu polarizátorem a dalšími polarizačními zařízeními.

2.1 Šíření v neabsorbujícím, izotropním prostředí bez lineárního a kruhového dvojlomu

Pro základní popis polarizace a způsobů jejího ovlivňování použijeme model šíření jedné rovinné monochromatické vlny diskutovaný v úvodní kapitole. Rozborem Maxwellových rovnic jsme dospěli k závěru o vzájemné ortogonalitě vektorů \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{H} . Lineárně polarizovanou vlnou rozumíme takovou, ve které koncové body vektoru \mathbf{E} kmitají po úsečce. Jako výchozí situaci vezmeme skládání dvou lineárně polarizovaných vln, jejichž vlnové vektory jsou totožné a roviny polarizace na sebe kolmé. Zvolíme souřadnou soustavu tak, že osy x a y jsou určeny směry kmitů těchto dvou vln a směr vlnového vektoru obou vln je osa z :

$$\tilde{E}_x = a_x e^{i(k_z z - \omega t)} = a_x e^{i\varphi}, \quad (2.1)$$

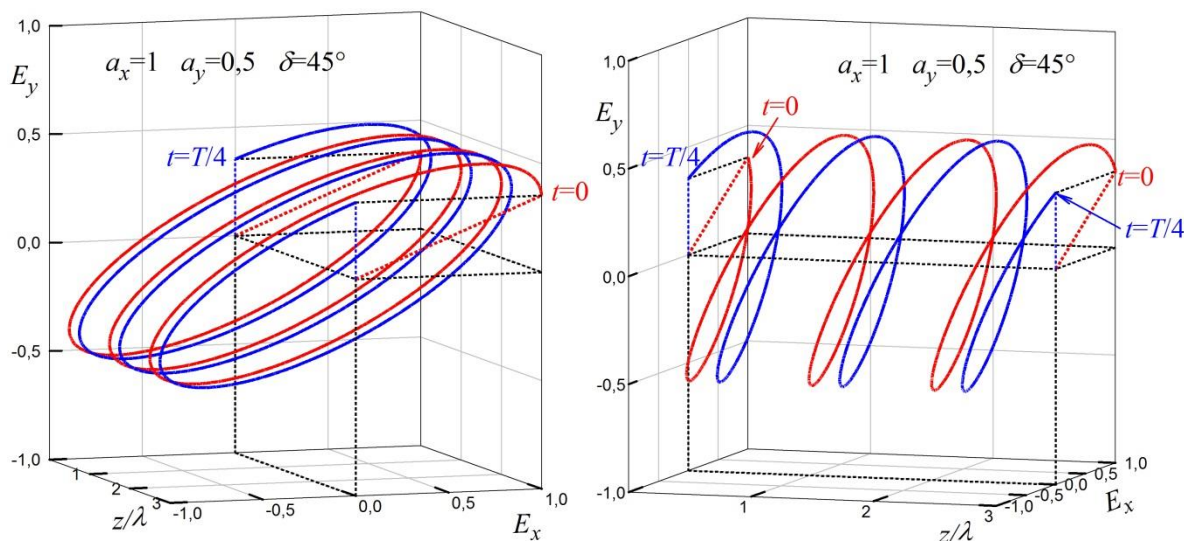
$$\tilde{E}_y = a_y e^{i(k_z z - \omega t + \delta)} = a_y e^{i(\varphi + \delta)}. \quad (2.2)$$

Amplitudy a_x a a_y budeme v této části textu považovat za konstanty, které se ani v čase, ani v prostoru nemění. To je splněno při šíření vlny v neabsorbujícím, izotropním prostředí bez lineárního i kruhového dvojlomu. Uvidíme, že v takovém případě se polarizace vlny v čase ani v prostoru nemění. Naopak v prostředí vykazujícím lineární nebo kruhový dvojlom se po dráze šíření vlny polarizační stav vlny mění a to se využívá pro ovlivnění polarizace, jak uvidíme v části 2.5 a zejména v kapitole „Anizotropní prostředí“.

Konstanty $a_x > 0$, $a_y > 0$ jsou reálné amplitudy složek \tilde{E}_x a \tilde{E}_y , δ je fázový posun mezi oběma složkami. Rovnice 2.1 a 2.2 představují parametrické vyjádření povrchu eliptického válce. Speciální případ, kdy jedna z amplitud je nulová, popisuje lineárně polarizovanou vlnu kmitající ve směru druhé osy, neboli válec zdegeneruje v pás šířky $2a_x$ (případně $2a_y$). Lineárně polarizovanou vlnu dostaneme též v případě, že fázový rozdíl $\delta = 0$.

V celé rovině $z = \text{konstanta}$ kmitají vektory \mathbf{E} stejným způsobem. Pokud ve vztazích 2.1 a 2.2 zafixujeme čas, koncové body vektorů $\mathbf{E}(z)$ leží na spirále natočené na povrchu eliptického

válce. „Stoupání“ této spirály, tj. prostorová perioda je rovna vlnové délce vln. Při uvolnění času se tato spirála posouvá po povrchu válce. Za dobu periody T množina koncových bodů vektorů $\mathbf{E}(z)$ vyplní celý povrch válce.

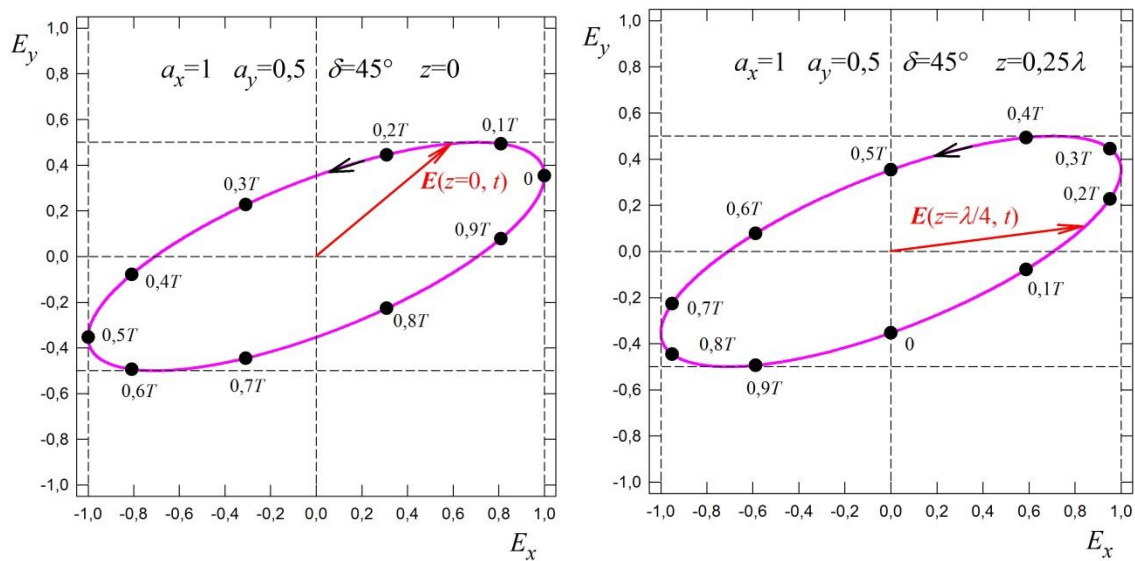


Obr. 2.1 Znáornění prostorové závislosti poloh koncových bodů vektoru $\mathbf{E}(z, t)$ pro dva časy: $t = 0$ (červeně) a $t = T/4$ (modře). Vypočteno z parametrických rovnic 2.1 a 2.2.

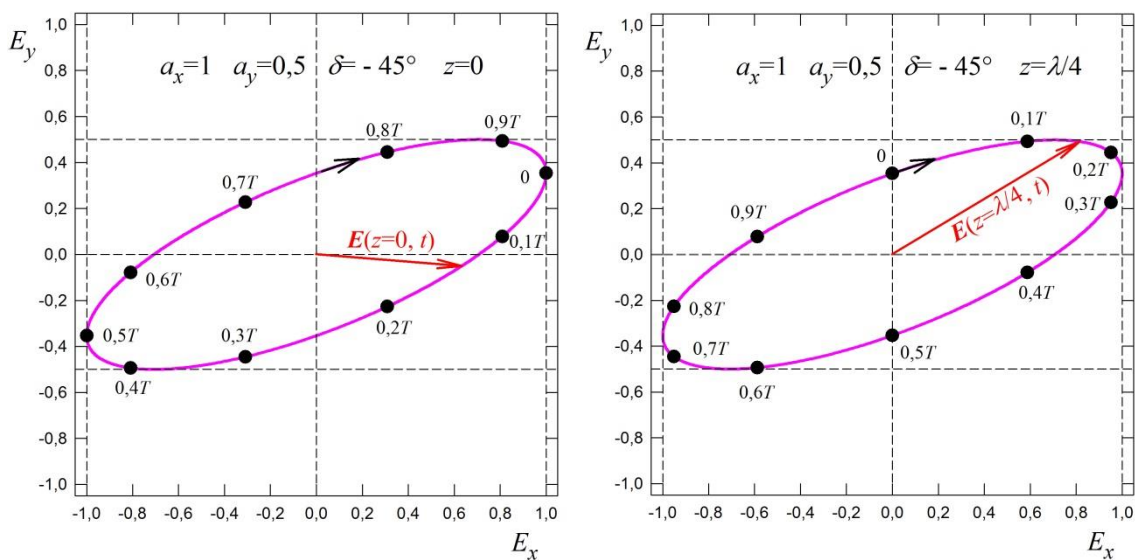
Pokud zafixujeme polohu z , dostáváme v rovině xy parametrické vyjádření elipsy, která představuje trajektorii koncových bodů vektoru $\mathbf{E}(t)$ pro dané z , která je určena tím, jak spirála projíždí touto rovinou. Právě pojmem „polarizace vlny“ se často označuje časový vývoj vektoru polarizace v pevném místě z . S posuvem souřadnice z se sice mění fáze rotace \mathbf{E} , ale tvar elipsy, kterou tvoří množina koncových bodů \mathbf{E} , a orientace této elipsy v prostoru zůstává stále stejná (pro výše uvedené předpoklady o prostředí bez dvojlomů).

Pravotočivá vlna je charakterizována tím, že v pravotočivé souřadné soustavě xyz pro vlnový vektor ve směru kladné osy z je smysl otáčení vektoru \mathbf{E} od kladné osy x k záporné ose y . Názorněji: při pohledu proti směru šíření se vektor \mathbf{E} otáčí po smyslu chodu hodinových ručiček. V levotočivé vlně s vlnovým vektorem ve směru kladné osy z je smysl otáčení od kladné osy x ke kladné ose y , proti smyslu otáčení hodinových ručiček.

Zdůrazněme, že výsledky a závěry související se znaménkem fázového rozdílu δ jsou vázány na naši volbu popisu vlny šířící se ve směru kladné osy z . V literatuře se lze setkat i s volbou opačných znamének v exponentu výrazu 2.2, totiž $\tilde{E}_y = a_y e^{i(\omega t - k_z z + \delta)}$. Důsledkem je prohození souvislosti pravotočivosti/levotočivosti se znaménkem δ .



Obr. 2.2 Koncové body vektoru \mathbf{E} se postupně objevují v rovině $z = 0$ a se zpožděním v rovině $z = \frac{\lambda}{4}$ během jedné časové periody $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Vektor \mathbf{E} rotuje v této rovině proti směru hodinových ručiček a mění přitom svou velikost. Znázorněný časový vývoj odpovídá vlně levotočivé.



Obr. 2.3 Totéž jako obr. 2.2 ale pro vlnu pravotočivou. Vektor \mathbf{E} rotuje po směru chodu hodinových ručiček.

2.2 Polarizační elipsa

Neměnnost tvaru a orientace elipsy při změně z můžeme ukázat eliminací parametrů z, t z parametrických rovnic 2.1 a 2.2. Tímto způsobem přejdeme od dvou parametrických rovnic k jedné rovnici elipsy v analytické geometrii $F(E_x, E_y) = 0$. Postup je uveden v Dodatku 2.1 s výsledkem

$$F(E_x, E_y) = \left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{a_x a_y} \cos^2 \delta + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 - \sin^2 \delta = 0. \quad (2.3)$$

V rovině E_x, E_y tento vztah popisuje elipsu, jejíž poloosy nemusí být totožné s osami souřadné soustavy x, y, z . Odstraněním prostorové a časové závislosti $\varphi(z, t)$ jsme se vzdali informace o čase, kdy koncový bod \mathbf{E} bude mít v místě z určité souřadnice E_x, E_y . Rovnice 2.3 obsahuje pouze kvadráty $\sin^2 \delta, \cos^2 \delta$, takže je ztracena i informace o smyslu rotace vektoru \mathbf{E} . V trojrozměrném prostoru se koncové body vektoru elektrického pole mohou objevit „někde“ na povrchu eliptického válce, jehož parametry se podél osy z nemění.

Pro $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ přejde rovnice 2.3 na vztah

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 = 1,$$

což je rovnice elipsy v osově poloze. Pokud je $a_x > a_y$, je $a_x = a$ velká poloosa elipsy a $a_y = b$ je malá poloosa.

Geometrický popis elipsy je zvykem provést za pomoci

- velké a a malé b poloosy elipsy,
- úhlu natočení ϑ velké poloosy vzhledem k souřadné soustavě.
- elipticity χ ,

Tyto veličiny jsou spojeny s veličinami a_x, a_y, δ vystupujícími v rovnicích 2.1 až 2.3 následujícími vztahy.

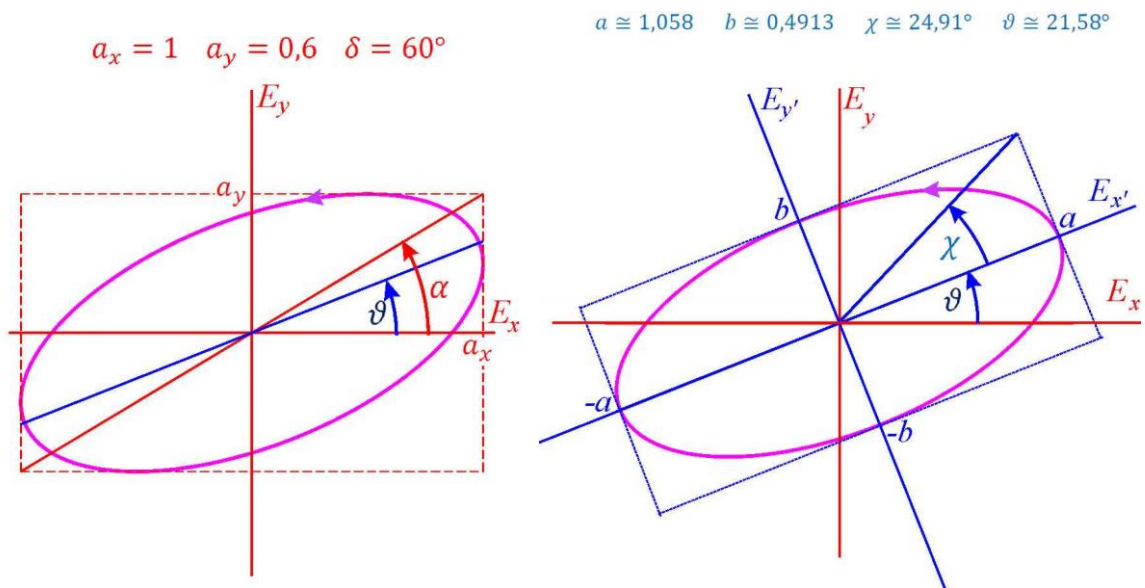
$$a^2 + b^2 = a_x^2 + a_y^2, \quad a, b, a_x, a_y \geq 0 \quad (2.4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_x a_y}{a_x^2 - a_y^2}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.5)$$

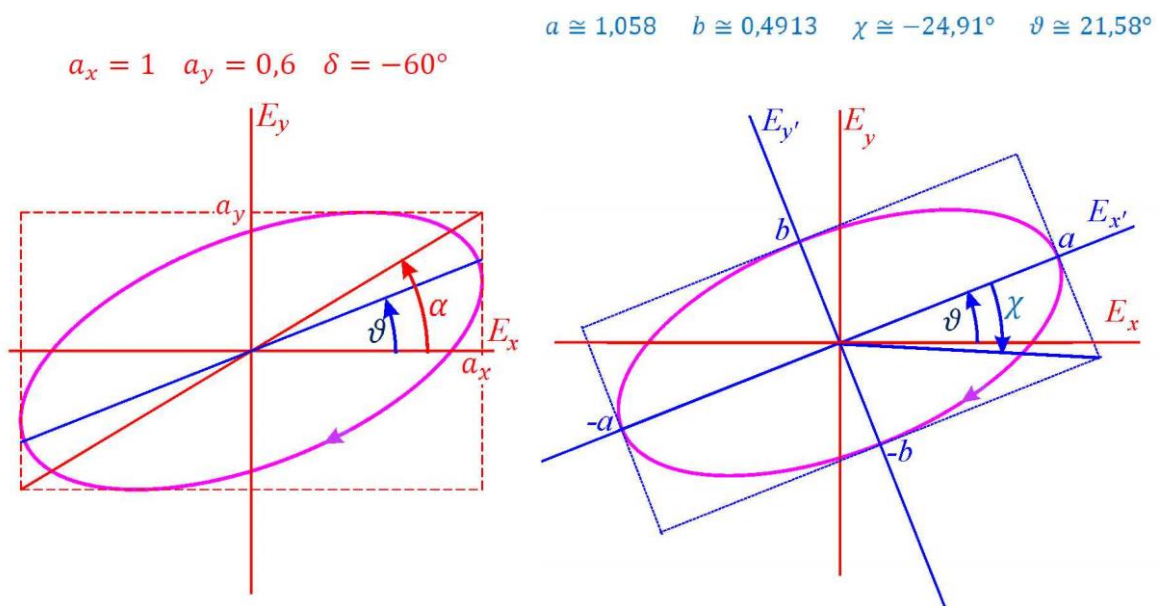
$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \operatorname{tg} 2\alpha \cos \delta, \quad 0 \leq \vartheta < \pi, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{tg} \chi = \pm \frac{b}{a}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \quad (2.7)$$

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin \delta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq 2\chi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2.8)$$



Obr. 2.4 Zakreslení elipsy levotočivě polarizované vlny s vyznačením parametrů a_x, a_y, δ a parametrů a, b, χ, ϑ .



Obr. 2.5 Zakreslení polarizační elipsy pravotočivé vlny s vyznačením parametrů a_x, a_y, δ a parametrů a, b, χ, ϑ .

Proberme několik speciálních případů, vše pro $z = 0$:

1) $\delta = 0$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x &= a_x e^{i(k_z z - \omega t)}, & \tilde{E}_y &= a_y e^{i(k_z z - \omega t)}, \\ E_x(z = 0, t) &= a_x \cos \omega t, & E_y(z = 0, t) &= a_y \cos \omega t.\end{aligned}$$

Obě složky kmitají ve fázi, vlna je lineárně polarizovaná. Koncový bod vektoru \mathbf{E} se pohybuje po úsečce mezi body $(-a_x, -a_y)$ a (a_x, a_y) .

2. $\delta = \pi$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x &= a_x e^{i(k_z z - \omega t)}, & \tilde{E}_y &= a_y e^{i(k_z z - \omega t + \pi)} = -a_y e^{i(k_z z - \omega t)}, \\ E_x(z = 0, t) &= a_x \cos \omega t, & E_y(z = 0, t) &= -a_y \cos \omega t.\end{aligned}$$

Obě složky kmitají ve fázi, vlna je lineárně polarizovaná. Koncový bod vektoru \mathbf{E} se pohybuje po úsečce mezi body $(a_x, -a_y)$ a $(-a_x, a_y)$.

3. $\delta = \frac{\pi}{2}$, $a = a_x > a_y = b$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x &= a e^{i(k_z z - \omega t)}, & \tilde{E}_y &= b e^{i(k_z z - \omega t + \frac{\pi}{2})}, \\ E_x(z = 0, t) &= a \cos \omega t, & E_y(z = 0, t) &= b \sin \omega t.\end{aligned}$$

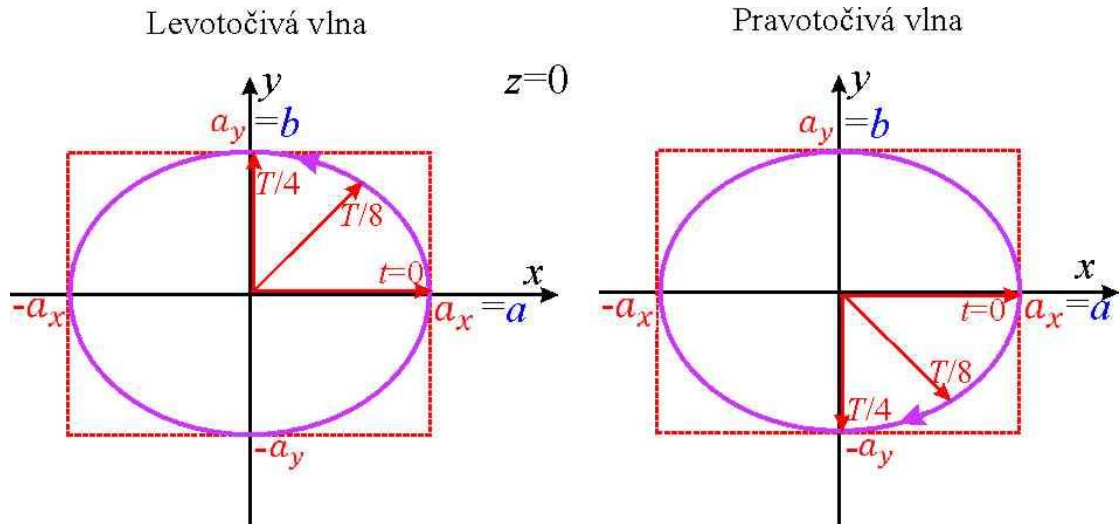
Prozkoumejme nyní, jak se pohybuje vektor \mathbf{E} po elipse v rovině $z = 0$ v čase. V čase $t = 0$ je

$$E_x = a, \quad E_y = b \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Zvolme $t = \frac{T}{4}$, kde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ je doba kmitu. Dostáváme

$$\begin{aligned}E_x &= a_x \cos\left(-\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{4}\right) = a \cos \frac{-\pi}{2} = 0, \\ E_y &= a_y \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = b \cos(0) = b.\end{aligned}$$

Z obr. 2.6a je zřejmé, že se jedná o levotočivou, elipticky polarizovanou vlnu. Je třeba zdůraznit, že tyto výsledky platí pro námi zvolený zápis fáze vlny $\varphi = kz - \omega t + \delta$, který budeme dodržovat v celém učebním textu.



Obr. 2.6 a) Levotočivá, elipticky polarizovaná vlna. Pohled proti směru šíření v jedné rovině prostoru (zvoleno $z = 0$). Koncový bod vektoru \mathbf{E} obíhá elipsu proti směru hodinových ručiček.

b) Pravotočivá, elipticky polarizovaná vlna. Koncový bod vektoru \mathbf{E} obíhá elipsu po směru hodinových ručiček.

4. $\delta = \frac{-\pi}{2}$, $a = a_x > a_y = b$

Analogickým postupem pro pravotočivou vlnu dostaneme.

$$\tilde{E}_x = ae^{i(k_z z - \omega t)}, \quad \tilde{E}_y = be^{i(k_z z - \omega t - \frac{\pi}{2})},$$

V čase $t = 0$ je

$$E_x = a, \quad E_y = \text{Re}\{\tilde{E}_y\} = b \cos \frac{-\pi}{2} = 0.$$

V čase $t = \frac{T}{4}$ dostáváme

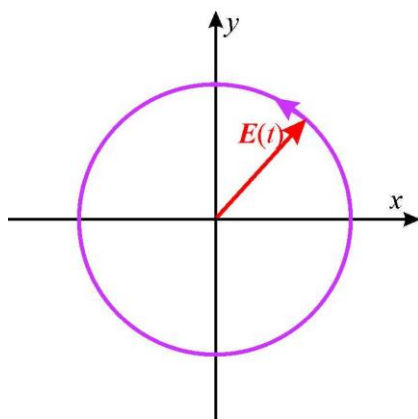
$$E_x = a \cos\left(-\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{4}\right) = a \cos \frac{-\pi}{2} = 0,$$

$$E_y = b \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = b \cos(-\pi) = -b.$$

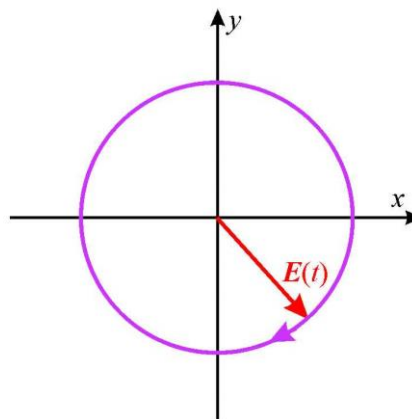
Z obr. je zřejmé, že se jedná o pravotočivou, elipticky polarizovanou vlnu.

Pokud jsou navíc amplitudy složek elektrického pole shodné, tj. $a_x = a_y$, dostaneme pro $\delta = \frac{\pi}{2}$ levotočivou kruhově polarizovanou vlnu a pro $\delta = -\frac{\pi}{2}$ pravotočivou kruhově polarizovanou vlnu.

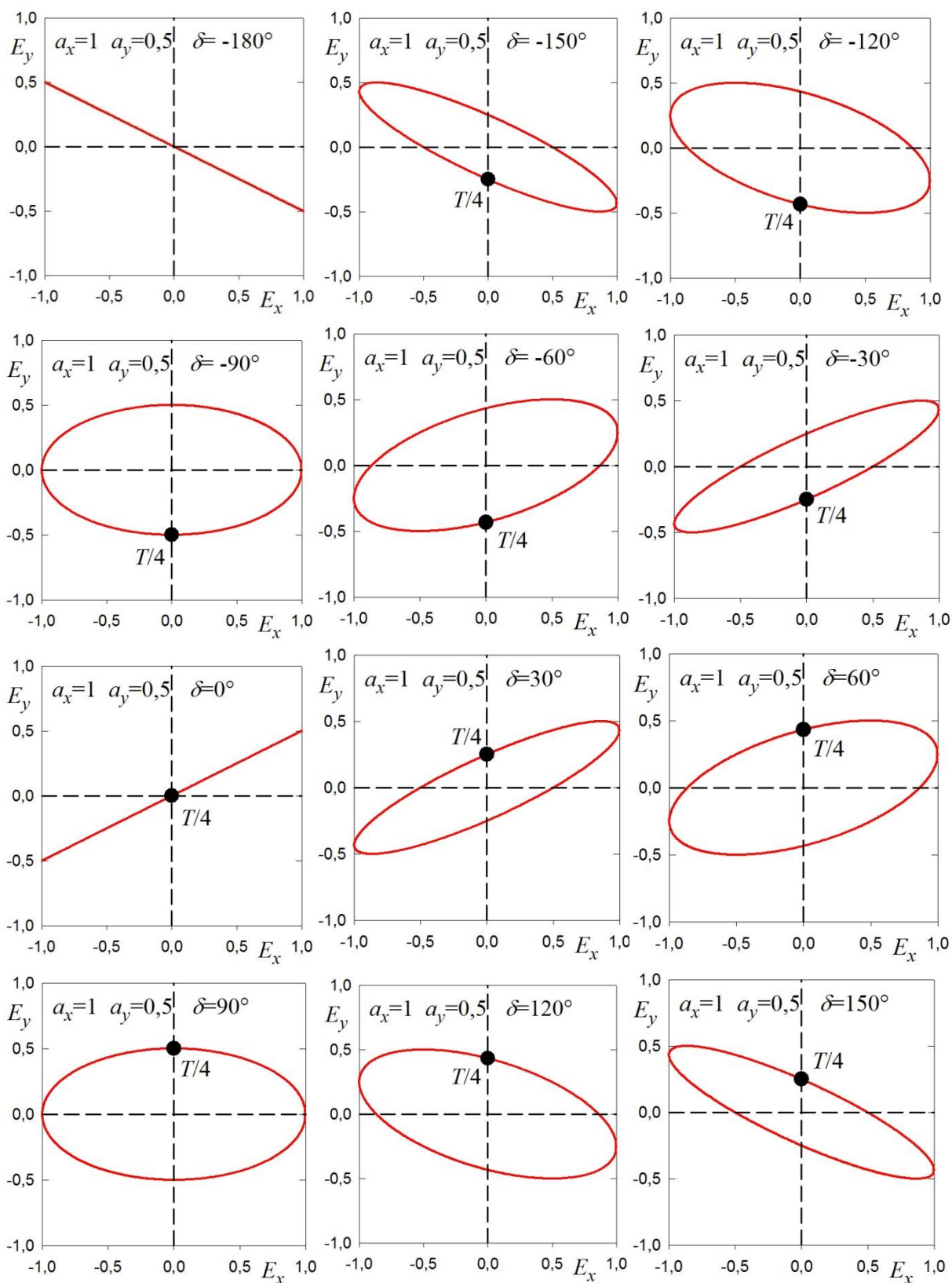
Levotočivě kruhově
polarizovaná vlna
 $a_x = a_y \quad \delta = \frac{\pi}{2}$



Pravotočivě kruhově
polarizovaná vlna
 $a_x = a_y \quad \delta = -\frac{\pi}{2}$



Obr. 2.7 Rotace vektoru elektrického pole v levotočivě a pravotočivě kruhově polarizované vlně



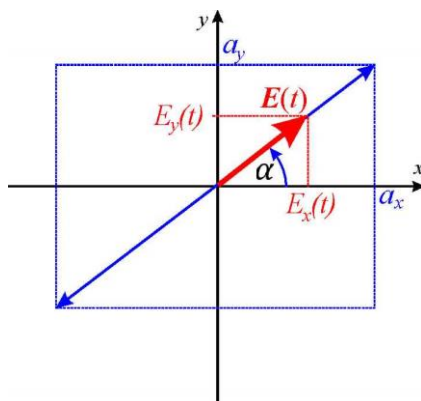
Obr. 2.8 Závislost tvaru polarizační elipsy na fázovém posuvu δ . Pro všechny elipsy je $E_x(t = 0) = 1$. Pro $E_y(t = T/4) > 0$ je vlna levotočivá, pro $E_y(t = T/4) < 0$ je vlna pravotočivá. Podle rovnic 2.1 a 2.2 pro $z = 0$.

2.3 Jonesův formalismus

Vhodným formalizmem pro popis zcela polarizovaného záření je Jonesův formalismus, kdy polarizační stav záření popisují **Jonesovy vektory** a polarizační zařízení, která polarizační stav záření mění, se popisují pomocí **Jonesových matic**. Tento popis nelze použít pro popis částečně polarizovaného záření, které si můžeme představit jako směs polarizovaného a zcela nepolarizovaného záření. Pro tento obecnější případ částečné polarizace se využívá **Stokesův formalismus** (Stokesovy vektory a Muellerovy matice), kterými se v této kapitole zabývat nebudeme.

Pro zavedení Jonesova formalismu vyjádříme nejprve podle obr. 2.9 pro lineárně polarizovanou vlnu.

$$\sin \alpha = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \quad (2.9)$$



Obr. 2.9 Vektor \mathbf{E} lineárně polarizované vlny a jeho složky

Z rovnice 2.9 dostaneme $a_x = a_y \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Dosazením do rovnic 2.1 a 2.2

$$\tilde{E}_x(z, t) = a_y \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} e^{i\varphi(z, t)},$$

$$\tilde{E}_y(z, t) = a_y \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} e^{i\varphi(z, t)} e^{i\delta}.$$

Označme

$$E_{eff} = \frac{a_y}{\sin \alpha} = \frac{a_x}{\cos \alpha} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (2.10)$$

Složky \tilde{E}_x a \tilde{E}_y uspořádejme do sloupcového vektoru a rovnice popisující vektor $\tilde{\mathbf{E}}(z, t)$ dostaneme ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(z, t) \\ \tilde{E}_y(z, t) \end{pmatrix} = E_{eff} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\delta} \end{pmatrix} e^{i\varphi(z, t)}, \quad (2.11)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = E_{eff} \tilde{\mathbf{J}} e^{i\varphi(z, t)}, \quad (2.12)$$

kde $\tilde{\mathbf{J}}$ nazýváme Jonesův vektor, což je komplexní vektor (vlnovku nad symbolem v dalším textu již nebudeme psát) Tento vektor obsahuje zásadní informace o polarizaci. Je to vektor jednotkový, jak můžeme ukázat výpočtem

$$\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{J} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha e^{i\delta} e^{-i\delta} = 1, \quad (2.12)$$

kde \mathbf{J}^* je řádkový vektor, $\mathbf{J}^* = (\cos \alpha, \sin \alpha e^{-i\delta})$.

Veličina E_{eff} má význam efektivní hodnoty lineárně polarizovaného pole, které by neslo stejnou celkovou hustotu energie (rovnice 1.48) jako obecně polarizované pole popsané rovnicemi 2.1 a 2.2.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r (\tilde{E}_x \tilde{E}_x^* + \tilde{E}_y \tilde{E}_y^*) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r (a_x^2 + a_y^2) = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r |E_{eff}|^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Při výpočtu rovnice 2.13 jsme využili komplexního zápisu, který je podrobněji diskutován v **Dodatku M** (matematický dodatek společný pro všechny kapitoly) – vztah M.17.

Uveďme nyní, jak vypadají Jonesovy vektory pro lineárně a kruhově polarizované světlo. V případě lineárně polarizovaného světla je fázový posun $\delta = 0$ a pro Jonesův vektor dostáváme

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Pokud $\alpha = 0$, je $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = 0$, $\mathbf{J}_{LHP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vektor \mathbf{E} kmitá ve směru osy x . Takové světlo nazveme lineárně horizontálně polarizované světlo (LHP – linear horizontally polarized light). Analogicky pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je $\mathbf{J}_{LVP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektor \mathbf{E} kmitá ve směru osy y . Toto světlo se nazývá lineárně vertikálně polarizované světlo (LVP – linear vertically polarized light).

Pokud fázový posun $\delta = \frac{\pi}{2}$ a $a_x = a_y = a$, je $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Jonesův vektor má tvar

$$\mathbf{J}_{LCP} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ i \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Využili jsme $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$. V tomto případě platí

$$E_{eff} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a,$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(z, t) \\ \tilde{E}_y(z, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{eff} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} = a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)},$$

kde
$$\tilde{E}_x(z, t) = a \cos(kz - \omega t) + ia \sin(kz - \omega t),$$

$$E_x(z, t) = \text{Re}\{\tilde{E}_x(z, t)\} = a \cos(kz - \omega t)$$

a podobně

$$\tilde{E}_y(z, t) = ia \cos(kz - \omega t) - a \sin(kz - \omega t),$$

$$E_y(z, t) = \text{Re}\{\tilde{E}_y(z, t)\} = -a \sin(kz - \omega t).$$

Zvolíme-li rovinu $z = 0$, je v čase $t = 0$

$$E_x(0,0) = a, \quad E_y(0,0) = 0$$

a v čase $t = \frac{T}{4}$

$$E_x\left(0, \frac{T}{4}\right) = a \cos\left(-\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{4}\right) = a \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$E_y\left(0, \frac{T}{4}\right) = -a \sin\left(-\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{4}\right) = -a \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a$$

Je tedy zřejmé, že se jedná o vlnu levotočivou - levotočivé kruhově polarizované světlo (LCP – left circularly polarized light). Podobně pro pravotočivé kruhově polarizované světlo (RCP – right circularly polarized light) s využitím $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ má Jonesův vektor tvar

$$\mathbf{J}_{RCP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

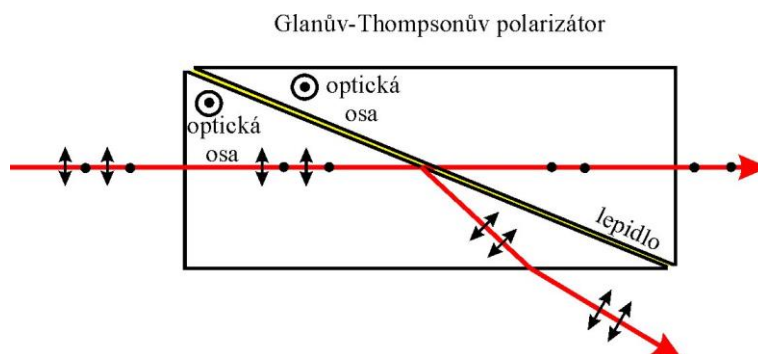
2.4 Příprava polarizovaného světla

Světlo z běžných zdrojů (slunce, žárovka, svíčka apod.) je nepolarizované. Směr vektoru \mathbf{E} a fáze vln se rychle a náhodně mění. Z nepolarizovaného světla můžeme vytvořit světlo polarizované celou řadou metod. Nejběžnější způsob je použití optického prvku zvaný **polarizátor**. Lze jej realizovat za použití několika fyzikálních principů, např.:

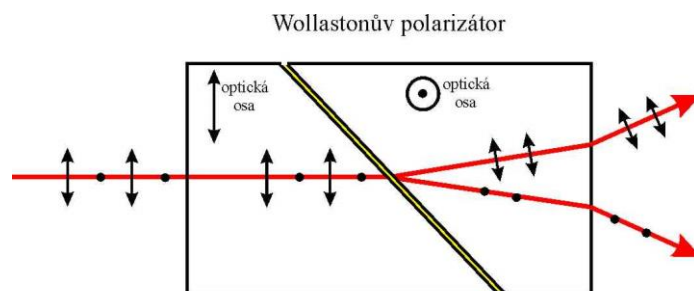
- polarizace lineárním dvojlomem;
- různá **absorpce** záření pro různé směry kmitů v anizotropních látkách (lineární dichroismus);
- polarizační závislost **odrazivosti** na rozhraní;
- polarizační závislost **difrakce** (propustnost a odrazivost difrakčních mřížek).

1. Lineární dvojlom

Anizotropní materiály mají různé **indexy lomu** pro různé směry kmitů. Při šikmém dopadu nepolarizovaného světla na rozhraní s jednoosým anizotropním krystalem dochází při lomu k rozdělení prostorově omezeného dopadajícího svazku na svazek řádný a mimořádný. Oba svazky postupující po lomu anizotropním krystalem v různých směrech jsou lineárně polarizované s navzájem kolnými polarizacemi.



Obr. 2.10a Glanův–Thompsonův polarizátor využívá totální odraz pro jednu polarizační komponentu na rozhraní anizotropní materiál/spojovací lepidlo (odraz na opticky řidším prostředí pro řádnou i mimořádnou vlnu šířící se v anizotropním matereáliu). Úhel dopadu je zvolen tak, že je větší než kritický úhel pro řádnou vlnu a menší než kritický úhel pro mimořádnou vlnu. Řádná vlna se odráží, mimořádná se láme podle zákona lomu do lepidla, následně opět vstupuje do anizotropního materiálu s optickou osou orientovanou stejně jako v prvním výbrusu, dopadá kolmo na zadní stěnu polarizátoru a vystupuje dále do další části optické soustavy jako světlo lineárně polarizované v rovině určené směrem vlnového vektoru a optickou osou (tzv. rovina hlavního řezu – podrobně bude vysvětleno v kapitole „Anizotropní prostředí“)

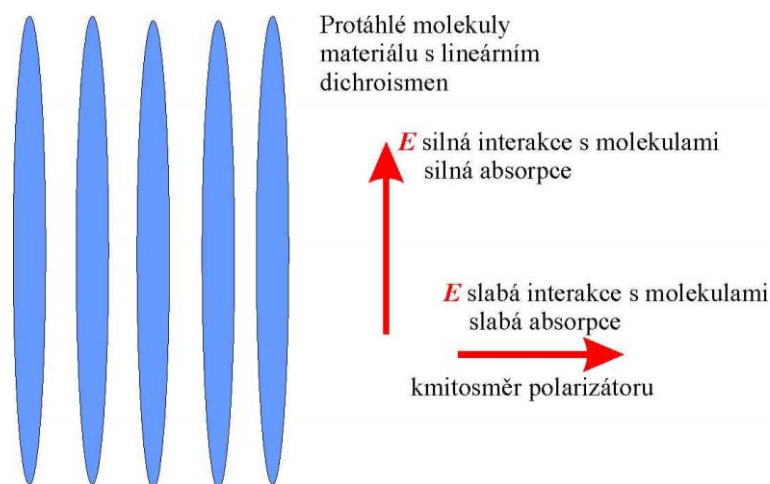


Obr. 2.10b Wollastonův polarizátor užívá dvojlom způsobený různou orientací první a druhé části polarizátoru. Vlny obou polarizací se šíří v prvním výbrusu s různou fázovou rychlostí (různým indexem lomu), dopadají šikmo na rozhraní, kde se podle zákona lomu lámou v různých směrech, šíří se druhým výbrusem, dopadají šikmo na rozhraní anizotropní prostředí/vzduch, kde se opět lámou a vystupují do další části optické soustavy jako dva navzájem kolmo polarizované svazky. Fyzikální podstata jevů vedoucích k prostorovému oddělení dvou navzájem kolmo polarizovaných svazků bude vysvětlena v kapitole „Anizotropní prostředí“.

Při vhodném nastavení dostáváme na výstupu z anizotropního krystalu dva prostorově oddělené, lineárně polarizované svazky. Krystalové polarizátory zpravidla využívají k prostorovému rozdělení těchto dvou svazků kombinací dvou různě orientovaných řezů krystalů téhož materiálu, případně některé konstrukce polarizátorů využívají totální reflexe ve strukturách krystalových polarizátorů (dvojlomné polarizátory, např. Nicolův, Wollastonův, Glanův, Rochonův a mnoho dalších typů). Podrobněji bude dvojlom diskutován v kapitole „Anizotropní prostředí.“

2. Lineární dichroismus

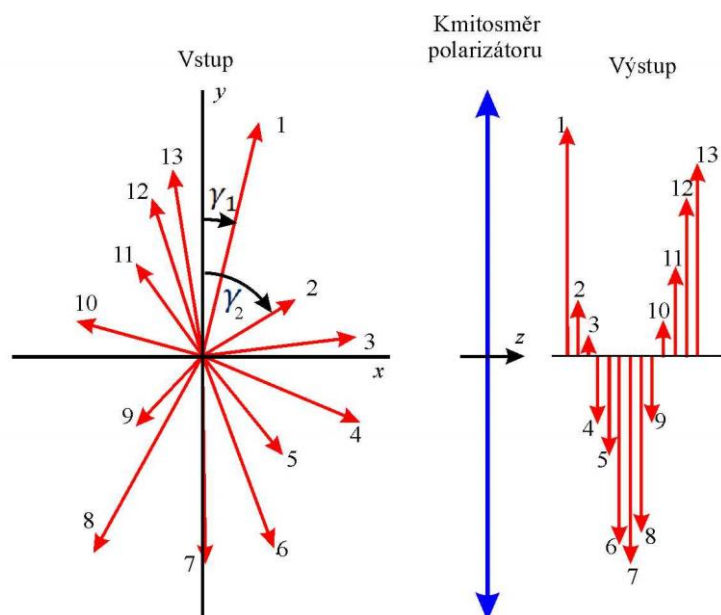
Běžně používanou možností je využití různé absorpce záření pro různé směry lineární polarizace. Jedna ze složek vektoru E je absorbována, zatímco složka na ní kolmá polarizátorem prochází. K absorpci dochází v důsledku pohybu elektronů vyvolaných elektrickým polem záření v polarizátoru. Pohyb elektronů je díky struktuře polarizátoru silně omezen na jeden směr (např. výrazně protáhlé organické molekuly v polaroidu nebo protáhlé nanočástice Ag orientovaně zabudované ve skleněné nebo plastové matrici). V tomto směru dochází k absorpci složky elektrického pole s tímto směrem paralelním a v konečném výsledku k tepelným ztrátám (Jouleovo teplo). Ve směru polarizace elektrického pole záření, který je kolmý na směr E , pro který dochází k absorpci, polarizátor propouští složku elektrického pole s ním rovnoběžnou. Směr polarizace záření, které polarizátor propouští, se nazývá **kmitosměr** polarizátoru



Obr. 2.11 Schématické znázornění principu dichroického polarizátoru

3. Polarizace **odrazem**

Dopadající nepolarizované světlo na rozhraní dvou dielektrických prostředí můžeme vždy rozložit na složku s lineární polarizací rovnoběžnou s rovinou dopadu a na složku kolmou k rovině dopadu. Při dopadu světla z prostředí opticky řidšího do prostředí opticky hustšího (s větším indexem lomu) pod tzv. **Brewsterovým úhlem**, dochází při dopadu pouze k odrazu složky s polarizací kolmou k rovině dopadu. Odražené světlo je v tomto případě úplně lineárně polarizované. Podobněji bude tento případ diskutován v kapitole 3 – „Odras a lom“.



Obr. 2.12 Průchod nepolarizovaného světla polarizátorem. Vektor \mathbf{E} nabývá se stejnou pravděpodobností všech směrů v rovině xy . Úhly γ nabývají všech hodnot v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Na obrázku jsou vyznačeny úhly γ_1 a γ_2 pro vektory $\mathbf{E}_1(t)$ a $\mathbf{E}_2(t)$ v nějakém časovém okamžiku.

Nyní se budeme zabývat výpočtem intenzity záření procházejícího „ideálním“ polarizátorem. Předpokládejme, že kmitosměr polarizátoru je rovnoběžný s osou y . Necht’ na polarizátor dopadá nepolarizované záření skládající se z vln, které dopadají se stejnou pravděpodobností a jsou polarizovány pod různými úhly $\gamma \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Polarizátor tedy propustí složku elektrického pole každé lineárně polarizované vlny

$$E_{\gamma y}(t) = E_0 \cos \gamma \cos(\varphi_\gamma - \omega_\gamma t),$$

kde E_0 je amplituda dopadajících vln a γ je úhel kmitání vektoru $\mathbf{E}_\gamma(t)$ vůči kmitosměru polarizátoru (osa y). Intenzita propuštěné vlny (hustota elektrické energie) je při **vstupu** jedné **lineárně polarizované vlny**

$$I(\gamma) = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \gamma = I_0 \cos^2 \gamma, \quad (2.17)$$

což je nazýváno Malusův zákon. Protože jednotlivé komponenty kmitají nekoherentně (s náhodnými fázemi φ_γ , je celkově intenzita záření propuštěného polarizátorem při **vstupu nepolarizovaného záření dána součtem (integrálem) jednotlivých složek** (za dobu integrace detektorem se interferenční členy díky náhodnosti fází interferujících vln vyruší a výsledná intenzita je součtem intenzit jednotlivých vln – bude podrobněji vysvětleno v kapitole Koherence).

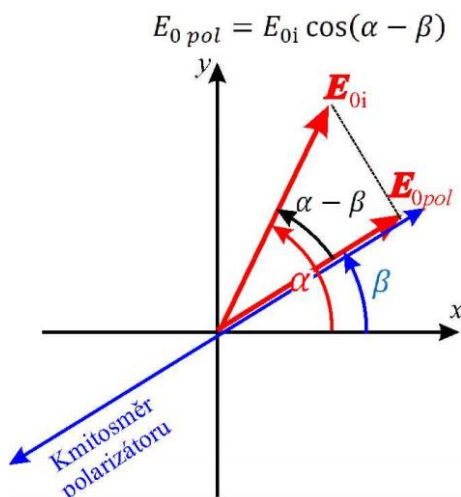
$$I_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 \cos^2 \gamma \, d\gamma = \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\gamma}{2} \right) d\gamma = \frac{I_0}{2\pi} \left[\frac{\gamma}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{I_0}{2}.$$

Ideální polarizátor tedy propustí polovinu intenzity dopadajícího nepolarizovaného světla.

2.5 Změna polarizačního stavu světla – polarizační zařízení

Pokud máme nějakým způsobem připravené polarizované světlo (lineárně, kruhově nebo elipticky) můžeme jeho polarizační stav změnit pomocí polarizačních zařízení. Mezi ně patří opět zejména **polarizátor** a dále **fázová destička**.

Nejprve zavedeme popis polarizátoru pomocí Jonesova formalismu. Uvažujme nyní, že kmitosměr polarizátoru je natočen vůči ose x o úhel β . Vektor elektrického pole lineárně polarizovaného záření dopadajícího na polarizátor nechť je vůči ose x natočen o úhel α . Úhel mezi \mathbf{E} a kmitosměrem polarizátoru je tedy $\alpha - \beta$ (obr. 2.13)



Obr. 2.13 Průchod lineárně polarizovaného světla polarizátorem. \mathbf{E}_{0i} je amplituda vlny vstupující do polarizátoru, \mathbf{E}_{0pol} je amplituda vlny vystupující z polarizátoru.

Předpokládejme tedy, že do polarizátoru vstupuje ve směru z ($k_z = k$) lineárně polarizované záření popsané Jonesovým vektorem

$$\tilde{\mathbf{E}}_{IN} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Průmět do kmitosměru polarizátoru je

$$\tilde{\mathbf{E}} = E_0 \cos(\alpha - \beta) \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Ve složkách můžeme rozepsat

$$\tilde{E}_x = E_0 (\cos \alpha \cdot \cos^2 \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta) e^{i(kz - \omega t)},$$

$$\tilde{E}_y = E_0 (\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin^2 \beta) e^{i(kz - \omega t)},$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = E_0 \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & \sin \beta \cdot \cos \beta \\ \sin \beta \cdot \cos \beta & \sin^2 \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)},$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & \sin \beta \cdot \cos \beta \\ \sin \beta \cdot \cos \beta & \sin^2 \beta \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_{IN} = \vec{\mathbf{T}}_{POL} \tilde{\mathbf{E}}_{IN},$$

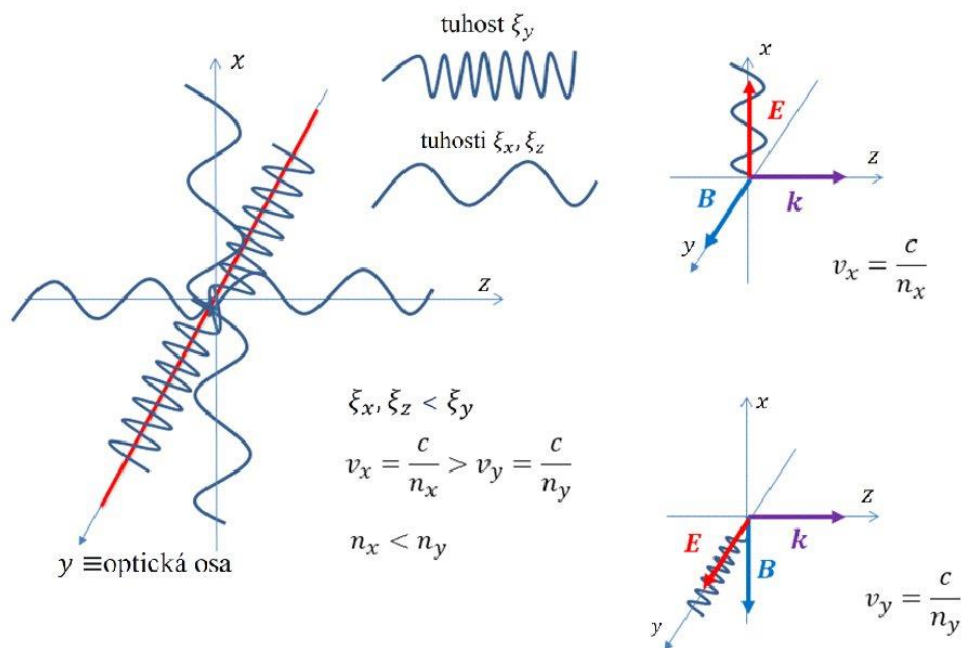
kde

$$\vec{\mathbf{T}}_{POL} = \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & \sin \beta \cdot \cos \beta \\ \sin \beta \cdot \cos \beta & \sin^2 \beta \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

je **Jonesova matice** polarizátoru.

Jedním z nejvýznamnějších optických prvků používaných k ovlivnění polarizačního stavu světla je **fázová destička**. Jedná se o destičku z dvojlomného materiálu vyříznutou tak, že vykazuje ve dvou navzájem kolmých směrech lineární polarizace různé indexy lomu, tedy různé fázové rychlosti šíření. Podrobněji se fyzikálnímu popisu fázové destičky budeme věnovat v kapitole „Anizotropní prostředí“. Nyní se zaměříme na vysvětlení základního principu jejího fungování pomocí jednoduchého pružinového modelu. Anizotropní prostředí je charakterizováno různými silami vazby mezi atomy v různých krystalografických směrech. Tuto sílu můžeme jednoduše vyjádřit v rámci modelu tuhostí mechanických pružin v daných směrech. Předpokládejme např., že tuhost pružiny ve směrech x, z je stejná a menší než tuhost pružiny ve směru y . (obr. 2.14). Elektromagnetická vlna postupující látkou s ní interaguje prostřednictvím vektoru elektrické intenzity \mathbf{E} . Pokud vlna postupuje ve směru z , složka E_x „cítí“ menší sílu interakce než složka E_y , protože tuhost pružiny ve směru y je v námi zvoleném příkladu větší než ve směru x . To má za následek, že složka E_x postupuje s větší fázovou rychlostí než složka E_y , $v_x = \frac{c}{n_x} > v_y = \frac{c}{n_y}$, tedy $n_x < n_y$.

Pokud by vlna postupovala ve směru y , interagovaly by obě složky s pružinami se stejnou tuhostí a šířily by se se stejnou fázovou rychlostí. Takový směr se nazývá **optická osa**. Vyřízneme-li z takového materiálu destičku tak, že její větší plochy jsou v rovině xy , ve které leží optická osa orientovaná ve směru y , tak při kolmém dopadu lineárně polarizované monochromatické rovinné vlny ve směru z se složky s polarizacemi E_x, E_y šíří destičkou různou fázovou rychlostí. V našem případě, kdy $v_x > v_y$ představuje osa x tzv. **rychlou osu**.



Obr. 2.14 Mechanický „pružinový“ model k výkladu principu fungování fázové destičky

Nechť na fázovou destičku dopadá lineárně polarizovaná monochromatická vlna

$$\tilde{\mathbf{E}}_{IN} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}.$$

Položíme-li přední plochu xy fázové destičky do $z = 0$, je pole na vstupu destičky

$$\tilde{E}_x(0) = \tilde{E}_{0x} e^{-i\omega t},$$

$$\tilde{E}_y(0) = \tilde{E}_{0y} e^{-i\omega t}.$$

Na výstupu destičky ($z = d$) mají složky \tilde{E}_x a \tilde{E}_y rozdílné fáze v důsledku různé fázové rychlosti

$$\tilde{E}_x(d) = \tilde{E}_{0x} e^{i(k_0 n_x d - \omega t)},$$

$$\tilde{E}_y(d) = \tilde{E}_{0y} e^{i(k_0 n_y d - \omega t)}.$$

V Jonesově formalismu napíšeme

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x(d) \\ \tilde{E}_y(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_0 n_x d} & 0 \\ 0 & e^{ik_0 n_y d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(0) \\ \tilde{E}_y(0) \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{T}}_\varphi \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(0) \\ \tilde{E}_y(0) \end{pmatrix},$$

kde $\vec{\mathbf{T}}_\varphi$ je Jonesova matice fázové destičky s rychlou osou rovnoběžnou s osou x . V případě, že by rychlá osa byla rovnoběžná s osou y , byla by $\vec{\mathbf{T}}_\varphi$ identická (jen $n_x > n_y$).

Matici \vec{T}_φ můžeme dále upravit

$$\vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} e^{ik_0 n_x d} & 0 \\ 0 & e^{ik_0 n_y d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} = e^{i\varphi_x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix},$$

kde $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$. Pro popis činnosti fázové destičky je důležitý rozdíl fází obou složek. Náběh fáze φ_x můžeme položit rovný nule. Tím se celý fázový rozdíl přesune do složky φ_y , což zjednoduší zápis. Pro \vec{T}_φ pak dostaneme Jonesovu matici fázové destičky v osové poloze.

$$\vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Odvození Jonesovy matice fázové destičky, v níž je rychlá osa vůči souřadnému systému natočená, je uvedeno v **Dodatku 2.1**.

Dále probereme některé speciální případy fázových destiček. Předpokládejme nejprve, že fázový rozdíl je

$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2} = k_0(n_y - n_x)d = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_y - n_x)d$$

a z toho plyne rozdíl optických drah

$$\Delta_{OD} = (n_y - n_x)d = \frac{\lambda_0}{4}. \quad (2.21)$$

Takové fázové destičce se říká čtvrtvlnová. Její Jonesova matice v osové poloze je

$$\vec{T}_{\frac{\lambda}{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Jaké je působení čtvrtvlnové destičky na nejvýznamnější typy polarizovaného světla? Nejprve probereme průchod lineárně horizontálně polarizovaného světla LHP

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = J_{LHP}. \quad (2.23)$$

Při průchodu čtvrtvlnovou destičkou v osové poloze tedy zůstává LHP světlo beze změny.

Pro lineárně polarizované světlo s rovinou polarizace určenou úhlem $\alpha = \pi/4$ s Jonesovým vektorem

$$J_I = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

dostaneme levotočivé kruhově polarizované světlo (LCP).

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = J_{LCP}. \quad (2.25)$$

Podobně pro světlo lineárně polarizované pod úhlem $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ s Jonesovým vektorem

$$J_{\setminus} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

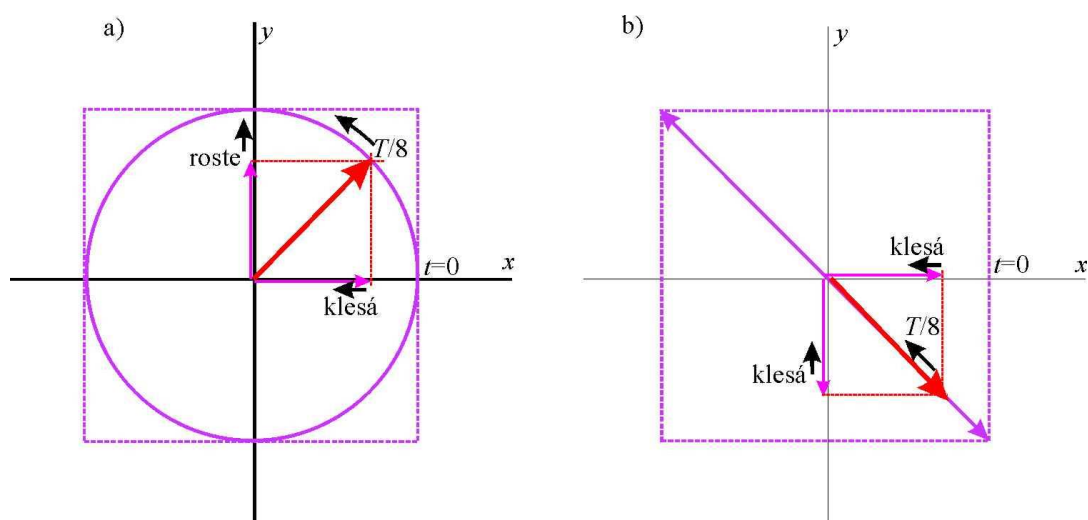
dostaneme po průchodu čtvrtvlnovou destičkou pravotočivé kruhově polarizované světlo (RCP).

Při průchodu LCP světla čtvrtvlnovou destičku dostaneme lineárně polarizované světlo pod úhlem $\alpha = -\frac{\pi}{4}$:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = J_{\setminus}. \quad (2.28)$$

Při průchodu RCP světla čtvrtvlnovou destičku dostaneme světlo lineárně polarizované pod úhlem $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = J_{/}. \quad (2.29)$$



Obr. 2.15 Vliv čtvrtvlnové fázové destičky na kruhově polarizovanou vlnu a) na vstupu. Na výstupu b) získáme lineárně polarizovanou vlnu.

Okomentujme situaci na obr. 2.15 a) znázorňující kruhově polarizovanou vlnu před vstupem do fázové $\lambda/4$ destičky

$$E_x(z = 0, t) = E_0 \operatorname{Re} \{e^{-i\omega t}\} = E_0 \cos \omega t,$$

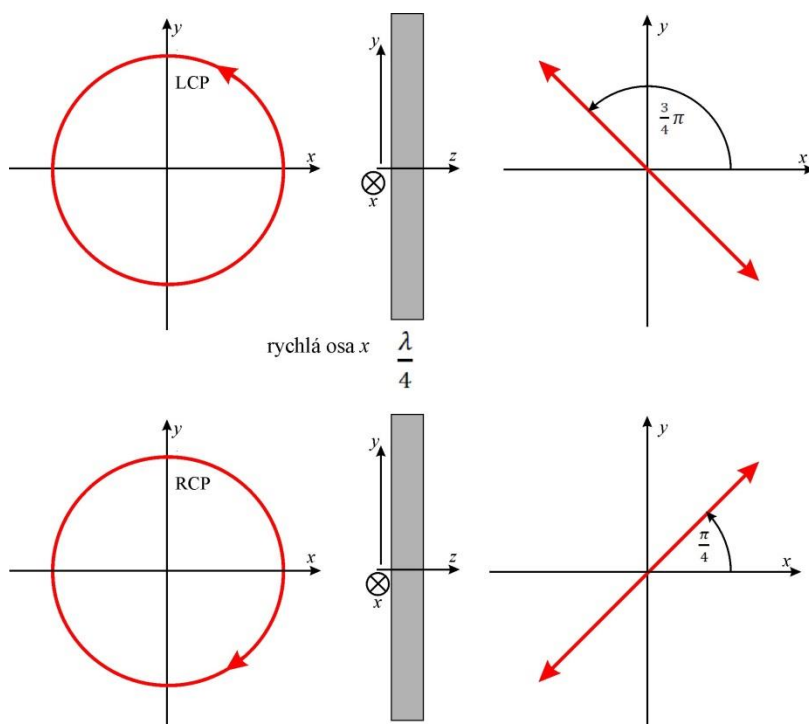
$$E_y(z = 0, t) = E_0 \operatorname{Re} \left\{e^{-i\omega t + i\frac{\pi}{2}}\right\} = E_0 \sin \omega t.$$

Tloušťka $\lambda/4$ destičky je obvykle několikanásobek (l -násobek) vlnové délky v rychlejší ose x . Obr. 2.15b) ukazuje polarizaci vlny po výstupu z destičky.

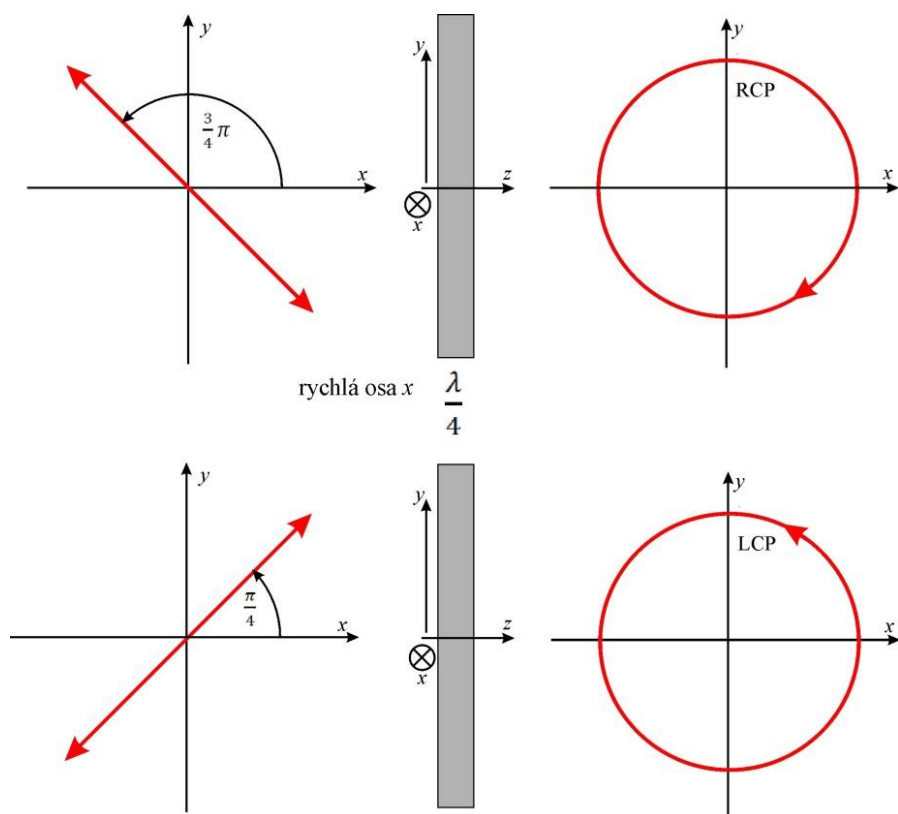
$$E_x(z = l\lambda_x, t) = E_0 \operatorname{Re} \left\{e^{i\frac{\omega}{c}n_x l\lambda_x - i\omega t}\right\} = E_0 \operatorname{Re} \left\{e^{i2\pi l - i\omega t}\right\} = E_0 \cos \omega t,$$

$$\begin{aligned} E_y(z = l\lambda_x, t) &= E_0 \operatorname{Re} \left\{e^{-i\omega t + i\frac{\pi}{2} + i\frac{\omega}{c}n_y l\lambda_x + i\frac{\omega}{c}n_x l\lambda_x - i\frac{\omega}{c}n_x l\lambda_x}\right\} = \\ &= E_0 \operatorname{Re} \left\{e^{-i\omega t + i\frac{\pi}{2} + i\frac{\omega}{c}(n_y - n_x)l\lambda_x + i2\pi l}\right\} = E_0 \operatorname{Re} \left\{e^{-i\omega t + i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} + i2\pi l}\right\} = \\ &= E_0 \operatorname{Re} \left\{e^{-i\omega t + i\pi(2l+1)}\right\} = E_0 (\cos \pi \cos \omega t + \sin \pi \sin \omega t) = -E_0 \cos \omega t, \end{aligned}$$

což popisuje lineárně polarizovanou vlnu naznačenou na obrázku. Použili jsme vztah popisující čtvrtvlnovou destičku tloušťky d podmínkou $\frac{\omega}{c}(n_y - n_x)d = \frac{\pi}{2}$.



Obr. 2.16 Schématické znázornění působení čtvrtvlnové destičky na kruhově polarizovanou vlnu.



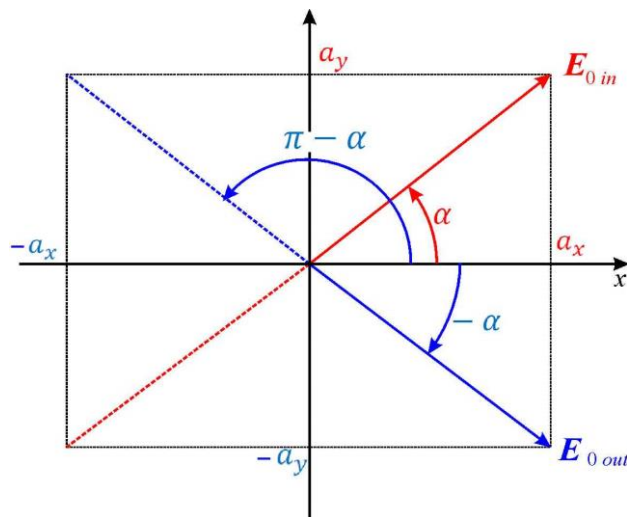
Obr. 2.17 Schématické znázornění působení čtvrtvlnové destičky na lineárně polarizovanou vlnu.

Dalším významným speciálním případem fázové destičky je destička **polovlnová**, kdy fázový rozdíl $\varphi = \pi$. Její Jonesova matice je

$$\vec{T}_{\frac{\lambda}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Při průchodu lineárně polarizovaného světla s obecným úhlem natočení α vůči rychlé ose polovlnové fázové destičky vystupuje opět lineárně polarizované světlo, které je natočeno vůči rychlé ose o úhel $-\alpha$. Dojde tedy k rotaci roviny lineární polarizace vůči směru kmitání \mathbf{E} vstupujícího lineárně polarizovaného světla o úhel $|2\alpha|$. Polovlnová fázová destička tedy působí na lineárně polarizované světlo jako rotátor.

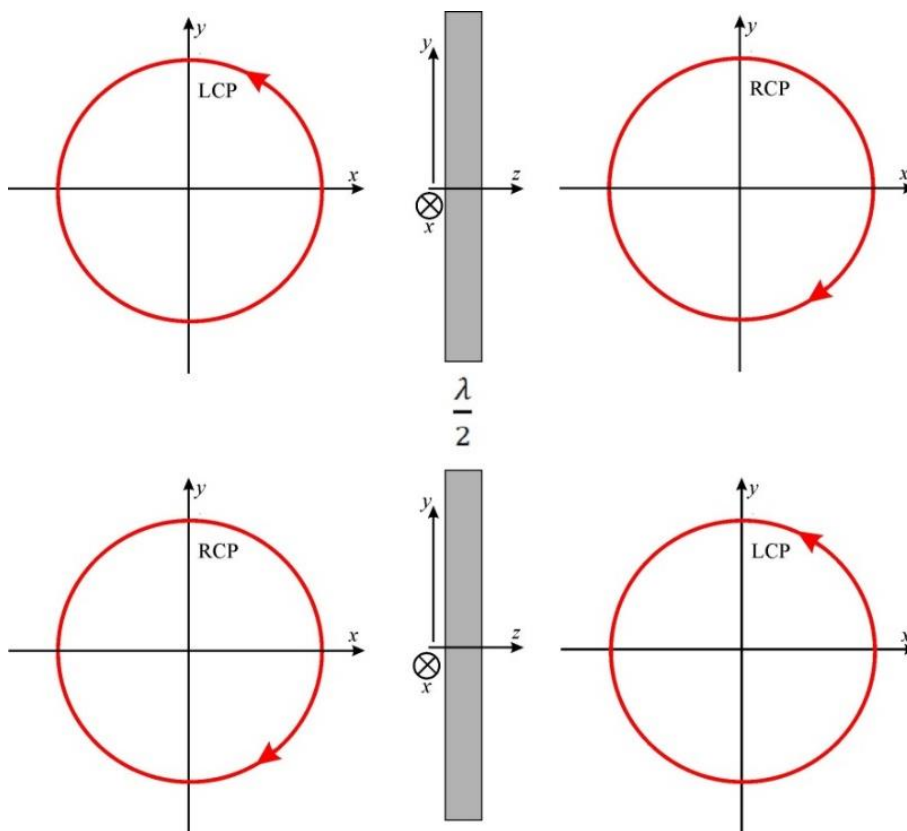
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{2\alpha}. \quad (2.31)$$



Obr. 2.18 Rotace lineárně polarizovaného světla při průchodu polovlnovou destičkou

Prochází-li polovlnovou destičkou levotočivé kruhově polarizované světlo (LCP), dostaneme na výstupu pravotočivé kruhově polarizované světlo (RCP)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = J_{RCP}. \quad (2.32)$$

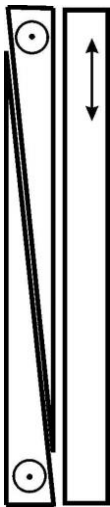


Obr. 2.19 Schématické znázornění působení polovlnové destičky na kruhově polarizované světlo.

Podobně při průchodu RCP světla dostaneme LCP světlo

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = J_{LCP}. \quad (2.33)$$

Zařízení, která umožňují nastavit v určitém intervalu obecný fázový posuv mezi rychlou a pomalou složkou rovinné vlny, se nazývají kompenzátory. V případě Babinetova–Soleilova kompenzátoru se toho dosahuje změnou tloušťky dvojlomného materiálu mechanickým posouváním dvou klínových segmentů.



Obr. 2.20 Babinetův–Soleilův kompenzátor s vyznačenými směry optických os dvojlomného materiálu. Mechanickým posunem klínů se mění délka optické dráhy, kterou světlo proběhne kompenzátorem. Tím se mění fázový posuv obou složek polarizace. Jedná se o fázovou destičku s proměnnou tloušťkou. Podrobněji bude fyzikální podstata fungování kompenzátoru vysvětlena v kapitole „Anizotropní prostředí“.

Ještě jednou zopakujme, že zde diskutovaný Jonesův formalismus je použitelný pro popis dokonale polarizované, monochromatické, rovinné vlny. V obecnějším případě částečně polarizovaného záření lze použít Stokesova formalismu, kdy polarizace je popsána Stokesovými 4-vektory a polarizační prvky Muellerovými maticemi 4x4.

Dodatky ke kapitole 2-Polarizace

Dodatek 2.1 Rovnice elipsy

Vyjdeme z parametrických rovnic 2.1 a 2.2

$$\frac{E_x(z, t)}{a_x} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tilde{E}_x}{a_x} \right\} = \cos \varphi(z, t),$$

$$\frac{E_y(z, t)}{a_y} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tilde{E}_y}{a_y} \right\} = \cos[\varphi(z, t) + \delta] = \cos \varphi(z, t) \cos \delta - \sin \varphi(z, t) \sin \delta,$$

$$\frac{E_y(z, t)}{a_y} = \frac{E_x(z, t)}{a_x} \cos \delta - \sqrt{1 - \cos^2 \varphi(z, t)} \sin \delta,$$

$$\frac{E_y}{a_y} = \frac{E_x}{a_x} \cos \delta - \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2} \sin \delta$$

a tak jsme dostali vztah mezi složkami E_x a E_y , který platí pro všechna z a t . Po umocnění

$$\left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{a_x a_y} \cos^2 \delta + \left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 \cos^2 \delta = \left[1 - \left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2\right] \sin^2 \delta,$$

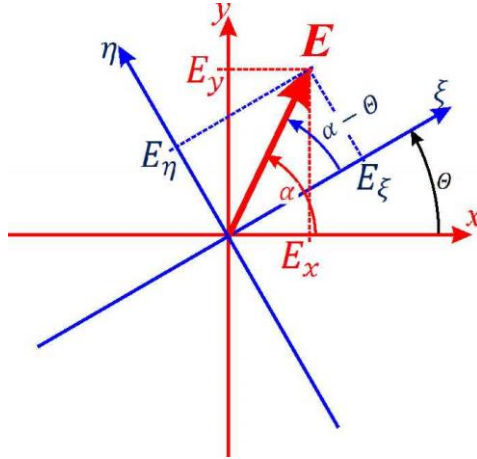
$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 (\sin^2 \delta + \cos^2 \delta) - 2\frac{E_x E_y}{a_x a_y} \cos^2 \delta + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 = \sin^2 \delta,$$

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{a_x a_y} \cos^2 \delta + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 = \sin^2 \delta,$$

což je rovnice elipsy v rovině E_x, E_y .

Dodatek 2.2 - Fázová destička v obecné poloze

Pro popis složitějších optických soustav je potřebné mít k dispozici Jonesovu matici fázové destičky, jejíž rychlá a pomalá osa jsou natočeny vůči souřadnému systému, ve kterém popisujeme polarizaci postupující vlny. Zvolme souřadný systém xy pro popis polarizace vlny a souřadný systém $\xi\eta$ potočený o úhel θ pro souřadný systém fázové destičky, ve kterém je osa ξ totožná s rychlou osou a osa η je totožná s pomalou osou fázové destičky.



Obr. 2.21 Elektrické pole v souřadných soustavách xy a $\xi\eta$ pro vstup do fázové destičky $z = 0$

Nejprve rozložíme vstupující elektrické pole monochromatické rovinné vlny s amplitudou E_0 do os x a y

$$E_x = E_0 \cos \alpha, \quad E_y = E_0 \sin \alpha.$$

V soustavě souřadné fázové destičky dostaneme

$$E_\xi = E_0 \cos(\alpha - \theta) = E_0 \cos \alpha \cos \theta + E_0 \sin \alpha \sin \theta = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta,$$

$$E_\eta = E_0 \sin(\alpha - \theta) = E_0 \sin \alpha \cos \theta - E_0 \cos \alpha \sin \theta = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta.$$

Stejného výsledku bychom dosáhli použitím matice rotace o úhel $(-\theta)$. To můžeme udělat, protože otočení soustavy souřadné o úhel θ proti směru hodinových ručiček odpovídá otočení fixního \mathbf{E} o úhel θ ve směru hodinových ručiček (označme $-\theta$)

$$\begin{pmatrix} E_\xi \\ E_\eta \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{M}}_{-\theta} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix},$$

kde $\vec{\mathbf{M}}_{-\theta}$ jsme označili matici otočení o úhel $-\theta$, tj o θ ve směru hodinových ručiček. Protože fázová destička je v soustavě $\xi\eta$ v osové poloze, po průchodu se změní fáze složek E_ξ, E_η na

$$E'_\xi = E_\xi e^{i\varphi_\xi}, \quad E'_\eta = E_\eta e^{i\varphi_\eta},$$

$$\begin{pmatrix} E'_\xi \\ E'_\eta \end{pmatrix} = e^{i\varphi_\xi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\xi \\ E_\eta \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{T}}_\varphi^{OP} \begin{pmatrix} E_\xi \\ E_\eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E'_\xi \\ E'_\eta \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{T}}_\varphi^{OP} \cdot \vec{\mathbf{M}}_{-\theta} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix},$$

kde $\vec{\mathbf{T}}_\varphi^{OP}$ je Jonesova matice fázové destičky v osové poloze a $\varphi = \varphi_\eta - \varphi_\xi$.

Nyní se vrátíme zpět do soustavy souřadné xy pro popis polarizace světla postupujícího optickou soustavou. Toho dosáhneme zpětnou rotací o úhel θ vynásobením vektoru $\begin{pmatrix} E'_\xi \\ E'_\eta \end{pmatrix}$ maticí otočení o úhel θ

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \vec{M}_\theta \begin{pmatrix} E'_\xi \\ E'_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_\xi \\ E'_\eta \end{pmatrix}.$$

Celkově pro průchod v soustavě xy dostaneme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} &= \vec{M}_\theta \cdot \vec{T}_\varphi^{OP} \cdot \vec{M}_{-\theta} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} e^{i\varphi_\xi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

přičemž pořadí násobení matic je důležité. Pořadí matic je určeno pořadím prováděných operací. Po provedení násobení matic a úpravách goniometrických vztahů dostaneme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} &= e^{i\varphi_\xi} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + e^{i\varphi} \sin^2 \theta & \frac{1}{2}(1 - e^{-i\varphi}) \sin 2\theta \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-i\varphi}) \sin 2\theta & \sin^2 \theta + e^{i\varphi} \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \\ &= \vec{M}_\theta \cdot \vec{T}_\varphi^{OP} \cdot \vec{M}_{-\theta} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \vec{T}(\theta, \varphi, \varphi_\xi) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde $\varphi = \varphi_\eta - \varphi_\xi$ a

$$\vec{T}(\theta, \varphi, \varphi_\xi) = e^{i\varphi_\xi} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + e^{i\varphi} \sin^2 \theta & \frac{1}{2}(1 - e^{-i\varphi}) \sin 2\theta \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-i\varphi}) \sin 2\theta & \sin^2 \theta + e^{i\varphi} \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

je Jonesova matice fázové destičky natočené o úhel θ proti směru hodinových ručiček vůči soustavě souřadné, ve které popisujeme polarizaci postupující světelné vlny.

Dodatek 2.3 - Kruhový dvojlom

K účelu otočení roviny polarizace lineárně polarizované vlny lze využít **kruhového dvojlomu**, kdy se prostředím šíří ve směru osy z různými fázovými rychlostmi kruhově polarizované komponenty. Označme příslušné indexy lomu n_R pro pravotočivě a n_L pro levotočivě polarizovanou vlnu. Elektrické pole vlny svírá s osou x v místě $z = 0$ úhel α .

$$\begin{aligned} \vec{E}(z = 0) &= E_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = E_0 \left[\cos \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{E_0}{2} \left[(\cos \alpha - i \sin \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + (\cos \alpha + i \sin \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Složky se při průchodu dočkají různého fázového posunu

$$\begin{aligned}\tilde{E}(z) = \frac{E_0}{2} \left[\exp\left(i \frac{\omega}{c} n_L z\right) (\cos \alpha - i \sin \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \exp\left(i \frac{\omega}{c} n_R z\right) (\cos \alpha + i \sin \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right].\end{aligned}\quad (2.35)$$

Proveďme úpravy, kde zavedeme označení $\varphi_{circ}(z) = \frac{\omega}{c} \frac{n_R + n_L}{2} z$, $\beta(z) = \frac{\omega}{c} \frac{n_R - n_L}{2} z$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x(z) &= \frac{E_0}{2} \left[e^{i \frac{\omega}{c} n_L z} (\cos \alpha - i \sin \alpha) + e^{i \frac{\omega}{c} n_R z} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \right] = \\ &= \frac{E_0}{2} e^{i \frac{\omega}{c} z \frac{n_L + n_R}{2}} \left[e^{i \frac{\omega}{c} z \frac{n_L - n_R}{2}} e^{-i\alpha} + e^{i \frac{\omega}{c} z \frac{n_R - n_L}{2}} e^{i\alpha} \right] = \\ &= \frac{E_0}{2} e^{\varphi_{circ}} \left[e^{-i(\beta + \alpha)} + e^{i(\beta + \alpha)} \right] = E_0 e^{\varphi_{circ}} \cos(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Podobným postupem dostaneme

$$\begin{aligned}\tilde{E}_y(z) &= \frac{E_0}{2} \left[i e^{i \frac{\omega}{c} n_L z} e^{-i\alpha} - i e^{i \frac{\omega}{c} n_R z} e^{i\alpha} \right] = \\ &= \frac{E_0}{2} e^{\varphi_{circ}} i \left[e^{-i(\beta + \alpha)} - e^{i(\beta + \alpha)} \right] = E_0 e^{\varphi_{circ}} \sin(\alpha + \beta),\end{aligned}$$

což lze zapsat pomocí Jonesova vektoru

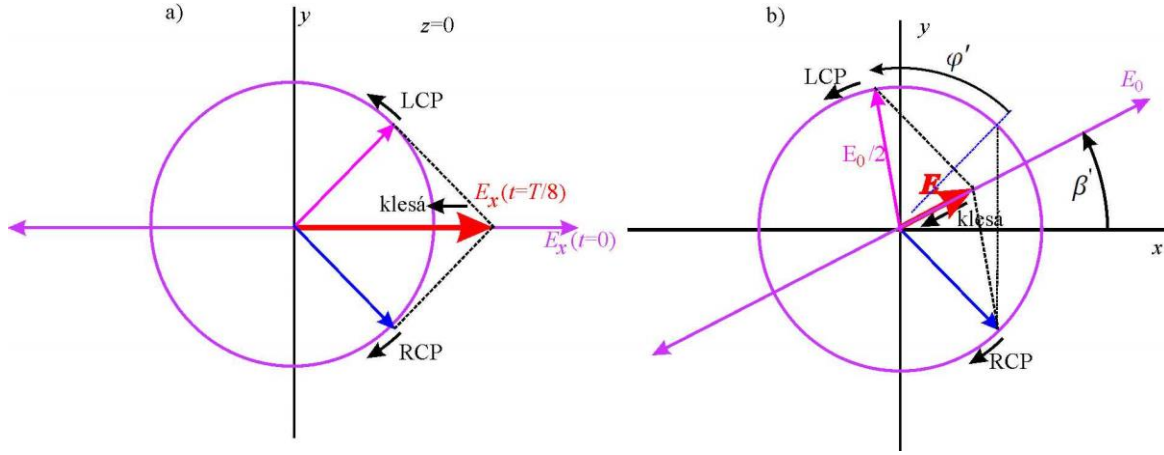
$$\tilde{E}(z) = E_0 \exp[i\varphi_{circ}(z)] \begin{pmatrix} \cos[\alpha + \beta(z)] \\ \sin[\alpha + \beta(z)] \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

$$\varphi_{circ}(z) = \frac{\omega}{c} \frac{n_R + n_L}{2} z, \quad \beta(z) = \frac{\omega}{c} \frac{n_R - n_L}{2} z. \quad (2.37)$$

Prostředím se šíří lineárně polarizovaná vlna, jejíž rovina polarizace se stáčí na jednotku délky dráhy v prostředí o úhel $\frac{\beta(z)}{z} = \frac{\omega}{c} \frac{n_R - n_L}{2}$. Při zahrnutí časové závislosti dostaneme

$$\begin{aligned}E(z, t) &= E_0 \begin{pmatrix} \cos[\alpha + \beta(z)] \\ \sin[\alpha + \beta(z)] \end{pmatrix} \operatorname{Re} \left\{ e^{[i\varphi_{circ}(z) - \omega t]} \right\} = \\ &= E_0 \begin{pmatrix} \cos[\alpha + \beta(z)] \\ \sin[\alpha + \beta(z)] \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{c} \frac{n_R + n_L}{2} z - \omega t\right).\end{aligned}$$

Složky $E_x(z, t)$, $E_y(z, t)$ kmitají v každém místě se stejnou fází, takže výsledná vlna je v každém místě lineárně polarizovaná. Upozorněme, že funkce $\cos[\alpha + \beta(z)]$ a $\sin[\alpha + \beta(z)]$ jsou periodické, takže směr lineární polarizace se může po dráze z několikrát otočit.



Obr. 2.22 Stočení roviny polarizace jako důsledek kruhového dvojlomu; a) v místě $z = 0$, b) $z = l \lambda_R$.

Poznámka ke konkrétní situaci zakreslené na obr. 2.22: úhel $\alpha = 0$, takže

$$E_x(z = 0, t) = E_{R_x} + E_{L_x} = E_0 \operatorname{Re} \{ e^{-i\omega t} + e^{-i\omega t} \} = 2E_0 \cos \omega t,$$

$$E_y(z = 0, t) = E_{R_y} + E_{L_y} = E_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t - i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\omega t + i\frac{\pi}{2}} \right\} =$$

$$= E_0 \operatorname{Re} \{ e^{-i\omega t} (-i + i) \} = 0.$$

Na obr. 2.22b je zakreslen stav ve stejném čase jako v a) za podmínky, že dráha v opticky aktivním prostředí je celočíselný l -násobek vlnové délky λ_R , tedy $\frac{\omega}{c} n_{RZ} = 2\pi l$. Podobně pro LCP může být $\frac{\omega}{c} n_{LZ} = 2\pi m - \varphi'$.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x(z, t) &= \tilde{E}_{R_x}(z, t) + \tilde{E}_{L_x}(z, t) = \tilde{E}_{R_x}(0, t) e^{i\frac{\omega}{c} n_{RZ}} + \tilde{E}_{L_x}(0, t) e^{i\frac{\omega}{c} n_{LZ}} = \\ &= \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} (e^{2\pi i l} + e^{2\pi i m} e^{-i\varphi'}) = \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} e^{-i\frac{\varphi'}{2}} (e^{i\frac{\varphi'}{2}} + e^{-i\frac{\varphi'}{2}}) = \\ &= \frac{E_0}{2} \left[\cos\left(\omega t + \frac{\varphi'}{2}\right) - i \sin\left(\omega t + \frac{\varphi'}{2}\right) \right] \left(\cos\frac{\varphi'}{2} + i \sin\frac{\varphi'}{2} + \cos\frac{\varphi'}{2} - i \sin\frac{\varphi'}{2} \right), \\ E_x(z, t) &= \operatorname{Re} \{ \tilde{E}_x(z, t) \} = E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi'}{2}\right) \cos\frac{\varphi'}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_y(z, t) &= \tilde{E}_{R_y}(z, t) + \tilde{E}_{L_y}(z, t) = \tilde{E}_{R_y}(0, t) e^{i\frac{\omega}{c} n_{RZ}} + \tilde{E}_{L_y}(0, t) e^{i\frac{\omega}{c} n_{LZ}} = \\ &= \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} (e^{2\pi i l - i\frac{\varphi'}{2}} + e^{2\pi i m + i\frac{\varphi'}{2}} e^{-i\varphi'}) = \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} e^{-i\frac{\varphi'}{2}} (-i e^{i\frac{\varphi'}{2}} + i e^{-i\frac{\varphi'}{2}}) = \\ &= \frac{E_0}{2} \left[\cos\left(\omega t + \frac{\varphi'}{2}\right) - i \sin\left(\omega t + \frac{\varphi'}{2}\right) \right] \left(-i \cos\frac{\varphi'}{2} + \sin\frac{\varphi'}{2} + i \cos\frac{\varphi'}{2} + \sin\frac{\varphi'}{2} \right), \end{aligned}$$

$$E_y(z, t) = \text{Re} \{ \tilde{E}_y(z, t) \} = E_0 \cos \left(\omega t + \frac{\varphi'}{2} \right) \sin \frac{\varphi'}{2}.$$

Opět vidíme, že obě složky kmitají ve fázi. Směr kmitů je určen úhlem $\frac{\varphi'}{2}$,

$$\text{tg } \beta' = \frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)} = \frac{\sin \frac{\varphi'}{2}}{\cos \frac{\varphi'}{2}} = \text{tg } \frac{\varphi'}{2}.$$

Maximální výchylky je dosaženo v časech $\omega t + \frac{\varphi'}{2} = k\pi$. Protože obvykle nejsme schopni z jednoduchého měření za pomoci polarizátoru určit fázi kmitů, je změřený úhel

$$\beta'(z) = \beta - l'\pi = \frac{\omega}{c} \frac{n_R - n_L}{2} z - l'\pi.$$

Z uvedené neurčitosti celistvých násobků (celých čísel l, m) je zřejmé, že v případě vícenásobného otočení nelze z jednoho měření určit specifickou stáčitost $\frac{\beta(z)}{z} = \frac{\omega}{c} \frac{n_R - n_L}{2}$, ale je potřeba provést více měření, např. pro destičky různých tloušťek.

Při vstupu lineárně polarizovaného záření do destičky tloušťky d z materiálu vykazujícího kruhový dvojlom, dostaneme na výstupu lineárně polarizované záření, jehož rovina polarizace je stočena o úhel β . Stočení roviny polarizace je určeno rozdílem indexů lomu pro pravo- a levotočivě polarizovanou vlnu a tloušťkou destičky. Taková součástka se nazývá **rotátor**,

Kruhový dvojlom vykazují látky, jejichž „stavební kameny“ (molekuly, skupiny atomů v bodech krystalové mřížky apod.) nemají rovinu symetrie. Přitom molekuly nemusí být v prostoru uspořádané, např. roztok cukru vykazuje kruhový dvojlom. Důležité je, že zrcadlové obrazy molekul nejsou shodné. Kruhový dvojlom i v symetrických látkách lze indukovat magnetickým polem, což se nazývá Faradayův (magnetooptický) jev (1845).

Krystalický křemen je z hlediska lineárního dvojlomu jednoosý materiál, který zároveň vykazuje kruhový (pro obecnou orientaci vlnového vektoru eliptický) dvojlom. Pokud z něho vyřízneme destičku s plochami rovnoběžnými s optickou osou a světlo necháme dopadat kolmo na destičku (tj. i na optickou osu) převládne jednoznačně lineární dvojlom a máme fázovou destičku. Pokud vyřízneme destičku s rovinami rozhraní kolmo na optickou osu a necháme světlo šířit podél optické osy, efekt lineárního dvojlomu se neprojeví, dominuje kruhový dvojlom a destička funguje jako rotátor. Obě varianty jsou komerčně využívány.

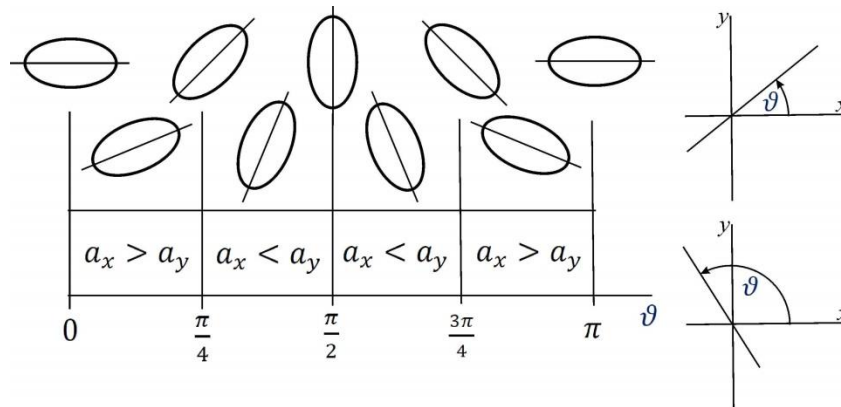
Se stáčením roviny lineárně polarizovaného světla se denně mnohokrát setkáme. Je to totiž základní princip LCD displejů (telefony, monitory, televize apod.). V těchto displejích je elektrostatickým polem ovlivňováno uspořádání dlouhých tenkých (a tedy anizotropních) molekul v tenké vrstvě kapalných krystalů, která je umístěna mezi polarizačními filtry a elektrodami. Elektrické pole přes změny uspořádání molekul mění velikost stočení polarizační roviny a tak reguluje optickou propustnost každého z pixelů displeje.

Dodatek 2.4 Poznámky ke vztahům mezi (a_x, a_y, δ) a (a, b, χ, ϑ)

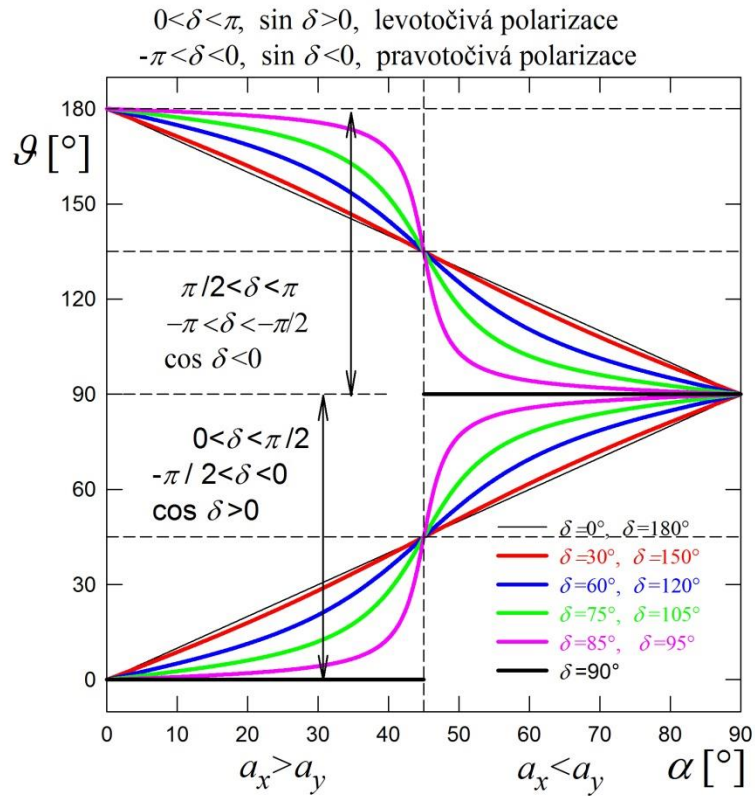
Odvození vztahů je poněkud zdlouhavé a zde jej nebudeme uvádět. Odkazujeme se na knihu Born – Wolf, Principles of Optics, část 1.4.2.

$a^2 + b^2 = a_x^2 + a_y^2,$	$a, b, a_x, a_y \geq 0$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_x a_y}{a_x^2 - a_y^2}.$	$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} 2\vartheta = \operatorname{tg} 2\alpha \cos \delta,$	$0 \leq \vartheta < \pi$
$\operatorname{tg} \chi = \pm \frac{b}{a},$	$-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}$
$\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin \delta,$	$-\frac{\pi}{2} \leq 2\chi \leq \frac{\pi}{2}$

Úhel ϑ má význam úhlu, o který je nutno otočit souřadný systém xy tak, aby v nové soustavě $x'y'$ ležela velká poloosa elipsy v ose x' . Znaménko úhlu χ souvisí se smyslem otáčení vektoru \mathbf{E} , tedy s fázovým posuvem δ . Význam úhlů je vyznačen na následujících obrázcích. Vztahy osvětlíme na speciálních případech (1 až 6) i obecněji (případy 7 až 14). V soustavě xy je elipsa uzavřena v obdélníku o rozměrech $2a_x 2a_y$, v soustavě $x'y'$ v obdélníku $2a 2b$.



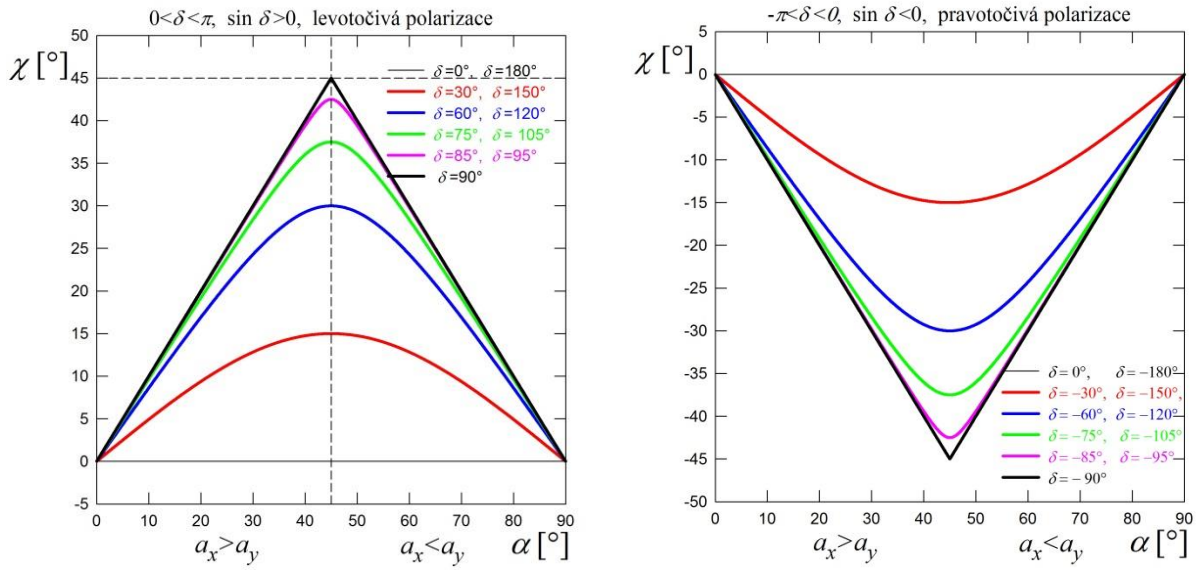
Obr. 2.23 Úhel ϑ určuje orientaci velké poloosy elipsy, $0 \leq \vartheta < \pi$



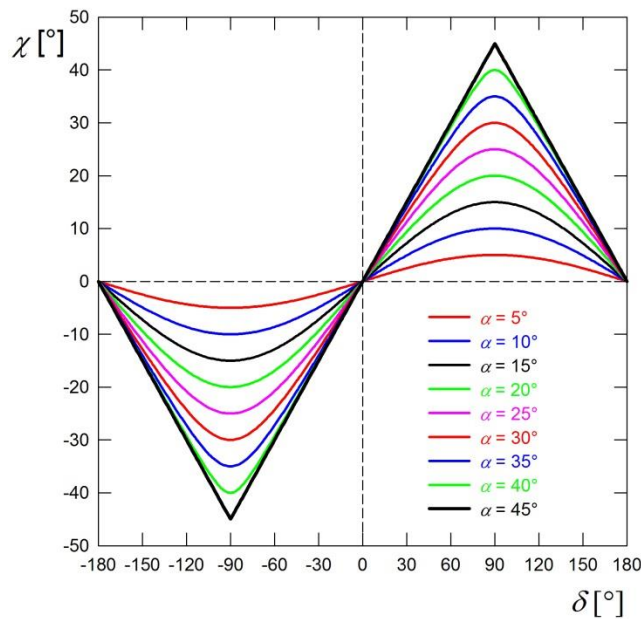
Obr. 2.24 Závislost orientace velké poloosy elipsy ϑ na úhlu α pro několik fázových posuvů δ

Protože funkční hodnoty funkce arctg nepokrývají interval hodnot úhlů ϑ , je potřeba přičítat úhly 90° nebo 180° ; $\frac{1}{2} \text{arctg } x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\vartheta \in (0, \pi)$.

$-\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}$	$a_x > a_y$	$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$	$\vartheta = \frac{1}{2} \text{arctg} [\text{tg}(2\alpha) \cos \delta]$
$-\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}$	$a_x < a_y$	$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\vartheta = \frac{1}{2} \text{arctg} [\text{tg}(2\alpha) \cos \delta] + \frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$ $-\pi < \delta < -\frac{\pi}{2}$	$a_x < a_y$	$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\vartheta = \frac{1}{2} \text{arctg} [\text{tg}(2\alpha) \cos \delta] + \frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$ $-\pi < \delta < -\frac{\pi}{2}$	$a_x > a_y$	$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$	$\vartheta = \frac{1}{2} \text{arctg} [\text{tg}(2\alpha) \cos \delta] + \pi$



Obr. 2.25 Závislost elipticity χ na úhlu α pro několik fázových posuvů δ



Obr. 2.26 Závislost elipticity χ na fázovém posuvu δ pro několik úhlů α

Případ 1, obr. 2.27 vlevo, $\delta = 0, \vartheta = \alpha$

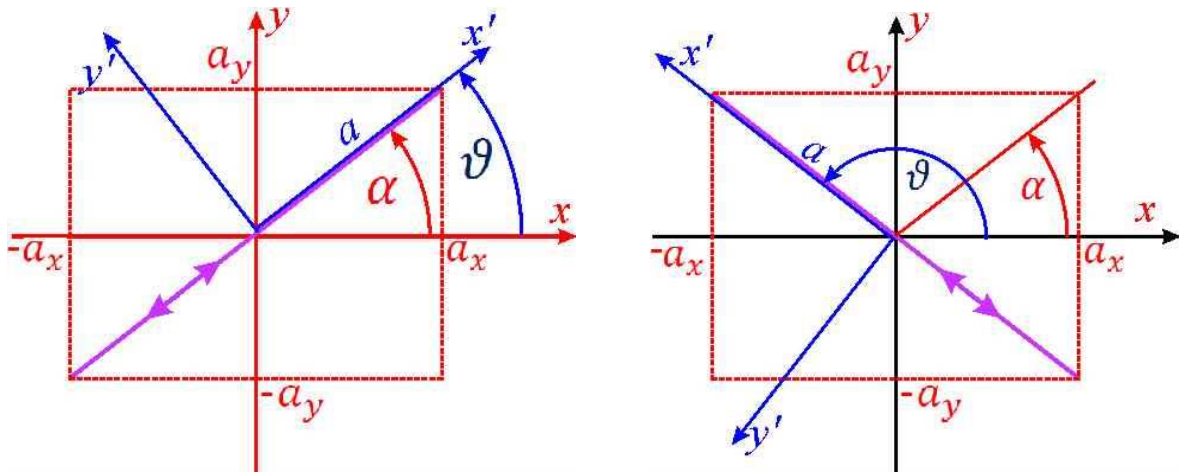
$$\sin \delta = 0, \quad \cos \delta = 1,$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x}, \quad \vartheta = \alpha,$$

$$\sin 2\chi = 0, \quad \chi = 0, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad b = 0,$$

$$E_x(z = 0, t) = a_x \cos \omega t, \quad E_y(z = 0, t) = a_y \cos \omega t.$$

Obě složky kmitají ve fázi, vlna je lineárně polarizovaná. Koncový bod vektoru \mathbf{E} se pohybuje po úsečce mezi body $(-a_x, -a_y)$ a (a_x, a_y) .



Obr. 2.27 Lineární polarizace

Případ 2, obr. 2.27 vpravo, $\delta = \pi$, $\vartheta = \pi - \alpha$,

$$\sin \delta = 0, \quad \cos \delta = -1,$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_y}{a_x}, \quad \vartheta = \pi - \alpha,$$

$$\sin 2\chi = 0, \quad \chi = 0, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad b = 0,$$

$$E_x(z = 0, t) = a_x \cos \omega t, \quad E_y(z = 0, t) = -a_y \cos \omega t.$$

Obě složky kmitají ve fázi, vlna je lineárně polarizovaná. Koncový bod vektoru \mathbf{E} se pohybuje po úsečce mezi body $(a_x, -a_y)$ a $(-a_x, a_y)$.

Případ 3, obr. 2.28 vlevo, $\delta = \frac{\pi}{2}$, $a_x > a_y$, $\vartheta = 0$, levotočivá

$$\sin \delta = 1, \quad \cos \delta = 0,$$

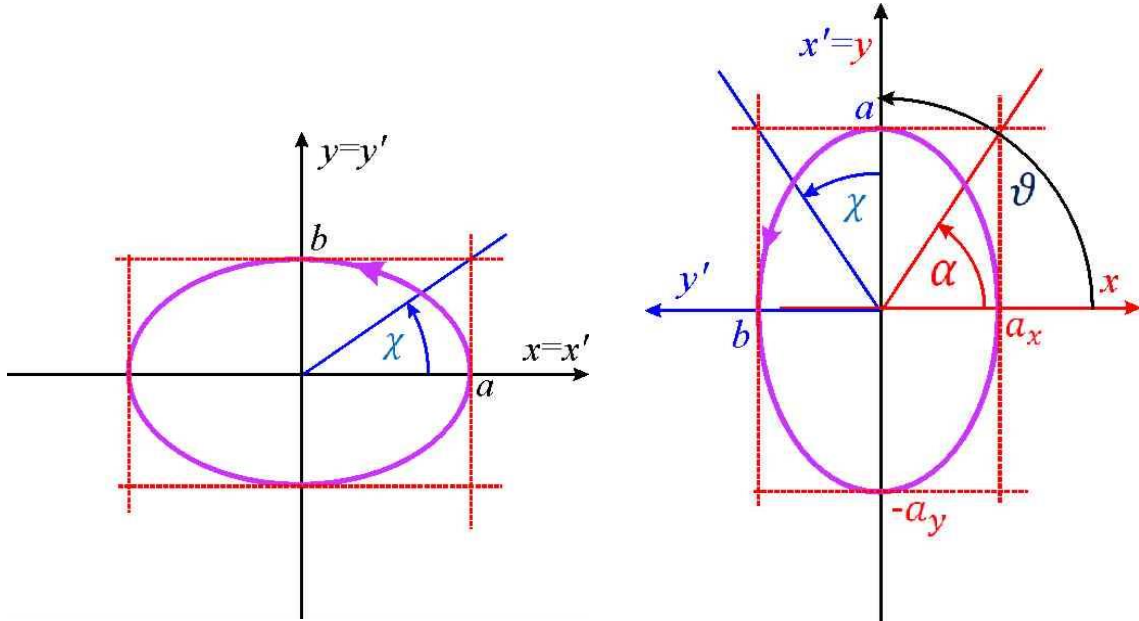
$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha, \quad \chi = \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{a_y}{a_x}, \quad a = a_x, \quad b = a_y,$$

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = 0, \quad \operatorname{tg} \vartheta = 0,$$

$$\tilde{E}_x = a e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad \tilde{E}_y = b e^{i(k_z z - \omega t + \frac{\pi}{2})},$$

$$E_x = a \cos \omega t, \quad E_y = b \sin \omega t \quad \text{pro } z = 0.$$



Obr. 2.28 Levotočivé polarizační elipsy pro $\delta = \frac{\pi}{2}$. V levé části pro $a_x > a_y$, v pravé části pro $a_x < a_y$.

Případ 4, obr. 2.28 vpravo, $\delta = \frac{\pi}{2}$, $a_x < a_y$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, levotočivá

$$\sin \delta = 1, \quad \cos \delta = 0,$$

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha, \quad \chi = \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{a_x}{a_y}, \quad a = a_y, \quad b = a_x,$$

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = 0, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

$$E_x = b \cos \omega t, \quad E_y = a \sin \omega t \quad \text{pro } z = 0.$$

Případ 5, obr. 2.29 vlevo, $\delta = \frac{-\pi}{2}$, $a_x > a_y$, $\vartheta = 0$, pravotočivá

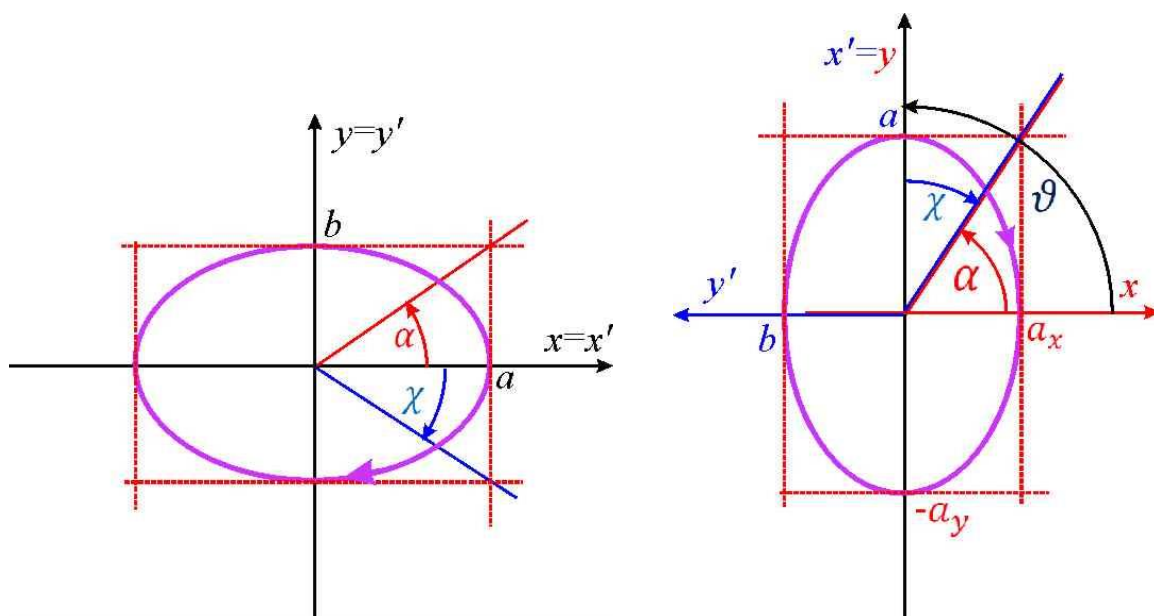
$$\sin \delta = -1, \quad \cos \delta = 0,$$

$$\sin 2\chi = -\sin 2\alpha, \quad \chi = -\alpha,$$

$$\operatorname{tg} \chi = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a}, \quad a = a_x, \quad b = a_y,$$

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = 0, \quad \operatorname{tg} \vartheta = 0,$$

$$E_x = a \cos \omega t, \quad E_y = -b \sin \omega t.$$



Obr. 2.29 Pravotočivé polarizační elipsy pro $\delta = \frac{\pi}{2}$. V levé části pro $a_x > a_y$, v pravé části pro $a_x < a_y$.

Případ 6, obr. 2.29 vpravo $\delta = \frac{-\pi}{2}$, $a_x < a_y$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, pravotočivá

$$\sin \delta = -1, \quad \cos \delta = 0,$$

$$\sin 2\chi = -\sin 2\alpha, \quad \chi = \alpha - \pi < 0,$$

$$\operatorname{tg} \chi = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a}, \quad b = a_x, \quad a = a_y,$$

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = 0, \quad 2\vartheta = \pi, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

$$E_x = a \cos \omega t, \quad E_y = -b \sin \omega t.$$

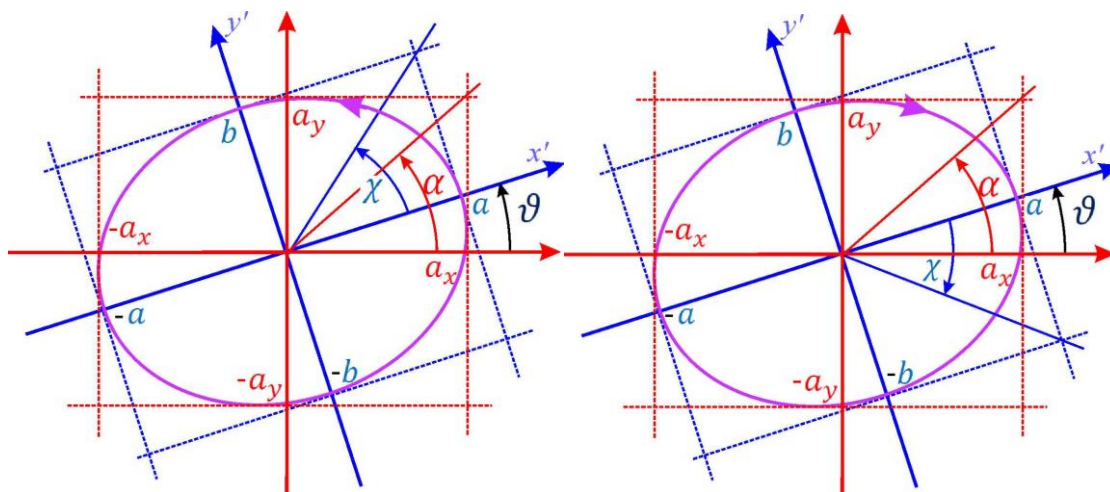
Případ 7, obr. 2.30 vlevo, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $a_y < a_x$, $0 < \vartheta < \frac{\pi}{4}$, levotočivá

$$0 < \sin \delta < 1, \quad 0 < \cos \delta < 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x} < 1, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \operatorname{tg} 2\alpha,$$

$$0 < \operatorname{tg} 2\vartheta < \operatorname{tg} 2\alpha, \quad \operatorname{tg} \vartheta > 0$$

$$0 < \sin 2\chi < \sin 2\alpha, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{b}{a} > 0.$$



Obr. 2.30 Polarizační elipsa v souřadné soustavě xy (červeně) a v souřadné soustavě $x'y'$ (modře), která je vzhledem k soustavě xy otočena o úhel $0 < \vartheta < \frac{\pi}{4}$. V levé části je zakreslena polarizační elipsa pro vlnu levotočivou, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \chi$. V pravé části je elipsa pro vlnu pravotočivou, $-\frac{\pi}{2} < \delta < 0$, $\chi < 0$.

Případ 8, obr. 2.30 vpravo, $-\frac{\pi}{2} < \delta < 0$, $a_y < a_x$, $0 < \vartheta < \frac{\pi}{4}$, pravotočivá

$$-1 < \sin \delta < 0, \quad 0 < \cos \delta < 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x} < 1, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \operatorname{tg} 2\alpha,$$

$$0 < \operatorname{tg} 2\vartheta < \operatorname{tg} 2\alpha,$$

$$-\sin 2\alpha < \sin 2\chi < 0, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{-b}{a} < 0.$$

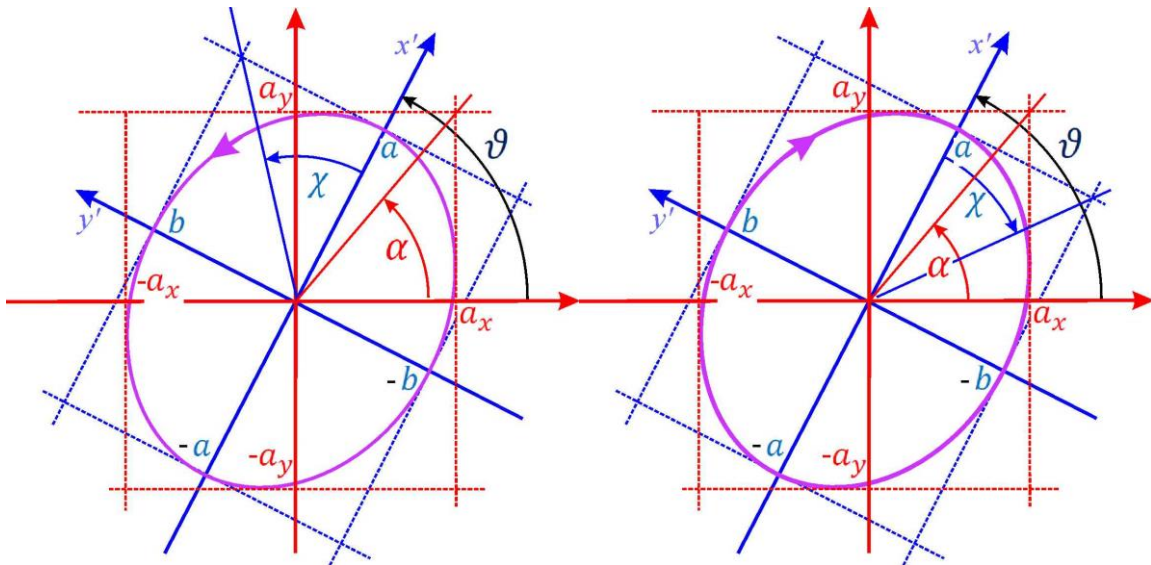
Případ 9, obr. 2.31 vlevo, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $a_y > a_x$, $\frac{\pi}{4} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, levotočivá

$$0 < \sin \delta < 1, \quad 0 < \cos \delta < 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x} > 1, \quad \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 > \operatorname{tg} 2\alpha,$$

$$0 > \operatorname{tg} 2\vartheta > \operatorname{tg} 2\alpha, \quad \operatorname{tg} \vartheta > 0$$

$$0 < \sin 2\chi < \sin 2\alpha, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{b}{a} > 0.$$



Obr. 2.31 Polarizační elipsa pro $\frac{\pi}{4} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, vlevo pro vlnu levotočivou, vpravo pro vlnu pravotočivou

Případ 10, obr. 2.31 vpravo, $-\frac{\pi}{2} < \delta < 0$, $a_y > a_x$, $\frac{\pi}{4} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, pravotočivá

$$-1 < \sin \delta < 0, \quad 0 < \cos \delta < 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x} > 1, \quad \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 > \operatorname{tg} 2\alpha,$$

$$0 > \operatorname{tg} 2\vartheta > \operatorname{tg} 2\alpha, \quad \operatorname{tg} \vartheta > 0$$

$$0 > \sin 2\chi > -\sin 2\alpha, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{-b}{a} < 0.$$

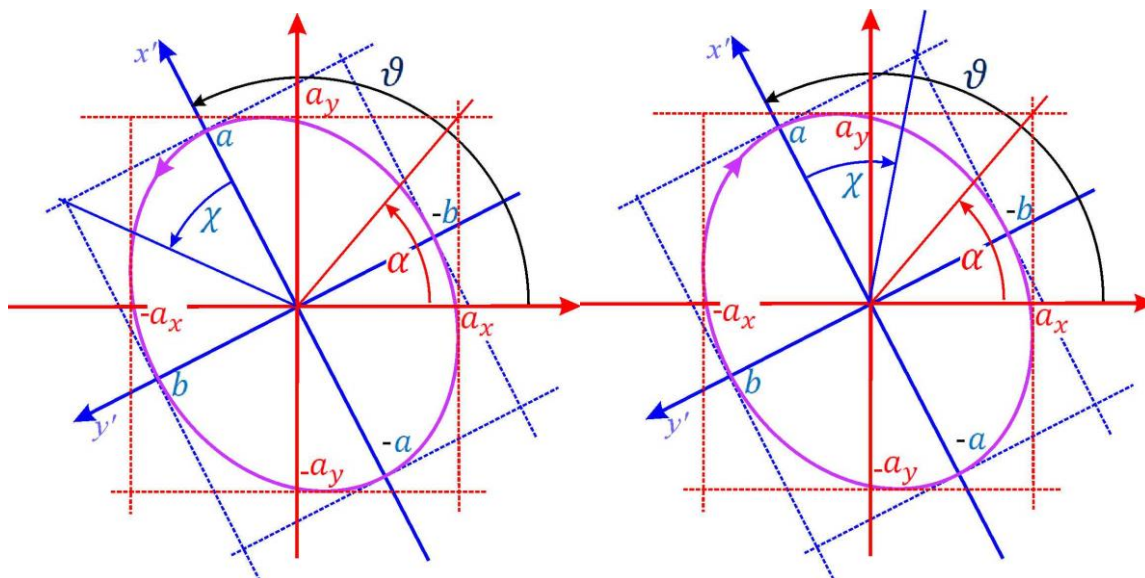
Případ 11, obr. 2.32 vlevo, $\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$, $a_y > a_x$, $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{4}$, levotočivá

$$0 < \sin \delta < 1, \quad -1 < \cos \delta < 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x} > 1, \quad \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 > \operatorname{tg} 2\alpha,$$

$$0 < \operatorname{tg} 2\vartheta < -\operatorname{tg} 2\alpha, \quad \operatorname{tg} \vartheta < 0,$$

$$0 < \sin 2\chi < \sin 2\alpha, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{b}{a} > 0.$$



Obr. 2.32 Polarizační elipsa pro $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{4}$, vlevo pro vlnu levotočivou, vpravo pro vlnu pravotočivou

Případ 12, obr. 2.32 vpravo, $-\pi < \delta < -\frac{\pi}{2}$, $a_y > a_x$, $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{4}$, pravotočivá

$$-1 < \sin \delta < 0, \quad -1 < \cos \delta < 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x} > 1, \quad \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 > \operatorname{tg} 2\alpha,$$

$$0 < \operatorname{tg} 2\vartheta < -\operatorname{tg} 2\alpha, \quad \operatorname{tg} \vartheta < 0,$$

$$-\sin 2\alpha < \sin 2\chi < 0, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{-b}{a} > 0.$$

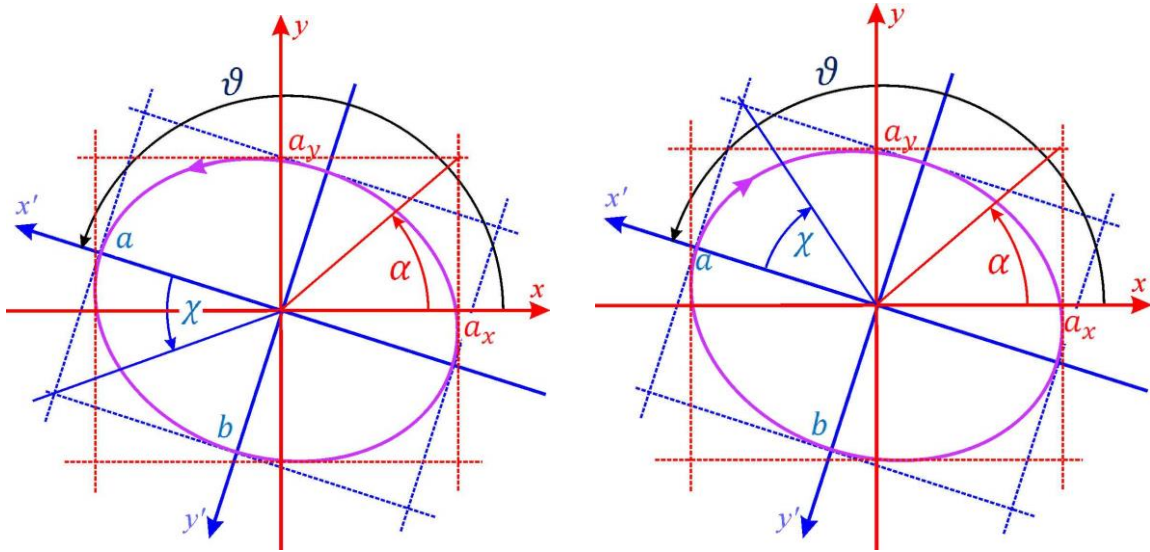
Případ 13, obr. 2.33 vlevo, $\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$, $a_x > a_y$, $\frac{3\pi}{4} < \vartheta < \pi$, levotočivá

$$0 < \sin \delta < 1, \quad -1 < \cos \delta < 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x} < 1, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \operatorname{tg} 2\alpha,$$

$$-\operatorname{tg} 2\alpha < \operatorname{tg} 2\vartheta < 0, \quad \operatorname{tg} \vartheta < 0$$

$$0 < \sin 2\chi < \sin 2\alpha, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{b}{a} > 0.$$



Obr. 2.33 Polarizační elipsa pro $\frac{3\pi}{4} < \vartheta < \pi$, vlevo pro vlnu levotočivou, vpravo pro vlnu pravotočivou

Případ 14, obr. 2.33 vpravo, $-\pi < \delta < -\frac{\pi}{2}$, $a_x > a_y$, $\frac{3\pi}{4} < \vartheta < \pi$, pravotočivá

$$-1 < \sin \delta < 0, \quad -1 < \cos \delta < 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x} < 1, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \operatorname{tg} 2\alpha,$$

$$-\operatorname{tg} 2\alpha < \operatorname{tg} 2\vartheta < 0, \quad \operatorname{tg} \vartheta < 0$$

$$-\sin 2\alpha < \sin 2\chi < 0, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{-b}{a} < 0.$$