

3. Odraz a lom na rozhraní dvou dielektrik

3.1 Zákon odrazu a lomu

Budeme popisovat odraz a lom rovinné vlny na rovinném rozhraní dvou homogenních, izotropních, „nemagnetických“ a neabsorbujících prostředí, v nichž je fázová rychlost rovinné elektromagnetické vlny určena reálnými a kladnými indexy lomu n_1 a n_2 . Jedno z těchto prostředí může být vakuum (častěji vzduch, jehož index lomu je aproximován hodnotou $n = 1$). Neabsorbující prostředí je charakterizováno tím, že frekvence dopadající vlny je daleko od rezonančních frekvencí všech typů oscilátorů v obou prostředích (bude rozebráno v kapitole Absorpce a disperze). Budeme se zabývat stacionárním, prostorově a časově neomezeným dějem v modelu pracujícím s monochromatickými rovinnými vlnami. V modelu vystupují pouze tři vlny:

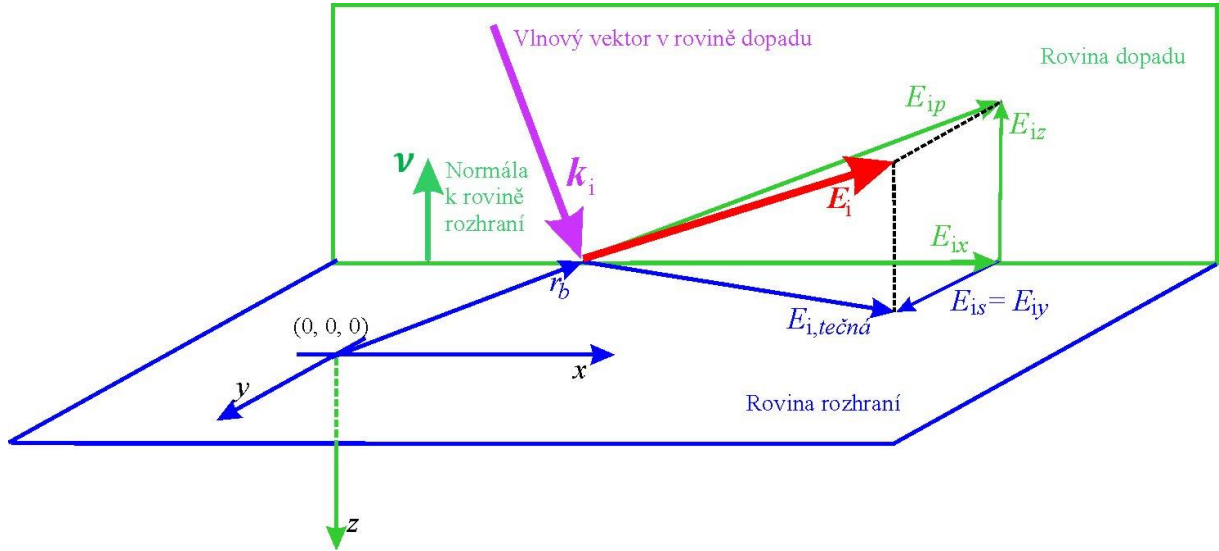
- 1) dopadající, která přichází z prostředí 1 a vyvolává odezvu (tj. nuceně rozkmitává dipóly v látkách – atomy, ionty, molekuly, ...) v obou prostředích na své frekvenci (nebo alespoň v jednom z nich, pokud je druhé vakuum);
- 2) odražená, která se šíří v prostředí 1;
- 3) lomená, která se šíří v prostředí 2.

Výsledek velmi složitých interferencí vln, které vysílají oscilátory nuceně rozkmitané nejen dopadající vlnou, ale též rozkmitané vlnami vysílanými okolními oscilátory, je z makroskopického hlediska kupodivu jednoduchý. Jsou to zmíněné tři rovinné vlny, které se v daných prostředích šíří fázovými rychlostmi popsanými reálnými indexy lomu n_1 a n_2 . Odražená vlna vzniká složením vln vysílaných rozkmitanými oscilátory. Její fáze (jak se časově sejde s dopadající vlnou na rozhraní) je ovlivněna parametry těchto nuceně kmitajících oscilátorů (polarizovatelnost, „síla oscilátoru“, viz kapitola „Absorpce a disperze“) a jejich koncentrací.

Základem **makroskopického** popisu jevů odrazu a lomu je splnění podmínek spojitosti na rozhraní pro tečné složky elektrického pole. Ty jsou podrobněji komentovány v **Dodatku 3.1**. Zvolme souřadnou soustavu x, y, z tak, že rovina rozhraní bude ležet v rovině $z = 0$. V rovině rozhraní leží body s polohovými vektory $\mathbf{r}_b = (x, y, 0)$. Z podmínek spojitosti plyne

$$\mathbf{E}_{i,tečná}(\mathbf{r}_b, t) + \mathbf{E}_{r,tečná}(\mathbf{r}_b, t) = \mathbf{E}_{t,tečná}(\mathbf{r}_b, t), \quad (3.1)$$

kde $\mathbf{E}_{i,tečná}$ je průmět vektoru $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}_b, t)$ dopadající vlny do roviny rozhraní. Podobné označení použijme pro vlnu odraženou $\mathbf{E}_r(\mathbf{r}_b, t)$ a vlnu lomenou $\mathbf{E}_t(\mathbf{r}_b, t)$. Podmínka spojitosti celkového pole v prostředí 1 a pole v prostředí 2 musí být splněna v každém místě \mathbf{r}_b a v každém čase t .



Obr. 3.1 Průmět vektoru elektrického pole (červeně) do roviny rozhraní a do roviny dopadu. Modře jsou zakresleny složky ležící v rovině rozhraní, zeleně v rovině dopadu. Tečná složka k rovině rozhraní $E_{i,tečná}$ má souřadnice $(E_{ix}, E_{iy}, 0)$, složka ležící v rovině dopadu má souřadnice $(E_{ix}, 0, E_{iz})$. Pro popis odrazu a lomu je důležité rozložení na komponentu $E_{is} = (0, E_{iy}, 0)$ a komponentu $E_{ip} = (E_{ix}, 0, E_{iz})$.

Pro intenzitu magnetického pole na rozhraní bez volných proudů platí obdobná podmínka spojitosti na rozhraní bez volných proudů

$$\mathbf{H}_{i,tečná}(\mathbf{r}_b, t) + \mathbf{H}_{r,tečná}(\mathbf{r}_b, t) = \mathbf{H}_{t,tečná}(\mathbf{r}_b, t). \quad (3.2)$$

Dopadající vlna necht' nabíhá z poloprostoru $z < 0$ (na obr. 3.1 v části nad rozhraním). Tam se nachází i odražená vlna. Lomená vlna (procházející rozhraním) je v poloprostoru $z \geq 0$. Tyto vlny můžeme zapsat

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)}, & z \leq 0, \\ \tilde{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_{0r} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)}, & z \leq 0, \\ \tilde{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)}, & z \geq 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor a \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_r a \mathbf{k}_t jsou vlnové vektory dopadající, odražené a lomené vlny, ω_i , ω_r a ω_t jejich kruhové frekvence, $\tilde{\mathbf{E}}_{0i}$, $\tilde{\mathbf{E}}_{0r}$ a $\tilde{\mathbf{E}}_{0t}$ komplexní vektorové amplitudy nezávislé na čase a prostorových souřadnicích. Tyto amplitudy určují směr kmitů, jejich velikost a zahrnují i fáze, se kterými se vlny setkávají, tedy i to, s jakou fází jednotlivé složky procházejí bodem $(0,0,0)$. Pro rovinnou postupnou homogenní vlnu jsou tyto vektory kolmé na vlnové vektory.

Označme normálový vektor k rovině rozhraní \mathbf{v} . Tečné složky polí v místě \mathbf{r}_b můžeme napsat jako vektorové součiny a podmínka spojitosti (vztah 3.1) pak má tvar

$$\mathbf{v} \times [\tilde{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}_b, t) \times \mathbf{v}] + \mathbf{v} \times [\tilde{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}_b, t) \times \mathbf{v}] = \mathbf{v} \times [\tilde{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}_b, t) \times \mathbf{v}],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times [\tilde{\mathbf{E}}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_b - \omega_i t)} \times \mathbf{v}] + \mathbf{v} \times [\tilde{\mathbf{E}}_{0r} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_b - \omega_r t)} \times \mathbf{v}] = \\ = \mathbf{v} \times [\tilde{\mathbf{E}}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_b - \omega_t t)} \times \mathbf{v}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Důkaz toho, že $\mathbf{v} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{v}]$ představuje pro volbu vektoru $\mathbf{v} = (0, 0, -1)$ tečnou složku \mathbf{E} v rovině rozhraní je uveden v **Dodatku 3.2**.

Protože komplexní vektorové amplitudy $\tilde{\mathbf{E}}_{0i}, \tilde{\mathbf{E}}_{0r}, \tilde{\mathbf{E}}_{0t}$ nezávisí na čase ani na souřadnici \mathbf{r}_b , časová a prostorová závislost je pouze ve členech $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_b - \omega_i t, \dots$ a rovnice 3.4 (spojitost tečných složek) musí platit ve všech bodech rozhraní a ve všech časech. Všechny její členy musí tedy mít stejnou funkční závislost na \mathbf{r}_b, t . Platí tedy

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_b - \omega_i t = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_b - \omega_r t = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_b - \omega_t t \quad (3.5)$$

Ve stacionárním případě skalární součiny $\mathbf{k}_{i,r,t} \cdot \mathbf{r}_b$ na čase nezávisí, protože pracujeme s rovinnými, monochromatickými (harmonickými) vlnami, takže na čase jsou závislé pouze členy $\propto \omega_{i,r,t} t$. Ani případné fázové posuny, které jsou zahrnuty v komplexních vektorových amplitudách, na tom nic nemění, protože jsou také prostorově a časově konstantní. Přitom rovnost 3.4 musí platit pro všechny časy v libovolném místě \mathbf{r}_b , např. i v $\mathbf{r}_b = 0$.

$$\omega_i t = \omega_r t = \omega_t t,$$

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega. \quad (3.6)$$

Dopadající, odražená a lomená vlna tedy mají stejnou frekvenci. Položme nyní $t = 0$. Z rovnice 3.5 dostaneme pro libovolný bod rozhraní \mathbf{r}_b

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_b = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_b = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_b. \quad (3.7)$$

Tyto součiny určují prostorovou periodicitu v rovině rozhraní. Aby mohly být splněny hraniční podmínky ve všech bodech rozhraní, průměty vlnových vektorů do roviny rozhraní jsou stejné pro dopadající, odraženou a lomenou vlnu.. Zvolili jsme souřadnou soustavu tak, že rovina dopadu bude určena osami x, z (je kolmá na osu y) a rovina rozhraní osami x, y . Vlnový vektor dopadající vlny je z definice roviny dopadu (obr. 3.2 a)

$$\mathbf{k}_i \equiv (k_{ix} \geq 0, 0, k_{iz} > 0) = \frac{\omega}{c} n_1 (\sin \theta_i, 0, \cos \theta_i). \quad (3.8)$$

Rozepíšme skalární součiny tak, že nahradíme vektor \mathbf{r}_b jeho kartézskými složkami $(x, y, 0)$.

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_b = k_{ix} x = k_{rx} x + k_{ry} y = k_{tx} x + k_{ty} y, \quad (3.9)$$

což musí platit pro všechny body rozhraní $\mathbf{r}_b = (x, y, 0)$, a to lze splnit jen pro $k_{ry} = k_{ty} = 0$, a tak vlnové vektory odražené a prošlé vlny mají tvar

$$\mathbf{k}_r \equiv (k_{rx} \geq 0, 0, k_{rz} < 0) = \frac{\omega}{c} n_1 (\sin \theta_r, 0, -\cos \theta_r), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{k}_t \equiv (k_{tx} \geq 0, 0, k_{tz} > 0) = \frac{\omega}{c} n_2 (\sin \theta_t, 0, \cos \theta_t). \quad (3.11)$$

To znamená, že **vlnové vektory dopadající, odražené a lomené vlny leží v rovině dopadu** (v námi zvolené soustavě souřadné je to rovina xz). Podmínka $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$ je graficky znázorněna na obr. 3.2a).

Pokud shrneme, k čemu jsme došli výše, dostaneme

$$k_{ix}x = k_{rx}x = k_{tx}x = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_b = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_b = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_b,$$

rozepsáním x -ových komponent \mathbf{k} vektorů obdržíme

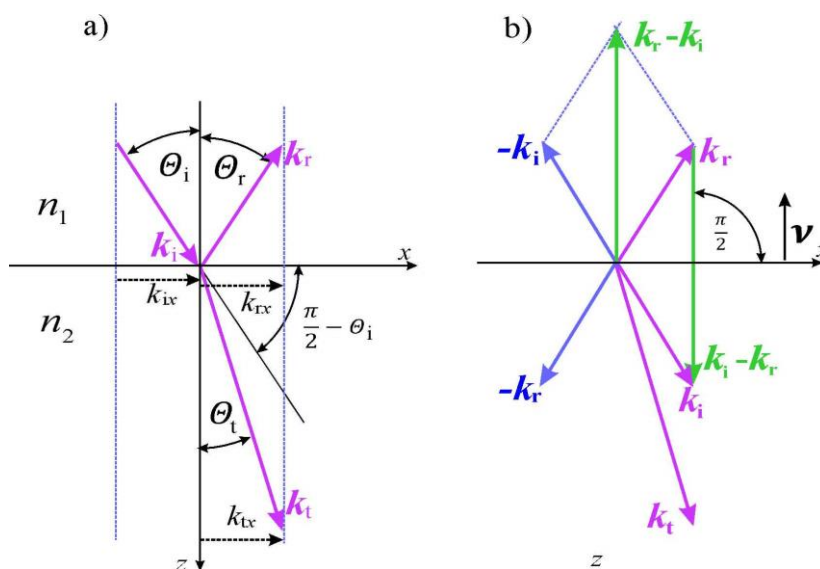
$$k_{ix} = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \theta_i = k_{rx} = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \theta_r = k_{tx} = \frac{\omega}{c} n_2 \sin \theta_t$$

a vydělením konstantami pak dostaneme

$$\boxed{\theta_i = \theta_r,} \quad \text{zákon odrazu} \quad (3.12)$$

$$\boxed{n_1 \sin \theta_r = n_2 \sin \theta_t.} \quad \text{zákon lomu} \quad (3.13)$$

Poslední řádky představují zákon odrazu a zákon lomu s tím, že všechny tři vlnové vektory leží v rovině dopadu. Zákon lomu je pojmenován Snellův zákon lomu (Willebrord Snell, 1580 – 1626, který zákon pro moderní dobu znovuobjevil).



Obr. 3.2 a) Pohled na rovinu dopadu, kde jsou zavedeny orientace vlnových vektorů a naznačeny úhly dopadu, odrazu a lomu. b) Geometrická konstrukce ukazující, že rozdíl vlnových vektorů dopadající a odražené vlny $\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r$ leží v rovině dopadu kolmé k rovině rozhraní

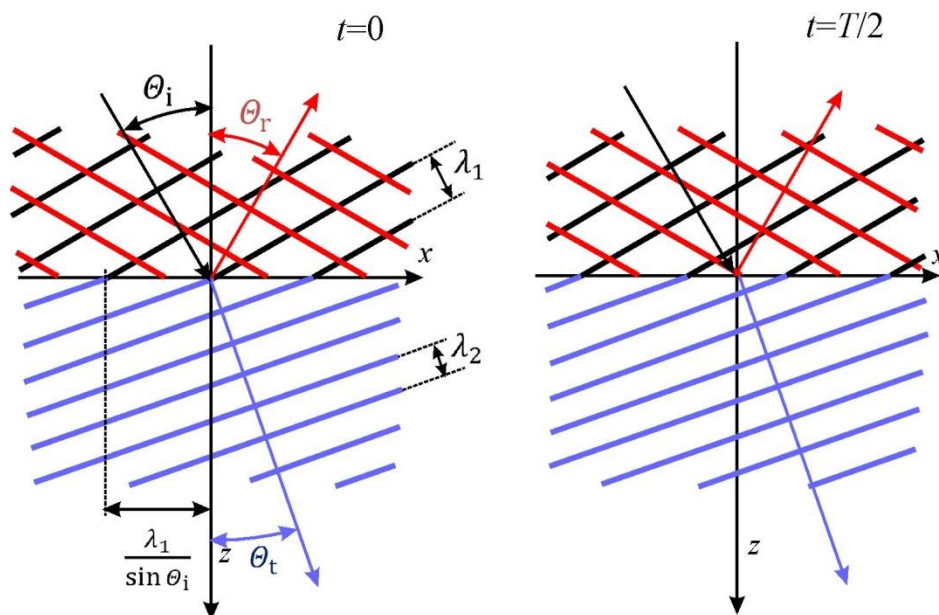
Dopadající rovinná homogenní vlna vytváří v rovině rozhraní periodickou strukturu podél osy x s periodou vyplývající z průmětu vlnového vektoru do osy x

$$\Lambda_x = \frac{2\pi}{k_{ix}} = \frac{2\pi c}{\omega n_1 \sin \theta_i} = \frac{cT}{n_1 \sin \theta_i} = \frac{\lambda_0}{n_1 \sin \theta_i} = \frac{\lambda_1}{\sin \theta_i}. \quad (3.14)$$

Tato periodická struktura se za dobu časové periody $T = \frac{2\pi}{\omega}$ posune podél rozhraní právě o tuto prostorovou periodu, tedy se podél osy x v rovině rozhraní xy pohybuje rychlostí

$$v_{bx} = \frac{\Lambda_x}{T} = \frac{c}{n_1 \sin \theta_i}, \quad (3.15)$$

což je znázorněno na obr. 3.3.



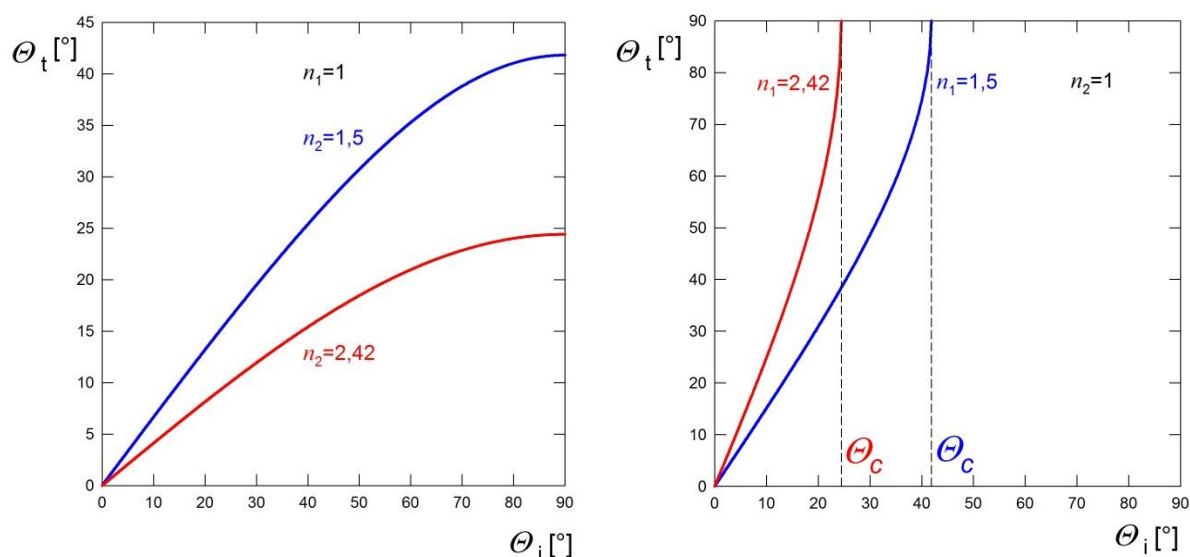
Obr. 3.3 Znárodnění navazování vlnoploch při odrazu a lomu. Situace odpovídá odrazu na opticky hustším prostředí pro úhel dopadu $\theta_i = 30^\circ$. Zakreslena jsou kladná maxima elektrických polí: černě dopadající vlna, červeně odražená vlna a modře lomená vlna. Posun vlnoploch za čas $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ v pravé části obrázku odpovídá polovině periody $\frac{\Lambda_x}{2} = \frac{\lambda_1}{2 \sin \theta_i}$. Maxima odražené vlny jsou v tomto případě (odraz na opticky hustším prostředí) v čase $t=0$ posunuta o $\frac{\Lambda_x}{2}$ vůči maximům vlny dopadající i lomené. To vyplývá z podmínky spojitosti 3.1 (podrobněji viz **Dodatek 3.3**)

Ve směru osy y dopadající vlna periodicky proměnnou strukturu nevytváří, $k_{iy} = 0$, což znamená $\Lambda_y \rightarrow \infty$. Struktury (harmonické funkce) se stejnou periodou musí mít i vlny odražená a lomená (vznikají jako důsledek odezvy na excitaci vlnou dopadající a splňují podmínky na rozhraní).

Na obr. 3.4 jsou uvedeny příklady závislosti úhlu lomu na úhlu dopadu podle Snellova zákona (vztah 3.13). V případě lomu pro $n_1 > n_2$ dochází pro úhly dopadu větší než je úhel kritický $\theta_i > \theta_c$ k jevu zvanému **totální odraz**. Kritický úhel dopadu (zvaný též mezní úhel) je dán vztahem

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.16)$$

Podrobnějšímu popisu totálního odrazu a jeho využití se budeme věnovat v části 3.2.3.



Obr. 3.4 Závislosti úhlu lomu a) pro prostředí 1 je $n_1 = 1$ a $n_2 = 1,5$ (sklo) a $n_2 = 2,42$ (diamant); b) pro lom z prostředí opticky hustšího do prostředí s nižším indexem lomu.

3.2 Fresnelovy vztahy

Dále se budeme zabývat intenzitou odražené a lomené vlny a odvodíme tzv. Fresnelovy vztahy. Augustin-Jean Fresnel byl francouzský fyzik, (1788 – 1827), který významně přispěl k rozvoji vlnové teorie světla. V dalším výkladu z části využijeme jeho původního postupu pro odvození tzv. Fresnelových koeficientů.

V případě vlny obecné polarizace začneme tím, že rozložíme intenzitu elektrického pole dopadající vlny do dvou vektorů, a to do vektoru kolmého k rovině dopadu \mathbf{E}_{is} (tento případ bývá označován jako polarizace *s* - z německého *senkrecht*) a vektoru rovnoběžného s rovinou dopadu \mathbf{E}_{ip} (polarizace *p*, z německého *parallel*). Vztahy pro intenzity odražené a lomené vlny závisejí na polarizaci tak, že jedna sada rovnic platí pro polarizaci, kdy elektrické vektory vln $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_t$ jsou kolmé k rovině dopadu a jiné vztahy platí pro polarizaci, ve které tyto vektory leží v rovině dopadu. Případy těchto dvou polarizací je potřeba pro $\theta_i \neq 0$ diskutovat odděleně. I nadále budeme pracovat v pravotočivé souřadné soustavě x, y, z , ve které osa z je normála k rovině rozhraní, osa x leží v rovině rozhraní a zároveň v rovině dopadu a osa y leží v rovině rozhraní a je kolmá k rovině dopadu. Připomeňme, že rovina dopadu je určena normálou k rovině rozhraní (osa z) a vlnovým vektorem dopadající vlny \mathbf{k}_i . Rovněž vlnové vektory \mathbf{k}_r a \mathbf{k}_t leží v této rovině (obr. 3.2). Vztah mezi magnetickým polem, vlnovým vektorem a elektrickým polem postupné, rovinné, homogenní a netlumené vlny je dán součinem

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{n}{c} \mathbf{s}_0 \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

3.2.1 Energetická bilance na rozhraní

Změna amplitudy vlny při odrazu a lomu má za následek i změnu intenzity světla. Uvažujme prostorově omezený svazek aproximovaný jako část rovinné vlny. Přitom předpokládáme, že vlny dopadající, odražená i procházející rozhraním jsou vlnami postupnými, příčnými a netlumenými, jejichž výkonový tok je dobře popsán reálným Poyntingovým vektorem rovnoběžným s vlnovým vektorem.

Zavedme amplitudové koeficienty (obecně komplexní) pro odraz a pro průchod rozhraním tak, že poměry mezi okamžitými hodnotami složek elektrického pole odražené vlny a dopadající vlny v rovině rozhraní, na stejném místě a ve stejném čase $\tilde{E}_{i,r,t,s,p}(x, y, z = 0, t)$ a pro poměry okamžitých hodnot procházející a dopadající vlny jsou

$$\begin{aligned} \tilde{r}_s &= \frac{\tilde{E}_{rs}}{\tilde{E}_{is}} = \frac{|\tilde{E}_{rs}|}{|\tilde{E}_{is}|} e^{i\delta_{rs}}, & \tilde{r}_p &= \frac{\tilde{E}_{rp}}{\tilde{E}_{ip}} = \frac{|\tilde{E}_{rp}|}{|\tilde{E}_{ip}|} e^{i\delta_{rp}}, \\ \tilde{t}_s &= \frac{\tilde{E}_{ts}}{\tilde{E}_{is}} = \frac{|\tilde{E}_{ts}|}{|\tilde{E}_{is}|} e^{i\delta_{ts}}, & \tilde{t}_p &= \frac{\tilde{E}_{tp}}{\tilde{E}_{ip}} = \frac{|\tilde{E}_{tp}|}{|\tilde{E}_{ip}|} e^{i\delta_{ts}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Z toho plyne pro kladné reálné amplitudy v obecném případě

$$\begin{aligned} \tilde{r}_s &= \frac{E_{0rs}}{E_{0is}} e^{i\delta_{rs}}, & \tilde{r}_p &= \frac{E_{0rp}}{E_{0is}} e^{i\delta_{rp}}, \\ \tilde{t}_s &= \frac{E_{0ts}}{E_{0is}} e^{i\delta_{ts}}, & \tilde{t}_p &= \frac{E_{0tp}}{E_{0ip}} e^{i\delta_{tp}}. \end{aligned}$$

Zde se nebudeme zabývat obecnými případy komplexních koeficientů, ale omezíme se na případy rozhraní mezi neabsorbujícími prostředími a vyloučíme případ totálního odrazu. Jak vyplývá z dalšího postupu, jsou pak uvedené koeficienty reálné a pro fázové posuvy δ dostaneme

$$\delta_{rs} = 0 \text{ nebo } \pi, \quad \delta_{rp} = 0 \text{ nebo } \pi, \quad \delta_{ts} = \delta_{tp} = 0.$$

Znamená to, že při odrazu nastává nejen změna amplitudy, ale v mnoha případech dojde i ke změně fáze o π (změna znaménka z + na -). Pro případ reálných koeficientů tedy budeme jednodušeji zapisovat pro amplitudy složek, které budeme dále považovat za kladná reálná čísla

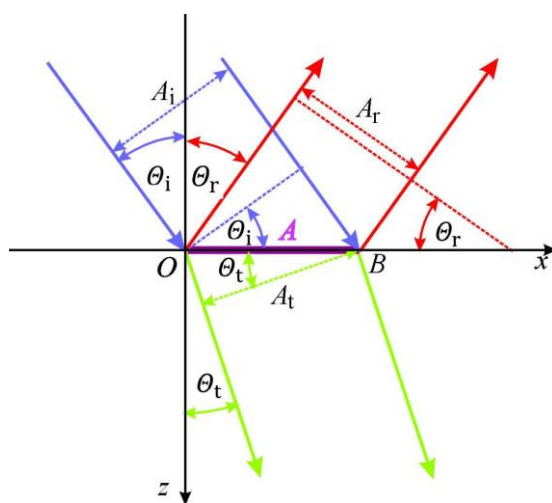
$$r_s = \pm \frac{E_{0rs}}{E_{0is}}, \quad r_p = \pm \frac{E_{0rp}}{E_{0ip}}, \quad t_s = \frac{E_{0ts}}{E_{0is}}, \quad t_p = \frac{E_{0tp}}{E_{0ip}}$$

Vylučujeme tedy případ, kdy je některé prostředí absorbující nebo případ totálního odrazu $\theta_i > \theta_c$. V těchto případech Fresnelovy koeficienty jsou komplexní, též vlnový vektor

v prostředí 2 je komplexní a dochází k obecné změně fáze. O totálním odrazu je pojednáno v **Dodatku 3.5**.

V případě reálných Fresnelových koeficientů můžeme pro intenzitu dopadající, odražené a lomené vlny (velikosti středních hodnot Poyntingových vektorů, tj. výkony nesené vlnami v průřezu o ploše 1 m^2) psát

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 E_{0i}^2 = \langle S_i \rangle \\ I_r &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 E_{0r}^2 = \langle S_r \rangle \\ I_t &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_2 E_{0t}^2 = \langle S_t \rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$



Obr. 3.5 Dopadající, odražený a lomený svazek spojený s plochou A na rozhraní

Protože dochází k lomu omezeného svazku na rozhraní, mění se průměty dopadajícího, odraženého a lomeného svazku do roviny rozhraní \overline{OB} , přičemž platí (obr. 3.5)

$$\overline{OB} = A = \frac{A_i}{\cos \theta_i} = \frac{A_r}{\cos \theta_r} = \frac{A_t}{\cos \theta_t}. \quad (3.19)$$

Výkon $A_i \langle S_i \rangle$, kde A_i je příčný průřez vybrané části dopadající vlny, dopadá na plochu rozhraní $A = \frac{A_i}{\cos \theta_i}$.

$$J_i = A_i \langle S_i \rangle = \langle S_i \rangle A \cos \theta_i. \quad (3.20)$$

Přitom ze stejné plochy se odráží výkon do průřezu odražené vlny $A_r = A \cos \theta_r$,

$$J_r = A_r \langle S_r \rangle = \langle S_r \rangle A \cos \theta_r \quad (3.21)$$

a do prostředí 2 ze stejné plochy vstupuje výkon

$$J_t = A_t \langle S_t \rangle = \langle S_t \rangle A \cos \theta_t. \quad (3.22)$$

Z výkonové bilance na ploše dostaneme

$$\begin{aligned} J_i &= J_r + J_t = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 E_{0i}^2 A \cos \theta_i = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 E_{0r}^2 A \cos \theta_r + \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_2 E_{0t}^2 A \cos \theta_t, \end{aligned} \quad (3.23)$$

takže ze zákona zachování výkonu (energie) plyne vztah

$$n_1 E_{0i}^2 \cos \theta_i = n_1 E_{0r}^2 \cos \theta_r + n_2 E_{0t}^2 \cos \theta_t. \quad (3.24)$$

Vztah 3.24 lze zapsat pomocí reálných amplitudových koeficientů r_s, r_p, t_s, t_p zvlášť pro každou polarizaci s nebo p

$$\begin{aligned} (r_{s,p})^2 &= \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2}, & (t_{s,p})^2 &= \frac{E_{0t}^2}{E_{0i}^2}, \\ n_1 \cos \theta_i &= n_1 (r_{s,p})^2 \cos \theta_r + n_2 (t_{s,p})^2 \cos \theta_t. \end{aligned} \quad (3.25)$$

S využitím zákona odrazu $\theta_i = \theta_r$ upravíme

$$1 = (r_{s,p})^2 + \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} (t_{s,p})^2. \quad (3.26)$$

3.2.1.1 Elektrické pole vln kolmé k rovině dopadu (polarizace s)

Nejprve se budeme zabývat situací, kdy elektrické pole dopadající, odražené i lomené vlny je kolmé k rovině dopadu xz , tj. ve složkách můžeme pro zvolený bod rozhraní \mathbf{r}_b a libovolný čas t psát

$$\mathbf{E}_i = (0, E_{iy}, 0), \quad \mathbf{E}_r = (0, E_{ry}, 0), \quad \mathbf{E}_t = (0, E_{ty}, 0).$$

Všechny vektory elektrické intenzity tedy v tomto případě polarizace s leží v rovině rozhraní xy a platí

$$E_{i,tečná} = E_{iy}, \quad E_{r,tečná} = E_{ry}, \quad E_{t,tečná} = E_{ty}. \quad (3.27)$$

Vzájemná orientace vektorů $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ v dopadající vlně a odražené vlně zakreslené v jednom čase a ve dvou místech vzdálených o půlperiodu je zobrazena na obr. 3.6 a pro vlnu lomenou na obr. 3.7. V dalším výpočtu budeme v souladu s těmito obrázky tedy předpokládat, že vektory $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_r$ a \mathbf{E}_t jsou souhlasně orientovány ve směru kladné osy y . Z podmínky spojitosti tečných složek elektrického pole (3.1) dostaneme pro polarizaci s

$$E_{iy} + E_{ry} = E_{iy} + r_s E_{iy} = E_{ty} = t_s E_{iy}$$

a vydělením rovnice E_{iy} dostaneme

$$1 + r_s = t_s. \quad (3.28)$$

Poslední výraz patří mezi tzv. Stokesovy vztahy, viz **Dodatek 3.4**. Dosazením rovnice 3.28 do rovnice 3.25 získáme rovnici

$$\begin{aligned} n_1 \cos \theta_i &= n_1 r_s^2 \cos \theta_i + n_2 (1 + r_s)^2 \cos \theta_t, \\ n_1 (1 - r_s^2) \cos \theta_i &= n_2 (1 + r_s)^2 \cos \theta_t. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Tato rovnice má dvě řešení

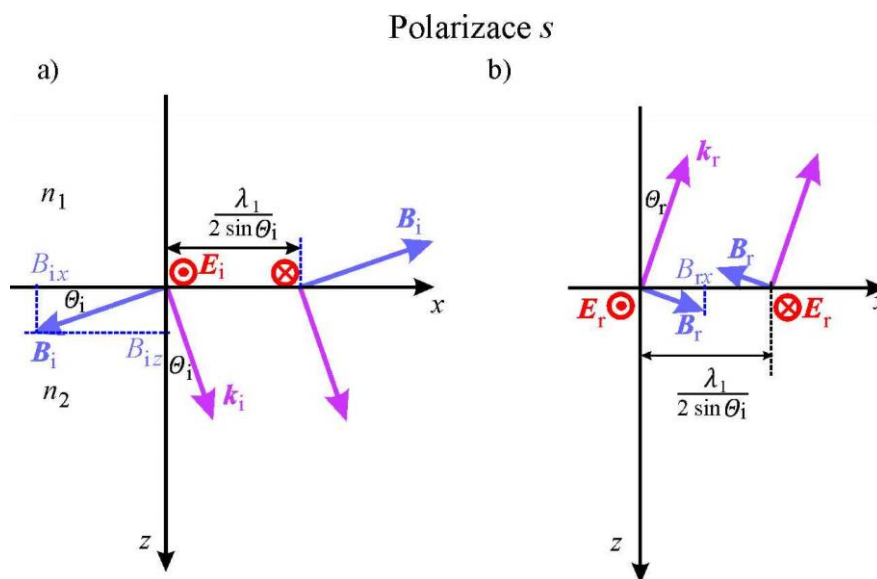
$$(1 - r_{s1}) \cos \theta_i = n_2 (1 + r_{s1}) \cos \theta_t \quad \text{a} \quad r_{s2} = -1. \quad (3.30)$$

O řešení $r_{s2} = -1$ lze ukázat, že nevyhovuje podmínce spojitosti tečných složek magnetické intenzity a odporuje experimentální zkušenosti, protože z něj plyne $t_s = 0$ pro všechny úhly dopadu, což se nepozoruje. Naopak řešení r_{s1} vyhovuje a tak zůstává

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}. \quad (3.31)$$

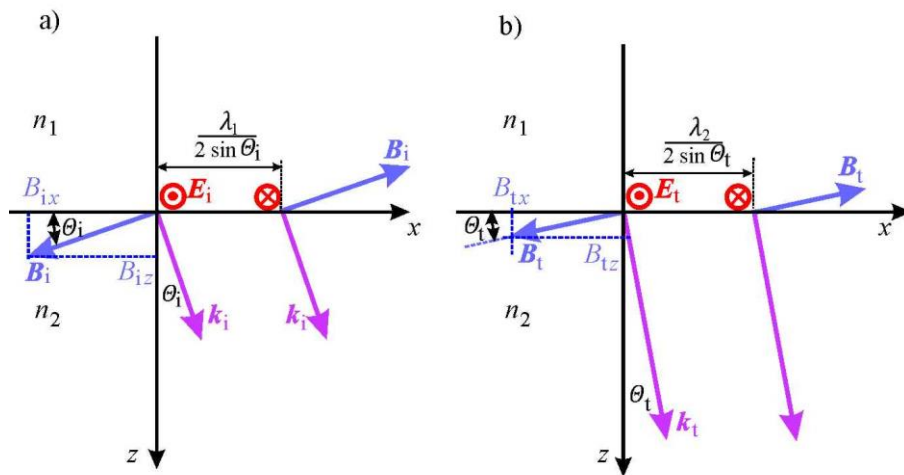
Podle vztahu 3.28 je

$$t_s = 1 + r_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}. \quad (3.32)$$

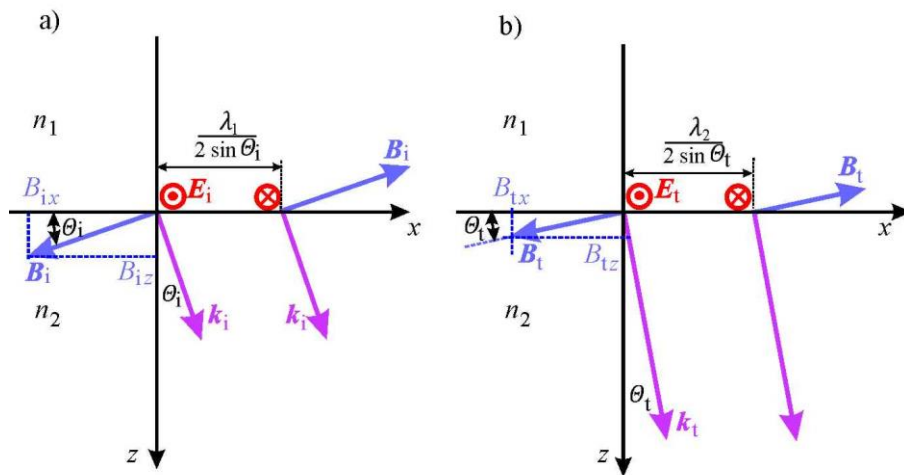


Obr. 3.6 Vzájemná orientace vektorů \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{B} v dopadající vlně (a) a odražené vlně (b) zakreslené v jednom čase a ve dvou místech vzdálených o půlperiodu $\frac{\lambda_1}{2 \sin \theta_i}$.

Polarizace s



Polarizace s



Obr. 3.7 Vzájemná orientace vektorů \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{B} v dopadající vlně (a) a lomené vlně (b) v jednom okamžiku v místech vzdálených v rovině rozhraní o $\frac{\lambda_1}{2 \sin \theta_i} = \frac{\lambda_2}{2 \sin \theta_t}$

3.2.1.2 Elektrické pole vln v rovině dopadu (polarizace p)

Dále popíšeme situaci, kdy vektory elektrické intenzity vln kmitají v rovině dopadu. Vektory elektrické intenzity rozepsané ve složkách jsou

$$\mathbf{E}_i = (E_{ix}, 0, E_{iz}), \quad \mathbf{E}_r = (E_{rx}, 0, E_{rz}), \quad \mathbf{E}_t = (E_{tx}, 0, E_{tz}). \quad (3.33)$$

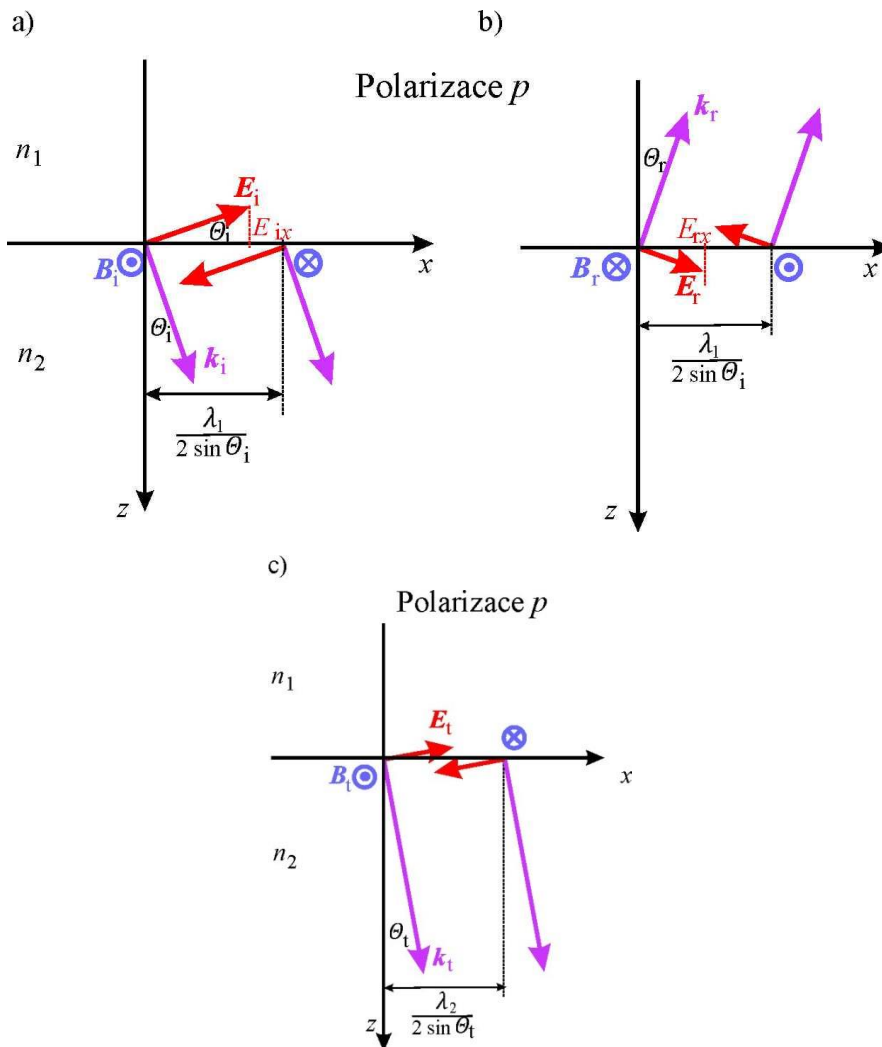
Složky E_{ix} , E_{rx} a E_{tx} jsou tečnými složkami k rovině rozhraní. Budeme předpokládat vzájemnou orientaci vektorů \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{B} v dopadající, odražené a lomené vlně podle obr. 3.8.

Podmínka spojitosti tečných složek \mathbf{E} má v tomto případě tvar

$$\begin{aligned}
E_{ix} + E_{rx} &= E_{tx}, & E_{rx} &= r_p E_{ix}, & E_{tx} &= t_p E_{ix}, \\
E_i \cos \theta_i + E_r \cos \theta_i &= E_t \cos \theta_t, \\
(1 + r_p) \cos \theta_i &= t_p \cos \theta_t.
\end{aligned}
\tag{3.34}$$

Dosadíme do 3.25

$$\begin{aligned}
n_1 \cos \theta_i &= n_1 r_p^2 \cos \theta_i + n_2 t_p^2 \cos \theta_t, \\
n_1 (1 - r_p^2) \cos \theta_i &= n_2 (1 + r_p)^2 \frac{\cos^2 \theta_i}{\cos \theta_t}, \\
n_1 (1 - r_p^2) &= n_2 (1 + r_p)^2 \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t}.
\end{aligned}$$



Obr. 3.8 Vzájemná orientace vektorů k, E, B v dopadající (a) odražené (b) a lomené (c) vlně zakreslené v jednom čase a ve dvou místech vzdálených o půlperiodu $\frac{\lambda_1}{2 \sin \theta_i}$ pro případ polarizace p .

Tato rovnice má opět dvě řešení

$$n_1(1 - r_{p1}) \cos \theta_t = n_2(1 + r_{p1}) \cos \theta_i, \quad r_{p2} = -1,$$

O řešení $r_{p2} = -1$ lze opět ukázat, že nevyhovuje podmínce spojitosti tečných složek magnetické intenzity a experimentální realitě, zatímco řešení r_{s1} této podmínce vyhovuje a tak je

$$-r_p(n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i) = n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t$$

$$r_p = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (3.35)$$

Podle vztahu 3.34 je

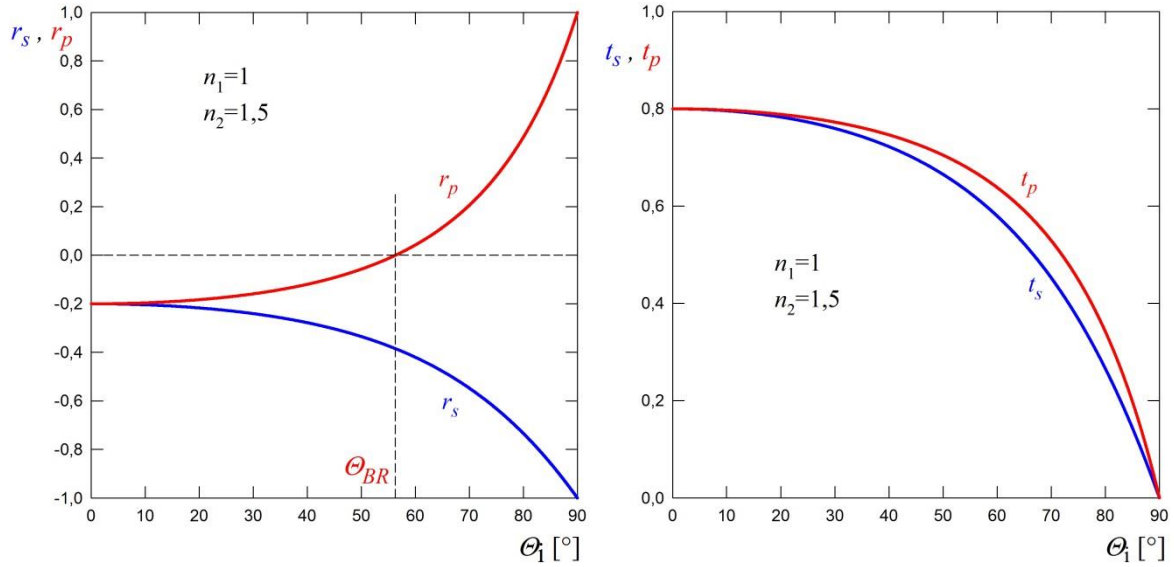
$$t_p = (1 + r_p) \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t} = \frac{2n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (3.36)$$

Analogickým postupem s využitím podmínky spojitosti tečných složek \mathbf{H} (vztah 3.2) je možné odvodit Fresnelovy koeficienty pro odraz a průchod magnetické intenzity.

Podrobněji probereme závislosti Fresnelových amplitudových koeficientů odrazu a průchodu na úhlu dopadu θ_i pro obě složky polarizace v další části pro případy odrazu a lomu na opticky hustším ($n_1 < n_2$) a na opticky řidším prostředí ($n_1 > n_2$).

3.2.2 Odraz a lom na opticky hustším prostředí ($n_1 < n_2$)

Závislosti amplitudových koeficientů odrazu a transmise na úhlu dopadu pro případ odrazu a lomu na opticky hustším prostředí $n_1 < n_2$ jsou zobrazeny pro obě polarizace na obr. 3.8. V případě odrazu na opticky hustším prostředí ze zákona lomu (3.13) plyne, že pro $\theta_i > \theta_t$, dochází k lomu ke kolmici v rovině rozhraní. Úhly dopadu, odrazu a lomu uvažujeme z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, kdy je funkce sinus rostoucí a funkce cosinus klesající. Proto platí, že $\cos \theta_i < \cos \theta_t$, tedy i $n_1 \cos \theta_i < n_2 \cos \theta_t$. Čitatel vztahu 3.31 je pro všechny úhly dopadu záporný, jmenovatel je vždy kladný. Proto je $r_s < 0$ v celém rozsahu úhlů dopadu θ_i .



Obr. 3.9 Závislosti amplitudových Fresnelových koeficientů odrazu a transmise na úhlu dopadu pro případ rozhraní vzduch (index lomu $n_i = n_1 = 1$) a sklo (index lomu $n_t = n_2 = 1,5$)

Pro složky y odražené vlny můžeme psát pro reálné $r_s < 0$

$$r_s = \frac{|E_{ry}|}{|E_{iy}|} e^{i\pi} = -\frac{|E_{ry}|}{|E_{iy}|}$$

Záporné znaménko amplitudového Fresnelova koeficientu odrazu r_s tedy znamená změnu fáze dopadající vlny při odrazu o fázový úhel π . Stejně to platí i pro případ koeficientu r_p diskutovaný dále. Připomeňme, že při odvození **jsme předpokládali**, že vektory \mathbf{E}_i a \mathbf{E}_r jsou orientovány tak, že složky E_{iy} a E_{ry} jsou obě kladné – vztah 3.27 a obr. 3.6. V intervalech úhlů dopadu θ_i , pro které jsou koeficienty r_s a r_p záporné (obr. 3.9), tedy tento náš předpoklad nebyl splněn a oba vektory jsou orientovány opačně (složka E_{iy} je kladná, složka E_{ry} je záporná, nebo naopak).

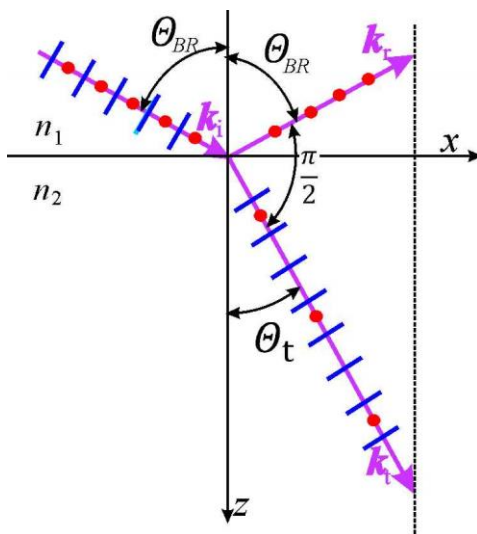
Vztah pro koeficienty r_s a r_p lze s využitím zákona lomu upravit (**Dodatek 3.4**) do tvaru

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}, \quad \theta_i \neq 0, \quad (3.37)$$

$$r_p = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} = \frac{\text{tg}(\theta_t - \theta_i)}{\text{tg}(\theta_t + \theta_i)}, \quad \theta_i \neq 0.$$

Pro $\theta_t + \theta_i = \frac{\pi}{2}$ je zjevně $r_p = 0$. Složka polarizace ležící v rovině dopadu se v tomto případě neodráží. Odráží se pouze složka kolmá k rovině dopadu, čehož lze využít k přípravě lineárně polarizovaného světla odrazem. Úhel dopadu, při kterém k tomu dochází, se nazývá Brewsterův:

$$\theta_i = \theta_{BR}, \quad \text{tg}(\theta_t + \theta_{BR}) \rightarrow \infty, \quad \theta_t + \theta_{BR} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{tg} \theta_{BR} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.38)$$



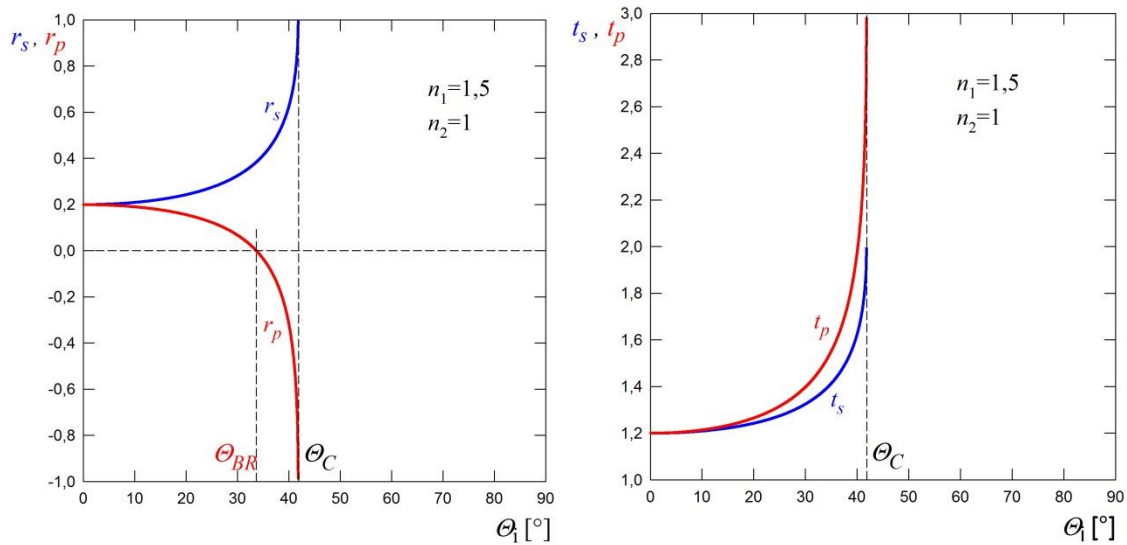
Obr. 3.10 Odraz a lom při dopadu pod Brewsterovým úhlem. Odražená vlna je lineárně polarizovaná kolmo k rovině dopadu.

3.2.3 Odraz a lom na opticky řidším prostředí ($n_1 > n_2$)

V případě odrazu na opticky řidším prostředí ze zákona lomu (3.13) plyne, že $\theta_i < \theta_t$ a dochází k lomu od kolmice k rovině rozhraní. Se zvětšujícím se úhlem dopadu nastane situace, kdy úhel lomu dosáhne 90° . Úhel dopadu pro tento případ θ_c nazýváme kritický nebo mezní. Ze zákona lomu plyne

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin \frac{\pi}{2} = n_2, \quad \sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.39)$$

Průběhy amplitudových Fresnelových koeficientů odrazu a lomu pro $\theta_i < \theta_c$ jsou zobrazeny na obr. 3.11. Pro $\theta_i \geq \theta_c$ nastává totální odraz spojený s obecným fázovým posuvem mezi dopadající a odraženou vlnou popsateľný komplexními amplitudovými koeficienty odrazu, jejichž absolutní hodnoty jsou $|\tilde{r}_s| = |\tilde{r}_p| = 1$. Tato situace je diskutována v **Dodatku 3.5**.



Obr. 3.11 Závislosti amplitudových Fresnelových koeficientů odrazu a transmise na úhlu dopadu pro případ rozhraní sklo (index lomu $n_i = n_1 = 1.5$) a vzduch (index lomu $n_t = n_2 = 1$)

Celkově vidíme, že v případě odrazu na opticky hustším prostředí mají Fresnelovy vztahy (3.31, 3.32, 3.35 a 3.36) reálná řešení pro všechny úhly dopadu θ_i . V případě odrazu na opticky řidším prostředí mají Fresnelovy vztahy reálná řešení pouze pro úhly dopadu menší než kritický úhel θ_C . Z obr. 3.9a 3.11 je patrné, že transmisní koeficienty jsou vždy kladné. Znamená to, že vektor elektrické intenzity kmitá v lomené (propuštěné) vlně ve fázi s vlnou dopadající (v matematickém zápisu jsme předpokládali při dovození koeficientů, že tomu tak je a kladné znaménko výsledků výpočtů zobrazených pro t_s a t_p náš předpoklad potvrdilo). Pro případ polarizace s je tento fakt demonstrován na obr. 3.19 a 3.20, kdy elektrické pole dopadající vlny (zobrazeno černě) kmitá vždy ve fázi s vlnou propuštěnou (zobrazeno modře).

V případě znamének Fresnelových koeficientů odrazu je situace složitější. V případě odrazu na opticky hustším prostředí je Fresnelův koeficient r_s záporný pro všechny úhly dopadu θ_i . Náš předpoklad o souhlasném směru vektorů elektrické intenzity v dopadající a odražené vlně tedy splněn nebyl. Elektrické pole odražené vlny kmitá v protifázi vůči vlně dopadající. Je to zřejmé z obr. 3.19 (odražená vlna zobrazena červeně). V polarizaci p koeficient odrazu r_p mění znaménko. Pro úhly dopadu menší než Brewsterův úhel je koeficient odrazu záporný. Tj. elektrické pole odražené vlny kmitá v protifázi k vlně dopadající. Pro úhly dopadu větší než Brewsterův úhel je znaménko r_p kladné. Znamená to, že elektrická pole dopadající a odražené vlny kmitají ve fázi (obr. 3.19 –vlevo, kmitání v protifázi, obr. 3.19 vpravo, kmitání ve fázi). Podobný rozbor je možné provést pro případ odrazu na opticky řidším prostředí. Celkové shrnutí je uvedeno v tabulkách 3.1 – 3.3. Správné započtení případné změny fáze při odrazu je klíčové při odvozování fázových rozdílů interferujících vln (podrobněji v kapitole „Interference“.)

	r_s	Změna fáze při odrazu	t_s	Změna fáze při lomu
$n_1 < n_2$	$r_s < 0$	π	$t_s > 0$	0
$n_1 > n_2$	$r_s > 0$	0	$t_s > 0$	0

Tabulka 3.1 Shrnutí změn fáze pro polarizaci s. Platí pro všechny úhly dopadu θ_i .

	r_p	Změna fáze při odrazu	t_p	Změna fáze při lomu
$n_1 < n_2$	$r_p < 0$	π	$t_s > 0$	0
$n_1 > n_2$	$r_p > 0$	0	$t_s > 0$	0

Tabulka 3.2 Shrnutí změn fáze pro polarizaci p pro úhly dopadu menší než Brewsterův úhel ($\theta_i < \theta_{BR}$)

	r_p	Změna fáze při odrazu	t_p	Změna fáze při lomu
$n_1 < n_2$	$r_p > 0$	0	$t_s > 0$	0
$n_1 > n_2$	$r_p < 0$	π	$t_s > 0$	0

Tabulka 3.3 Shrnutí změn fáze pro polarizaci p pro úhly dopadu větší než Brewsterův úhel ($\theta_i > \theta_{BR}$)

Je třeba zdůraznit, že v literatuře se v některých případech používá opačného předpokladu o vzájemné orientaci vektorů elektrické intenzity v dopadající a odražené vlně (např. P.Malý, Optika). Potom pochopitelně vyjdou z odvození Fresnelových vztahů rovnice s opačným znaménkem. Změna fáze při odrazu o π je v tomto případě již zahrnuta do počátečního předpokladu o orientaci polí.

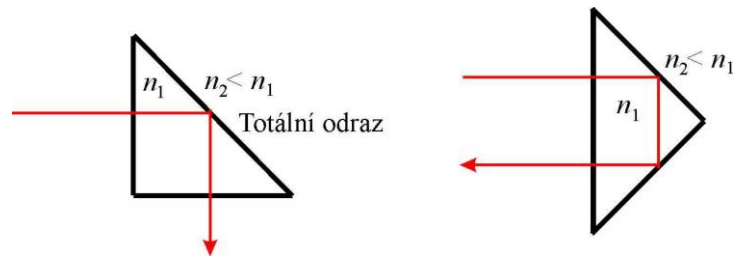
3.2.3.1 Úplný (totální) odraz

Je-li úhel dopadu z opticky hustšího (dále prostředí 1) do opticky řidšího prostředí (dále prostředí 2) větší než kritický úhel ($\theta_i > \theta_c$), dochází k úplnému (odrazu světla od rozhraní. Název totální odraz vystihuje skutečnost, že výkon nesený odraženou vlnou je ve stacionárním případě roven výkonu nesenému dopadající vlnou.

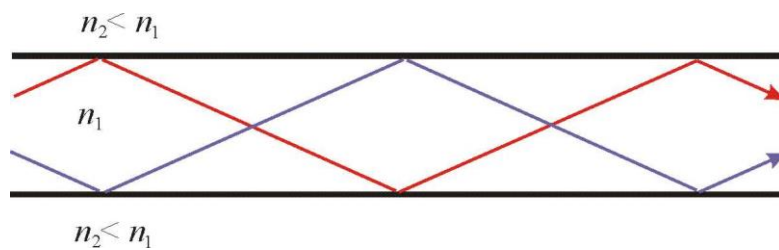
Odražená vlna má některé zajímavé vlastnosti, které jsou i prakticky využívány:

- využití jako zrcátek; oproti kovovým zrcadlovým plochám má větší odrazivost a je odolnější vůči působení vnějšího prostředí;
- totální odraz od stěn je základním principem světlovodů, které hrají v dnešní technické praxi obrovskou úlohu;

- měření kritického úhlu θ_C je základem několika prakticky užívaných typů refraktometrů – přístrojů na měření indexu lomu;
- totálně odražená vlna získává při odrazu fázový posuv, který závisí na polarizaci, úhlu dopadu a indexech lomu. Právě rozdíl fázového posuvu mezi vlnami polarizace s a polarizace p lze využít ke změně polarizačního stavu dopadající vlny, např. z dopadající lineárně polarizované vlny lze odrazem získat vlnu polarizovanou elipticky, při dvojnásobném odrazu i vlnu polarizovanou kruhově (prvek zvaný Fresnelův hranol).



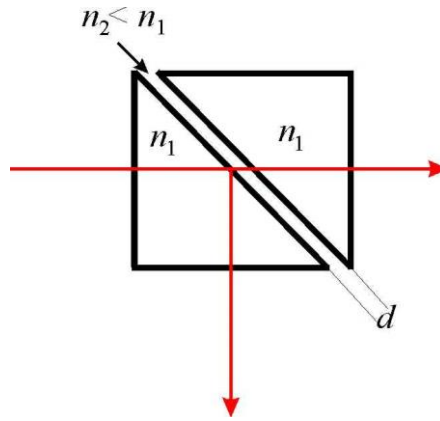
Obr. 3.12 Pravoúhlý hranol fungující jako zrcátko



Obr. 3.13 Paprskový model vlnovodu.

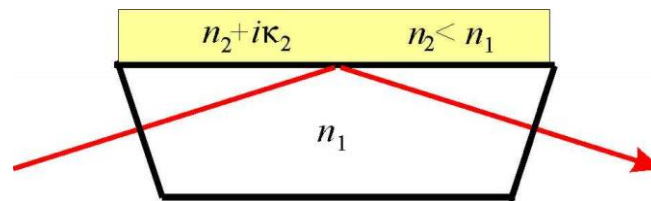
Zajímavé vlastnosti vykazuje i vlna, která proniká do prostředí 2 (tzv. **evanescentní vlna**). Je nutná pro zajištění podmínek na rozhraní (spojitosti tečných složek elektrického a magnetického pole). Tato vlna je směrem do prostředí 2 exponenciálně tlumená, podél rozhraní nese výkon a není příčná (existují nenulové složky elektrického nebo magnetického pole rovnoběžné se směrem šíření, tj. reálnou složkou vlnového vektoru).

Pokud je prostředí 2 dostatečně tenké, dochází k porušení totálního odrazu, a pokud má další prostředí opět vyšší index lomu, část výkonu může téci do tohoto dalšího prostředí 3. Tloušťkou vrstvy 2 (mezi 1 a 3) lze regulovat výkon přenášený do prostředí 3, což technicky využívají různé vazební členy.



Obr. 3.14 Dvojhranol s mezerou, který může pracovat jako dělič svazku nebo jako regulovatelný vazební člen

Další oblastí využití porušené (tlumené) totální reflexe je spektroskopie, kdy prostředí 2 má sice nižší index lomu než prostředí 1, ale elektromagnetickou vlnu dané frekvence absorbuje. Absorpce evanescentní vlny v prostředí 2 má za následek pokles výkonu odraženého do prostředí 1. Tato spektroskopická metoda je nazývána ATR (attenuated total reflection).



Obr. 3.15 Princip spektroskopické metody tlumené totální reflexe (ATR)

V **Dodatku 3.5** jsou popsány základy totální reflexe v rámci našeho makroskopického 3-vlnového modelu a pole evanescentní vlny, která je ve směru kolmém k rozhraní silně tlumena. Je to vlna postupná, rovinná (vlnoplochy jsou roviny) a nehomogenní (amplitudy polí nejsou podél vlnoplochy konstantní). Evanescentní vlna nese v prostředí 2 výkon s nenulovou střední hodnotou Poyntingova vektoru v rovině dopadu a v rovině rozhraní, v našem souřadném systému $\langle S_{tx} \rangle_T \neq 0$.

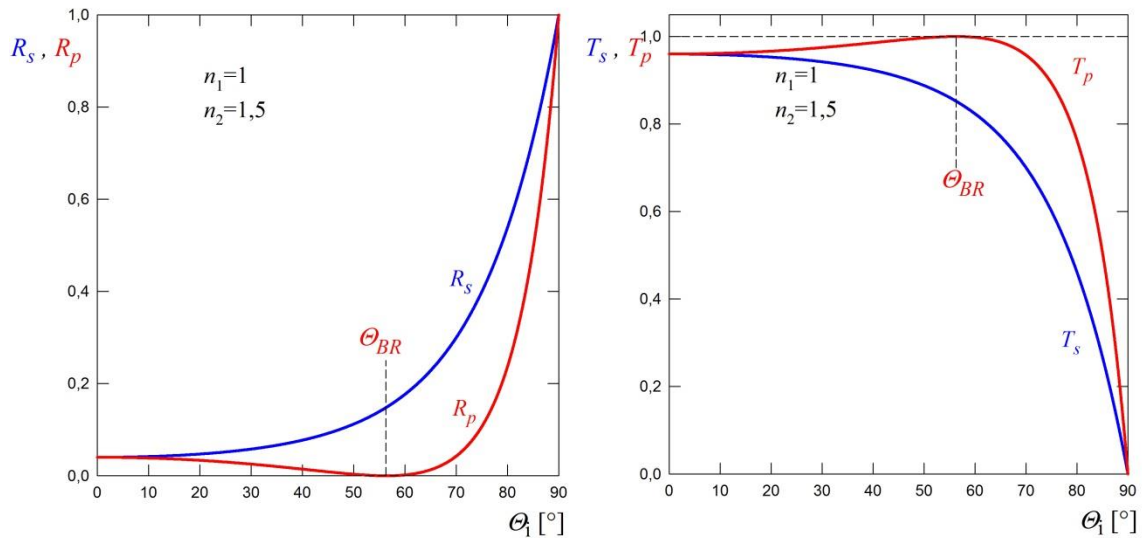
3.3 Výkonové koeficienty odrazu a lomu

Dále zavedeme **výkonové** koeficienty odrazu R a lomu T , které je nutné počítat zvlášť pro kolmou a rovnoběžnou složku polarizace (vzhledem k rovině dopadu). Tyto koeficienty se vztahují na výkony nesené v celém svazku daných průřezů a souvisejí s amplitudovými koeficienty

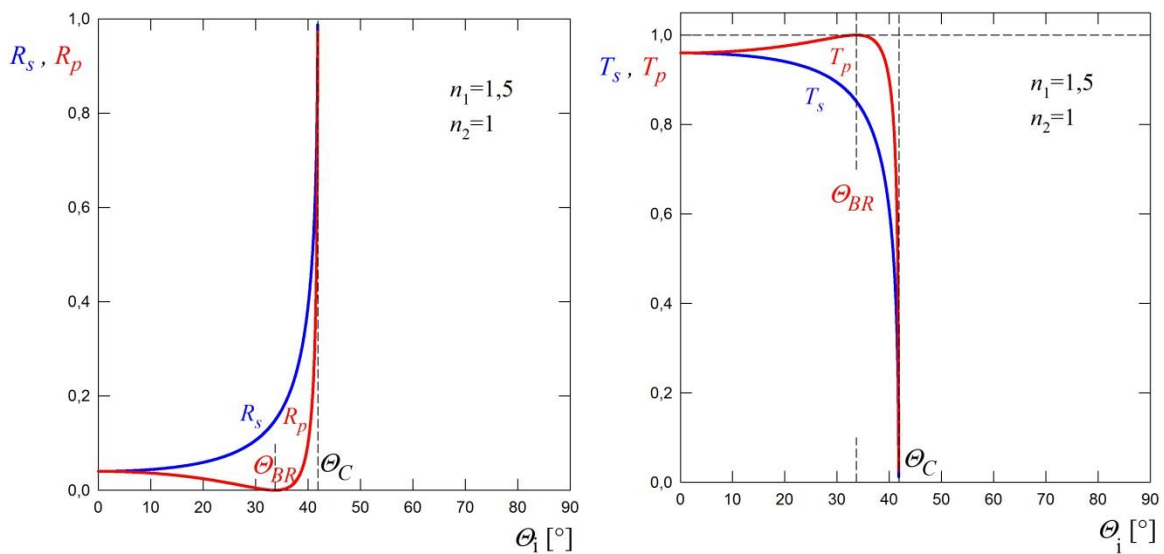
$$R_{s,p} = \frac{J_r}{J_i} = \frac{\langle S_r \rangle A_r}{\langle S_i \rangle A_i} = \frac{\langle S_r \rangle}{\langle S_i \rangle} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = |r_{s,p}|^2, \quad (3.40)$$

$$T_{s,p} = \frac{J_t}{J_i} = \frac{\langle S_t \rangle A_t}{\langle S_i \rangle A_i} = \frac{n_2 E_{0t}^2 A_t}{n_1 E_{0i}^2 A_i} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} |t_{s,p}|^2. \quad (3.41)$$

Závislosti výkonových koeficientů R a T na úhlu dopadu jsou zobrazeny na obr. 3.16 a 3.17.



Obr. 3.16 Závislosti výkonových koeficientů odrazu a transmise na úhlu dopadu pro případ rozhraní vzduch (index lomu $n_i = n_1 = 1$) a sklo (index lomu $n_t = n_2 = 1.5$)



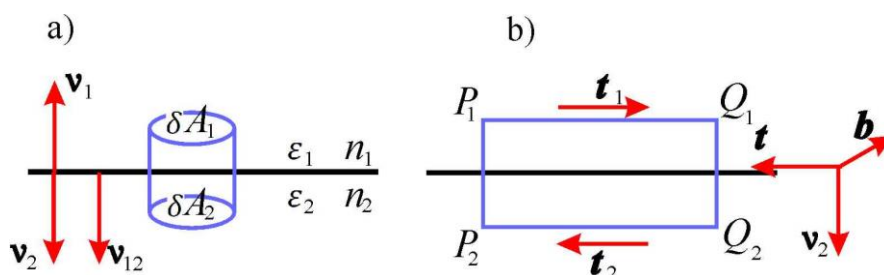
Obr. 3.17 Závislosti výkonových koeficientů odrazu a transmise na úhlu dopadu pro případ rozhraní sklo (index lomu $n_i = n_1 = 1.5$) a vzduch (index lomu $n_t = n_2 = 1$).

Dodatek 3.1 Podmínky spojitosti na rozhraní

V této části odvodíme podmínky na rozhraní dvou prostředí s různými indexy lomu n_1 a n_2 a relativními permitivitami ε_1 a ε_2 . Dále použijeme v optické oblasti spektra často užívané zjednodušení užitím modelu „nemagnetických“ prostředí: permeability obou prostředí jsou stejné a rovny permeabilitě vakua μ_0 . Předpokládejme, že ostré rozhraní je nahrazeno vrstvou, ve které se permitivita mění rychle, ale kontinuálně. Vektor elektrické intenzity \mathbf{E} , elektrické indukce \mathbf{D} , magnetické indukce \mathbf{B} a magnetické intenzity \mathbf{H} se tedy ve vrstvě mění spojitě. Můžeme proto použít Gaussovu větu

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} dS = 0, \quad (3.42)$$

kde plocha S obklopuje uvažovaný objem δV a je uzavřená. Skládá se z podstav δA_1 , δA_2 a „stěny“ výšky δh . \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 jsou jednotkové vektory normály k ploše S směřující ven z objemu δV ; jsou to normály k podstavům δA_1 a δA_2 . Jednotkový vektor $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$ je kolmý k rozhraní a směřuje z prostředí 1 do prostředí 2 (obr. 3.18).



Obr. 3.18 Zavedení veličin pro odvození podmínek na rozhraní

V našem případě jsou plochy δA_1 a δA_2 malé. Proto na nich má vektor \mathbf{B} konstantní hodnotu: $\mathbf{B}^{(1)}$ na ploše δA_1 a $\mathbf{B}^{(2)}$ na ploše δA_2 . Můžeme tedy psát

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} dA = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{v}_1 \delta A_1 + \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{v}_2 \delta A_2 + \oint_{\text{stěny}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} dA = 0. \quad (3.43)$$

V limitě $\delta h \rightarrow 0$ je příspěvek k integrálu od stěn válce nulový. Dostaneme tedy

$$-\mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{v}_{12} + \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{v}_{12} = 0, \text{ tedy } \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{v}_{12} = \mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{v}_{12}. \quad (3.44)$$

Protože $\mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{v}_{12} = B_n^{(1)}$, jsou normálové složky \mathbf{B} spojitě, $B_n^{(1)} = B_n^{(2)}$. Stejným postupem při využití rovnice $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_f$ dojdeme ke vztahu

$$\mathbf{v}_{12} \cdot (\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)}) = \rho_{f,s}, \quad (3.45)$$

kde $\rho_{f,s}$ je hustota plošného volného náboje na rozhraní obou prostředí. V případě, že tato hustota je nulová, platí pro normálové složky \mathbf{D} vztah

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)} \quad (3.46)$$

a jsou tedy spojité. V izotropních prostředích, kde platí

$$D_n^{(1)} = \varepsilon_0 n_1^2 E_n^{(1)} \quad \text{a} \quad D_n^{(2)} = \varepsilon_0 n_2^2 E_n^{(2)}, \quad (3.47)$$

nastává pro normálové složky elektrického pole na rozhraní bez volných nábojů skok

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{D_n}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right). \quad (3.48)$$

Dále využijeme rovnice

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.49)$$

Na rozhraní obou prostředí umístíme uzavřenou smyčku tvaru obdélníka (obr. 3.18). Vektor \mathbf{b} je kolmý na rovinu, v níž leží smyčka. Vektor \mathbf{t} a vektory \mathbf{t}_1 a \mathbf{t}_2 jsou kolmé na vektory \mathbf{v}_{12} a \mathbf{b} . Vektor \mathbf{b} je kolmý k vektoru \mathbf{v}_{12} . Vektor \mathbf{v}_{12} je jednotkový normálový vektor kolmý k rovině rozhraní. Označme dále $\delta l_1 = P_1 Q_1$ a $\delta l_2 = P_2 Q_2$, kdy platí $\delta l_1 = \delta l_2 = \delta l$. Předpokládejme, že délka obou hran je malá, a proto na nich velikosti i směr \mathbf{E} můžeme považovat za konstantní ($\mathbf{E}^{(1)}$ a $\mathbf{E}^{(2)}$).

Rovnici 3.54 lze dále upravit s využitím Stokesovy věty, když uzavřená smyčka l obklopuje plochu obdélníka S .

$$\begin{aligned} \int \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \int \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} dS = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \mathbf{E}^{(1)} \cdot \mathbf{t}_1 \delta l + \mathbf{E}^{(2)} \cdot \mathbf{t}_2 \delta l + \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{Q_1}^{Q_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b} \delta l \delta h). \end{aligned} \quad (3.50)$$

V limitě $\delta h \rightarrow 0$ je příspěvek k integrálu od hran $P_1 P_2$ a $Q_1 Q_2$ nulový, stejně jako je nulová pravá strana integrálu. Z toho plyne, že

$$(\mathbf{E}^{(1)} \cdot \mathbf{t}_1 + \mathbf{E}^{(2)} \cdot \mathbf{t}_2) \delta l = 0. \quad (3.51)$$

Ze vzájemné orientace vektorů (obr. 3.18) platí vztahy

$$\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t} = -\mathbf{b} \times \mathbf{v}_{12}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t} = \mathbf{b} \times \mathbf{v}_{12}$$

a

$$\mathbf{E}^{(1)} \cdot [-\mathbf{b} \times \mathbf{v}_{12}] + \mathbf{E}^{(2)} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{v}_{12}] = \mathbf{0}. \quad (3.53)$$

S využitím vektorové identity

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \quad (3.54)$$

dostaneme

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{v}_{12} \times \mathbf{E}^{(1)}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v}_{12} \times \mathbf{E}^{(2)}). \quad (3.55)$$

Jelikož orientace obdélníka a tedy i vektoru \mathbf{b} je libovolná, musí platit

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{12} \times \mathbf{E}^{(1)} &= \mathbf{v}_{12} \times \mathbf{E}^{(2)}, \\ \mathbf{v}_{12} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Tedy tečné složky \mathbf{E} jsou spojité na rozhraní

$$\mathbf{E}_{tečná}^{(1)} = \mathbf{E}_{tečná}^{(2)}. \quad (3.57)$$

Stejným postupem s využitím rovnice

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.58)$$

dojdeme ke vztahu

$$\mathbf{v}_{12} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{j}_{fs}, \quad (3.59)$$

kde \mathbf{j}_{fs} je hustota proudu tekoucího po rozhraní. V případě, že $\mathbf{j}_{fs} = 0$, platí pro tečné složky

$$\mathbf{H}_{tečná}^{(1)} = \mathbf{H}_{tečná}^{(2)}. \quad (3.60)$$

Tečné složky \mathbf{H} jsou spojité a v „nemagnetických“ prostředích jsou spojité i tečné složky $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

Shrnutí:

Na rozhraní 2 prostředí jsou spojité normálové složky \mathbf{B} a tečné složky \mathbf{E} . Navíc pro rozhraní bez **volných** povrchových nábojů jsou spojité normálové složky \mathbf{D} a pro rozhraní bez **volných** povrchových proudů jsou spojité i tečné složky \mathbf{H} .

Dodatek 3.2 – Tečná složka vektoru v rovině rozhraní

Mějme obecně orientovaný vektor $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$, rovinu rozhraní (x, y) a normálový vektor k ní $\mathbf{v} = (0, 0, -1)$. Pak platí

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{v})_x = E_y v_z - E_z v_y = -E_y,$$

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{v})_y = E_z v_x - E_x v_z = E_x,$$

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{v})_z = E_x v_y - E_y v_x = 0.$$

To znamená, že vektor $\mathbf{E} \times \mathbf{v}$ leží v rovině rozhraní.

$$[\mathbf{v} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{v})]_x = v_y (\mathbf{E} \times \mathbf{v})_z - v_z (\mathbf{E} \times \mathbf{v})_y = E_x,$$

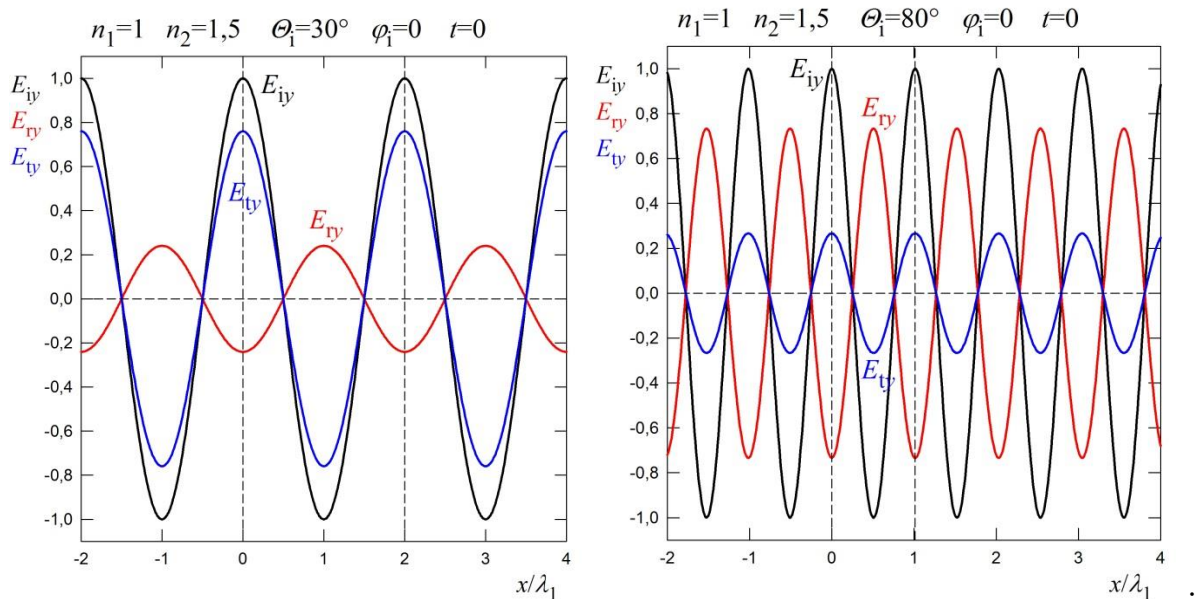
$$[\mathbf{v} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{v})]_y = v_z (\mathbf{E} \times \mathbf{v})_x - v_x (\mathbf{E} \times \mathbf{v})_z = E_y,$$

$$[\mathbf{v} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{v})]_z = v_x (\mathbf{E} \times \mathbf{v})_y - v_y (\mathbf{E} \times \mathbf{v})_x = 0.$$

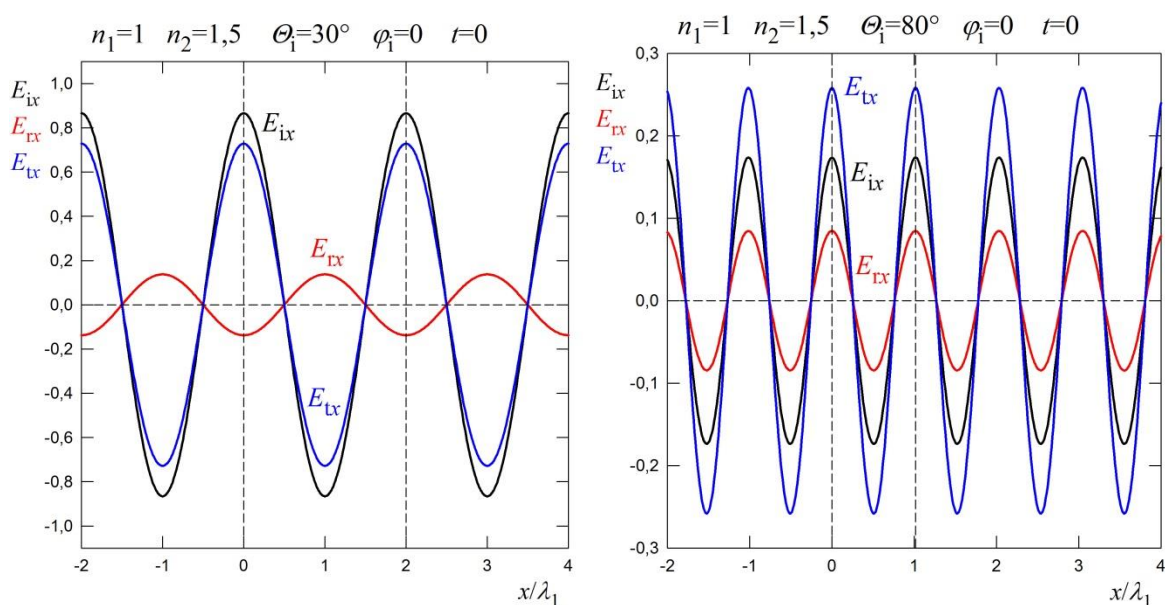
Vektor $\mathbf{v} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{v})$ rovněž leží v rovině rozhraní a představuje tečnou složku vektoru $\mathbf{E}_{tečný} = (E_x, E_y, 0)$ (obr. 3.1).

Dodatek 3.3 – Splnění podmínek spojitosti pro odraz na opticky hustším prostředí ($n_2 > n_1$)

Na následujících obrázcích je ukázána spojitost tečných složek na rozhraní v jednom okamžiku (zvoleno $t = 0$) pro odraz na hustším prostředí $n_2 > n_1$. Ze strany prostředí 1 je pro polarizaci s pole $E_{iy} + E_{ry}$, ze strany prostředí 2 je pole $E_{ty} = E_{iy} + E_{ry}$. Podobně je tomu i pro složky $E_{ix} + E_{rx} = E_{tx}$ v polarizaci p .



Obr.3.19 Závislosti tečných složek $E_{iy}(x), E_{ry}(x), E_{ty}(x)$ v rovině rozhraní v časovém okamžiku $t = 0$ pro polarizaci s . Amplituda dopadající vlny je $E_0 = 1$, fáze dopadající vlny $\varphi_i(x = 0, y, z = 0, t = 0) = 0$. Prostorová perioda je $\frac{\lambda_1}{\sin \theta_i}$. Amplitudový koeficient reflexe je reálný a záporný, tj. $r_s = -|r_s| = |r_s| e^{i\pi}$.



Obr. 3.20 Závislosti tečných složek $E_{ix}(x), E_{rx}(x), E_{tx}(x)$ v rovině rozhraní pro polarizaci p se stejnými parametry jako v předchozím obrázku pro polarizaci s . Amplitudový koeficient reflexe je reálný a záporný, tj. $r_p = -|r_p| = |r_p| e^{i\pi}$ pro $\theta_i < \theta_{BR}$ a kladný $r_p = |r_p|$ pro $\theta_i > \theta_{BR}$, θ_{BR} je Brewsterův úhel. Ve všech případech je relativní amplituda dopadající vlny $E_0 = 1$.

Dodatek 3.4 - Odvození vztahu pro Brewsterův úhel, Stokesovy vztahy

Amplitudový koeficient reflexe pro polarizaci p

$$r_p = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}.$$

Využijeme zákon lomu $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ a dostaneme

$$r_p = \frac{\frac{n_2 \sin \theta_t}{\sin \theta_i} \cos \theta_t - \frac{n_2 \sin \theta_i}{\sin \theta_t} \cos \theta_i}{\frac{n_2 \sin \theta_t}{\sin \theta_i} \cos \theta_t + \frac{n_2 \sin \theta_i}{\sin \theta_t} \cos \theta_i} = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_t - \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin \theta_t \cos \theta_t + \sin \theta_i \cos \theta_i}.$$

Upravíme čítele

$$\begin{aligned} \sin \theta_t \cos \theta_t - \sin \theta_i \cos \theta_i &= \sin \theta_t \cos \theta_t (\sin^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i) - \\ &\quad - \sin \theta_i \cos \theta_i (\sin^2 \theta_t + \cos^2 \theta_t) = \\ &= \sin \theta_t \cos \theta_i \cos \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_t \cos \theta_i \sin \theta_t \sin \theta_i + \\ &\quad + \sin \theta_i \cos \theta_t \sin \theta_t \sin \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_t \cos \theta_t \cos \theta_i = \\ &= (\cos \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_t \sin \theta_i) (\sin \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_t) = \\ &= \cos (\theta_t + \theta_i) \sin (\theta_t - \theta_i). \end{aligned}$$

Podobně úpravou jmenovatele bychom dospěli ke vztahu

$$\sin \theta_t \cos \theta_t + \sin \theta_i \cos \theta_i = \sin (\theta_t + \theta_i) \cos (\theta_t - \theta_i).$$

Podělením dostaneme výsledný vztah

$$r_p = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_t - \theta_i)}{\operatorname{tg}(\theta_t + \theta_i)}.$$

Koeficient $r_p = 0$ pro $\theta_t + \theta_{BR} = \frac{\pi}{2}$. Pro případ $\theta_i = \theta_{BR}$ je zákon lomu

$$\begin{aligned} n_1 \sin \theta_{BR} &= n_2 \sin \theta_t = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{BR} \right) = \\ &= n_2 \left(\sin \frac{\pi}{2} \cos \theta_{BR} - \sin \theta_{BR} \cos \frac{\pi}{2} \right) = n_2 \cos \theta_{BR}, \end{aligned}$$

$$n_1 \sin \theta_{BR} = n_2 \cos \theta_{BR}, \quad \tan \theta_{BR} = \frac{\sin \theta_{BR}}{\cos \theta_{BR}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Obdobným způsobem lze ukázat pro $\theta_i \neq 0$, že

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}, \quad \theta_i \neq 0$$

a $r_s = 0$ pro $n_1 \neq n_2$ nenastává.

Dále odvodíme Stokesovy vztahy, které vyjadřují vztahy mezi reálnými Fresnelovými amplitudovými koeficienty odrazu a lomu při přechodu z jednoho prostředí do druhého a zpět. Mějme rozhraní dvou prostředí s indexy lomu n_1 (prostředí 1) a n_2 (prostředí 2). Při přechodu z prostředí 1 do prostředí 2 a zpět platí pro amplitudové koeficienty odrazu r_{12} a r_{21} podle vztahu 3.29

$$r_{p12} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}, \quad r_{p21} = \frac{n_2 \cos \theta_t - n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}.$$

Platí tedy

$$r_{p12} = -r_{p21}.$$

Podobně (vztah 3.25)

$$r_{s12} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad r_{s21} = \frac{n_2 \cos \theta_t - n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t},$$

$$r_{s12} = -r_{s21}.$$

Pro amplitudové Fresnelovy transmisní koeficienty podle vztahu 3.32

$$t_{s12} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = 1 + r_{s12},$$

$$t_{s21} = \frac{2 n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = 1 + r_{s21} = 1 - r_{s12},$$

$$t_{s12} t_{s21} = 1 - r_{s12}^2,$$

$$1 = r_{s12}^2 + t_{s12} t_{s21}.$$

Podobně podle vztahů 3.36

$$t_{p12} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} (1 - r_{p12})$$

$$t_{p21} = \frac{2 n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} = \frac{n_2}{n_1} (1 - r_{p21}) = \frac{n_2}{n_1} (1 + r_{p12})$$

Z toho plyne

$$t_{p12} t_{p21} = 1 - r_{p12}^2.$$

Dodatek 3.5 Totální odraz a evanescentní vlna

Komplexní Fresnelovy koeficienty

Nejprve podrobněji zavedeme komplexní Fresnelovy koeficienty reflexe a transmise pro polarizaci s

$$\tilde{r}_s = \frac{\tilde{E}_{ry}(x, y, z = 0, t)}{\tilde{E}_{iy}(x, y, z = 0, t)} = \frac{|\tilde{E}_{ry}|}{|\tilde{E}_{iy}|} e^{i\delta_{rs}} = \frac{E_{0rs}}{E_{0is}} e^{i\delta_{rs}},$$

$$\tilde{t}_s = \frac{\tilde{E}_{ty}(x, y, z = 0, t)}{\tilde{E}_{iy}(x, y, z = 0, t)} = \frac{|\tilde{E}_{ty}|}{|\tilde{E}_{iy}|} e^{i\delta_{ts}} = \frac{E_{0ts}}{E_{0is}} e^{i\delta_{ts}},$$

kde $E_{0is}, E_{0rs}, E_{0ts}$ atd. jsou reálné amplitudy vln a δ_{rs} , resp. δ_{rp} je fázový posun mezi dopadající a odraženou vlnou (analogicky pro lomenou vlnu). Pole $\tilde{E}_{iy}(x, y, z = 0, t)$, \tilde{E}_{ry} , \tilde{E}_{ty} jsou okamžité hodnoty polí na rozhraní $z = 0$ ve stejných místech x, y pro všechny tři zúčastněné vlny. Zcela obdobně pro polarizaci p

$$\tilde{r}_p = \frac{\tilde{E}_{rx}(x, y, z = 0, t)}{\tilde{E}_{ix}(x, y, z = 0, t)} = -\frac{\tilde{E}_{rz}(x, y, z = 0, t)}{\tilde{E}_{iz}(x, y, z = 0, t)} = \frac{|\tilde{E}_{rx}|}{|\tilde{E}_{ix}|} e^{i\delta_{rp}} = \frac{E_{0rp}}{E_{0ip}} e^{i\delta_{rp}}.$$

Alternativní, v literatuře se též často vyskytující definice koeficientu odrazu souvisí s **opačným předpokladem** o orientaci vektoru $\tilde{\mathbf{E}}_r$:

$$\tilde{r}_p' = -\tilde{r}_p = -\frac{\tilde{E}_{rx}}{\tilde{E}_{ix}} = \frac{\tilde{E}_{rz}}{\tilde{E}_{iz}} = \frac{|\tilde{E}_{rx}|}{|\tilde{E}_{ix}|} e^{i(\delta_{rp} + \pi)} = \frac{E_{0rp}}{E_{0ip}} e^{i(\delta_{rp} + \pi)},$$

$$\tilde{t}_p(x, y, z = 0, t) = \frac{\tilde{E}_{tx}}{\tilde{E}_{ix}} = \frac{|\tilde{E}_{tx}|}{|\tilde{E}_{ix}|} e^{i\delta_{tp}} = \frac{E_{0tp}}{E_{0ip}} e^{i\delta_{tp}}.$$

Při popisu totálního odrazu vyjdeme ze zákona lomu

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i,$$

přičemž platí

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i}.$$

Pro úhly dopadu menší než θ_C je $\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i = \sin^2 \theta_t$ číslo menší než 1. Pro kritický úhel dopadu $\theta_i = \theta_C$ je $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ a výraz $\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i = 1$. Pro úhly dopadu větší než θ_C je $\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i > 1$ a výraz pod odmocninou je záporný. Pro výpočty k vysvětlení jevů, ke kterým dochází

v tomto případě na rozhraní, je vhodné využívat komplexní formalismus. Vraťme se k označení komplexních veličin vlnovkou.

Vlnový vektor procházející vlny v případě úhlu dopadu menším než je kritický úhel $\theta_i < \theta_c$ je $\mathbf{k}_t = (k_t \sin \theta_t, 0, k_t \cos \theta_t)$. Zkusme zobecnění na případ $\theta_i > \theta_c$, kdy $\tilde{\theta}_t$ je komplexní a $\cos \tilde{\theta}_t$ je ryze imaginární. O kompatibilitě tohoto formalismu s Maxwellovými rovnicemi a podmínkami spojitosti tečných složek polí na rozhraní je nutno se přesvědčit zvlášť, jak učiníme později. Zavedme komplexní vlnový vektor

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{k}}_t)_z &= k_t \cos \tilde{\theta}_t = \frac{\omega}{c} n_2 \sqrt{-\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1\right)} = \\ &= i \frac{\omega}{c} n_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1} = i \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2} = ib, \end{aligned}$$

kde b je reálné číslo. Periodicitu na rozhraní určuje dopadající vlna. Nehledě na to, že reálné $\sin \tilde{\theta}_t > 1$, použijeme i zde zákon lomu $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \tilde{\theta}_t$, takže

$$(\tilde{\mathbf{k}}_t)_x = k_t \sin \tilde{\theta}_t = \frac{\omega}{c} n_2 \sin \tilde{\theta}_t = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \theta_i = (\mathbf{k}_i)_x$$

Hloubka vniku evanescentní vlny

Pro popis vlny v prostředí 2 zvolíme polarizaci dopadající vlny kolmou na rovinu dopadu (polarizace s , též označována \perp). Elektrická pole mají složky $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$. Vlnu procházející do prostředí s menším indexem lomu pak můžeme zapsat v polarizaci s

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{ty} &= E_0 \tilde{t}_s e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = E_0 \tilde{t}_s e^{i(k_t x \sin \tilde{\theta}_t + k_t z \cos \tilde{\theta}_t)} e^{-i\omega t} = \\ &= E_0 \tilde{t}_s e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = E_0 \tilde{t}_s e^{i(k_1 x \sin \theta_i + ibz)} e^{-i\omega t} = \\ &= E_0 \tilde{t}_s e^{iax} e^{-bz} e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

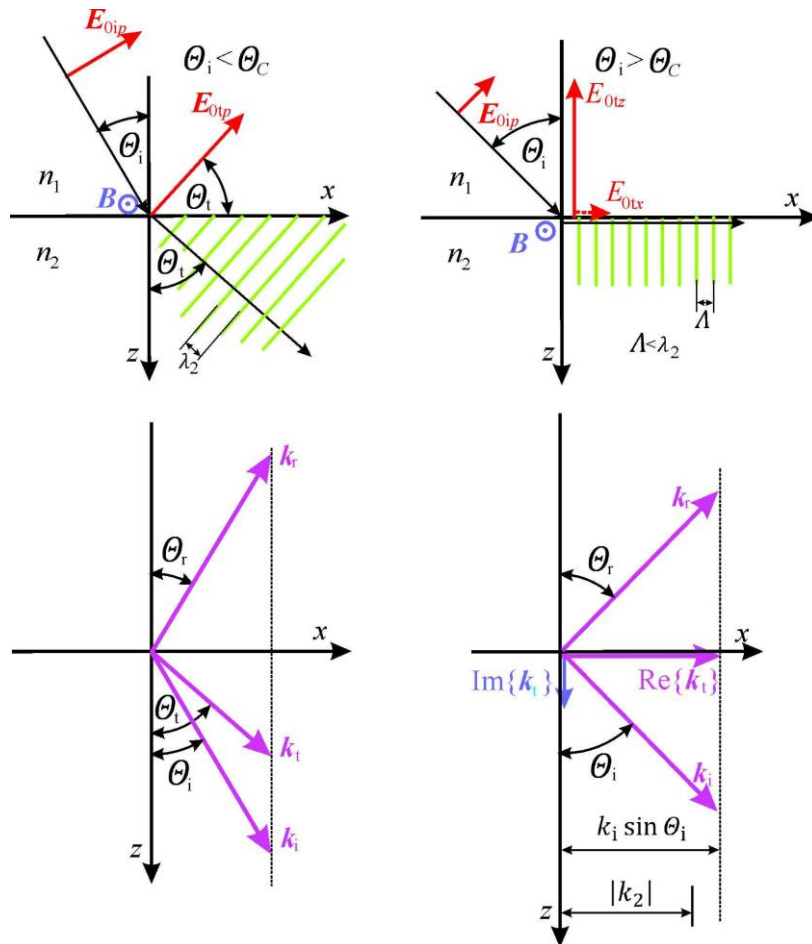
Úplně stejné vztahy platí i pro polarizaci p , pokud ovšem nahradíme koeficient průchodu rozhraním koeficientem \tilde{t}_p . Ve směru x (podél rozhraní) se tedy šíří harmonická vlna, která je ve směru z tlumena, ve směru x nikoli. Zavedli jsme reálnou veličinu $b > 0$, pro kterou platí vztahy

$$\begin{aligned} b &= -ik_t \cos \tilde{\theta}_t = k_t = \frac{2\pi}{\lambda_2} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1} = \frac{2\pi n_1}{\lambda_2 n_2} \sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \\ &= \frac{2\pi n_2 n_1}{\lambda_0 n_2} \sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2} = -\frac{\omega}{c} n_2 \gamma,$$

$$\gamma = i \cos \tilde{\theta}_t = \frac{-1}{n_2} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}.$$

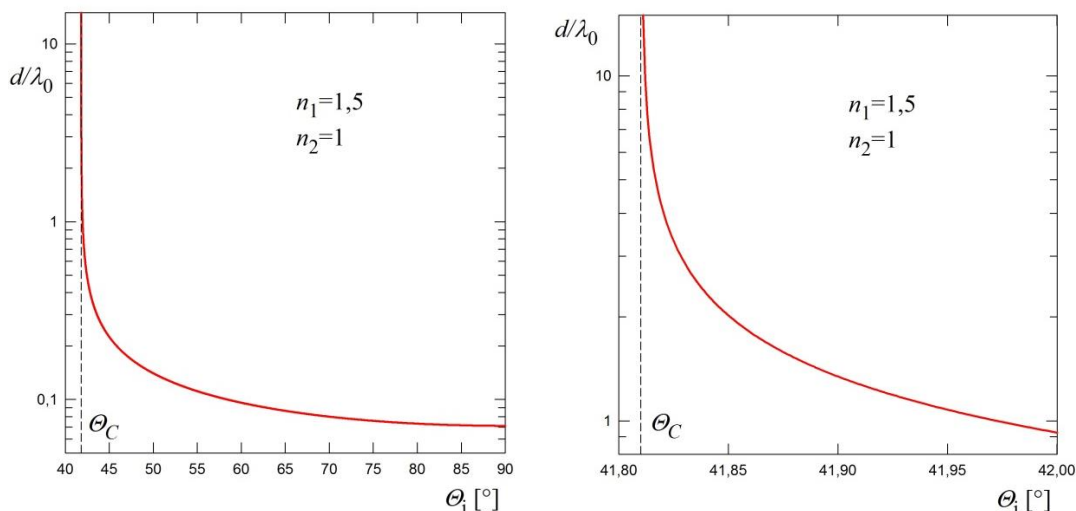
Dále stanovíme, do jaké hloubky záření efektivně proniká. Protože $\tilde{E}_{ty}(z > 0) \sim e^{-bz}$, je příslušná intenzita $I(z > 0) \sim \tilde{E}_{ty} \tilde{E}_{ty}^* \sim e^{-2bz} = e^{-\frac{z}{d}}$, kde $d = \frac{1}{2b}$ je hloubka průniku. Jedná se o hloubku, na níž **intenzita záření** za rozhraním ve směru z poklesne na $\frac{1}{e}$ hodnoty na rozhraní ze strany prostředí 2 v $z = 0$. Intenzitou záření můžeme rozumět jak hustotu elektrické energie, tak Poyntingův vektor, přesněji jedinou nenulovou složku střední hodnoty Poyntingova vektoru v prostředí 2, která je rovnoběžná s rozhraním.



Obr. 3.21 Porovnání orientace některých vektorů pro $\theta_i < \theta_C$ (levá část) a pro $\theta_i > \theta_C$ (pravá část). Zeleně jsou naznačeny vlnplochy v prostředí 2 fázově vzdálené o 2π . V případě totální reflexe je podélná složka elektrického pole E_{tx} fázově posunuta o 90° oproti příčné složce E_{tz} . Velikost vlnového vektoru v prostředí 2 pro volné šíření homogenní rovinné vlny je $|k_2| = \frac{\omega}{c} n_2$.

$$d = \frac{\lambda_0}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} = \frac{-\lambda_0 n_2}{4\pi \gamma} = \frac{i}{\cos \tilde{\theta}_t} \frac{\lambda_0 n_2}{4\pi}.$$

λ_0 je vlnová délka ve vakuu. Pro $\theta_i \leq \theta_C$ je $d \rightarrow \infty$ a vlna se v prostředí 2 šíří jako rovinná, příčná a netlumená. Hloubka průniku pro $\theta_i > \theta_C$ nezávisí na polarizaci, ale velikost polí na polarizaci závisí, protože koeficienty průchodu \tilde{t}_s a \tilde{t}_p přes rozhraní jsou pro polarizace s a p různé.



Obr. 3.22 Závislost hloubky průniku evanescentní vlny ze skla do vzduchu na úhlu dopadu. Závislost je velmi silná u kritického úhlu.

Koeficienty odrazu a transmise rozhraním

Rovněž správné (tj. osvědčené experimentem a kompatibilní s Maxwellovými rovnicemi a podmínkami na rozhraní) amplitudové koeficienty odrazu a průchodu rozhraním dostaneme dosazením ryze imaginárního $\cos \tilde{\theta}_t$ do Fresnelových koeficientů. Pro $\theta_i > \theta_C$ jsou tyto koeficienty komplexní, což znamená obecné fázové posuvy mezi odraženou a dopadající vlnou a mezi složkami evanescentní vlny a dopadající vlnou.

Koeficient odrazu v polarizaci s

Dosadíme-li komplexní úhel lomu $\tilde{\theta}_t$ do Fresnelova vztahu

$$\tilde{r}_s = \frac{\tilde{E}_{ry}}{\tilde{E}_{iy}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \tilde{\theta}_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \tilde{\theta}_t} = \frac{n_1 \cos \theta_i + in_2 \gamma}{n_1 \cos \theta_i - in_2 \gamma},$$

dostaneme čísel a jmenovatel jako komplexně sdružená čísla. Proto

$$\tilde{r}_s \tilde{r}_s^* = 1, \quad \tilde{r}_s = e^{i\delta_{rs}},$$

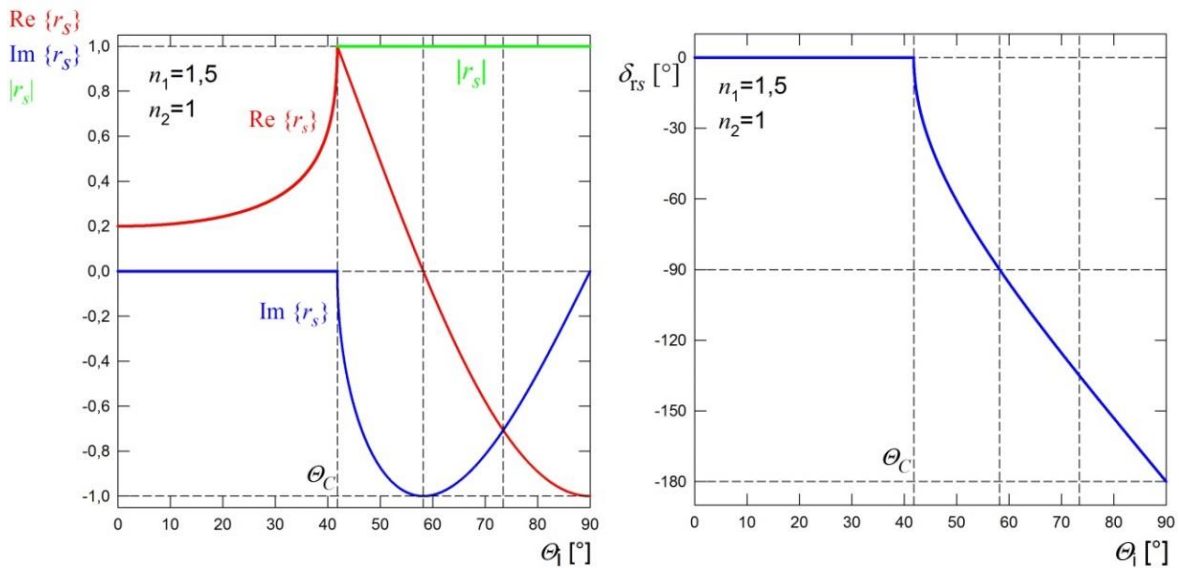
$$\tilde{r}_s = \frac{\exp \frac{i\delta_{rs}}{2}}{\exp \frac{-i\delta_{rs}}{2}}$$

$$\gamma = i \cos \tilde{\theta}_t = -\frac{1}{n_2} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}$$

$$\tan \frac{\delta_{rs}}{2} = \frac{n_2 \gamma}{n_1 \cos \theta_i} = \frac{-\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_i},$$

$$\delta_{rs} = 2 \arctan \frac{n_2 \gamma}{n_1 \cos \theta_i} = 2 \arctan \left(\frac{-\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_i} \right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_s &= \frac{n_1 \cos \theta_i + in_2 \gamma}{n_1 \cos \theta_i - in_2 \gamma} \frac{n_1 \cos \theta_i + in_2 \gamma}{n_1 \cos \theta_i + in_2 \gamma} = \\ &= \frac{n_1^2 \cos^2 \theta_i - n_2^2 \gamma^2}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} + i \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} = \text{Re}\{\tilde{r}_s\} + i \text{Im}\{\tilde{r}_s\} \end{aligned}$$



Obr. 3.23 Závislost reálné a imaginární části amplitudového koeficientu odrazu na úhlu dopadu pro polarizaci s. V pravé části je závislost fázového posuvu odražené vlny oproti vlně dopadající. Pro $\theta_i < \theta_c$ je $|r_s| = \text{Re}\{r_s\}$.

Koeficient průchodu v polarizaci s

$$\tilde{t}_s = \frac{\tilde{E}_{ty}}{\tilde{E}_{iy}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \tilde{\theta}_t} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i - in_2 \gamma'}$$

$$\operatorname{Re}\{\tilde{t}_s\} = \frac{2n_1^2 \cos^2 \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2}, \quad \operatorname{Im}\{\tilde{t}_s\} = \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2},$$

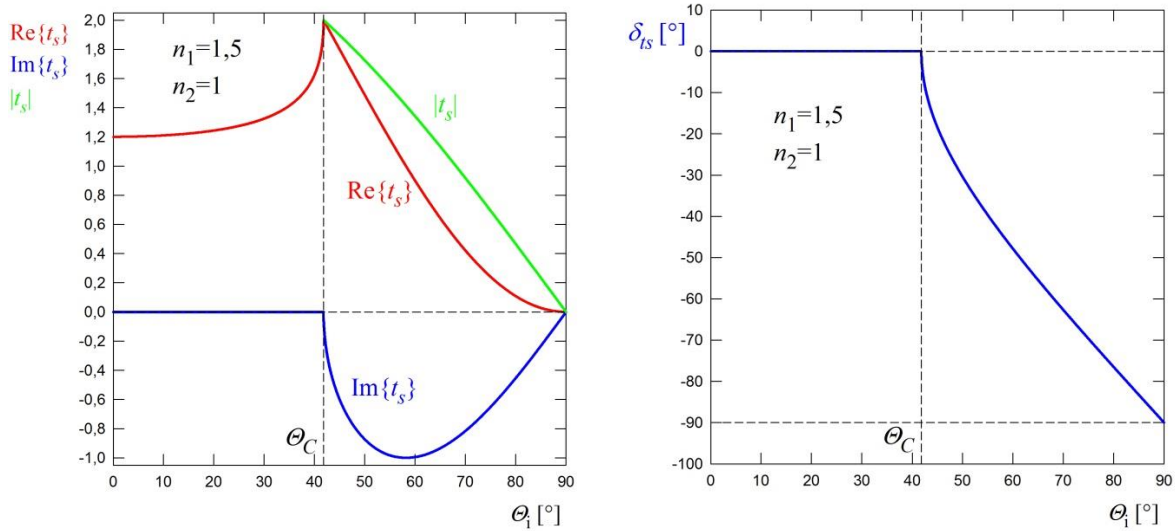
$$|\tilde{t}_s|^2 = \tilde{t}_s \tilde{t}_s^* = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i - in_2 \gamma} \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + in_2 \gamma} = \frac{4n_1^2 \cos^2 \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} =$$

$$= \frac{4n_1^2 \cos^2 \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1 \right)} = \frac{4n_1^2 \cos^2 \theta_i}{n_1^2 - n_2^2},$$

$$|\tilde{t}_s| = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}},$$

$$\operatorname{tg} \delta_{ts} = \frac{\operatorname{Im}\{\tilde{t}_s\}}{\operatorname{Re}\{\tilde{t}_s\}} = \frac{n_2 \gamma}{n_1 \cos \theta_i} = \operatorname{tg} \frac{\delta_{rs}}{2},$$

$$\delta_{ts} = \operatorname{arctg} \frac{n_2 \gamma}{n_1 \cos \theta_i} = \operatorname{arctg} \left(\frac{-1}{n_1 \cos \theta_i} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2} \right).$$



Obr. 3.24 Závislost reálné a imaginární části amplitudového koeficientu průchodu na úhlu dopadu pro polarizaci s. V pravé části je závislost fázového posuvu procházející vlny oproti vlně dopadající.

Ověřme vztah $\tilde{t}_s = \tilde{r}_s + 1$, který v polarizaci s zajišťuje spojitost tečných složek na rozhraní

$$\tilde{t}_s = \tilde{r}_s + 1 = \frac{n_1 \cos \theta_i + in_2 \gamma}{n_1 \cos \theta_i - in_2 \gamma} + \frac{n_1 \cos \theta_i - in_2 \gamma}{n_1 \cos \theta_i - in_2 \gamma} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i - in_2 \gamma}.$$

Koeficient odrazu v polarizaci p

Opět můžeme vyjít z Fresnelova vztahu pro amplitudový koeficient odrazu v polarizaci p

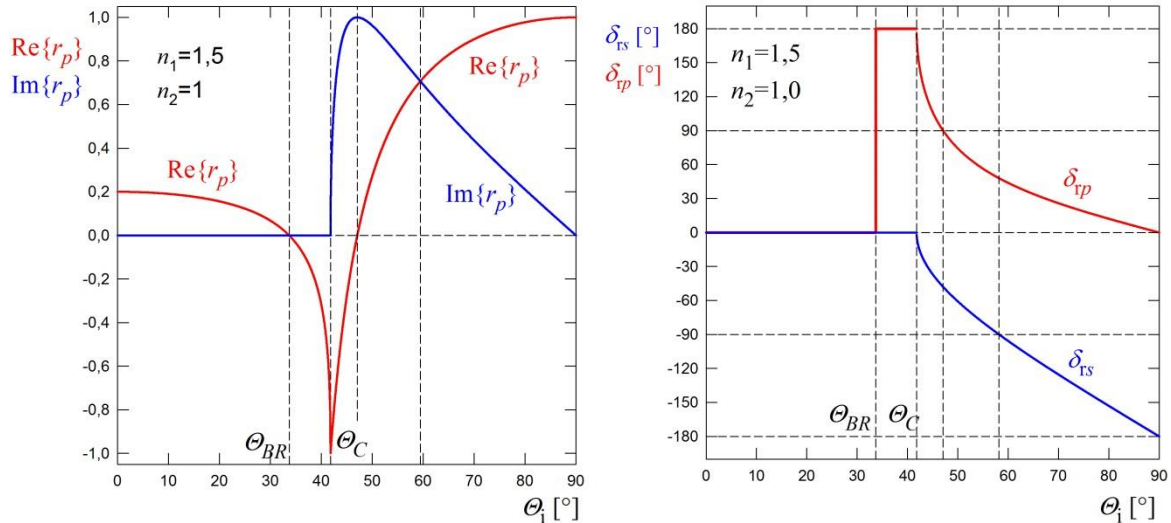
$$\begin{aligned}\tilde{r}_p &= \frac{\tilde{E}_{rx}}{\tilde{E}_{ix}} = -\frac{\tilde{E}_{rz}}{\tilde{E}_{iz}} = \frac{n_1 \cos \tilde{\theta}_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \tilde{\theta}_t + n_2 \cos \theta_i} = \frac{-in_1 \gamma - n_2 \cos \theta_i}{-in_1 \gamma + n_2 \cos \theta_i} = \\ &= \frac{n_2 \cos \theta_i + in_1 \gamma}{-n_2 \cos \theta_i + in_1 \gamma} \frac{n_2 \cos \theta_i + in_1 \gamma}{n_2 \cos \theta_i + in_1 \gamma} = \\ &= \frac{n_1^2 \gamma^2 - n_2^2 \cos^2 \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2} - i \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2}.\end{aligned}$$

Podobně jako pro polarizaci s je i pro polarizaci p

$$|\tilde{r}_p|^2 = \frac{-in_1 \gamma - n_2 \cos \theta_i}{-in_1 \gamma + n_2 \cos \theta_i} \frac{in_1 \gamma - n_2 \cos \theta_i}{in_1 \gamma + n_2 \cos \theta_i} = \frac{-1}{-1} = 1,$$

$$\tilde{r}_p = e^{i\delta_{rp}} = \frac{e^{i\frac{\delta_{rp}}{2}}}{e^{-i\frac{\delta_{rp}}{2}}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{rp}}{2} = \frac{n_1 \gamma}{n_2 \cos \theta_i}.$$



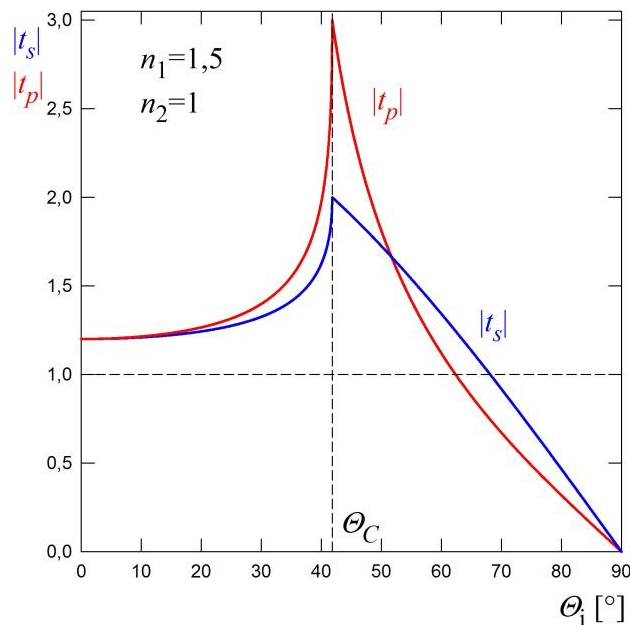
Obr. 3.25 Závislost reálné a imaginární části amplitudového koeficientu odrazu pro polarizaci p na úhlu dopadu. V pravé části jsou závislosti fázového posuvu odražené vlny proti vlně dopadající pro obě polarizace.

Význačné úhly

$n_1 = 1,5, n_2 = 1$		
Polarizace	<i>s</i>	<i>p</i>
Brewsterův úhel θ_{BR}	-	33,69°
Kritický úhel θ_C	41,81°	41,81°
$\text{Re}\{\tilde{r}\} = 0, \delta_r = \pm 90^\circ$	58,19°	47,07°
$\text{Re}\{\tilde{r}\} = \text{Im}\{\tilde{r}\} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	73,43°	59,46°

Koeficient transmise v polarizaci *p*

$$\begin{aligned} \tilde{t}_p &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \tilde{\theta}_t + n_2 \cos \theta_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i - in_1 \gamma} \frac{n_2 \cos \theta_i + in_1 \gamma}{n_2 \cos \theta_i + in_1 \gamma} = \\ &= \frac{2n_1 n_2 \cos^2 \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2} + i \frac{2n_1^2 \gamma \cos \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2} \end{aligned}$$



Obr. 3.26 Velikost amplitudových koeficientů průchodu pro polarizace *s* a *p*

Konzistence uvedeného formalismu s Maxwellovými rovnicemi

Jak již bylo zmíněno, je třeba ukázat, že výše zavedený formalismus není v rozporu s Maxwellovými rovnicemi a obecnými požadavky na spojitost složek pole na rozhraní dvou prostředí.

Polarizace s

Nenulové složky elektromagnetického pole evanescentní vlny v našem souřadném systému v prostředí 2 jsou

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = (0, E_0 \tilde{\epsilon}_s e^{iax} e^{-bz} e^{-i\omega t}, 0),$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_t = \left(-\frac{i}{\omega} b \tilde{E}_{ty}, 0, \frac{a}{\omega} \tilde{E}_{ty} \right),$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_t = \left(\frac{\omega}{c} n_1 \sin \theta_i, 0, ib \right),$$

kde

$$a = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \theta_i, \quad b = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2} = -\frac{\omega}{c} n_2 \gamma,$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} = -\frac{\omega}{c} n_2.$$

Pro toto pole lze snadno spočítat splnění Maxwellových rovnic

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}}_t = 0, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}}_t = 0,$$

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}_t = (b \tilde{E}_{ty}, 0, ia \tilde{E}_{ty}) = \left(-\frac{\partial \tilde{B}_{tx}}{\partial t}, -\frac{\partial \tilde{B}_{ty}}{\partial t}, -\frac{\partial \tilde{B}_{tz}}{\partial t} \right),$$

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}}_t = \left(0, \frac{i}{\omega} \tilde{E}_{ty} (b^2 - a^2), 0 \right) = \epsilon_0 \mu_0 n_2^2 \left(\frac{\partial \tilde{E}_{tx}}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{E}_{ty}}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{E}_{tz}}{\partial t} \right).$$

Maxwellovým rovnicím vyhovuje evanescentní vlna, ve které je \mathbf{E} orientováno kolmo na rovinu dopadu (definice polarizace s) a kolmo na reálnou i imaginární část vlnového vektoru. Ve fázi s tímto elektrickým polem kmitá příčná složka magnetického pole B_z , která leží v rovině dopadu a je kolmá na reálnou část vlnového vektoru (směr šíření vlnoploch). Ve fázi posunutá o $\pi/2$ kmitá **podélná** složka magnetického pole $B_x = -\frac{i}{\omega} b \tilde{E}_{ty}$, která leží v rovině dopadu i v rovině rozhraní a je rovnoběžná s reálnou částí vlnového vektoru.

Provedeme kontrolu spojitosti tečné složky elektrického pole v místě $\mathbf{r} = 0$. Pro jednoduchost zápisu zvolme $E_0 = 1$.

$$E_{iy}(z=0) = \operatorname{Re} \{e^{-i\omega t}\} = \cos \omega t,$$

$$E_{ry}(z=0) = \text{Re} \{ \tilde{r}_s e^{-i\omega t} \} =$$

$$= \frac{n_1^2 \cos^2 \theta_i - n_2^2 \gamma^2}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} \cos \omega t + \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} \sin \omega t,$$

$$E_{ty}(z=0) = \text{Re} \{ \tilde{t}_s e^{-i\omega t} \} =$$

$$= \frac{2n_1^2 \cos^2 \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} \cos \omega t + \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} \sin \omega t,$$

kde \tilde{r}_s a \tilde{t}_s jsou koeficienty spočtené výše uvedeným formálním zobecněním Fresnelových koeficientů do komplexního oboru. Součet intenzity elektrického pole dopadající a odražené vlny v prostředí 1 je roven vlně procházející rozhraním:

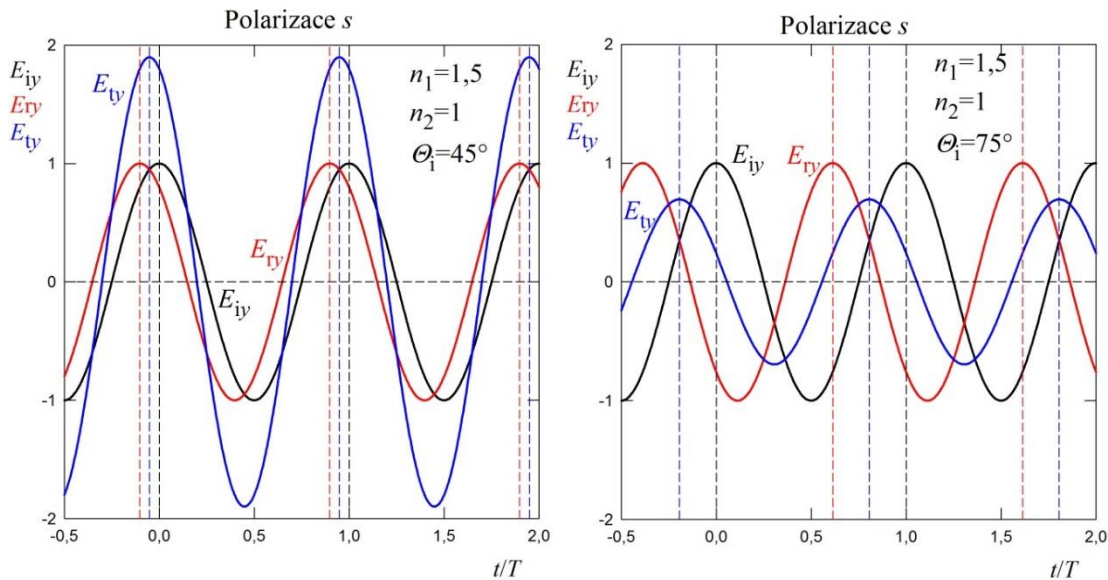
$$E_{iy}(z=0) = \text{Re} \{ e^{-i\omega t} \} = \cos \omega t,$$

$$E_{ry}(z=0) = \text{Re} \{ \tilde{r}_s e^{-i\omega t} \} =$$

$$= \frac{n_1^2 \cos^2 \theta_i - n_2^2 \gamma^2}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} \cos \omega t + \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} \sin \omega t,$$

$$E_{iy} + E_{ry} = \left(1 + \frac{n_1^2 \cos^2 \theta_i - n_2^2 \gamma^2}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} \right) \cos \omega t + \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} \sin \omega t =$$

$$= \frac{2n_1^2 \cos^2 \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} \cos \omega t + \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos \theta_i}{n_1^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \gamma^2} \sin \omega t = E_{ty}.$$



Obr. 3.27 Časové průběhy elektrického pole vlny dopadající (černě), odražené (červeně) a procházející (modře) rozhraním z prostředí o indexu lomu 1,5 do prostředí o indexu lomu 1. V levé části obrázku úhel dopadu v prostředí 1 je 45° a v pravé části úhel dopadu je 75° . Obrázek znázorňuje, proč s rostoucím fázovým rozdílem amplituda procházející vlny klesá.

Polarizace p

Nenulové složky elektromagnetického pole evanescentní vlny v našem souřadném systému v prostředí 2 jsou

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_t &= \left(-i\tilde{t}_p\gamma E_0 e^{iax} e^{-bz} e^{-i\omega t}, 0, -\tilde{t}_p \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i E_0 e^{iax} e^{-bz} e^{-i\omega t} \right), \\ \tilde{\mathbf{B}}_t &= \left(0, \tilde{t}_p \frac{n_2}{c} E_0 e^{iax} e^{-bz} e^{-i\omega t}, 0 \right).\end{aligned}$$

Složka elektrického pole evanescentní vlny E_{tz} je kolmá na reálnou část vlnového vektoru $\text{Re}\{k_t\}$ a kmitá ve fázi s polem magnetickým. Podélná složka E_{tx} kmitá fázově posunutá o $\pi/2$, takže koncový bod vektoru elektrického pole opisuje v **rovině dopadu** elipsu; vlna není příčná. Jedná se o zcela odlišný případ, než je eliptická polarizace homogenní rovinné vlny, ve které všechny komponenty elektrického i magnetického pole kmitají v rovině kolmé na vlnový vektor (elipticky polarizovaná vlna je příčná).

Rovněž toto pole splňuje Maxwellovy rovnice, jak se lze přesvědčit přímým dosazením.

Spojitosť tečných složek elektrického pole ukážeme v místě $\mathbf{r} = 0$. Dopadající, odražená a procházející vlna (pro $E_0 = 1$)

$$\begin{aligned}E_{ix} &= \text{Re} \{ e^{-i\omega t} \} \cos \theta_i = \cos \theta_i \cos \omega t, \\ E_{rx} &= \text{Re} \{ \tilde{r}_p e^{-i\omega t} \} \cos \theta_i = [\text{Re} \{ \tilde{r}_p \} \cos \omega t + i \text{Im} \{ \tilde{r}_p \} (-i \sin \omega t)] \cos \theta_i = \\ &= \frac{n_1^2 \gamma^2 - n_2^2 \cos^2 \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2} \cos \theta_i \cos \omega t - \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2} \cos \theta_i \sin \omega t.\end{aligned}$$

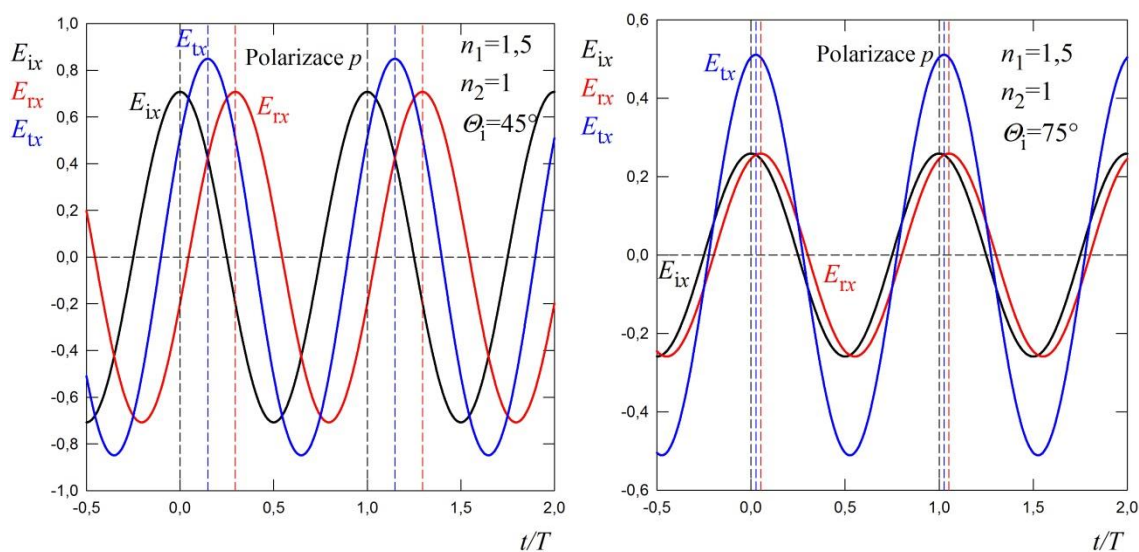
Tečná složka celkového pole ze strany prostředí 1 je v místě $\mathbf{r} = 0$

$$\begin{aligned}E_{ix} + E_{rx} &= \\ &= \left(1 + \frac{n_1^2 \gamma^2 - n_2^2 \cos^2 \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2} \right) \cos \theta_i \cos \omega t - \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2} \cos \theta_i \sin \omega t = \\ &= \frac{n_1^2 \gamma^2 - n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2} \cos \theta_i \cos \omega t - \\ &\quad - \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2} \cos \theta_i \sin \omega t = \\ &= \frac{2n_1^2 \gamma^2 \cos \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2} \cos \omega t - \frac{2n_1 n_2 \gamma \cos^2 \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2 \gamma^2} \sin \omega t.\end{aligned}$$

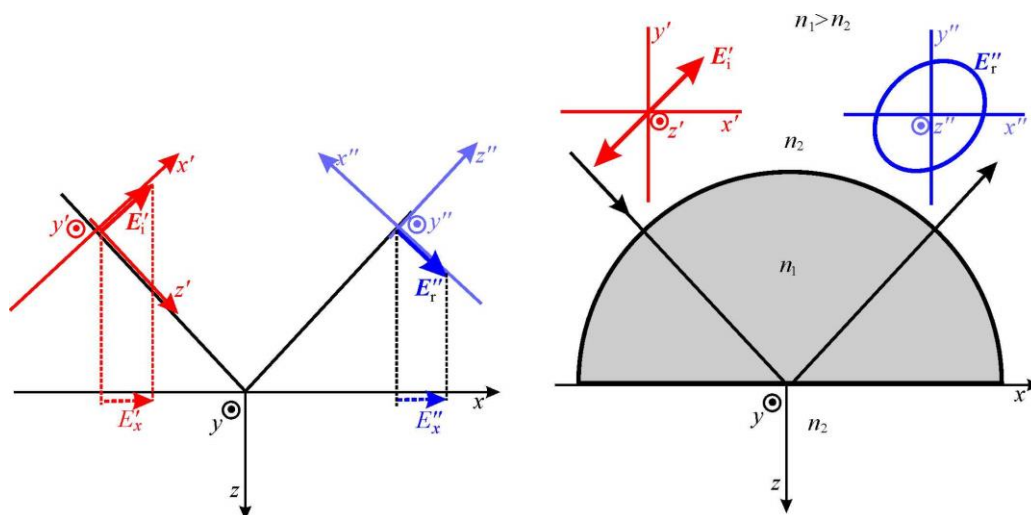
Tečná složka ze strany prostředí 2 je

$$\begin{aligned}E_{tx} &= \text{Re} \{ -i\tilde{t}_p \gamma e^{-i\omega t} \} = -i \text{Im} \{ \tilde{t}_p \} \gamma \cos \omega t + (-i) \text{Re} \{ \tilde{t}_p \} \gamma (-i \sin \omega t) = \\ &= \text{Im} \{ \tilde{t}_p \} \gamma \cos \omega t - \text{Re} \{ \tilde{t}_p \} \gamma \sin \omega t =\end{aligned}$$

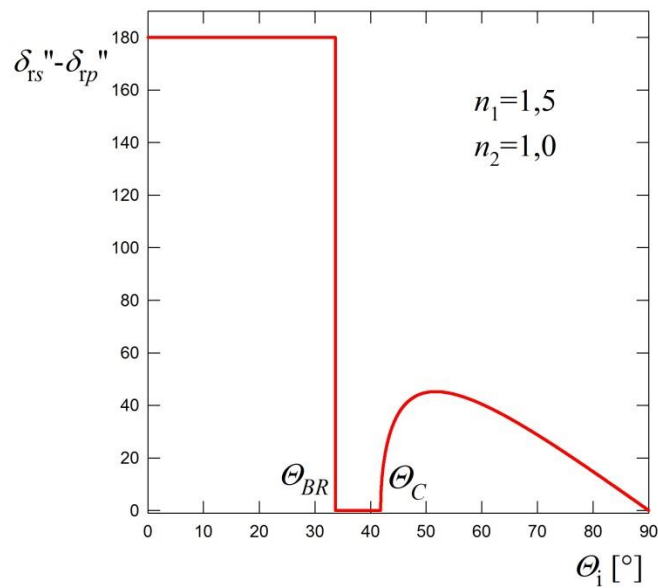
$$= \frac{2n_1^2\gamma^2 \cos \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2\gamma^2} \cos \omega t - \frac{2n_1n_2\gamma \cos^2 \theta_i}{n_2^2 \cos^2 \theta_i + n_1^2\gamma^2} \sin \omega t = E_{ix} + E_{rx}.$$



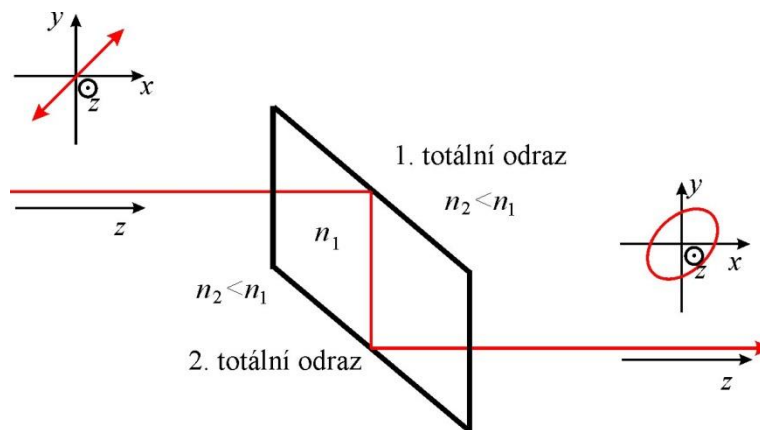
Obr. 3.28 Časové průběhy tečné složky elektrického pole vlny dopadající (černě), odražené (červeně) a procházející (modře) rozhraním z prostředí o indexu lomu 1,5 do prostředí o indexu lomu 1. V levé části obrázku úhel dopadu v prostředí 1 je 45° a v pravé části úhel dopadu je 75° . S rostoucím úhlem dopadu se díky průmětu do osy x tečné složky pole zmenšují, relativně vysoké je procházející pole, což je způsobeno malým fázovým posuvem. Srovnej s obr. 3.25 pro polarizaci s .



Obr. 3.29 Změna polarizace při totálním odrazu popsána v souřadných systémech pro dopadající a odraženou vlnu, kdy je polarizace znázorněná při pohledu proti směru šíření z' a z'' . Protože fázové posuvy při totálním odrazu jsou různé pro polarizace s a p , vzniká při odrazu lineárně polarizované vlny obecně vlna polarizovaná elipticky.



Obr. 3.30 Závislost **rozdílu** fázových posunů v souřadném systému pro odraženou vlnu " pro polarizaci *s* a *p* na úhlu dopadu. Pro vnitřní odraz ve skle je maximální rozdíl fázových posunů 45,24°, takže jednoduchý totální odraz na vytvoření kruhově polarizovaného záření nestačí, ale dvojitý odraz ve Fresnelově hranolu (obr. 3.31) postačuje.



Obr 3.31 Fresnelův hranol využívající dvojnásobného totálního odrazu ke změně polarizačního stavu záření. Princip součástky je založen na tom, že při každém z totálních odrazů dochází ke změně fáze záření, jež závisí na úhlu dopadu a která je různá pro *s*- a *p*-složku polarizace. Zde je uveden příklad změny lineárně polarizované vlny na vstupu na elipticky polarizovanou vlnu na výstupu. Při vhodné volbě úhlů dopadu a orientace vstupujícího lineárně polarizovaného záření lze získat i záření kruhově polarizované.

Dodatek 3.6 Částečně stojaté vlnění v prostředí 1

Dosud jsme se zabývali popisem odrazu a lomu v rovině rozhraní a odvodili jsme Fresnelovy amplitudové a intenzitní koeficienty odrazu a transmise. V dalším textu se budeme zabývat tím, jaký je charakter vlnění v prostoru před a za rozhraním. Rozšíříme tedy stávající popis z roviny rozhraní na celý prostor. Nejprve popíšeme situaci při kolmém dopadu na neabsorbující prostředí.

Kolmý dopad

Předpokládejme, že na rozhraní dvou dielektrik s indexy lomu n_1, n_2 dopadá kolmo (ve směru kladné osy z) lineárně polarizovaná rovinná vlna s vektorem \mathbf{E} kmitajícím ve směru osy x .

Zaměříme se nejprve na popis situace před rozhraním ($z < 0$). Od rozhraní se odráží zpět vlna s amplitudovým koeficientem r . Obě vlny se skládají.

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{ix}(z, t) &= E_0 e^{i(k_1 z - \omega t)}, \\ \tilde{E}_{rx}(z, t) &= r E_0 e^{i(-k_1 z - \omega t)}.\end{aligned}$$

Celkové elektrické pole před rozhraním je

$$\begin{aligned}E_{1x}(z, t) &= E_{ix}(z, t) + E_{rx}(z, t) = E_0 \operatorname{Re} \left\{ (e^{ik_1 z} + r e^{-ik_1 z}) e^{-i\omega t} \right\} = \\ &= E_0 \operatorname{Re} \left\{ [r (e^{ik_1 z} + e^{-ik_1 z}) + (1 - r) e^{ik_1 z}] e^{-i\omega t} \right\} = \\ &= E_0 \operatorname{Re} \left\{ 2r \cos(k_1 z) e^{-i\omega t} \right\} + E_0 \operatorname{Re} \left\{ (1 - r) e^{ik_1 z} e^{-i\omega t} \right\} = \\ &= 2r E_0 \cos(k_1 z) \cos(\omega t) + \\ &\quad + E_0 (1 - r) [\cos(k_1 z) \cos(\omega t) + \sin(k_1 z) \sin(\omega t)] = \\ &= E_0 [(1 + r) \cos(k_1 z) \cos(\omega t) + (1 - r) \sin(k_1 z) \sin(\omega t)].\end{aligned}$$

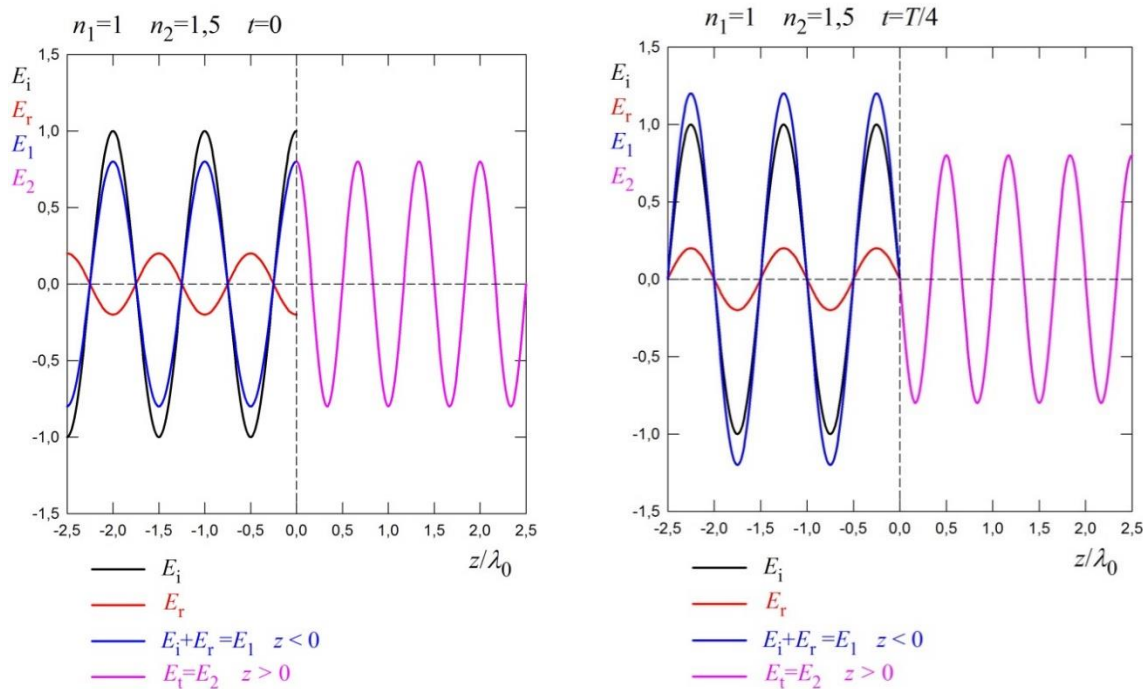
Vlnění před rozhraním má charakter tzv. částečně stojaté vlny. Elektrické pole dopadající vlny, odražené vlny, jejich součtu a elektrické pole vlny procházející jsou uvedeny na obr. 3.28 ($t = 0$) a 3.14 ($t = \frac{T}{4}$) pro dopad z opticky řidšího ($n_1 = 1$) do opticky hustšího prostředí ($n_2 = 1,5$).

Elektrické pole za rozhraním $z > 0$ je pole čistě postupné vlny s amplitudou tE_0

$$E_{tx}(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \bar{t} E_0 e^{i(k_2 z - \omega t)} \right\} = \bar{t} E_0 [\cos(k_2 z) \cos(\omega t) + \sin(k_2 z) \sin(\omega t)],$$

kde \bar{t} je symbol pro koeficient průchodu rozhraním (při kolmém dopadu je

$$\bar{t} = t_s = t_p = 1 + r = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}), \text{ zatímco } t \text{ je proměnná – čas.}$$



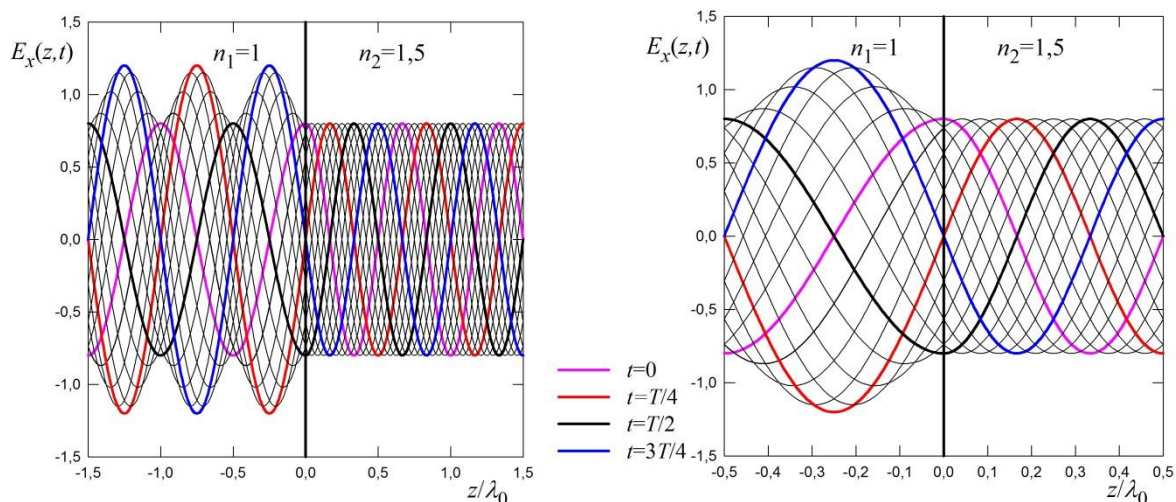
Obr. 3.32 Prostorová závislost elektrického pole vlny dopadající E_i , vlny odražené E_r , jejich součtu E_1 a vlny procházející E_2 pro případ kolmého dopadu z opticky řidšího ($n_1 = 1$) do opticky hustšího prostředí ($n_2 = 1,5$) pro časy $t = 0$ a $t = T/4$. Koeficient odrazu $r = -0,2$, koeficient transmise $\bar{t}_p = 0,8$.

Elektrické pole za rozhraním $z > 0$ je pole čistě postupné vlny s amplitudou $\bar{t}E_0$. Průběh elektrického pole pro 16 různých časů mezi 0 a T pro kolmý dopad z opticky řidšího do opticky hustšího prostředí je zobrazena na obr. 3.32 a průběh magnetického pole na obr. 3.33. Obě pole před rozhraním jsou charakterizována složením postupného vlnění s neúplně vykreslenými kmitnami a uzly.

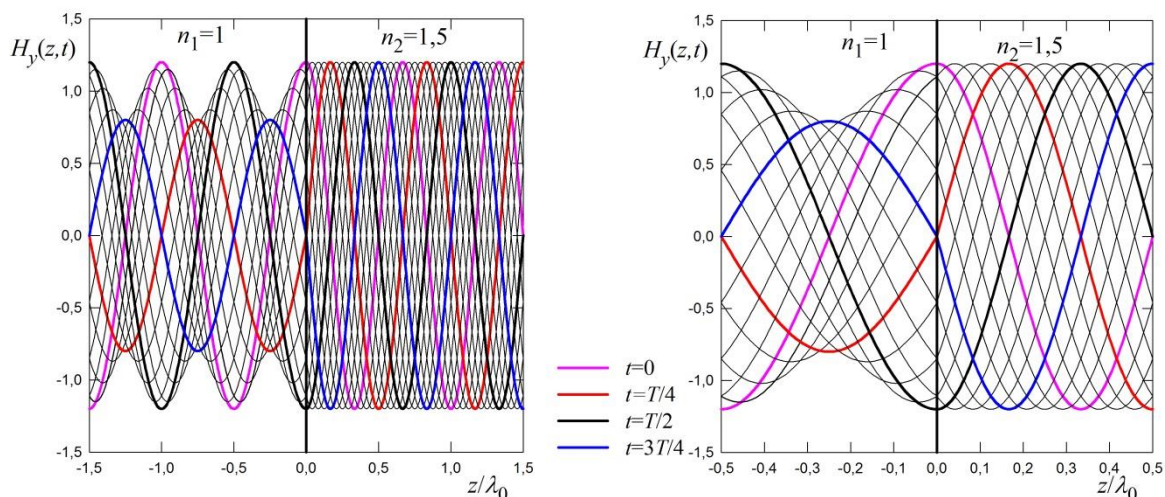
Magnetické pole před rozhraním je charakterizováno složením postupné vlny se stojatou komponentou. V důsledku otočení vlnového vektoru při odrazu se mění znaménko pro magnetické pole u odražené vlny

$$\begin{aligned}
 H_{1y}(z, t) &= \frac{n_1}{c\mu_0} E_{ix}(z, t) - E_{rx}(z, t) = \frac{n_1}{c\mu_0} E_0 \operatorname{Re} \left\{ (e^{ik_1z} - r e^{-ik_1z}) e^{-i\omega t} \right\} = \\
 &= \frac{n_1}{c\mu_0} E_0 \operatorname{Re} \left\{ [r (e^{ik_1z} - e^{-ik_1z}) + (1 - r) e^{ik_1z}] e^{-i\omega t} \right\} = \\
 &= \frac{n_1}{c\mu_0} E_0 \operatorname{Re} \left\{ 2ir \sin(k_1z) e^{-i\omega t} \right\} + \frac{n_1}{c\mu_0} \operatorname{Re} \left\{ (1 - r) e^{ik_1z} e^{-i\omega t} \right\} = \\
 &= \frac{n_1}{c\mu_0} E_0 \left\{ 2r \sin(k_1z) \sin(\omega t) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 - r) [\cos(k_1z) \cos(\omega t) + \sin(k_1z) \sin(\omega t)] \right\} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{n_1}{c\mu_0} E_0 [(1+r) \sin(k_1 z) \sin(\omega t) + (1-r) \cos(k_1 z) \cos(\omega t)].$$



Obr. 3.33 Průběh **elektrického** pole pro 16 různých časů mezi 0 a T pro kolmý dopad z opticky řidšího na opticky hustší prostředí. Pro $z < 0$ složením dopadající a odražené vlny vzniká částečně stojaté vlnění, ve kterém jsou kmitny vzdáleny o $\lambda/2$, mezi nimi jsou uzly. Pro $z > 0$ se prostředím 2 šíří postupná vlna. Detail v pravé části ukazuje spojitost elektrického pole na rozhraní v každém okamžiku. Amplituda dopadající vlny $E_0 = 1$. Na rozhraní je minimum – uzel. Ve vzdálenosti $\frac{\lambda_0}{4}$ před rozhraním vzniká maximum obálky vlnění (kmitna).



Obr. 3.34 Průběh **magnetického** pole pro 16 různých časů mezi 0 a T pro kolmý dopad z opticky řidšího na opticky hustší prostředí. Pro $z < 0$ složením dopadající a odražené vlny vzniká částečně stojaté vlnění, ve kterém jsou kmitny vzdáleny o $\lambda/2$, mezi nimi jsou uzly. Na rozhraní je maximum – kmitna. Ve vzdálenosti $\frac{\lambda_0}{4}$ před rozhraním vzniká minimum obálky vlnění (uzel).

Hustota energie elektrického pole

$$\begin{aligned}
 w_E &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_1^2 (\operatorname{Re}\{\tilde{E}\})^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_1^2 E_0^2 [(1+r) \cos(k_1 z) \cos(\omega t) + (1-r) \sin(k_1 z) \sin(\omega t)]^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 n_1^2 E_0^2 [(1+r)^2 \cos^2(k_1 z) \cos^2(\omega t) + \\
 &\quad + 2(1-r^2) \cos(k_1 z) \sin(k_1 z) \cos(\omega t) \sin(\omega t) + \\
 &\quad + (1-r)^2 \sin^2(k_1 z) \sin^2(\omega t)].
 \end{aligned}$$

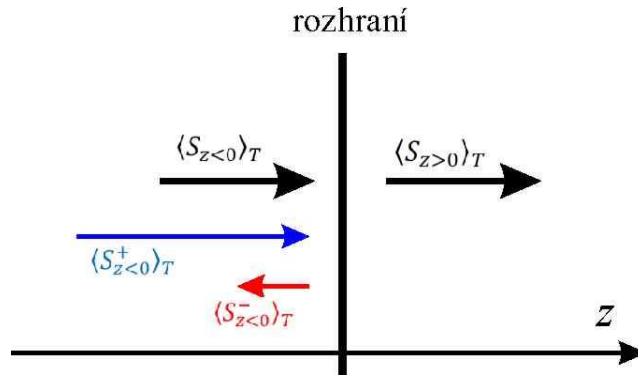
Časová střední hodnota objemové hustoty energie elektrického pole

$$\begin{aligned}
 \langle w_E \rangle_T &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 n_1^2 E_0^2 [(1+r)^2 \cos^2(k_1 z) + (1-r)^2 \sin^2(k_1 z)] = \\
 &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 n_1^2 E_0^2 \{ (1+r^2) [\cos^2(k_1 z) + \sin^2(k_1 z)] + 2r [\cos^2(k_1 z) - \sin^2(k_1 z)] \} = \\
 &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 n_1^2 E_0^2 [(1+r^2) + 2r \cos(2k_1 z)].
 \end{aligned}$$

Časová střední hodnota objemové hustoty energie elektrického pole je závislá na poloze z , jak lze předpokládat při pohledu na obr. 3.35. Připomeňme, že tato veličina je jednou z definic intenzity záření. Vyzkoušejme druhou definici intenzity záření používající velikost Poyntingova vektoru

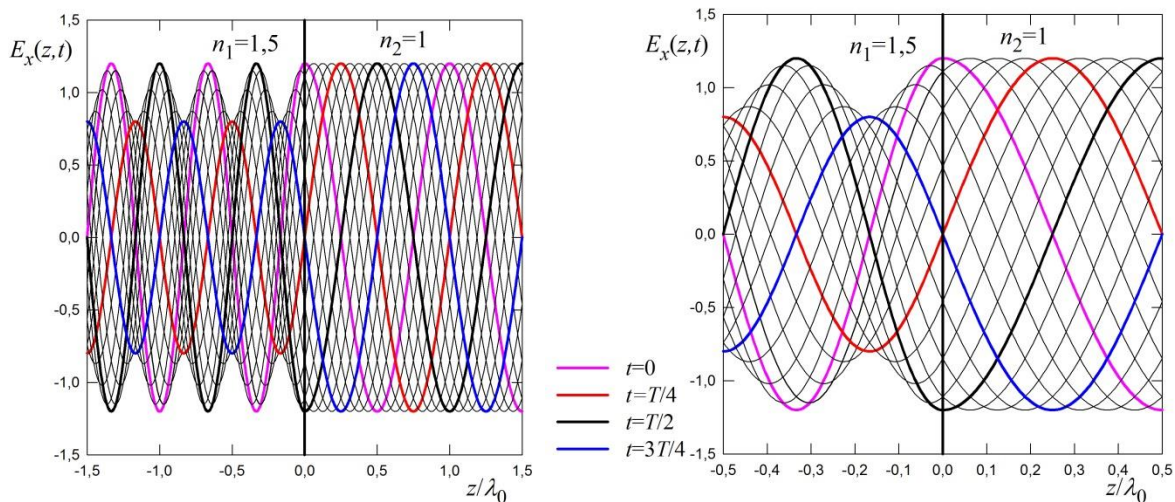
$$\begin{aligned}
 \langle S_z \rangle_T &= \langle E_x H_y \rangle_T = \\
 &= \langle E_0 [(1+r) \cos(k_1 z) \cos(\omega t) + (1-r) \sin(k_1 z) \sin(\omega t)] \times \\
 &\quad \times \frac{n_1}{c\mu_0} E_0 [(1+r) \sin(k_1 z) \sin(\omega t) + (1-r) \cos(k_1 z) \cos(\omega t)] \rangle_T = \\
 &= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 n_1 E_0^2 [(1-r^2) \cos^2(k_1 z) + (1-r^2) \sin^2(k_1 z)] = \\
 &= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 n_1 E_0^2 (1-r^2) = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 n_1 E_0^2 - \frac{1}{2} c \varepsilon_0 n_1 E_0^2 r^2 = \langle S_{z<0}^+ \rangle_T - |\langle S_{z<0}^- \rangle_T|
 \end{aligned}$$

což na prostorové souřadnici z nezávisí. Zmíněné definice dávají v případě částečně stojatého vlnění rozdílné výsledky. Střední hodnota Poyntingova vektoru vyjadřující plošnou hustotu toku celkové energie splňuje „součtové pravidlo“ pro vlnu běžící zleva doprava a pro vlnu běžící zprava doleva $\langle S_{z<0} \rangle_T = \langle S_{z<0}^+ \rangle_T + \langle S_{z<0}^- \rangle_T = \langle S_{z>0} \rangle_T$, což je důsledkem spojitosti tečných složek elektrického E a magnetického pole H .



Obr. 3.35 Bilance středních hodnot Poyntingova vektoru při kolmém dopadu

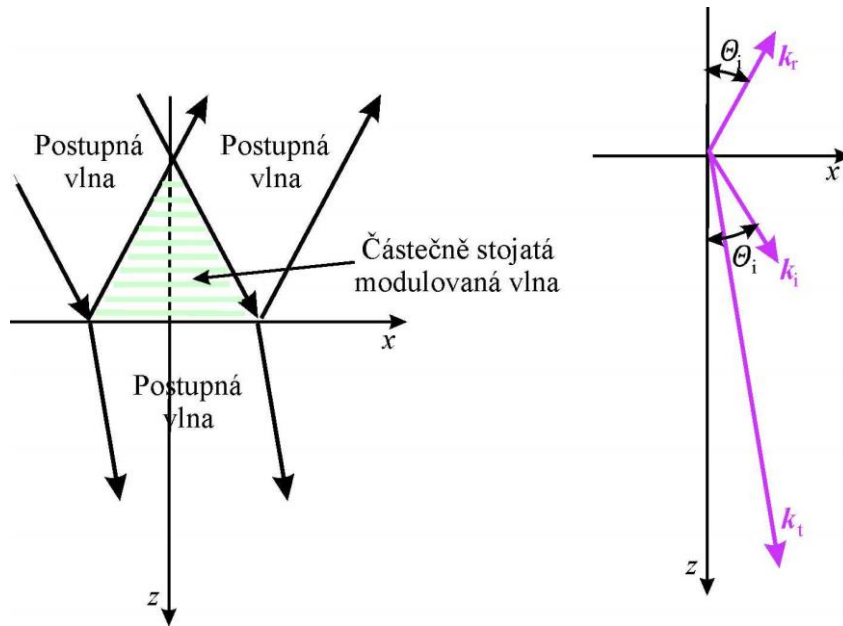
V případě odrazu na opticky řidším prostředí se projeví opačné znaménko koeficientu r , jak je zřejmé z obr. 3.36 pro kolmý dopad z optiky hustšího do opticky řidšího prostředí.



Obr. 3.36 Průběh elektrického pole pro 16 různých časů mezi 0 a T pro kolmý dopad z optiky hustšího do opticky řidšího prostředí. Na rozhraní je kmitna elektrického pole a uzel magnetického pole (v obrázku nezakresleno). Za rozhraním je vlnění postupné.

Šikmý dopad

V případě šikmého dopadu prostorově omezeného svazku aproximovaného modelem rovinné vlny dochází ke vzniku částečně stojatého vlnění v oblasti před rozhraním, kde se dopadající a odražený svazek kříží. V ostatních částech prostoru před i za rozhraním má vlnění charakter postupných vln. (obr. 3.37).



Obr. 3.37 Schématické zobrazení charakteru vlnění při šikmém dopadu prostorově omezeného svazku. Světle zelenými proužky je naznačena modulace intenzity ve směru osy z v důsledku interference dopadající a odražené vlny.

Alespoň zhruba nastiňme představu o poli v oblasti interference dopadající a odražené vlny, kde skládáme rovinné vlny stejné frekvence, s různým směrem vlnových vektorů a hlavně různých amplitud. Popis je podobný jako v případě výše uvedeného kolmého dopadu, je však poněkud složitější. Pokud se budeme zabývat elektrickým polem, je jednodušší případ polarizace s . Dopadající a odražená vlna

$$\tilde{E}_{iy}(x, z, t) = E_0 e^{i(k_1 x \sin \theta_i + k_1 z \cos \theta_i - \omega t)},$$

$$\tilde{E}_{ry}(x, z, t) = r_s E_0 e^{i(k_1 x \sin \theta_i - k_1 z \cos \theta_i - \omega t)}.$$

Podobně jako v případě kolmého dopadu můžeme pole v prostředí 1 rozdělit na část „stojatá“ vlny a zbytek vlny dopadající, která není „využitá“ pro vlnu „stojatou“ a zůstává vlnou postupnou. Uvozovky jsou použity v označení vlny, protože se nejedná o typicky stojatou vlnu s nepohyblivými vlnoplochy.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1y}(x, z, t) &= r_s E_0 \left[e^{i(k_1 x \sin \theta_i + k_1 z \cos \theta_i - \omega t)} + e^{i(k_1 x \sin \theta_i - k_1 z \cos \theta_i - \omega t)} \right] + \\ &+ (1 - r_s) E_0 e^{i(k_1 x \sin \theta_i + k_1 z \cos \theta_i - \omega t)} = \\ &= 2 r_s E_0 \cos(k_1 z \cos \theta_i) e^{i(k_1 x \sin \theta_i)} e^{-i\omega t} + \\ &+ (1 - r_s) E_0 e^{i(k_1 x \sin \theta_i + k_1 z \cos \theta_i - \omega t)}, \end{aligned}$$

kde první část představuje nehomogenní vlnu s rovinnými vlnoplochy kolnými na osu x , které se pohybují fázovou rychlostí $v_f = \frac{c}{n_1 \sin \theta_i}$ a navazují tak na pohyb periodické struktury pole v rovině rozhraní. Ve směru osy z je amplituda podél těchto vlnoploch harmonicky modulována faktorem $\cos(k_1 z \cos \theta_i)$, který neobsahuje časovou závislost, tj. vzdálenost maxim a minim v rozložení pole od roviny rozhraní se nemění. Druhý člen je část postupné

dopadající vlny. Vzdálenost Δz mezi sousedními interferenčními maximy (maximy v hustotě elektrické energie) vyplývá z podmínky $k_1 \Delta z \cos \theta_i = \pi$, tedy $\Delta z = \frac{\lambda_1}{2 \cos \theta_i}$. Nejlepší podmínky pro modulaci intenzity jsou v případě totální reflexe, kdy $|r_s| = |r_p| = 1$.

Stojaté vlnění vznikající při odrazu na kovovém zrcadlovém povrchu, kde lze předpokládat uzel elektrického pole, bylo využito pro experimentální určení, že fotografický materiál je citlivý právě na elektrickou složku elektromagnetického pole. Těmito pokusy se zabýval koncem 19. století Otto Heinrich Wiener.