Záření Hertzova dipólu, kulové vlny,

Rovnice elektromagnetického pole jsou vektorové diferenciální rovnice a podle symetrie bývá vhodné je řešit v křivočarých souřadnicích. Základní diferenciální operátory v kulových a válcových souřadnicích jsou shrnuty na str. 1 – 5.

Elektromagnetické pole je generováno elektrickými náboji a jejich pohybem. Je-li zdroj charakterizován nábojovou hustotou $\rho(\vec{r}\,',t^*)$ a proudovou hustotou $\vec{j}(\vec{r}\,',t^*)$ je možno úlohy řešit za pomoci vektorového a skalárního potenciálu $\vec{A}(\vec{r},t)$ a $\phi(\vec{r},t)$, které splňují vlnovou rovnici. Lze je hledat ve tvaru

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t^*)}{R}\,dV'$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,',t^*)}{R}\,dV'$$

$$R = |\vec{r}-\vec{r}\,'|, \qquad t^* = t - \frac{R}{c}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\mathrm{grad}\,\phi(\vec{r},t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r},t)$$

Je-li zdroj tvořen elektrickými nebo magnetickými **dipóly**, je často vhodné hledat řešení za pomoci Hertzových vektorů. Např elektrický Hertzův vektor $\vec{\Pi}_e(\vec{r},t)$ splňuje vlnovou rovnici

$$\nabla^2\vec{\Pi}_e - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}_e}{\partial t^2} = \frac{-\vec{P}}{\varepsilon_0},$$

kde $\vec{P}(\vec{r},t)$ je vektor elektrické polarizace (objemová hustota elektrického dipólového momentu), s řešením

$$\vec{\Pi}_e(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,',t^*)}{R}\,dV'$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{grad\ div}\,\vec{\Pi}_e(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}_e(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\,\mathrm{rot}\frac{\partial\vec{\Pi}_e(\vec{r},t)}{\partial t}$$

str. 6 – 8

Obzvlášť jednoduchým příkladem je vyzařování malinkého („bodového“) elektrického dipólu charakterizovaného dipólovým momentem $\vec{p}$ v počátku souřadné soustavy. Řešení v pravoúhlém souřadném systému je na str. 8 – 12
a řešení téže úlohy v kulových souřadnicích na str. 13 – 15.

Přidáme-li navíc podmínku o harmonické časové závislosti $p(t)$, dostáváme zdroj kulové monochromatické vlny, jejíž složky v kulové souřadné soustavě (r, Θ, α) jsou

$$E_r(r,\Theta,\alpha,t) = \frac{p_0}{2\pi\varepsilon_0} \quad \cos\Theta \quad \left(\frac{1}{r^3} - i\frac{k}{r^2}\right) \quad \exp[i(kr - \omega t)]$$

$$E_\Theta(r,\Theta,\alpha,t) = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0} \quad \sin\Theta \quad \left(\frac{1}{r^3} - i\frac{k}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right) \quad \exp[i(kr - \omega t)]$$

$$B_\alpha(r,\Theta,\alpha,t) = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c} \quad \sin\Theta \quad \left(- i\frac{k}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right) \quad \exp[i(kr - \omega t)]$$

Tato vlna splňuje Maxwellovy rovnice a vztahy z nich vyplývající. S rostoucí vzdáleností od zdroje nejpomaleji klesají příčné složky E_Θ, B_α. str. 16 – 27.

V oblasti kde $\vec{P}(\vec{r},t) = 0$ lze použít k výpočtu $\vec{E}(\vec{r},t) = \text{rot rot } \vec{\Pi}(\vec{r},t)$. Provedení tohoto výpočtu pro pole harmonicky kmitajícího dipólu v kulových souřadnicích je na str. 27A, 27B.

Časová střední hodnota Poyntingova vektoru má pouze radiální složku

$$< S_r >= \frac{p_0^2\,\omega^4}{32\pi^2 c^3\,\varepsilon_0}\,\frac{\sin^2\Theta}{r^2},$$

po integraci do všech směrů pro celkový vyzařovaný výkon

$$P = \frac{p_0^2\,\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{p_0^2\,\omega^4 \mu_0}{12\pi c}$$

v souladu s obecnějším Larmorovým vztahem pro výkon vyzařovaný nábojem q pohybujícím se se zrychlením a

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

str. 28 – 30

Tato vlna představuje nejjednodušší typ vektorové vlny s kulovými vlnoplochami, která splňuje Maxwellovy rovnice v prázdném prostoru. Často bývá výhodnější pracovat s vlnami skalárními. Monochromatická skalární vlna $u(\vec{r},t)$ splňuje ve volném prostoru bez zdrojů skalární Helmholtzovu rovnici $\nabla^2 u + k^2 u = 0$. Postupné vlny šířící se z počátku souřadné soustavy lze rozložit na radiální a úhlovou závislost

$$u_n^m(r,\Theta,\alpha) = h_n(kr)\,Y_n^m(\Theta,\alpha)\exp(-i\omega t),$$

kde radiální závislost je popsána Hankelovými funkcemi a úhlové závislosti kulovými funkcemi, str. 31 – 33.

Mezi řešeními skalární Helmholtzovy rovnice a vektorovými vlnami existují vztahy typu

$$\vec{E} = \sum_{n,m} a_{nm} \ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\vec{r}\, u_n^m\right) + i\omega\mu_0 \sum_{n,m} b_{nm} \ \mathrm{rot}\left(\vec{r}\, u_n^m\right)$$

$$\vec{H} = -i\omega\varepsilon_0 \sum_{n,m} a_{nm} \ \mathrm{rot}\left(\vec{r}\, u_n^m\right) + \sum_{n,m} b_{nm} \ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\vec{r}\, u_n^m\right),$$

kde a_{nm} jsou koeficienty pro rozvoj pole podle elektrických multipólů a b_{nm} souvisí s rozvojem podle magnetických multipólů; obojí určeno náboji a proudy ve zdrojové oblasti kolem počátku.

Kulově symetrické skalární vlně

$$u_0^0 = \frac{\exp(ikr)}{kr} \exp(-i\omega t)$$

neodpovídá žádná nenulová vektorová vlna, která by se mohla šířit volným prostorem, str. 34.

Záření elektrického dipólu kmitajícího ve směru z, $(\Theta = 0)$ lze odvodit z

$$u_1^0 = h_1(kr)\, Y_1^0(\Theta, \alpha) = -\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{(kr)^2}\right) \exp(ikr) \cos\Theta\,,$$

str. 35 – 39.

Kombinace kulových funkcí $Y_1^1 - Y_1^{-1}$ a $Y_1^1 + Y_1^{-1}$ vedou k polím dipólů kmitajícím podél osy x a y, str. 39 – 42.

Ve velkých vzdálenostech od zdroje je v radiálních funkcích dominující člen $\propto \dfrac{\exp(ikr)}{kr}$, přičemž úhlové rozložení na r nezávisí. Omezíme-li se na tento člen, dostaneme v limitě velkých r jen členy, které obsahují vektorový součin $\left[\vec{r} \times \left(\vec{r} \times \mathrm{grad} Y_n^m\right)\right]$, jehož složky jsou

$$\left[\vec{r} \times \left(\vec{r} \times \mathrm{grad} Y_n^m\right)\right]_r = 0$$

$$\left[\vec{r} \times \left(\vec{r} \times \mathrm{grad} Y_n^m\right)\right]_\Theta = -r \frac{\partial Y_n^m}{\partial \Theta}$$

$$\left[\vec{r} \times \left(\vec{r} \times \mathrm{grad} Y_n^m\right)\right]_\alpha = \frac{-r}{\sin\Theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \alpha}.$$

Po dosazení do výrazů pro elektrické a magnetické pole to znamená, že pro všechny členy multipólového rozvoje ve velké vzdálenosti od zdroje dominují příčné složky. Elektrická a magnetická komponenta jsou na sebe kolmé podobně jako je tomu v rovinné vlně, str. 43 – 46.

V některých případech lze vlnu aproximovat např. velikostí intenzity elektrického pole a neuvažovat o jejím vektorovém charakteru. Navíc se můžeme omezit na směry v úzkém intervalu kolem nějakého význačného směru šíření (osa z). Místo vlnové rovnice $\nabla^2 E(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0$ pro velikost intenzity elektrického pole lze řešit ve skalární paraxiální aproximaci monochromatické vlny rovnici pro komplexní amplitudu $E_0(\vec{r})$, která zahrnuje opravy tvaru vlnoploch oproti rovinné vlně,

$$\frac{\partial^2 E_0(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0(x,y,z)}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial E_0(x,y,z)}{\partial z} = 0.$$

str. 47 – 48.

Přes výše uvedené skutečnosti se v optice v řadě případů zjednodušeně pracuje se skalární kulově symetrickou vlnou

$$E(|\vec{r}|,t) = \frac{A}{r}\exp[i(kr - \omega t)],$$

která splňuje **skalární** vlnovou rovnici, (A samozřejmě není potenciál) str. 49 – 50,

a její paraxiální aproximace se bere ve tvaru parabolické vlny

$$E(x,y,z) = \frac{A}{z}\exp\left[\frac{ik}{2z}\left(x^2 + y^2\right)\right]\exp[i(kz - \omega t)],$$

která splňuje uvedenou paraxiální aproximaci vlnové rovnice a obsahuje člen vyjadřující parabolickou opravu k rovinnému tvaru vlnoploch, str. 51 – 52.

Diferenciální operátory

grad, div, rot, Laplaceův ∇^2

konkrétní vztah = návod na výpočet závisí na souřadné soustavě; obecně viz např. Stratton Teorie elektromagnetického pole článek 6.1 až 6.8

Definice:

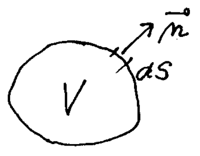
Vektor

grad f definován tím, že změna funkce $f(\vec{r})$ při změně polohového vektoru $d\vec{r}$ je $df = \mathrm{grad}\, f \cdot d\vec{r}$ (skalární součin)

Skalár

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{V} \oint_{S(V)} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

$S(V)$ plocha obklopující objem V

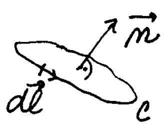


$\vec{n} \cdot dS \equiv d\vec{S}$

$|\vec{n}| = 1$, směr vnější normály

Vektor

rot $\vec{A}$ definováno pomocí průmětů do rovin, v nichž leží křivky C



$l(C)$ obvod = křivka C

$S(C)$ plocha uvnitř C

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A}) \cdot \vec{n} = \lim_{C \to 0} \frac{1}{S} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$ element obvodu C

Skalár

$\nabla^2 f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f)$ pro f invariantní skalár, nikoli pro složky vektoru !

Vektor

$$\nabla^2 \vec{A} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{A})$$

Speciální typ souřadných soustav: <u>ortogonální</u> s. s.
v každém bodě jsou základní vektory k sobě kolmé,
výrazy pro operátory obsahují metrické koeficienty h_i

Souřadná soustava $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$

elementární objem $dv = h_1 h_2 h_3 \, du^{(1)} du^{(2)} du^{(3)}$

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u^{(1)}}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u^{(2)}}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u^{(3)}} \right)_{u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^{(1)}} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial u^{(2)}} (h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial u^{(3)}} (h_1 h_2 F_3) \right]$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^{(2)}} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial u^{(3)}} (h_2 F_2) \right]$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_2 = \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u^{(3)}} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial u^{(1)}} (h_3 F_3) \right]$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^{(1)}} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial u^{(2)}} (h_1 F_1) \right]$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^{(1)}} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u^{(1)}} \right) + \frac{\partial}{\partial u^{(2)}} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u^{(2)}} \right) + \frac{\partial}{\partial u^{(3)}} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u^{(3)}} \right) \right]$$

Nejjednodušší výrazy lze dostat v kartézském p.s. (x, y, z), kde $h_1 = h_2 = h_3 = 1$

$$(\operatorname{grad} f)_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (\operatorname{grad} f)_y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (\operatorname{grad} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

$$(\operatorname{rot} F)_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

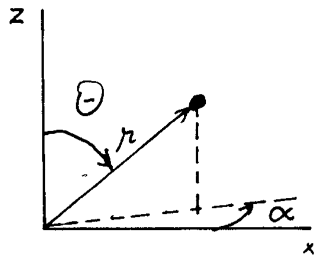
a <u>výjimečně</u> pro kartézský p.p. platí též

$$\nabla^2 F_x = \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 F_y = \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 F_z = \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}$$

Kulové souřadnice r, Θ, α



$$x = r \cdot \sin\Theta \cdot \cos\alpha$$
$$y = r \cdot \sin\Theta \cdot \sin\alpha$$
$$z = r \cdot \cos\Theta$$

$$h_1 = 1 \qquad h_2 = r \qquad h_3 = r \cdot \sin\Theta$$

$$(\operatorname{grad} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \qquad (\operatorname{grad} f)_\Theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \Theta}$$

$$(\operatorname{grad} f)_\alpha = \frac{1}{r \cdot \sin\Theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r \cdot \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta \cdot F_\Theta\right) + \frac{1}{r \cdot \sin\Theta} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha}$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_r = \frac{1}{r \cdot \sin\Theta} \left[\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta \cdot F_\alpha\right) - \frac{\partial F_\Theta}{\partial \alpha}\right]$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_\Theta = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\Theta} \frac{\partial F_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot F_\alpha\right)\right]$$

$$(\operatorname{rot} F)_\alpha = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot F_\Theta\right) - \frac{\partial F_r}{\partial \Theta}\right]$$

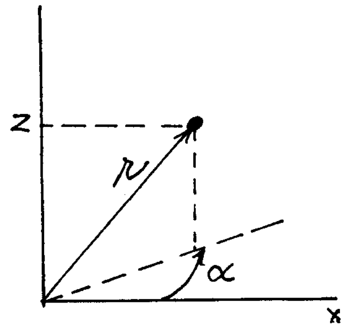
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial f}{\partial \Theta}\right) +$$
$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$$

to ale <u>neplatí</u> pro složky $\nabla^2 \vec{F}$

Platí

$$\nabla^2 \vec{F} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F})$$

Válcové souřadnice r, α, z



$x = r \cdot \cos\alpha \qquad h_1 = 1$

$y = r \cdot \sin\alpha \qquad h_2 = r$

$z = z \qquad h_3 = 1$

$$(\mathrm{grad}\, f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \qquad (\mathrm{grad}\, f)_\alpha = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \alpha} \qquad (\mathrm{grad}\, f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\mathrm{div}\, \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot F_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$(\mathrm{rot}\, \vec{F})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}$$

$$(\mathrm{rot}\, \vec{F})_\alpha = \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}$$

$$(\mathrm{rot}\, \vec{F})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot F_\alpha\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \alpha}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

a to neplatí pro složky $\nabla^2 \vec{F}$

Opět $\nabla^2 \vec{F} = \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\, \vec{F}\right) - \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\, \vec{F}\right)$

Základy popisu zdroje elektromagnetického pole

Pohyb nábojů může být vyvolán elmag polem (Lorentzova síla), ale i jinými silami. Pohyb nábojů (zrychlený) vyvolává radiační elmag. pole.
Pro jednoduchost uvažujme náboje a proudy ve vakuu (nekomplikujeme odezvou prostředí)
Účinný nástroj jsou potenciály $\vec{A}, \phi$.

1) $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

2) $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\phi$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

3) $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}} + \varepsilon_0 \mu_0\, \mathrm{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2}\mathrm{grad}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{j}$$

Potenciály $\vec{A}, \phi$ nejsou určeny jednoznačně, lze na ně klást dodatečné podmínky, např. Lorenzovu podmínku

$$\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

4) $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$+\mathrm{div}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi}_{\nabla^2 \phi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\rho/\varepsilon_0$$

Máme tedy 4 rovnice pro $\vec{A}$, ϕ buzené náboji ρ a proudy $\vec{j}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

7

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Řešení, která splňují Lorenzovu kalibraci:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t^*)}{R}\, dV'$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t^*)}{R}\, dV'$$

$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, $t^* = t - \frac{R}{c}$ zdroj v místě $\vec{r}'$, v čase t^*

Vše v souhlase s rovnicí kontinuity v místě zdroje (Stratton str. 415)

$$\mathrm{div}'\, \vec{j}(\vec{r}', t^*) + \frac{\partial \rho(\vec{r}', t^*)}{\partial t^*} = 0$$

Typické zdroje: kmitající dipóly doprovázené změnami ρ i $\vec{j}$

elektrický dipól  náboje spárované do dipólů

magnetický dipól 
(proudové smyčky)

Hertz (1888) pro popis polí dipólů zavedl "polarizační potenciály"
$\equiv$ Hertzovy vektory

$\vec{\Pi}_e$ souvisí s elektrickými dipóly

$\vec{\Pi}_m$ souvisí s magnetickými dipóly

Zde: předpokládaný zdroj jen elektrické dipóly, žádné proudové smyčky

$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, $\rho = -\mathrm{div}\, \vec{P}$, $\vec{P}$ objemová hustota dipólového momentu

zkusme $\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t}$ $\quad \phi = -\mathrm{div}\, \vec{\Pi}_e$

Časové změny dipólového momentu vytvoří proudovou hustotu $\vec{j}$, ale žádné proudové smyčky.

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{c^2}\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{\Pi}}_e$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\Pi}_e - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{c^2}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0\mu_0}{c^2}\frac{\partial^3 \vec{\Pi}_e}{\partial t^3} = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c^2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\nabla^2 \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} + \frac{1}{c^4}\frac{\partial^3 \vec{\Pi}_e}{\partial t^3} = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$-\frac{1}{c^2}\nabla^2 \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} + \frac{1}{c^4}\frac{\partial^3 \vec{\Pi}_e}{\partial t^3} = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \Big/ \int .. dt \text{ a vyloučení časově neproměnného členu}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{\Pi}_e - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\Pi}_e}{\partial t^2} = \frac{-\vec{P}}{\varepsilon_0}}$$

vlnová rovnice pro $\vec{\Pi}_e(\vec{r},t)$ se zdrojem $\vec{P}(\vec{r}\,',t^*)$

s řešením $$\vec{\Pi}_e(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,',t^*)}{R}\,dV'$$

Hertzův dipól:

Použijme na malinký dipól v počátku $R = |\vec{r}|$, dipól se neotáčí

$\vec{P}(\vec{r}\,',t^*) = p(t^*)\cdot\delta(\vec{r})\cdot\vec{n}$
delta funkce

$$\vec{\Pi}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p(t-r/c)}{r}\cdot\vec{n}$$

$|\vec{n}| = 1$, $\vec{n}$ se v čase nemění
$\vec{p}\cdot\vec{n} = p$

Pro spočtení elektrického pole potřebujeme grad div $\vec{\Pi}_e$
a pro pole magnetické rot $\vec{\Pi}_e$
včetně zohlednění časového zpoždění

Derivace podle času v pevném místě $\vec{r}$ bez problémů.
Prostorové derivace složitější, protože do místa $r+dr$ dospěje vzruch později než do místa r

zkrácené značení $[p] \equiv p\left(t-\frac{R}{c}\right) \equiv p(t^*)$

Z pohledu z okolí místa, kde počítáme pole je časová závislost $p(t)$ zkreslena právě onou závislostí na R, což lze započítat

$$\frac{\partial [p_i]}{\partial x} = \frac{\partial [p_i]}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial t^*}{\partial x} = [\dot{p}_i] \cdot \frac{-x}{c\,(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

protože $t^* = t - \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{c}$

$$\frac{\partial t^*}{\partial x} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot 2x}{c\,(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \qquad \frac{\partial [p_i]}{\partial x} = [\dot{p}_i]\,\frac{-x}{c\cdot r}$$

$+4\pi\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{\Pi}_e =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{[p_x]}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{[p_y]}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{[p_z]}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{-x}{(\quad)^{3/2}}[p_x] + \frac{-x\cdot[\dot{p}_x]}{c\cdot(x^2+y^2+z^2)} + \frac{-y}{(\quad)^{3/2}}[p_y] + \frac{-y\,[\dot{p}_y]}{c\,(\quad)} +$$

$$+ \frac{-z}{(\quad)^{3/2}}[p_z] + \frac{-z\,[\dot{p}_z]}{c\cdot(\quad)}$$

$$-4\pi\varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{\Pi}_e = \frac{x\,[p_x]}{r^3} + \frac{y\,[p_y]}{r^3} + \frac{z\,[p_z]}{r^3} + \frac{x\,[\dot{p}_x]}{c\,r^2} + \frac{y\,[\dot{p}_y]}{c\,r^2} + \frac{z\,[\dot{p}_z]}{c\,r^2}$$

$$= (\vec{r}\cdot\vec{n})\cdot\left(\frac{[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{c\,r^2}\right) \qquad [p] = |\vec{p}(t^*)|$$

Výpočet x-ové složky $-4\pi\varepsilon_0 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}_e$:

jednotlivé členy:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\,[p_x]}{r^3}\right) = \frac{[p_x]}{r^3} + \frac{x}{r^3}\cdot\frac{-x}{c\cdot r}[\dot{p}_x] + x\,[p_x]\,\frac{-3x}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y\,[p_y]}{r^3}\right) = \frac{y}{r^3}\cdot\frac{-x}{c\cdot r}[\dot{p}_y] + y\cdot\frac{-3x}{r^5}[p_y]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z\,\frac{[p_z]}{r^3}\right) = \frac{z}{r^3}\cdot\frac{-x}{c\,r}[\dot{p}_z] + z\,\frac{-3x}{r^5}[p_z]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{cr^2}[\dot{p}_x]\right)=\frac{[\dot{p}_x]}{cr^2}+\frac{+x}{cr^2}\cdot\frac{-x}{cr}[\ddot{p}_x]+\frac{x}{c}[\dot{p}_x]\cdot\frac{-2x}{r^2}$$ (10)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{cr^2}[\dot{p}_y]\right)=\frac{y}{cr^2}\cdot\frac{-x}{cr}[\ddot{p}_y]+y[\dot{p}_y]\cdot\frac{-2x}{cr^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{cr^2}[\dot{p}_z]\right)=\frac{z}{cr^2}\cdot\frac{-x}{cr}[\ddot{p}_z]+z[\dot{p}_z]\cdot\frac{-2x}{cr^2}$$

$$\left(4\pi\varepsilon_0 \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}_e\right)_x=[p_x]\cdot\left(\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right)+[\dot{p}_x]\left(\frac{3x^2}{cr^4}-\frac{1}{cr^2}\right)+$$
$$+[\ddot{p}_x]\frac{x^2}{c^2r^3}+[p_y]\cdot\frac{3xy}{r^5}+[\dot{p}_y]\frac{3xy}{cr^4}+[\ddot{p}_y]\frac{xy}{c^2r^3}+$$
$$+[p_z]\cdot\frac{3xz}{r^5}+[\dot{p}_z]\frac{3xz}{cr^4}+[\ddot{p}_z]\frac{xz}{c^2r^3}$$

$$\vec{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}_e-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}_e}{\partial t^2}\equiv-\operatorname{grad}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\Pi_{ex}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[p_x]}{r}\qquad \ddot{\Pi}_{ex}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[\ddot{p}_x]}{r}$$

$$E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3x[p_x]}{r^5}+\frac{3y[p_y]}{r^5}+\frac{3z[p_z]}{r^5}\right]\cdot x+\qquad \text{"1. řádek"}$$
$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3x[\dot{p}_x]}{cr^4}+\frac{3y[\dot{p}_y]}{cr^4}+\frac{3z[\dot{p}_z]}{cr^4}\right]\cdot x+\qquad \text{"2. řádek"}$$
$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x[\ddot{p}_x]}{c^2r^3}+\frac{y[\ddot{p}_y]}{c^2r^3}+\frac{z[\ddot{p}_z]}{c^2r^3}\right]\cdot x-\qquad \text{"3. řádek"}$$
$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{[p_x]}{r^3}+\frac{[\dot{p}_x]}{cr^2}+\underbrace{\frac{[\ddot{p}_x]}{c^2r}}_{\text{z časové derivace } \Pi_e}\right]$$

Zcela obdobně další komponenty,

obecný zápis

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\overset{\text{1. řádek}}{\frac{3[p]}{r^5}}+\overset{\text{2. řádek}}{\frac{3[\dot{p}]}{cr^4}}+\overset{\text{3. řádek}}{\frac{[\ddot{p}]}{c^2r^3}}\right]\cdot(\vec{r}\cdot\vec{n})\cdot\vec{r}-\right.$$
$$\left.-\underbrace{\left[\frac{[p]}{r^3}+\frac{[\dot{p}]}{cr^2}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2r}\right]\cdot\vec{n}}_{\text{poslední řádek}}\right\}$$

Zde:

$\vec{n}$ směr kmitání dipólu, $p(t)$ skalár (velikost dipólu)

dříve $p_x=(p\cdot\vec{n})_x=p\cdot n_x$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{\Pi}}_e$$

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{\Pi}}_e \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{[\dot{p}_z]}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{[\dot{p}_y]}{r}\right);\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{[\dot{p}_x]}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{[\dot{p}_z]}{r}\right);\ \dots\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{[\dot{p}_z]}{r}\right) = [\dot{p}_z]\cdot\frac{-\frac{1}{2}\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{1}{r}[\ddot{p}_z]\frac{-y}{c\cdot r} = -y\left(\frac{[\dot{p}_z]}{r^3} + \frac{[\ddot{p}_z]}{cr^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{[\dot{p}_y]}{r}\right) = [\dot{p}_y]\cdot\frac{-z}{r^3} + \frac{1}{r}[\ddot{p}_y]\frac{-z}{c\cdot r} = -z\left(\frac{[\dot{p}_y]}{r^3} + \frac{[\ddot{p}_y]}{cr^2}\right)$$

$$\left(\mathrm{rot}\,\dot{\vec{\Pi}}_e\right)_x = \frac{[\dot{p}_y]}{r^3}\cdot z + \frac{[\ddot{p}_y]}{cr^2}z - \frac{[\dot{p}_z]}{r^3} - \frac{[\ddot{p}_z]}{cr^2}$$

$$= \frac{[\dot{p}]}{r^3}(\vec{n}\times\vec{r})_x + \frac{[\ddot{p}_y]}{cr^2}(\vec{n}\times\vec{r})_x$$

$$B_x = \mu_0\varepsilon_0\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{[\dot{p}]}{r^3} + \frac{[\ddot{p}]}{cr^2}\right)(\vec{n}\times\vec{r})_x$$

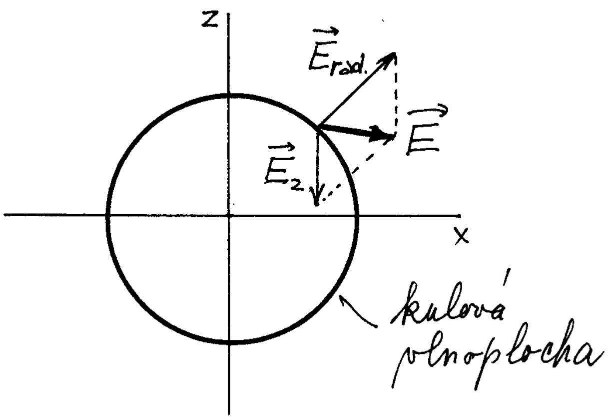
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{[\dot{p}]}{r^3} + \frac{[\ddot{p}]}{cr^2}\right)(\vec{n}\times\vec{r})$$

Pro orientaci dipólu podél osy z $\qquad \vec{n} \equiv (0,0,1)$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{3[p]}{r^3} + \frac{3[\dot{p}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2r}\right)\cdot\frac{z}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2r}\right)\cdot\vec{n}\right\}$$

$$= \vec{E}_{radiální} + \vec{E}_z$$



$\vec{E}_{radiální}$ je kolmá na vlnoplochu

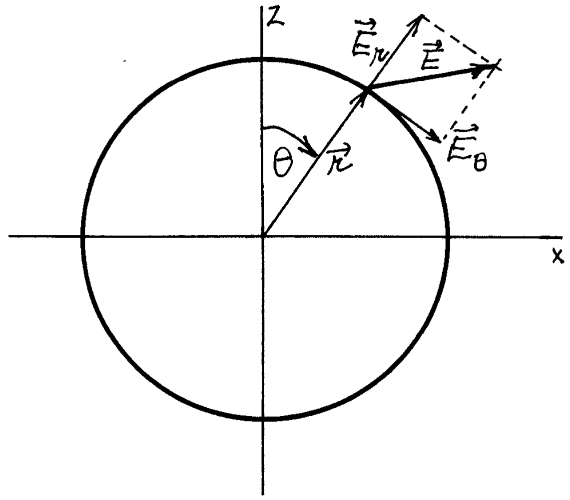
směr $\vec{E}_z$ je stále $\parallel z$

$B_z = 0$

$\vec{B} \in$ roviny (x,y)

tj. roviny $z = $ konst.

Převod výsledku počítání v pravoúhlých souřadnicích do sférických souřadnic



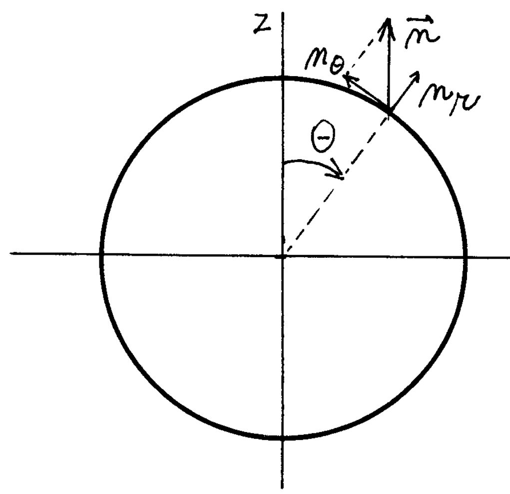
pravoúhlé (x, y, z)

sférické $(r, \Theta, \alpha)_{ss}$

$$\frac{\vec{r}}{r} = (1, 0, 0)_{ss}$$

$$\vec{n}\,(r, \Theta, \alpha) = (\cos\Theta, -\sin\Theta, 0)_{ss}$$

při $\vec{n} = (0, 0, 1)_{\text{pravoúhlé}}$



$$\frac{z}{r} = \cos\Theta$$

$$\vec{n} \times \vec{r} = \left(n_\Theta r_\alpha - n_\alpha r_\Theta,\; n_\alpha r_r - n_r r_\alpha,\; n_r r_\Theta - n_\Theta r_r \right)_{ss}$$

$$= (0, 0, r \cdot \sin\Theta)_{ss}$$

$$\left(\vec{E}(\vec{r}, t)\right)_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{3[p]}{r^3} + \frac{3[\dot{p}]}{c r^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r}\right)\cdot\cos\Theta - \left(\frac{[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{c r^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r}\right)\cos\Theta\right]$$

$$= \frac{\cos\Theta}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{c r^2}\right) \quad \text{radiální složka}$$

$$\left(\vec{E}(\vec{r}, t)\right)_\Theta = \frac{+\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{c r^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r}\right) \quad \text{složka tečná k slupce}$$

$$\left(\vec{E}(\vec{r}, t)\right)_\alpha = 0, \quad \left(\vec{B}(\vec{r}, t)\right)_r = 0, \quad \vec{B}(\vec{r}, t)_\Theta = 0$$

$$\left(\vec{B}(\vec{r}, t)\right)_\alpha = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{[\dot{p}]}{r^3} + \frac{[\ddot{p}]}{c r^2}\right)\cdot r \cdot \sin\Theta = \frac{\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{[\dot{p}]}{c r^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r}\right)$$

Výpočet téhož (pole Hertzova dipólu) v kulových souřadnicích od počátku

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\Pi}_e(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Pi_e(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\,\mathrm{rot}\,\dot{\vec{\Pi}}_e(\vec{r},t)$$

$$\vec{\Pi}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[p]}{r}\cdot\vec{n}$$

$\vec{n} = (0,0,1)_{\text{pravoúhlé s}}$

$\vec{n} = (\cos\Theta, -\sin\Theta, 0)_{ss}$

Obecné vzorce pro diferenciální operátory ($\vec{F}$ vektorová funkce, f skalární funkce)

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cdot F_\Theta) + \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\frac{\partial F_\alpha}{\partial\alpha}$$

$$(\mathrm{grad}\,f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$(\mathrm{grad}\,f)_\Theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\Theta}$$

$$(\mathrm{grad}\,f)_\alpha = \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha}$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})_r = \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cdot F_\alpha) - \frac{\partial F_\Theta}{\partial\alpha}\right]$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})_\Theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial F_r}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\alpha)\right]$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})_\alpha = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\Theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\Theta}\right]$$

Pro úplnost (teď nepotřebujeme): POZOR! ∇^2 SKALÁR Nelze užít na vektor! !!!

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial f}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}$$

Výpočet $\mathrm{div}\,\vec{\Pi}_e\cdot 4\pi\varepsilon_0$: Ať $\vec{F} = \frac{[p]}{r}\cdot(\cos\Theta, -\sin\Theta, 0)_{ss}$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{[p]\cdot\cos\Theta}{r}\right) + \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\cdot\frac{-[p]\sin\Theta}{r}\right) + 0$$

$$\frac{\partial[p]}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial t^*}\cdot\frac{\partial t^*}{\partial r} = -\frac{1}{c}[\dot{p}] \qquad t^* = t - \frac{r}{c}$$

$$4\pi\varepsilon_0 \, div \, \vec{\Pi}_e = \frac{1}{r^2}[p]\cdot\cos\Theta + \frac{r}{r^2}\frac{\partial[p]}{\partial r}\cdot\cos\Theta - \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\frac{[p]\sin^2\Theta}{r}\right)$$

$$= \frac{[p]\cdot\cos\Theta}{r^2} - \frac{[\dot p]}{c\cdot r}\cdot\cos\Theta - \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\cdot\frac{2\sin\Theta\cos\Theta}{r}[p] =$$

$$= \left(-\frac{[p]}{r^2} - \frac{[\dot p]}{c\cdot r}\right)\cdot\cos\Theta$$

$$\left(4\pi\varepsilon_0 \, grad \, div \, \vec{\Pi}_e\right)_r = -\cos\Theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{[p]}{r^2}+\frac{[\dot p]}{cr}\right) =$$

$$= -\cos\Theta\cdot\left(\frac{-2[p]}{r^3} + \frac{-1}{r^2}\frac{[\dot p]}{c} + \frac{-1}{cr^2}[\dot p] + \frac{1}{cr}\cdot\frac{-1}{c}[\ddot p]\right) =$$

$$= \left(\frac{2[p]}{r^3}+\frac{2[\dot p]}{cr^2}+\frac{[\ddot p]}{c^2 r}\right)\cdot\cos\Theta$$

$$\left(\frac{\partial^2\Pi_e}{\partial t^2}\right)_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[\ddot p]}{r}\cdot\cos\Theta$$

$$\left(\vec E(\vec r,t)\right)_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2[p]}{r^3}+\frac{2[\dot p]}{cr^2}+\left(\frac{1}{c^2 r}-\frac{1}{c^2 r}\right)[\ddot p]\right]\cos\Theta$$

$$= \frac{\cos\Theta}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{[p]}{r^3}+\frac{[\dot p]}{cr^2}\right)$$

ve shodě s předchozí částí (zde výpočet podstatně kratší)

$$\left(4\pi\varepsilon_0 \, grad \, div \, \vec{\Pi}_e\right)_\Theta = \frac{-1}{r}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\cos\Theta)\cdot\left(\frac{[p]}{r^2}+\frac{[\dot p]}{cr}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\sin\Theta\cdot\left(\frac{[p]}{r^2}+\frac{[\dot p]}{cr}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2\vec{\Pi}_e}{\partial t^2}\right)_\Theta = -\sin\Theta\cdot\frac{[\ddot p]}{r}$$

$$\left(\vec E(\vec r,t)\right)_\Theta = \frac{\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{[p]}{r^3}+\frac{[\dot p]}{cr^2}+\frac{[\ddot p]}{c^2 r}\right)$$

opět podstatně kratší výpočet než v pravoúhlých souřadnicích

$$\left(4\pi\varepsilon_0 \, grad \, div \, \vec{\Pi}_e\right)_\alpha = \frac{4\pi\varepsilon_0}{r\cdot\sin\Theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(div\,\vec{\Pi}_e\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2\Pi_e}{\partial t^2}\right)_\alpha = 0 \qquad \left(\vec E(\vec r,t)\right)_\alpha = 0$$

Výpočet magnetického pole $\vec{B} = \frac{1}{c^2}\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t}$

$$\left(\frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t}\right)_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[\dot{p}]}{r}\cdot\cos\Theta \qquad \left(\frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t}\right)_\Theta = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[\dot{p}]}{r}\cdot\sin\Theta$$

$\left(\frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t}\right)_\alpha = 0$; žádná složka nezávisí na $\alpha \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} = 0$

$$\left(\mathrm{rot}\,\dot{\Pi}_e\right)_r = \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cdot 0) - 0\right) = 0$$

$$\left(\mathrm{rot}\,\dot{\Pi}_e\right)_\Theta = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\Theta}\cdot 0 - \frac{\partial}{\partial r}(r\cdot 0)\right) = 0$$

$$4\pi\varepsilon_0\left(\mathrm{rot}\,\dot{\Pi}_e\right)_\alpha = \frac{1}{r}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\cdot\frac{-[\dot{p}]}{r}\cdot\sin\Theta\Big) + \underbrace{\sin\Theta\,\frac{[\dot{p}]}{r}}_{-\frac{\partial\dot{\Pi}_e}{\partial\Theta}}\Big]$$

$$= \frac{1}{r}\Big[-\sin\Theta\cdot\underbrace{\frac{\partial[\dot{p}]}{\partial r}}_{-\frac{1}{c}[\ddot{p}]} + \sin\Theta\,\frac{[\dot{p}]}{r}\Big] = \sin\Theta\left(\frac{[\ddot{p}]}{cr} + \frac{[\dot{p}]}{r^2}\right)$$

$$B_\alpha = \frac{\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{[\ddot{p}]}{c^2 r} + \frac{[\dot{p}]}{c r^2}\right)$$

Získané vztahy odpovídají poli statického elektrického dipólu při $[\dot{p}] = [\ddot{p}] = 0$

$$\vec{B} = 0$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$$

Harmonický kmitající elektrický dipól

$p = p_0 \cos(\omega t^*)$ $\qquad t^* = t - \frac{r}{c} \qquad t = t^* + \frac{r}{c}$

$\dot{p} = -\omega p_0 \sin(\omega t^*)$ $\qquad$ Relativní velikosti jednotlivých členů

$\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t^*)$ $\qquad$ závisí na frekvenci

Jednotlivé příspěvky kmitají fázově posunuty.

a) statická zóna: určující je pole "statického" dipólu $r \ll \lambda$

dominující člen $\sim \frac{p_0}{r^3} \cdot \cos(\omega t^*)$

b) velikost dalšího členu $\left|\frac{\dot{p}}{c r^2}\right| = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{p_0}{r^2} = 2\pi \cdot \frac{r}{\lambda} \cdot \frac{p_0}{r^3}$

ve vzdálenosti $r = \lambda$ velikost $\sim 6{,}3 \cdot \frac{p_0}{r^3}$

kmitá $\sim -\sin(\omega t^*) = \cos(\omega t^* + \frac{\pi}{2})$

c) radiační zóna: nejsilnější člen o amplitudě

$$\left|\frac{\ddot{p}}{c^2 r}\right| = \frac{\omega^2}{c^2} r^2 \frac{p_0}{r^3} = 4\pi^2 \cdot \frac{r^2}{\lambda^2} \cdot \frac{p_0}{r^3}$$

ve vzdálenosti $r = \lambda$ velikost $\sim 40 \cdot \frac{p_0}{r^3}$

kmitá $\sim -\cos(\omega t^*) = \cos(\omega t^* + \pi)$

Ve statické zóně je dominantní člen magnetického pole

$\sim -\omega \sin(\omega t^*)$ s fázovým posuvem $\frac{\pi}{2}$ proti dominantnímu

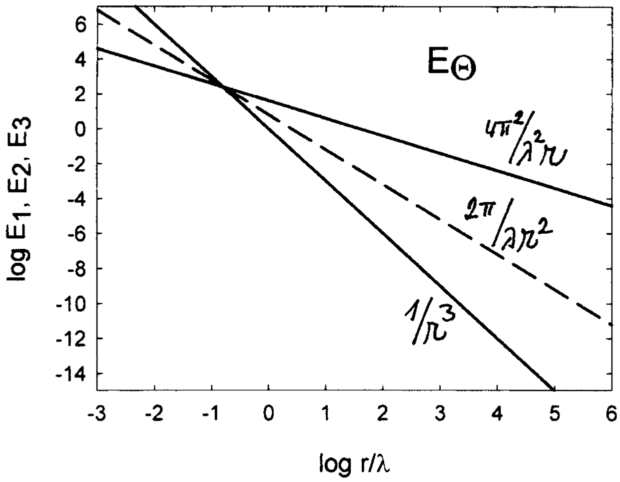
členu v elektrickém poli

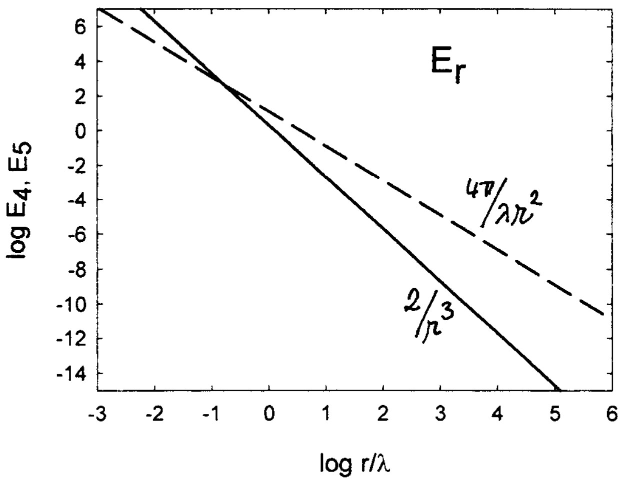
V radiační zóně hlavní příspěvky k magnetickému poli

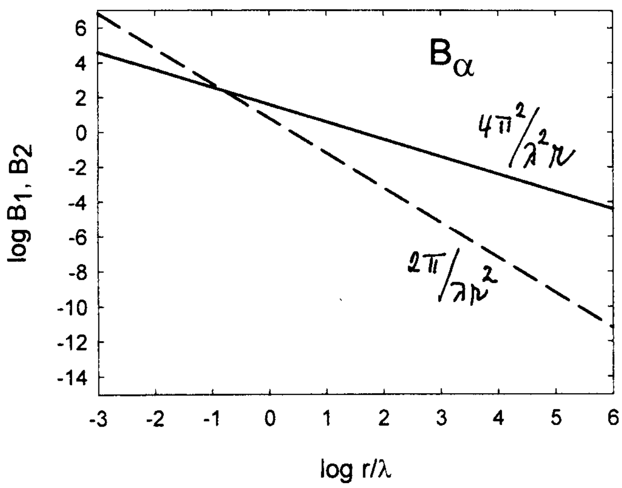
a elektrickému poli kmitají ve fázi $\sim -\cos(\omega t^*)$

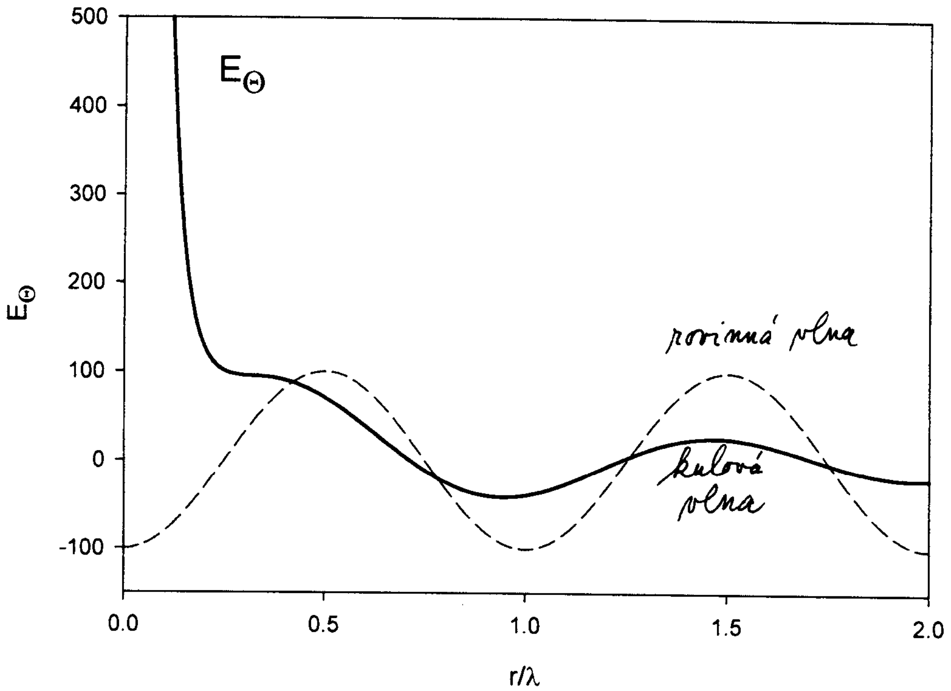
Fázový posun mezi E_φ B_α je $\operatorname{tg} \delta \sim \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^3$

Relativní velikosti jednotlivých příspěvků









Porovnání složky E_Θ kulové vlny s rovinnou vlnou, která je s kulovou vlnou ve velkých vzdálenostech ve fázi. Při $r \to 0$ jsou naopak v protifázi. Fáze jsou "srovnány" již na vzdálenosti několika málo λ.

V kondenzované fázi (pevné látky, kapaliny) je na vzdálenosti λ typické v optickém oboru ($100 \div 10^6$ nm) velmi mnoho atomů (typické vzdálenosti < 1 nm). Pro jejich interakci je uvážení elmag pole na krátké vzdálenosti podstatné (např. Ewaldův–Oseenův teorém vedoucí ke zdůvodnění použitelnosti Clausiusovy–Mossottiovy formule z elektrostatiky i v oblasti optických frekvencí tj. Lorenz-Lorentzova formule).

Komplexní popis; stále naše úmluva $e^{-i\omega t}$

$$[p] = p_0 \cos(\omega t^*) = p_0 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\cdot r\right) = \mathrm{Re}\left\{p_0\, e^{i(kr-\omega t)}\right\}$$

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad k\cdot r$ zde čísla na rozdíl od rovinné vlny,

r vzdálenost od dipólu $\quad$ kde to jsou vektory $\vec{k}\ \vec{r}$

$$[\dot{p}] = -\omega p_0 \sin(\omega t - kr) = \mathrm{Re}\left\{-i\omega p_0\, e^{i(kr-\omega t)}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{-i\omega p_0\left[\cos(\ ) + i\sin(kr-\omega t)\right]\right\}$$

$$= \omega p_0 \sin(kr-\omega t) = -\omega p_0 \sin(\omega t - kr)$$

$$[\ddot{p}] = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t - kr) = \mathrm{Re}\left\{-\omega^2 p\, e^{i(kr-\omega t)}\right\}$$

Po dosazení do vztahů obsahujících $[p], [\dot{p}], [\ddot{p}]$

$$E_\Theta(r,t) = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\sin\Theta\left(\frac{1}{r^3} - ik\frac{1}{r^2} - k^2\frac{1}{r}\right)e^{i(kr-\omega t)}$$

$$E_r(r,t) = \frac{p_0}{2\pi\varepsilon_0}\cos\Theta\left(\frac{1}{r^3} - i\frac{k}{r^2}\right)e^{i(kr-\omega t)}$$

$$B_\alpha(r,t) = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\sin\Theta\left(-i\frac{k}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)e^{i(kr-\omega t)}$$

Kontrola splnění MR

1) $$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) + \underbrace{\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\cdot E_\Theta\right)}_{} + \frac{1}{r\sin\Theta}\underbrace{\frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha}}_{0}$$

a) příspěvek od $E_\Theta(r,\Theta)$ ....

$$\frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\underbrace{\frac{\partial\sin^2\Theta}{\partial\Theta}}_{2\sin\Theta\cos\Theta}\cdot\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)e^{i(kr-\omega t)} =$$

$$= \frac{2\cos\Theta\, p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{ik}{r^3} - \frac{k^2}{r^2}\right)e^{i(kr-\omega t)}$$

b) příspěvek od E_r

$$\frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{1}{r}-ik\right)e^{i(kr-\omega t)}\right]\cdot 2\cdot\cos\Theta =$$

$$=\frac{2p_0\cos\Theta}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\left[\frac{-1}{r^2}e^{i(kr-\omega t)}+\left(\frac{1}{r}-ik\right)\cdot ik\,e^{i(kr-\omega t)}\right]$$

$$=\frac{2p_0\cos\Theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r^4}+\frac{ik}{r^3}+\frac{k^2}{r^2}\right)e^{i(kr-\omega t)}$$

Součet obou příspěvků $\operatorname{div}\vec{E}=0$ ✓

2) $\operatorname{div}\vec{B}=\frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\cdot\frac{\partial B_\alpha}{\partial\alpha}=0$ ✓

3) $\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$(\operatorname{rot}\vec{E})_r=\frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cdot\underbrace{E_\alpha}_{0})-\underbrace{\frac{\partial E_\Theta}{\partial\alpha}}_{0}\right]=0$$

$$(\operatorname{rot}\vec{E})_\Theta=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial E_r}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot E_\alpha)\right)=0$$

$$(\operatorname{rot}\vec{E})_\alpha=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot E_\Theta)-\frac{\partial E_r}{\partial\Theta}\right]=$$

$$=\frac{1}{r}\cdot\frac{p_0\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{1}{r^2}-\frac{ik}{r}-k^2\right)\cdot e^{i(kr-\omega t)}\right)\right]-$$

$$-\frac{-2p_0\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^4}-\frac{ik}{r^3}\right)\cdot e^{i(kr-\omega t)}=$$

$$=\frac{p_0\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{-2}{r^3}-\frac{-ik}{r^2}\right)e^{i(kr-\omega t)}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{ik}{r}-k^2\right)ik\,e^{i(\,)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2}{r^4}-\frac{2ik}{r^3}\right)\cdot e^{i(kr-\omega t)}\right]=$$

$$=\frac{p_0\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0}e^{i(\,)}\left(\frac{-2}{r^4}+\frac{ik}{r^3}+\frac{ik}{r^3}+\frac{k^2}{r^2}-\frac{ik^3}{r}+\frac{2}{r^4}-\frac{2ik}{r^3}\right)=$$

$$=\frac{p_0\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{k^2}{r^2}-\frac{ik^3}{r}\right)\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$-\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} = \frac{i\omega p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\sin\Theta\left(\frac{-ik}{r^2}-\frac{k^2}{r}\right)e^{i(kr-\omega t)} \qquad \frac{\omega}{c}=k$$

21

$$= \frac{p_0\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{k^2}{r^2}-\frac{ik^3}{r}\right)e^{i(kr-\omega t)}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{E})_\alpha = -\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} \quad \checkmark$$

4) $\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$(\operatorname{rot}\vec{B})_r = \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cdot B_\alpha) - \underbrace{\frac{\partial B_\Theta}{\partial\alpha}}_{0}\right] =$$

$$= \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\cdot\frac{-p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin^2\Theta)\cdot\left(\frac{ik}{r^2}+\frac{k^2}{r}\right)e^{i(kr-\omega t)}$$

$$= \frac{-2p_0\sin\Theta\cos\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c\sin\Theta}\left(\frac{ik}{r^3}+\frac{k^2}{r^2}\right)e^{i()}$$

$$= \frac{-2p_0\cos\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{k^2}{r^2}+\frac{ik}{r^3}\right)\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)_r = \frac{-2i\omega p_0\cos\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\frac{-ik}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)e^{i(kr-\omega t)}$$

$$= \frac{-2p_0\cos\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k}\left(\frac{k}{r^2}+\frac{i}{r^3}\right)\cdot e^{i(kr-\omega t)} \quad \checkmark$$

$$(\operatorname{rot}\vec{B})_\Theta = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\underbrace{\frac{\partial B_r}{\partial\alpha}}_{0} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cdot B_\alpha)\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{ik}{r}+k^2\right)\cdot e^{i(kr-\omega t)}\right]\cdot\frac{p_0\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c} =$$

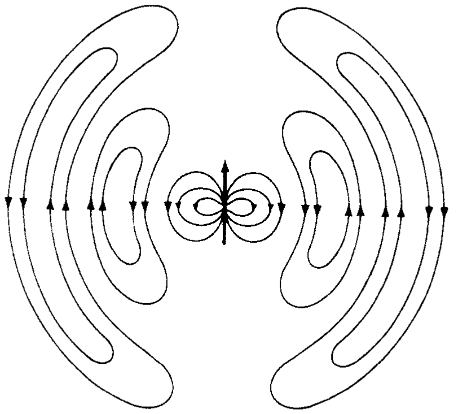
$$= \frac{p_0\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{1}{r}\left[\frac{-ik}{r^2}e^{i()}+\left(\frac{ik}{r}+k^2\right)\cdot ik\cdot e^{i()}\right] =$$

$$= \frac{p_0\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{-ik}{r^3}-\frac{k^2}{r^2}+\frac{ik^3}{r}\right)\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

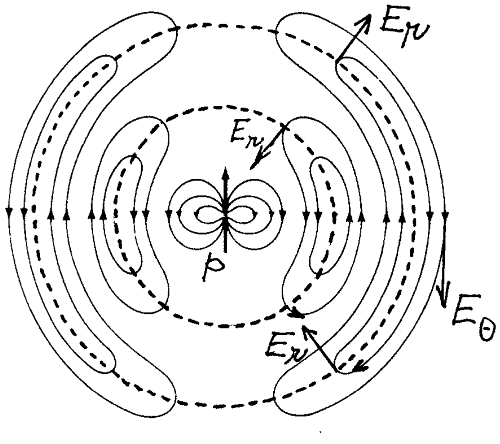
$$= \frac{-p_0\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{\omega}{c}\left(\frac{i}{r^3}+\frac{k}{r^2}-\frac{ik^2}{r}\right)e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_\Theta = \frac{-i\omega p_0 \sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}-\frac{k^2}{r}\right)e^{i(kr-\omega t)}$$
$$= \frac{-p_0\omega\sin\Theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\frac{i}{r^3}+\frac{k}{r^2}-\frac{ik^2}{r}\right)\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

Znázornění siločar elektrického pole Hertzova dipólu



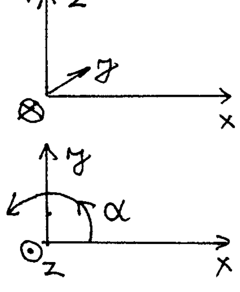
div $\vec{E} = 0$
Siločáry musí být uzavřené.
Uzavření zajišťují radiální složky pole

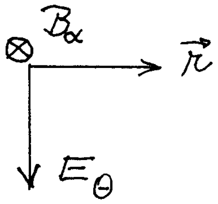


Čárkovaně jsou znázorněny vlnoplochy, ve nichž je
E_Θ nulová
E_r maximální

$p_z > 0$ $\vec{p}\uparrow$ .. orientace v obrázku
statická zóna $E_\Theta > 0$ $\vec{E}\downarrow$
radiační zóna ve vzdálenosti celistvého násobku λ
$E_\Theta < 0$ $\vec{E}\uparrow$

Magnetické siločáry jsou kružnice se středy na ose dipólu.





Orientace v radiační zóně podobná jako u rovinné vlny

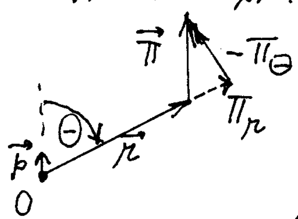
5) Vektorový a skalární potenciál

a) z Hertzových vektorů $\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t}$, $\phi = -\mathrm{div}\,\vec{\Pi}_e$

$$\vec{\Pi}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p(t-r/c)}{r}\cdot\vec{n} \qquad \vec{n} = (1,0,0)_{r,\Theta,\alpha}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{[p]}{r^2} + \frac{[\dot{p}]}{c\cdot r}\right)\cdot\cos\Theta = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\cos\Theta\, e^{i(kr-\omega t)}$$

viz dříve str.



$$A_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{[\dot{p}]}{r}\cdot\cos\Theta$$

$$= \frac{-p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{ik}{r}\cos\Theta\, e^{i(kr-\omega t)}$$

$$A_\Theta = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{[\dot{p}]}{r}\cdot\sin\Theta = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{ik}{r}\sin\Theta\, e^{i(kr-\omega t)}$$

$$A_\alpha = 0$$

b) $$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_r = \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cdot A_\alpha) - \frac{\partial A_\Theta}{\partial\alpha}\right] = 0$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_\Theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cdot A_\alpha)\right] = 0$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_\alpha = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_0\, ik}{4\pi\varepsilon_0 c}\sin\Theta\cdot e^{ikr}\right) + \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{ik}{r}(-\sin\Theta)e^{ikr}\right]e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{p_0\, ik}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\sin\Theta\cdot\frac{1}{r}\cdot\left(ik\cdot e^{ikr} - \frac{1}{r}e^{ikr}\right) =$$

$$B_\alpha = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\sin\Theta\left(\frac{-k^2}{r} - \frac{ik}{r^2}\right)e^{i(kr-\omega t)} \quad \checkmark$$

c) Kontrola Lorenzovy kalibrace $\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cdot A_\Theta) + \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\cdot(-i\omega)\cdot\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\cdot\cos\Theta\, e^{i(kr-\omega t)}$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{-ik}{r^2} + \frac{iik^2}{r}\right)\cdot\cos\Theta\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) = \frac{-p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(ikr e^{ikr}\right)\cos\Theta e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{-p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{1}{r^2}\left(ik e^{ikr} + ikr ik e^{ikr}\right)\cos\Theta e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{-ik}{r^2} + \frac{k^2}{r}\right)\cos\Theta\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\cdot A_\Theta\right) = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{1}{r\sin\Theta}\cdot\frac{ik}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin^2\Theta\right)\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{1}{r\sin\Theta}\cdot\frac{ik}{r}\cdot 2\sin\Theta\cos\Theta\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\cdot\frac{2ik}{r^2}\cdot\cos\Theta\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{-ik}{r^2} + \frac{k^2}{r} + \frac{2ik}{r^2} - \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)\cos\Theta e^{i(kr-\omega t)}$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

d) elektrické pole $E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2}{r^3} + \frac{ik}{r^2} + \frac{ik}{r^2} - \frac{ik\,ik}{r}\right)\cdot\cos\Theta\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2}{r^3} + \frac{2ik}{r^2} + \frac{k^2}{r}\right)\cos\Theta\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{-p_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-i\omega}{c}\cdot\frac{ik}{r}\cdot\cos\Theta\cdot e^{i(kr-\omega t)} =$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{ik\,ik}{r}\cdot\cos\Theta e^{i(kr-\omega t)} = \frac{-p_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{k^2}{r}\cos\Theta\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$E_r = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r^3} - \frac{2ik}{r^2}\right)\cos\Theta\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right)\cdot \sin\theta\, e^{i(kr-\omega t)}$$

$$-\frac{\partial A_\theta}{\partial t} = \frac{-p_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-i\omega}{c}\cdot\frac{ik}{r}\cdot \sin\theta\, e^{i(kr-\omega t)}$$

$$E_\theta = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} + \frac{i\,i\,k^2}{r}\right)\sin\theta\, e^{i(kr-\omega t)}$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)\sin\theta\, e^{i(kr-\omega t)}$$

$$E_\alpha = \frac{-1}{r\cdot\sin\theta}\cdot\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}}_{0} = 0$$

6) Vlnová rovnice, Helmholtzova rovnice

V křivočarých souřadnicích je nutno s Laplaceovým operátorem $\nabla^2\vec{F}$ působícím na vektor zacházet obezřetně. Zatímco v pravoúhlých souřadnicích je jednoduše

$$(\nabla^2\vec{F})_x = \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}, \text{ podobně } (\nabla^2\vec{F})_y, (\nabla^2\vec{F})_z,$$

v křivočarých souřadnicích je to složitější a lze ukázat tak, že použijeme $\nabla^2\vec{F} = \text{grad div}\,\vec{F} - \text{rot rot}\,\vec{F}$

kde operátory grad, div, rot pro kulové souřadnice byly uvedeny dříve. (Obecně viz Stratton 6.3 str. 62)

Pro vlnu ve volném prostoru $\text{div}\,\vec{E} = \text{div}\,\vec{B} = 0$

a $\nabla^2\vec{E} = -\text{rot rot}\,\vec{E}$, $\nabla^2\vec{B} = -\text{rot rot}\,\vec{B}$

$(\text{rot rot}\,\vec{B})_\alpha \neq \nabla^2 B_\alpha$ a nelze tedy používat ∇^2(SKALÁR)

ve "skalární" Helmholtzovu rovnici $\nabla^2 B_\alpha + k^2 B_\alpha = 0$,

z čehož plynou komplikace při skalárním popisu vektorového elektromagnetického pole v křivočarých souřadnicích.

Zkusme pro $B_\alpha = B_0 \sin\Theta \left(\frac{ik}{r^2} + \frac{k^2}{r}\right) e^{ikr}$

$\vec{B} = (0, 0, B_\alpha)_{r,\Theta,\alpha}$ $\quad B_0 = \frac{-p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}$

$$(\text{rot rot}\,\vec{B})_r = \frac{1}{r\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\cdot(\text{rot}\,\vec{B})_\alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha}(\text{rot}\,\vec{B})_\Theta\right]\right. =$$

$$= \frac{1}{r\sin\Theta}\left[0 + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot B_\alpha)\right)\right] = \frac{1}{r^2\sin\Theta}\,\underbrace{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B_\alpha + r\frac{\partial B_\alpha}{\partial r}\right)}_{0}$$

$$\left(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_\Theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_r}_{0} - \frac{\partial}{\partial r}\Big(r\cdot\underbrace{\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_\alpha}_{0}\Big)\right] = 0$$

$$\left(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_\alpha = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_\Theta\right) - \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_r\right]$$

- $$\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_\Theta = \frac{-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[B_0\cdot\sin\Theta\cdot\left(\frac{ik}{r}+k^2\right)e^{ikr}\right] =$$

$$= -\frac{1}{r}B_0\cdot\sin\Theta\left(\frac{-ik}{r^2}+\frac{ikik}{r}+ik^3\right)e^{ikr}$$

$$r\cdot\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_\Theta = -B_0\cdot\sin\Theta\left(-\frac{ik}{r^2}-\frac{k^2}{r}+ik^3\right)e^{ikr}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_\Theta\right) = -B_0\cdot\sin\Theta\cdot\left(\frac{2ik}{r^3}+\frac{k^2}{r^2}-\frac{ikik}{r^2}-\frac{ik^3}{r}-k^4\right)e^{ikr}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_\Theta\right) = -B_0\sin\Theta\left(\frac{2ik}{r^4}+\frac{2k^2}{r^3}-\frac{ik^3}{r^2}-\frac{k^4}{r}\right)e^{ikr}$$

- $$\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_r = \frac{1}{r\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\cdot B_\alpha\right)-0\right] =$$

$$= \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left[B_0\cos\Theta\cdot\sin\Theta\left(\frac{ik}{r^2}+\frac{k^2}{r}\right)e^{ikr}+\sin\Theta\,\cos\Theta\cdot B_0\cdot\left(\frac{ik}{r^2}+\frac{k^2}{r}\right)e^{ikr}\right]$$

$$= \frac{2B_0\sin\Theta}{r\sin\Theta}\cos\Theta\left(\frac{ik}{r^2}+\frac{k^2}{r}\right)e^{ikr}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_r = \frac{-2\ldots}{r^2}\sin\Theta\left(\frac{ik}{r^2}+\frac{k^2}{r}\right)e^{ikr} = -B_0\sin\Theta\left(\frac{2ik}{r^4}+\frac{2k^2}{r^3}\right)e^{ikr}$$

$$-\left(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)_\alpha = B_0\cdot\sin\Theta\,e^{ikr}\left(\frac{2ik}{r^4}+\frac{2k^2}{r^3}-\frac{ik^3}{r^2}-\frac{k^4}{r}-\frac{2ik}{r^4}-\frac{2k^2}{r^3}\right)$$

$$= B_0\sin\Theta\,e^{ikr}\left(\frac{-ik^3}{r^2}-\frac{k^4}{r}\right)$$

$$k^2\cdot\left(\vec{B}\right)_\alpha = B_0\cdot\sin\Theta\,e^{ikr}\left(\frac{ik^3}{r^2}+\frac{k^4}{r}\right)$$

$$-\left(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)+k^2\vec{B} = 0$$ ve složkách r, Θ vše nulové

Helmholtzova rovnice splněna

Mírně odlišný výpočet pole kmitajícího dipólu:

V oblasti kde $\vec{P}=0$ (mimo zdroj) je

$$\nabla^2 \vec{\Pi}_e - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\Pi}_e}{\partial t^2} = 0$$ a pro elektrické pole dostaneme

$$\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}_e - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}_e}{\partial t^2} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}_e - \nabla^2\vec{\Pi}_e =$$

$$= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}_e$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{\Pi}_e}{\partial t}$$

Harmonicky kmitající dipól

$$\vec{p}(\vec{r}=0,t) = p_0\cdot e^{-i\omega t}\,(0,0,1)_{x,y,z}$$

Hertzův vektor $\vec{\Pi}_e(\vec{r},t) = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot e^{-i\omega t}\cdot e^{i\omega\frac{r}{c}}\cdot\frac{1}{r}\cdot(0,0,1)_{x,y,z}$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot e^{-i\omega t}\,\frac{e^{ikr}}{r}\cdot(\cos\Theta, -\sin\Theta, 0)_{r,\Theta,\alpha}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{\Pi})_r = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\cdot e^{-i\omega t}\cdot\frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\sin\Theta\cdot 0\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\cdot(-\sin\Theta)\right)\right] = 0$$ označme R_r

$$R_\Theta \equiv (\operatorname{rot}\vec{\Pi})_\Theta = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}e^{-i\omega t}\cdot\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\underbrace{\frac{\partial\cos\Theta}{\partial\alpha}}_{0} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial r}\left(e^{ikr}\cdot 0\right)\right] = 0$$

$$R_\alpha \equiv (\operatorname{rot}\vec{\Pi})_\alpha = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}e^{-i\omega t}\cdot\frac{1}{r}\left[\overbrace{\frac{-\partial}{\partial r}\left(e^{ikr}\cdot\sin\Theta\right)}^{-\sin\Theta\cdot ik\cdot e^{ikr}} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{ikr}}{r}\cdot\underbrace{\frac{\partial\cos\Theta}{\partial\Theta}}_{-\sin\Theta}\right] = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}e^{-i\omega t}\,e^{ikr}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\cdot$$

$$\cdot\sin\Theta$$

27B

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}\right)_{r,\theta,\alpha} \equiv \operatorname{rot}\left(R_r, R_\theta, R_\alpha\right)_{r,\theta,\alpha}$$

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}\right)_r = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\Big[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot R_\alpha\right) - \underbrace{\frac{\partial R_\theta}{\partial\alpha}}_{0}\Big]$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0} e^{-i\omega t} e^{ikr}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial \sin^2\theta}{\partial\theta} =$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0} e^{-i\omega t} e^{ikr}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right)\cdot 2\cdot\cos\theta =$$

$$= \frac{p_0}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right)\cdot\cos\theta\cdot e^{i(kr-\omega t)} \equiv E_r(r,\theta,\alpha)$$

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}\right)_\theta = \frac{1}{r}\Big[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\underbrace{\frac{\partial R_r}{\partial\alpha}}_{0} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot R_\alpha\right)\Big] =$$

$$= \frac{-p_0}{4\pi\varepsilon_0} e^{-i\omega t}\cdot\frac{1}{r}\cdot\sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}\Big[e^{ikr}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\Big] =$$

$$= \frac{-p_0}{4\pi\varepsilon_0} e^{-i\omega t}\cdot\frac{1}{r}\cdot\sin\theta\cdot\Big[\frac{ik}{r} - i^2k^2 - \frac{1}{r^2}\Big]\cdot e^{ikr}$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)\cdot\sin\theta\cdot e^{i(kr-\omega t)} \equiv E_\theta(r,\theta,\alpha)$$

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\Pi\right)_\alpha = \frac{1}{r}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot R_\theta\right) - \frac{\partial R_r}{\partial\theta}\Big] = 0 \equiv E_\alpha(r,\theta,\alpha)$$

$$B_\alpha = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t} \quad = -i\omega\frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\cdot e^{-i\omega t}\cdot e^{ikr}\cdot\sin\theta\cdot\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k}\,\frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(-\frac{k}{r} - \frac{i}{r^2}\right)\cdot\sin\theta\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(-\frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)\cdot\sin\theta\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

Střední hodnota Poyntingova vektoru

$$(\langle\vec S\rangle_t)_r = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\{E_\Theta B_\alpha^* - \underbrace{E_\alpha B_\Theta^*}_{0}\}$$

$$= \frac{p_0^2\sin^2\Theta}{32\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2 c}\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}-\frac{k^2}{r}\right)\left(i\frac{k}{r^2}-\frac{k^2}{r}\right)\right\}$$

$$= \frac{p_0^2 c}{32\pi^2\varepsilon_0}\cdot\sin^2\Theta\cdot\mathrm{Re}\left\{\frac{ik}{r^5}+\frac{k^2}{r^4}-\frac{ik^3}{r^3}-\frac{k^2}{r^4}+\frac{ik^3}{r^3}+\frac{k^4}{r^2}\right\}$$

$$= \frac{p_0^2 c}{32\pi^2\varepsilon_0}\cdot\sin^2\Theta\cdot\frac{k^4}{r^2} = \frac{p_0^2\omega^4}{32\pi^2c^3\varepsilon_0}\cdot\sin^2\Theta\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$(\langle\vec S\rangle_t)_\Theta = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\{\underbrace{E_\alpha B_r^*}_{0} - E_r B_\alpha^*\}$$

$$= \frac{-p_0^2\cos\Theta\sin\Theta}{32\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2 c}\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}\right)\left(\frac{ik}{r^2}-\frac{k^2}{r}\right)\right\}$$

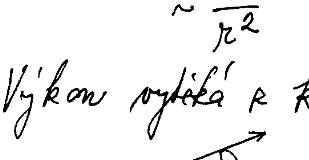
$$= \frac{-p_0^2\cos\Theta\sin\Theta}{32\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2 c}\mathrm{Re}\left\{\frac{ik}{r^5}+\frac{k^2}{r^4}-\frac{k^2}{r^4}+\frac{ik^3}{r^3}\right\} = 0$$

$$(\langle\vec S\rangle_t)_\alpha = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\{E_r\underbrace{B_\Theta^*}_{0} - E_\Theta\underbrace{B_r^*}_{0}\} = 0$$

Střední (časová stř. hod.) Poyntingova vektoru má jen radiální složku

$$\langle S_r\rangle_t \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}$$
$$\sim \sin^2\Theta$$
$$\sim \frac{1}{r^2}$$

Výkon vytéká z kmitajícího dipólu v "kuželových trubicích"



plochy $\sim r^2$ zákon zachování energie (zde: výkonu)

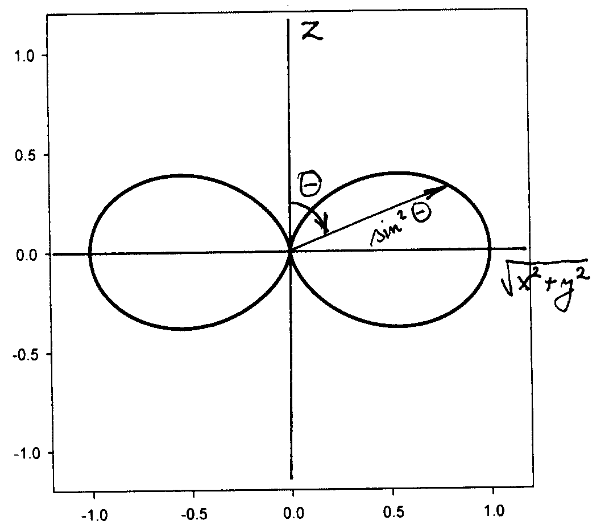
hustota toku výkonu $\frac{1}{r^2}$

$$\mathrm{div}\langle\vec S\rangle_t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\langle S_r\rangle\right) = \frac{p_0^2\omega^4\sin^2\Theta}{32\pi^2c^3\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{1}{r^2}\right) = 0$$

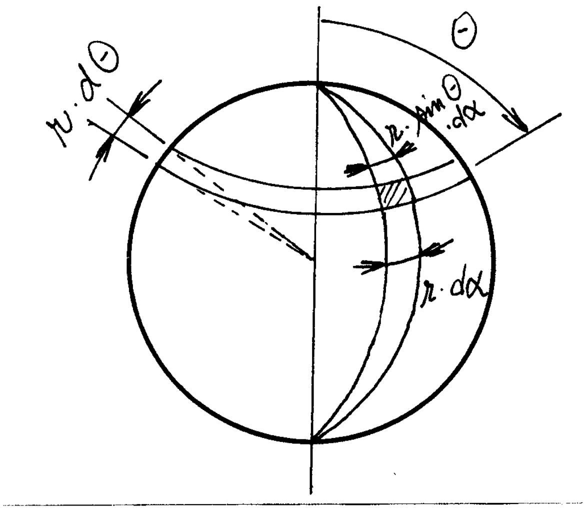
Vyzařovací diagram Hertzova dipólu:

délka úsečky ~ $\sin^2\Theta$.

Význam: jaký výkon vysílá dipól do směru Θ



Celkový vyzařovaný výkon



$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \langle S_r \rangle \cdot \overbrace{r^2 \sin\Theta \, d\Theta \, d\alpha}^{\text{vyšrafovaná ploška}}$$

$$= 2\pi \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{r^2}{r^2} \int_0^{\pi} \sin^3\Theta \, d\Theta$$

použít $\sin^3 = \sin(1-\cos^2)$

$$\int_0^{\pi} \sin\Theta \, d\Theta = [-\cos\Theta]_0^{\pi} = 2$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2\Theta \sin\Theta \, d\Theta \qquad t = \cos\Theta, \quad dt = -\sin\Theta \, d\Theta$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\Theta \, d\Theta = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}; \quad \frac{2\pi}{32\pi^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{12\pi};$$

Vyzařovaný výkon do všech směrů $P = \dfrac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3} = \dfrac{p_0^2 \omega^4 \mu_0}{12\pi c}$

To je v souladu s obecnějším Larmorovým vztahem, který udává výkon vyzařovaný nabitou částicí, která se pohybuje se zrychlením a

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}$$

Dipól: $p_0 = q \cdot z_0$

$z = z_0 \cdot \cos(\omega t)$

$a = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z_0 \cdot \cos \omega t \qquad \langle \cos^2 \omega t \rangle_t = \frac{1}{2}$

$$\langle P \rangle_t = \frac{q^2 \omega^4 z_0^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle_t}{6\pi \varepsilon_0 c^3} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12 \pi \varepsilon_0 c^3}$$

$\boxed{\text{Multipólový rozvoj pomocí kulových vln}}$ 31

Vlny s kulovými vlnoplochami nemusí být kulově symetrické; vektorové vlny ani nemohou být (tedy takové, které mají příčnou složku a tak vyhovují Maxwellovým rovnicím ve volném prostoru).

a) obecnější pohled na kulové <u>skalární</u> vlny:

skalární Helmholtzova rovnice ve volném prostoru

$(\nabla^2 + k^2)u = 0$, hledáme postupné (nikoli stojaté) vlny, jejichž dominantní příspěvek pro $r \to \infty$ je úměrný $\frac{e^{ikr}}{kr} \cdot e^{-i\omega t}$ (tj. šíří se ze středu $r \to 0$) a úhlové rozložení nemusí být kulově symetrické.

Vyhovují vlny typu $u_n^m(r,\Theta,\alpha) = h_n(kr) \cdot Y_n^m(\Theta,\alpha) e^{-i\omega t}$

kde h_n jsou kulové Hankelovy funkce splňující

$$r^2 \frac{d^2 h_n}{dr^2} + 2r\frac{dh_n}{dr} + \left[k^2 r^2 - n(n+1)\right] h_n = 0 .$$

První tři: $h_0(kr) = -i\,\frac{e^{ikr}}{kr}$ kulově symetrická

$h_1(kr) = \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \cdot \frac{-e^{ikr}}{kr}$ souvisí se zářením dipólu

$h_2(kr) = \left(i - \frac{3}{kr} - \frac{3i}{k^2r^2}\right) \cdot \frac{e^{ikr}}{kr}$ viz dále

Tak popsány radiální závislosti u_n^m

Úhlové závislosti jsou popsány kulovými funkcemi $Y_n^m(\Theta,\alpha)$

v reálném oboru: $Y_{n(c)}^m(\Theta,\alpha) = N'_{nm} \cdot P_n^m(\cos\Theta) \cdot \cos(m\cdot\alpha)$

$Y_{n(s)}^m(\Theta,\alpha) = N'_{nm} \cdot P_n^m(\cos\Theta) \cdot \sin(m\alpha)$

nebo v komplexním $Y_n^m(\Theta,\alpha) = N_{nm} \cdot P_n^m(\cos\Theta)\, e^{im\alpha}$

kde N_{nm} je normovací koeficient
$P_n^m(\cos\Theta)$ je Legenderova přidružená funkce

$-n \leq m \leq n$

pro $m=0$ Legenderův polynom vyhovuje Legenderově rovnici

$$y = P_n(x) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\cdot\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

přidružené Legenderovy funkce

$$P_n^m(x) = \sqrt{(1-x^2)^m}\cdot\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

lze zobecnit i pro $m<0$

Funkce $r^n\, Y_n^m(\Theta,\alpha)$ splňují Laplaceovu rovnici

$$\nabla^2\left(r^n Y_n^m\right) = 0$$

Funkce Y_n^m tvoří na kulové ploše ortonormální systém
např. v komplexním zápisu

*) $$\int_{\substack{\text{kulová}\\ \text{plocha}}} Y_{n'}^{m'}\cdot\left(Y_n^m\right)^* dS_K = \delta_{nn'}\,\delta_{mm'}$$

a z toho lze určit N_{nm}. Normování v různých pramenech může být trochu odlišné. Např. pro normování komplexní funkce:

*) bez 4π ve jmenovateli

$$Y_n^m = \left(\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right)^{1/2} P_n^m(\cos\Theta)\cdot e^{im\alpha}$$

Pro záporná m lze použít vztahu

$$Y_n^{-m}(\Theta,\alpha) = (-1)^m\left(Y_n^m\right)^*$$

protože $P_n^{-m} = (-1)^m \dfrac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m$

$$e^{-im\alpha} = \left(e^{im\alpha}\right)^*$$

---

*) Někdy se normuje na povrch koule: tak, aby $\int_K Y_n^m\, Y_n^{m*}\, dS_K = 4\pi$

První tři Legenderovy polynomy $P_0(x)=1$

$P_1(x)=x$

$P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$

První přidružené Legenderovy funkce

$$P_1^1(x)=\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dx}{dx}=\sqrt{1-x^2}\,;\quad \text{pro } x=\cos\Theta \quad P_1^1(\cos\Theta)=\sin\Theta$$

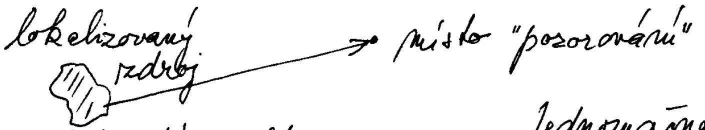
$$P_2^1(x)=\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2x=3x\sqrt{1-x^2} \qquad P_2^1(\cos\Theta)=3\cos\Theta\sin\Theta$$

$$P_2^2(x)=\sqrt{(1-x^2)^2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2=3\left(1-x^2\right) \qquad P_2^2(\cos\Theta)=3\sin^2\Theta$$

b)

Vztahy mezi řešeními skalární rovnice a elektromagnetickou vlnou – v případě kulových vlnoploch

– rozklad vlny do multipólového rozvoje v oblasti bez zdrojů



= elektrické multipóly
+ magnetické multipóly

vše o kruhové frekvenci ω

$k=\frac{\omega}{c}$ ve volném prostoru

Jednoznačnost řešení skalární rovnice

a) zdroj $(r\to 0)$

b) Sommerfeldova radiační podmínka $(r\to\infty)$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)=0$$

$$u(r,\Theta,\alpha)=\rho(r)\cdot f(\Theta,\alpha)$$

Pro $\rho(r)=\frac{e^{ikr}}{r}$ je podmínka splněna

$$\lim_{r\to\infty}\left[r\left(\frac{d\rho}{dr}-ik\rho\right)\cdot f(\Theta,\alpha)\right]=\lim\left[r\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}-\frac{ik}{r}\right)e^{ikr}\cdot f(\Theta,\alpha)\right]$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{-e^{ikr}}{r}\cdot f(\Theta,\alpha)=0 \quad \checkmark$$

Úhlové rozložení se zachová i pro velká r

Vztahy mezi řešeními skalární rovnice a vektorovým polem nejsou zcela triviální. Zde bez odvození:

$$\vec{E} = \sum_{n,m} a_{nm} \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{r}\cdot u_n^m) + i\omega\mu_0 \sum_{n,m} b_{nm} \operatorname{rot}(\vec{r}\cdot u_n^m)$$

elektrické multipóly magnetické multipóly

$$\vec{H} = -i\omega\varepsilon_0 \sum a_{nm} \operatorname{rot}(\vec{r}\cdot u_n^m) + \sum b_{nm} \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{r}\cdot u_n^m)$$

a_{nm}, b_{nm} určeny náboji a proudy ve zdroji lokalizovaném kolem počátku (jejich kmitáním s kr. frekvencí ω)

c) Jaké pole lze odvodit z $u_0^0 = \dfrac{e^{ikr}}{kr}$?

(kulově symetrická skalární vlna)

$$\operatorname{rot}\left(\vec{r}\cdot\frac{e^{ikr}}{kr}\right) \equiv \operatorname{rot}\left(\frac{e^{ikr}}{k}, 0, 0\right)_{r,\Theta,\alpha}$$

v kulových souřadnicích

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_r = \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cdot\underbrace{F_\alpha}_{0}) - \frac{\partial \overbrace{F_\Theta}^{0}}{\partial\alpha}\right] = 0$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_\Theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{ikr}}{k}\right)}_{0} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\underbrace{F_\alpha}_{0})\right] = 0$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_\alpha = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\Theta) - \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\frac{e^{ikr}}{k}\right)\right] = 0$$

Kulově symetrická elektromagnetická vlna se nemůže volným prostorem šířit.

d) Záření elektrického dipólu lze odvodit z další funkce $u_1^0(r,\Theta,\alpha) = h_1(kr)\cdot Y_1^0(\Theta,\alpha)$

Hankelova kulová funkce $h_1(kr) = -e^{ikr}\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2r^2}\right)$ pro popis radiální závislosti

Úhlová závislost $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot\cos\Theta\cdot \underbrace{e^{i0\alpha}}_{1}$,

dále bez normovacího koeficientu

$$u = -\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2r^2}\right)e^{ikr}\cdot\cos\Theta$$

Magnetické pole elektrického dipólu

$\vec{H} = -i\omega\varepsilon_0\, \mathrm{rot}(\vec{r}\cdot u)\cdot \underbrace{a_1^0}_{}$ dáno parametry dipólu

$\vec{r}\cdot u \equiv (ru, 0, 0)_{r,\Theta,\alpha}$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{r}\cdot u)_r = \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cdot 0) - \frac{\partial 0}{\partial\alpha}\right] = 0$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{r}\cdot u)_\Theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\cdot \underbrace{\frac{\partial(ru)}{\partial\alpha}}_{0} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cdot 0)\right] = 0$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{r}\cdot u)_\alpha = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot 0) - \frac{\partial(r\cdot u)}{\partial\Theta}\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{-1}{k} - \frac{i}{k^2r}\right)\cdot e^{ikr}\cdot\sin\Theta = -\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2r^2}\right)e^{ikr}\sin\Theta$$

tj. $H_\alpha = i a_1^0\,\omega\varepsilon\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2r^2}\right)e^{ikr}\sin\Theta$

dříve odvozeno pro pole Hertzova dipólu

$$H_\alpha = \frac{-p_0}{4\pi\varepsilon_0\mu_0 c}\left(\frac{ik}{r^2} + \frac{k^2}{r}\right)\cdot e^{ikr}\sin\Theta$$

$$= \frac{-p_0 c k^3}{4\pi}\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2r^2}\right)e^{ikr}\sin\Theta$$

· srovnáním $i a_1^0 \omega \varepsilon_0 = \frac{-p_0 c}{4\pi} k^3$

$$a_1^0 = \frac{i p_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{c}{\omega} \cdot k^3 = \frac{i p_0}{4\pi\varepsilon_0} k^2$$

Elektrické pole elektrického dipólu

$$\vec{E} = a_1^0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\vec{r} \cdot u)$$

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{r}u)\right)_r = \frac{1}{r \cdot \sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta \cdot (\operatorname{rot}\vec{r}\cdot u\right)_\alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha}(\operatorname{rot}\vec{r}\cdot u)_\Theta\right] =$$

$$= \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin^2\Theta\cdot\left(\frac{-1}{kr} - \frac{i}{k^2r^2}\right)e^{ikr} - \frac{\partial 0}{\partial\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\cdot 2\sin\Theta\cos\Theta\left(\frac{-1}{kr} - \frac{i}{k^2r^2}\right)e^{ikr}$$

$$= -\left(\frac{2}{kr^2} + \frac{2i}{k^2r^3}\right)e^{ikr}\cos\Theta$$

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{r}\cdot u)\right)_\Theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}(\operatorname{rot}\vec{r}\cdot u)_r - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\operatorname{rot}\vec{r}\cdot u\right)_\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial 0}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{1}{k} + \frac{i}{k^2r}\right)e^{ikr}\cdot\sin\Theta\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{-i}{k^2r^2} + \frac{ik}{k} + \frac{iik}{k^2r}\right)e^{ikr}\cdot\sin\Theta$$

$$= \left(\frac{-i}{k^2r^3} - \frac{1}{kr^2} + \frac{i}{r}\right)e^{ikr}\cdot\sin\Theta$$

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{r}\cdot u)\right)_\alpha = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{(r\cdot\operatorname{rot}\vec{r}\cdot u)_\Theta}_{0} - \frac{\partial}{\partial\Theta}\underbrace{(\operatorname{rot}\vec{r}\cdot u)_r}_{0}\right] = 0$$

$$E_\Theta = a_1^0\left(\frac{-i}{k^2r^3} - \frac{1}{kr^2} + \frac{i}{r}\right)e^{ikr}\sin\Theta$$

$$= \frac{ip_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-ik^2}{k^2r^3} - \frac{k}{r^2} + \frac{ik^2}{r}\right)e^{ikr}\sin\Theta$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)e^{ikr}\sin\Theta \quad \checkmark$$

$$E_r = \frac{-ip_0}{4\pi\varepsilon_0} k^2 \left(\frac{2}{kr^2} + \frac{2i}{k^2r^3}\right) e^{ikr}\cos\Theta = \frac{2p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr}\cos\Theta$$

opět v souladu s dříve odvozenými vztahy

E_r a $u_1^0 \sim \cos\Theta$, ale různé radiální závislosti.

e)

Ověření, že funkce použité při skalárním popisu záření dipólu splňují obecné, dříve uvedené vlastnosti:

1) Hankelova funkce $h_1(kr) = -e^{ikr}\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2r^2}\right)$

splňuje diferenciální rovnici

$$r^2\frac{d^2h_1}{dr^2} + 2r\frac{dh_1}{dr} + (k^2r^2 - 1\cdot 2)\,h_1 = 0$$

$$\frac{dh_1}{dr} = -ik\,e^{ikr}\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{(kr)^2}\right) + e^{ikr}\left(\frac{1}{kr^2} + \frac{2i}{k^2r^3}\right) =$$

$$= \left(\frac{-i}{r} + \frac{-ii}{kr^2} + \frac{1}{kr^2} + \frac{2i}{k^2r^3}\right)e^{ikr} = \left(\frac{2i}{k^2r^3} + \frac{2}{kr^2} - \frac{i}{r}\right)e^{ikr}$$

$$\frac{d^2h_1}{dr^2} = \left(\frac{-6i}{k^2r^4} - \frac{4}{kr^3} + \frac{i}{r^2} + \frac{2iik}{k^2r^3} + \frac{2ik}{kr^2} - \frac{iik}{r}\right)e^{ikr} =$$

$$= \left(\frac{-6i}{k^2r^4} - \frac{6}{kr^3} + \frac{3i}{r^2} + \frac{k}{r}\right)e^{ikr}$$

dosazení do uvedené rovnice

$$-\frac{6i}{k^2r^2} - \frac{6}{kr} + 3i + kr + \frac{4i}{k^2r^2} + \frac{4}{kr} - 2i - kr - i + \frac{2}{kr} + \frac{2i}{k^2r^2} = 0 \checkmark$$

2) $r\cdot Y_1^0(\Theta,\alpha)$ splňuje Laplaceovu rovnici $\nabla^2 f = 0$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial f}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}$$

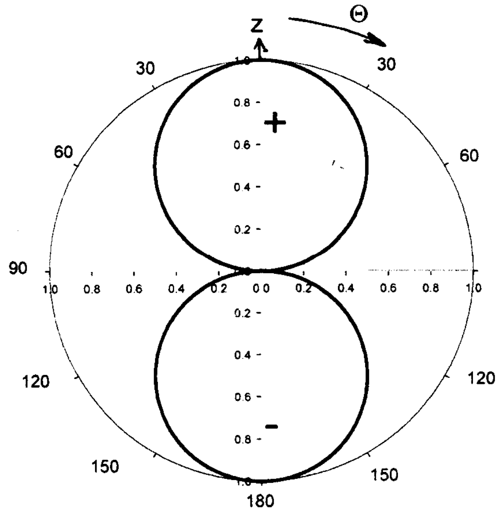
$$\nabla^2(r\cdot\cos\Theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cos\Theta) - \frac{r}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin^2\Theta) + 0 =$$

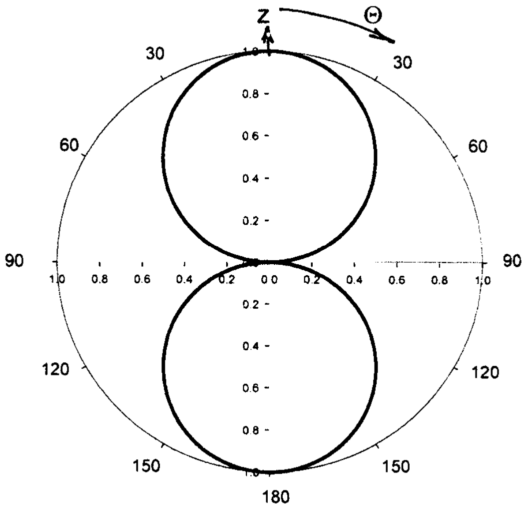
$$= \frac{2r\cos\Theta}{r^2} - \frac{2\sin\Theta\cos\Theta}{r\cdot\sin\Theta} = \frac{2\cos\Theta}{r} - \frac{2\cos\Theta}{r} = 0$$

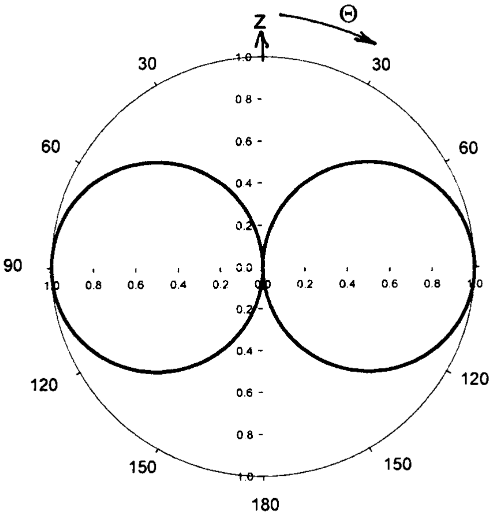
Řezy směrovými diagramy veličin pro elektrický Hertzův dipól kmitající ve směru osy z (38)

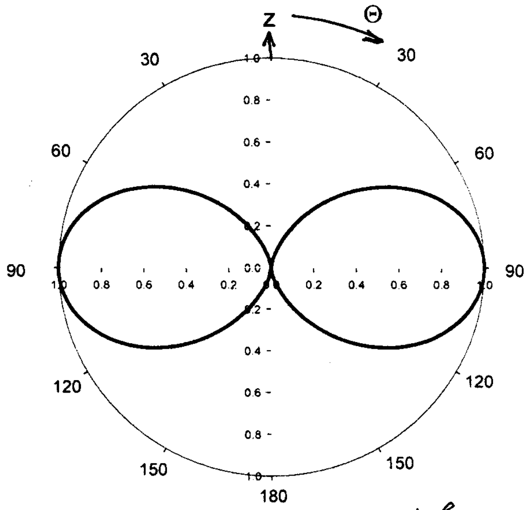
skalární funkce $u_0^1 \sim \cos\Theta$

radiální složka $E_r \sim \cos\Theta$









příčné složky E_Θ, $H_\alpha \sim \sin\Theta$

vyzařovaný výkon $\langle S \rangle_t \sim \sin^2\Theta$

Všechny diagramy jsou osově symetrické kolem směru dipólového momentu, tj kolem osy z.

3) funkce $Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cdot \cos\Theta \cdot e^{i0}$ je normovaná na kulové ploše poloměru 1

$$\int_K Y_1^0 \cdot Y_1^{0*} dS_K = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} Y_1^0 \cdot Y_1^0 \sin\Theta \, d\Theta\right) d\alpha =$$

$$= \frac{3}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\Theta \sin\Theta \, d\Theta = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

což vyhovuje obecnému vztahu pro normování

$$Y_n^m = \left(\frac{2n+1}{4\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right)^{1/2} \cdot P_n^m(\cos\Theta)\, e^{im\alpha}$$

$$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1}{1}\right)^{1/2} \cdot \cos\Theta \cdot e^0$$

f) Význam dalších kulových funkcí se vztahem k dipólovému záření

$$Y_1^1 = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{0!}{2!}\right)^{1/2} \cdot P_1^1(\cos\Theta) \cdot e^{i\alpha} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\Theta \, e^{i\alpha}$$

$$Y_1^{-1} = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{2!}{0!}\right)^{1/2} \cdot P_1^{-1}(\cos\Theta)\, e^{-i\alpha} = (-1)^1 \left(\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{2!}{0!}\right) \cdot \frac{0!}{2!} P_1^1(\cos\Theta) e^{-i\alpha}$$

$$= -\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\Theta \, e^{-i\alpha}$$

$$\frac{1}{2}\left(Y_1^1 - Y_1^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\Theta \left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\Theta \cos\alpha$$

V dalším bez normovacího faktoru

$$\left(\vec{r} \cdot u(r,\Theta,\alpha)\right)_r = -e^{ikr}\left(\frac{1}{k} + \frac{i}{k^2 r}\right) \cdot \sin\Theta \cos\alpha$$

$$(\vec{r} \cdot u)_\Theta = (\vec{r} \cdot u)_\alpha = 0$$

$$(\mathrm{rot}\, \vec{r} \cdot u)_r \sim \frac{1}{r \cdot \sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta \cdot 0) - \frac{\partial 0}{\partial\alpha}\right] = 0$$

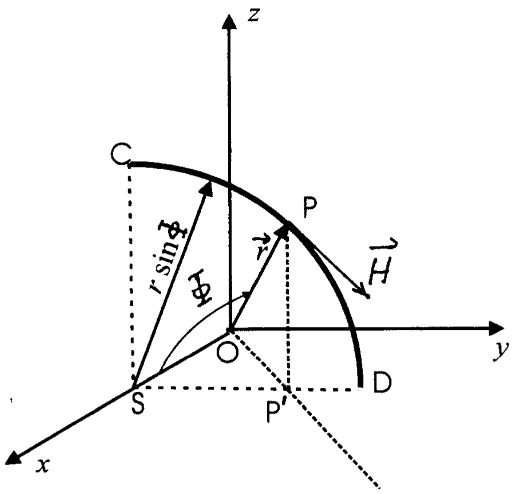
$$(\mathrm{rot}\, \vec{r} \cdot u)_\Theta = \frac{1}{r}\left[\frac{-1}{\sin\Theta} \cdot e^{ikr}\left(\frac{1}{k} + \frac{i}{k^2 r}\right) \cdot \sin\Theta \cdot \frac{\partial \cos\alpha}{\partial\alpha} - \frac{\partial 0}{\partial r}\right]$$

$$= e^{ikr}\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2}\right) \cdot \sin\alpha$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{r}\cdot w)_\alpha = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot 0) + e^{ikr}\left(\frac{1}{k}+\frac{i}{k^2 r}\right)\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\partial \sin\Theta}{\partial\Theta}\right] =$$

$$= e^{ikr}\left(\frac{1}{kr}+\frac{i}{k^2 r^2}\right)\cdot\cos\Theta\cos\alpha \qquad (40)$$

Ukážeme, že to odpovídá magnetickému poli elektrického dipólu orientovaného rovnoběžně s osou x, tj.



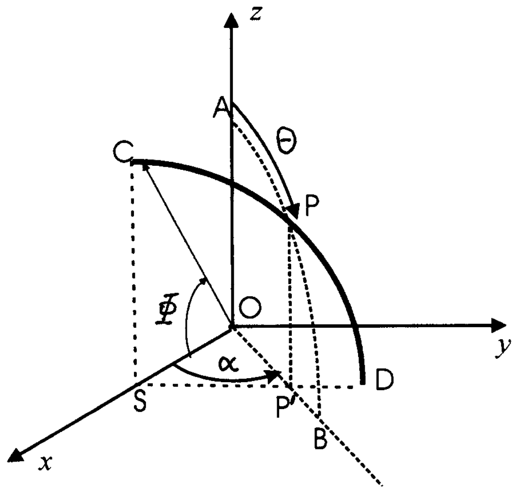
magnetické pole na kružnici se středem na ose x ležící v rovině $\perp$ osa x má konstantní velikost, vektor $\vec{H}$ leží v rovině kružnice a je tečnou ke kružnici.

„Místo pozorování" P leží na kružnici se středem S na ose x : $S = [x_0, 0, 0]$

$x_0 = r\cdot\cos\Phi$

a poloměru $r\cdot\sin\Phi$

Φ je úhel mezi osou x a polohovým vektorem $\vec{r}$



Kružnice leží na kulové ploše K

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

se středem $O = [0,0,0]$

$x = r\cdot\sin\Theta\cos\alpha$

$y = r\cdot\sin\Theta\sin\alpha$

$z = r\cdot\cos\Theta$

Úhel Θ se měří na oblouku APB, oblouk CPD je částí kružnice se středem S

Rovnice kružnice procházející bodem P: $y^2+z^2 = r^2 - x_0^2$
a ležící v rovině $x = x_0 = $ konst. $= r^2(1-\cos^2\Phi) = r^2\sin^2\Phi$

tj. $r^2\sin^2\Theta\sin^2\alpha + r^2\cos^2\Theta = r^2\sin^2\Phi$

Z předchozích výpočtů $H_r = 0$, $H_\Theta = F(r)\cdot\sin\alpha$,
$H_\alpha = F(r)\cdot\cos\Theta\cos\alpha$

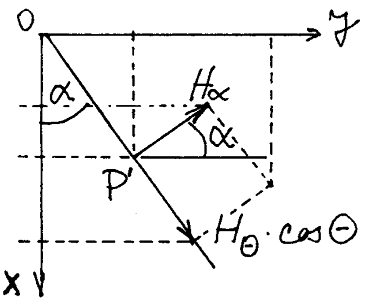
Velikost magnetického pole v bodě $P \equiv (r, \Theta, \alpha)$

$$|H|^2 = F(r)\cdot F^*(r)\cdot\left(\sin^2\alpha + \cos^2\Theta\cos^2\alpha\right) =$$
$$= |F|^2\cdot\left[\sin^2\alpha + \cos^2\Theta(1-\sin^2\alpha)\right] = \left[\sin^2(1-\cos^2\Theta) + \cos^2\Theta\right]\cdot|F|^2$$
$$= |F|^2\left(\sin^2\Theta\sin^2\alpha + \cos^2\Theta\right) = |F|^2\cdot\sin^2\Phi$$

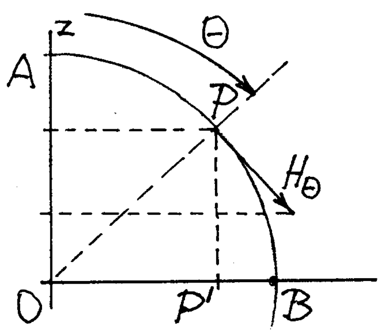
rovnice kružnice

$|H| = |F|\cdot\sin\Phi$ analogicky magnetickému poli elektrického dipólu ∥ osa z, jak spočteno dříve

Transformace vektorů: při $H_r = 0$



$$H_x = H_\Theta\cos\Theta\cdot\cos\alpha - H_\alpha\sin\alpha$$
$$H_y = H_\Theta\cos\Theta\cdot\sin\alpha + H_\alpha\cos\alpha$$
$$H_z = -H_\Theta\cdot\sin\Theta$$



$$H_x = F(r)\sin\alpha\cos\Theta\cos\alpha -$$
$$- F(r)\cos\Theta\cos\alpha\sin\alpha = 0$$

$\Rightarrow \vec{H}$ leží v rovině kružnice

Tečna ke kružnici $y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \Phi$, $x = r \cdot \cos \Phi$

má směrnici $\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z} = -\frac{r \cdot \sin\Theta \sin\alpha}{r \cdot \cos\Theta}$

Směrnice vektoru $\vec{H}$ $\frac{H_z}{H_y} = \frac{-H_\Theta \sin\Theta}{H_\Theta \cos\Theta \sin\alpha + H_\alpha \cos\alpha} =$

$$= \frac{-\sin\alpha \sin\Theta}{\sin^2\alpha \cos\Theta + \cos\Theta \cos^2\alpha} = \frac{-\sin\Theta \sin\alpha}{\cos\Theta}$$

Obě směrnice jsou stejné; $\vec{H}$ je tečnou ke kružnici.

Zcela analogicky lze ukázat, že kulová funkce

$$\frac{1}{2}\left(Y_1^1 + Y_1^{-1}\right) = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \cdot i \sin\Theta \sin\alpha$$

vede k popisu záření dipólu, jehož dipólový moment je orientován rovnoběžně s osou y.

$$\vec{r} \cdot u \equiv \left(-e^{ikr}\left(\frac{1}{k} + \frac{i}{k^2 r}\right) \sin\Theta \sin\alpha,\ 0,\ 0\right)$$

$$\left(\mathrm{rot}\,(\vec{r} \cdot u)\right)_r = 0$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{r} \cdot u)_\Theta = \frac{-1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta} \cdot e^{ikr}\left(\frac{1}{k} + \frac{i}{k^2 r}\right) \cdot \sin\Theta\, \underbrace{\cos\alpha}_{\frac{\partial F_r}{\partial \alpha}}\right] =$$

$$= -e^{ikr}\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2}\right) \cdot \cos\alpha$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{r} \cdot u)_\alpha = \frac{+1}{r} \cdot e^{ikr}\left(\frac{1}{k} + \frac{i}{k^2 r}\right) \cdot \underbrace{\cos\Theta}_{\frac{\partial F_r}{\partial \Theta}} \cdot \sin\alpha$$

$$= e^{ikr}\left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2}\right) \cos\Theta \sin\alpha$$

Magnetické pole $H \longrightarrow 0$ na ose y, kde $\Theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$, $\alpha \longrightarrow \frac{\pi}{2}$,

$H \longrightarrow 0$ na ose kmitajícího dipólu.

Limita velkých r

Nejpomaleji klesající člen v radiálních funkcích $h_n(kr)$ je $\frac{e^{ikr}}{kr}$.

Úhlové rozložení je dáno funkcemi $Y_n^m(\Theta,\alpha)$, na r nezávisí!

Magnetické pole elektrických multipólů a elektrické pole magnetických multipólů $\sim rot(\vec{r}\cdot h_n \cdot Y_n^m)$

$$\xrightarrow[r\ \text{veliké}]{} rot\left(\vec{r}\cdot \frac{e^{ikr}}{kr}\cdot Y_n^m\right) \qquad \vec{r} \equiv (r,0,0)_{r,\Theta,\alpha}$$

$$\left[rot\left(\vec{r}\cdot \frac{e^{ikr}}{kr}\cdot Y_n^m\right)\right]_r = \frac{1}{r\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\cdot \underbrace{r_\alpha}_{0}\cdot f\right) - \underbrace{\frac{\partial(r_\Theta f)}{\partial\alpha}}_{0}\right] = 0$$

$$\left[rot\left(\vec{r}\cdot \frac{e^{ikr}}{kr}\cdot Y_n^m\right)\right]_\Theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial(r_r f)}{\partial\alpha} - \underbrace{\frac{\partial(r_\alpha f)}{\partial r}}_{0}\right] =$$

$$= \frac{1}{r\sin\Theta}\cdot r\cdot\frac{e^{ikr}}{kr}\cdot\frac{\partial Y_n^m}{\partial\alpha} = \frac{e^{ikr}}{kr}\cdot\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial Y_n^m}{\partial\alpha}$$

$$\left[rot\left(\vec{r}\cdot \frac{e^{ikr}}{kr}\cdot Y_n^m\right)\right]_\alpha = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\cdot e^{ikr}}{kr}\cdot \underbrace{r_\Theta}_{0}\right) - \frac{r e^{ikr}}{kr}\cdot\frac{\partial Y_n^m}{\partial\Theta}\right] =$$

$$= \frac{-e^{ikr}}{kr}\cdot\frac{\partial Y_n^m}{\partial\Theta}$$

Nenulovost polí vyžaduje nenulovost $\frac{\partial Y_n^m}{\partial\Theta}$, $\frac{\partial Y_n^m}{\partial\alpha}$

Např.: magnetické pole elektrického dipólu // osa z

$H_\Theta = 0$ protože $\frac{\partial Y_1^0}{\partial\alpha} = 0$

$H_\alpha \neq 0$ $\qquad \frac{\partial Y_1^0}{\partial\Theta} \sim \sin\Theta$

Obecně $\operatorname{rot}(\vec{r}\cdot u) = -\vec{r}\times \operatorname{grad} u = (\operatorname{grad} u)\times\vec{r}$

a) v pravoúhlých souřadnicích $\vec{r} = (x, y, z)$

$$(\operatorname{rot}\vec{r}u)_x = \frac{\partial}{\partial y}(z\cdot u) - \frac{\partial}{\partial z}(y\cdot u) = z\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$(\vec{r}\times \operatorname{grad} u)_x = y\cdot\frac{\partial u}{\partial z} - z\frac{\partial u}{\partial y} \quad \checkmark$$

b) v kulových souřadnicích $\vec{r} = (r, 0, 0)$

$$(\operatorname{rot}\vec{r}u)_r = \frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cdot u\cdot \underbrace{r_\alpha}_{0}) - \frac{\partial}{\partial\alpha}(u\cdot\underbrace{r_\Theta}_{0})\right] = 0$$

$$(\operatorname{rot}\vec{r}u)_\Theta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}(\underbrace{r_r}_{r} u) - \frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\underbrace{r_\alpha}_{0}\cdot u)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\alpha}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{r}u)_\alpha = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\underbrace{r_\Theta}_{0}\cdot u) - \frac{\partial}{\partial\Theta}(r u)\right] = -\frac{\partial u}{\partial\Theta}$$

$$(\operatorname{grad} u)_r = \frac{\partial u}{\partial r}\,;\quad (\operatorname{grad} u)_\Theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\Theta}\,;\quad (\operatorname{grad} u)_\alpha = \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}$$

$$(\vec{r}\times \operatorname{grad} u)_r = \underbrace{r_\Theta}_{0}(\operatorname{grad} u)_\alpha - \underbrace{r_\alpha}_{0}(\operatorname{grad} u)_\Theta = 0$$

$$(\vec{r}\times \operatorname{grad} u)_\Theta = \underbrace{r_\alpha}_{0}(\operatorname{grad} u)_r - r_r(\operatorname{grad} u)_\alpha =$$

$$= -r\cdot\frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{-1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\alpha}$$

$$(\vec{r}\times \operatorname{grad} u)_\alpha = r_r(\operatorname{grad} u)_\Theta - \underbrace{r_\Theta}_{0}(\operatorname{grad} u)_r =$$

$$= r\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\Theta} = \frac{\partial u}{\partial\Theta}$$

srovnáním $\operatorname{rot}(\vec{r}\cdot u) = -\vec{r}\times \operatorname{grad} u$

Totiž pole lze zapsat pomocí $\vec{r} \times \operatorname{grad} Y_n^m$ $\quad \sim H$ elektrický multipól
$\sim E$ magnetický multipól

automaticky $(\vec{r} \times \operatorname{grad} Y_n^m)_r = 0$

(45)

$$(\vec{r} \times \operatorname{grad} Y_n^m)_\Theta = \underbrace{r_\alpha}_{0} \cdot (\operatorname{grad} Y_n^m)_r - r_r \cdot (\operatorname{grad} Y_n^m)_\alpha =$$

$$= -r \cdot \frac{1}{r \cdot \sin\Theta} \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \alpha} = \frac{-1}{\sin\Theta} \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \alpha}$$

kde použito $(\operatorname{grad} f)_\alpha = \frac{1}{r \cdot \sin\Theta} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$

srovnáním

$$\left[\operatorname{rot}\left(\vec{r} \cdot \frac{e^{ikr}}{kr} \cdot Y_n^m\right)\right]_\Theta = \frac{-e^{ikr}}{kr} (\vec{r} \times \operatorname{grad} Y_n^m)_\Theta$$

podobně

$$(\vec{r} \times \operatorname{grad} Y_n^m)_\alpha = r_r \cdot (\operatorname{grad} Y_n^m)_\Theta - \underbrace{r_\Theta}_{0} \cdot (\operatorname{grad} Y_n^m)_r =$$

$$= r \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \Theta}$$

, kde použito $(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \Theta}$

srovnáním

$$\left[\operatorname{rot}\left(\vec{r} \cdot \frac{e^{ikr}}{kr} \cdot Y_n^m\right)\right]_\alpha = \frac{-e^{ikr}}{kr} (\vec{r} \times \operatorname{grad} Y_n^m)_\alpha$$

Další komponenty, tj elektrické pole elektrických multipólů a magnetické pole magnetických multipólů jsou úměrné

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot}\left(\vec{r} \cdot \frac{e^{ikr}}{kr} \cdot Y_n^m\right)$$

(už nemá tvar $\operatorname{rot}(\vec{r} \cdot u)$)

Označme $\vec{F} = \operatorname{rot}\left(\vec{r} \cdot \frac{e^{ikr}}{kr} \cdot Y_n^m\right)$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_r = \frac{1}{r \cdot \sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial \Theta}(\sin\Theta \cdot F_\alpha) - \frac{\partial F_\Theta}{\partial \alpha}\right] =$$

radiální složka

$$= \frac{1}{r \cdot \sin\Theta}\left[\frac{-e^{ikr}}{kr} \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta \cdot \frac{\partial Y_n^m}{\partial \Theta}\right) - \frac{e^{ikr}}{kr} \cdot \frac{1}{\sin\Theta} \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \alpha^2}\right]$$

$$= \frac{-e^{ikr}}{kr^2} \cdot [\ldots\ldots] \longrightarrow 0$$

v našem přiblížení členy $\sim 1/r^2$ zanedbat

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})_\Theta = \frac{1}{r}\Big[\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\underbrace{\frac{\partial F_r}{\partial\alpha}}_{0} - \frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\alpha)\Big] =$$

$$= \frac{-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-e^{ikr}}{kr}\cdot r\cdot\frac{\partial Y_n^m}{\partial\Theta}\right) = ik\,\frac{e^{ikr}}{kr}\cdot\frac{\partial Y_n^m}{\partial\Theta}$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})_\alpha = \frac{1}{r}\Big[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot F_\Theta) - \underbrace{\frac{\partial F_r}{\partial\Theta}}_{0}\Big] = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-e^{ikr}}{k}\right)\cdot\frac{\partial Y_n^m}{\partial\alpha} =$$

$$= -ik\,\frac{e^{ikr}}{kr}\cdot\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial Y_n^m}{\partial\alpha}$$

Zápis pomocí $\vec{r}\times(\vec{r}\times\mathrm{grad}\,Y_n^m)$ $\sim E$ elektrický multipól
$\sim H$ magnetický multipól

$[\vec{r}\times(\vec{r}\times\mathrm{grad}\,Y_n^m)]_r = 0$ automaticky; odpovídající člen
$v\ (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\ )_r \to 0$ jako $1/r^2$

$$[\vec{r}\times(\vec{r}\times\mathrm{grad}\,Y_n^m)]_\Theta = \underbrace{r_\alpha}_{0}\cdot(\vec{r}\times\mathrm{grad}\,Y_n^m)_r - r_r\,(\vec{r}\times\mathrm{grad}\,Y_n^m)_\alpha =$$

$$= -r\cdot r\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial Y_n^m}{\partial\Theta} = -r\,\frac{\partial Y_n^m}{\partial\Theta}$$

$$[\vec{r}\times(\vec{r}\times\mathrm{grad}\,Y_n^m)]_\alpha = r_r\,(\vec{r}\times\mathrm{grad}\,Y_n^m)_\Theta - r_\Theta\,(\vec{r}\times\mathrm{grad}\,Y_n^m)_r =$$

$$= \frac{-r}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial Y_n^m}{\partial\alpha}$$

Podobně jako u záření Hertzova dipólu i v dalších členech multipólového rozvoje jsou ve velkých vzdálenostech od zdroje dominující transverzální složky polí $H_{\alpha,\Theta}$ a $E_{\Theta,\alpha}$, které jsou vůči sobě taktéž kolmé.

Skalární aproximace a paraxiální aproximace

za skalární funkci lze vzít např. velikost elektrického pole $E(\vec{r},t)$

lze použít, když vektory $\vec{E}$ se příliš neliší ve směru
$\Rightarrow$ omezení zkoumaného prostoru obvykle na malý úhel kolem směru šíření

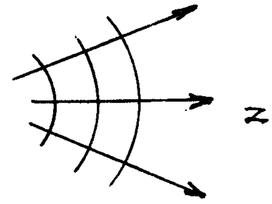
Skalární funkce $E(\vec{r},t)$ by měla splňovat vlnovou rovnici, např. v prázdném prostoru

$$\nabla^2 E(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0,$$

v monochromatickém případě Helmholtzovu rovnici

$$\nabla^2 E(\vec{r},t) + k^2 E(\vec{r},t) = 0$$

Navíc v omezeném prostoru kolem směru šíření (např. osa z) a za předpokladu malých změn amplitudy v závislosti na z lze použít paraxiální aproximaci



$$E(\vec{r},t) \doteq E_0(\vec{r}) \cdot e^{i(kz-\omega t)}$$

(úhel v obrázku přehnaně velký)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_0(x,y,z) \cdot e^{i(kz-\omega t)} + k^2 E_0 e^{i()} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[E_0(x,y,z) \cdot e^{i(kz-\omega t)}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial E_0}{\partial z} \cdot e^{i()} + ikE_0 e^{i()}\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + ik\frac{\partial E_0}{\partial z}\right)e^{i()} + ik\left(\frac{\partial E_0}{\partial z} + ikE_0\right)e^{i()} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial E_0}{\partial z} - k^2 E_0\right)e^{i(kz-\omega t)}$$

paraxiální aproximace $\left|2k\frac{\partial E_0}{\partial z}\right| \gg \left|\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2}\right| \doteq 0$

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial E_0}{\partial z} = 0$$

paraxiální aproximace vlnové rovnice

Komplexní $E_0(x,y,z)$ popisuje opravy tvaru vlnoploch oproti rovinné vlně.

Užitečné při Fresnelově aproximaci difrakčních jevů, popisu laserových svazků (např. gaussovský)

Též používaný zápis rovnice pro komplexní amplitudu v paraxiální aproximaci

$$\nabla_T^2 E_0(x,y,z) + 2ik\frac{\partial E_0}{\partial z} = 0$$

∇_T^2 transverzální Laplaceův operátor

Skalární aproximace kulové vlny

$$u = \frac{e^{i(k\cdot r - \omega t)}}{r}$$

Nemá vektorový analog, který by splňoval MR ve volném prostoru.

Vyhovuje skalární vlnové rovnici

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

a) v pravoúhlých souřadnicích

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{r} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{x}{r}\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right)\cdot e^{i()} + \frac{x^2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right)e^{i()}\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right) + \frac{x^2}{r}\left(\frac{-2ik}{r^3} + \frac{3}{r^4}\right) + \frac{x^2}{r}\cdot ik\left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right)\right]e^{i()}$$

$$= \left[\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} + x^2\left(\frac{-2ik}{r^4} + \frac{3}{r^5} - \frac{k^2}{r^3} - \frac{ik}{r^4}\right)\right]\cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} + x^2\left(\frac{3}{r^5} - \frac{3ik}{r^4} - \frac{k^2}{r^3}\right)\right] e^{i(kr-\omega t)}$$

podobně

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} + y^2\left(\frac{3}{r^5} - \frac{3ik}{r^4} - \frac{k^2}{r^3}\right)\right] e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left[\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} + z^2\left(\frac{3}{r^5} - \frac{3ik}{r^4} - \frac{k^2}{r^3}\right)\right] e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\nabla^2 u = \left(\frac{3ik}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} - \frac{3ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right) \cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{-1}{c^2}\,{}^2\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} = -k^2\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(-\frac{k^2}{r} + \frac{k^2}{r}\right) \cdot e^{i(kr-\omega t)} = 0 \quad \checkmark$$

b) ve sférických souřadnicích $u(r, \Theta, \alpha)$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin\Theta\,\underbrace{\frac{\partial u}{\partial \Theta}}_{0}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta}\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}}_{0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{-1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right) e^{ikr} \cdot e^{-i\omega t} \qquad r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = (-1 + ikr)\, e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \left[ik\, e^{ikr} + (-1+ikr)\cdot ik \cdot e^{ikr}\right] e^{-i\omega t}$$

$$= (ik - ik - k^2 r)\, e^{i(kr-\omega t)}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{k^2}{r}\, e^{ikr} \quad \checkmark$$

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

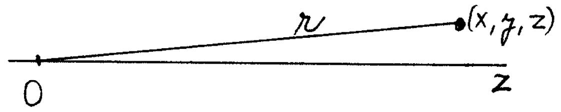
Skalární aproximaci kulové vlny lze považovat za oprávněnou jen v omezeném prostoru, např. v úzkém prostorovém úhlu kolem směru kolmém na směr kmitání dipólu; souvislost s paraxiální aproximací.

Paraxiální aproximace (skalární) kulové, kulově symetrické vlny šířící se podél osy z

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ veliké

y, z malinké

$$u = \frac{A e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$



Pro amplitudu lze vzít hrubší aproximaci

$$\frac{A}{r} \approx \frac{A}{z}$$

Pro fázi je třeba vzít přesnější přiblížení podle $\sqrt{1+a} \doteq 1+\frac{a}{2}$, $a = \frac{x^2+y^2}{z^2}$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \doteq z + \frac{y^2+x^2}{2z}$$

$$u \doteq \underbrace{\frac{A}{z} \cdot e^{\frac{ik}{2z}(y^2+x^2)}} \cdot \underbrace{e^{i(kz-\omega t)}}_{\text{rovinná vlna}}$$

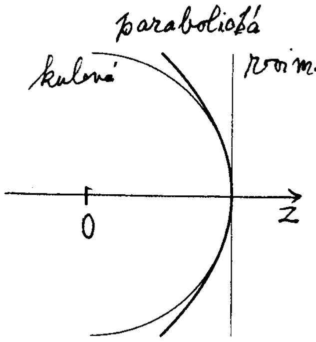
možno chápat jako komplexní amplitudu, která zahrnuje jak pokles se vzdáleností od zdroje, tak zakřivení vlnoploch

zde parabolická aproximace používaná např. ve Fresnelově popisu difrakčních jevů

Pro hodně veliká z $\frac{\pi}{\lambda \cdot z} \cdot (y^2+x^2) \ll 1$

aproximace rovinnou vlnou

používaná např. ve Fraunhoferově popisu difrakce



kulová $x^2+y^2+z^2=r^2$

Rotační paraboloid o stejném poloměru křivosti ve vrcholu

$$z = \frac{y^2}{2r} + \frac{x^2}{2r} + r$$

$$u(x,y,z) = \underbrace{\frac{A}{z}\, e^{\frac{ik}{2z}(y^2+x^2)}}_{E_0 \text{ komplexní}} \; e^{i(kz-\omega t)}$$ (52)

splňuje paraxiální aproximaci vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + 2ik\frac{\partial E_0}{\partial z} = 0$$

pro "pomalu" proměnnou komplexní amplitudu $\left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} \doteq 0\right)$.

$$\frac{\partial E_0}{\partial y} = \frac{A}{z}\cdot\frac{2iky}{2z}\cdot e^{\frac{ik}{2z}(y^2+x^2)}$$

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} = \frac{A}{z} e^{\frac{ik}{2z}(y^2+x^2)}\left[\frac{ik}{z} + \frac{iky}{z}\cdot\frac{2iky}{2z}\right] = \frac{A}{z} e^{\frac{ik}{2}(y^2+x^2)}\left(\frac{ik}{z} - \frac{k^2y^2}{z^2}\right)$$

stejně

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} = \frac{A}{z}\, e^{\frac{ik}{2z}(y^2+x^2)}\left(\frac{ik}{z} - \frac{k^2x^2}{z^2}\right)$$

$$2ik\frac{\partial E_0}{\partial z} = 2ikA\left(\frac{-1}{z^2} + \frac{-ik(y^2+x^2)}{2z^2}\cdot\frac{1}{z}\right) e^{\frac{ik}{2}(y^2+x^2)}$$

$$= \frac{A}{z} e^{\frac{ik}{2z}(y^2+x^2)}\left[\frac{-2ik}{z} - \frac{2iik^2(y^2+x^2)}{2z^2}\right]$$

$$= -\frac{A}{z} e^{\frac{ik}{2z}(y^2+x^2)}\left(\frac{2ik}{z} - \frac{k^2(y^2+x^2)}{z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} = \frac{A}{z} e^{\frac{ik}{2}(y^2+x^2)}\left(\frac{2ik}{z} - \frac{k^2}{z^2}(y^2+x^2)\right)$$

takže $\frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + 2ik\frac{\partial E_0}{\partial z} = 0$ splněno. ✓