Diferenciální operátory v kartézské souřadné soustavě

Vyjádření diferenciálních operátorů je v kartézské souřadné soustavě v následující tabulce. $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ je symbolický vektor zvaný nabla.

$\operatorname{grad} f = \boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$	(M.1)
$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$	(M.2)
$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$	(M.3)
$\Delta \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2}$, Laplaceův operátor	(M.4)
$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\right] = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)$	(M.5)

Komplexní formalismus pro monochromatický případ

Komplexní formalismus přináší mnohé výhody, z nichž použijeme počítání středních hodnot a propojení popisu vln s materiálovými parametry uváděnými běžně ve tvaru komplexních čísel.. V této části budeme komplexní veličiny označovat vlnovkou. V běžném textu to systematicky neděláme, pokud je z kontextu zřejmé, zda jde o číslo reálné nebo komplexní.

Začněme porovnáním výpočtu časové střední hodnoty v daném místě z v reálném oboru a v částečně komplexním formalismu pro funkci $\cos^2(kz - \omega t)$

$$\langle f(z,t)\rangle_T = \langle \cos^2(kz-\omega t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kz-\omega t)dt =$$

$$= -\frac{1}{\omega t}\int_{kz}^{kz-\omega T} \cos^2\xi\, d\xi = -\frac{1}{\omega t}\int_{kz}^{kz-\omega T} \frac{1}{2}(1+\cos 2\xi)d\xi,$$

kde jsme použili substituci $\xi = kz - \omega t,\ d\xi = -\omega\, dt.$

$$\langle \cos^2(kz-\omega t)\rangle_T = -\frac{1}{\omega T}\int_{kz}^{kz-\omega T} \cos^2\xi\, d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2\omega T}[\xi]_{kz}^{kz-\omega T} - \frac{1}{2\omega T}[\frac{1}{2}\sin 2\xi]_{kz}^{kz-\omega T} =$$

$$= -\frac{1}{2\omega T}(-\omega T) - \frac{1}{4\omega T}[\sin(2(kz-\omega T) - \sin 2kz] = \quad \text{(M.6)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega T}(\sin 2kz\ \cos 2\omega T + \cos 2kz \sin 2\omega T - \sin 2kz) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}(\sin 2kz \cos 4\pi + \cos 2kz\ \sin 4\pi - \sin 2kz) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}(\sin 2kz - \sin 2kz) = \frac{1}{2}.$$

Alternativní postup

$$\langle f(z,t)\rangle_T = \langle \cos^2(kz-\omega t)\rangle_T = \frac{1}{4}\langle \left[e^{i(kz-\omega t)} + e^{-i(kz-\omega t)}\right]^2\rangle_T =$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2ikz}\langle e^{-2i\omega t}\rangle_T + 2 + e^{-2ikz}\langle e^{2i\omega t}\rangle_T\right] = \frac{1}{2}, \quad \text{(M.7)}$$

protože

$$\langle e^{-2i\omega t}\rangle_T = \langle e^{2i\omega t}\rangle_T = 0,$$

$$\langle \sin(\omega t)\rangle_T = \langle \sin 2\omega t\rangle_T = \langle \cos\omega t\rangle_T = \langle \cos 2\omega t\rangle_T = 0.$$

Dále rozebereme případy harmonicky kmitajících veličin, materiálových parametrů, součinů a mocnin komplexních veličin a užití komplexních materiálových parametrů v mocninách a odmocninách.

a) **Veličiny harmonicky kmitající** jako jsou $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{j}$ atd. V těchto případech mají fyzikální smysl reálné části komplexních výrazů pro $\widetilde{\boldsymbol{E}}, \widetilde{\boldsymbol{P}}, \widetilde{\boldsymbol{D}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{H}}, \tilde{\boldsymbol{j}}$, **...** Jako příklad vezměme elektrické pole netlumené, rovinné vlny šířící se ve směru osy z

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_0 \cos\,(kz - \omega t + \delta) = \mathrm{Re}\left\{\widetilde{\boldsymbol{E}}(z,t)\right\} = \mathrm{Re}\,\left\{\boldsymbol{E}_0\, e^{i(kz-\omega t+\delta)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\left(e^{i(kz-\omega t+\delta)} + e^{-i(kz-\omega t+\delta)}\right) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\boldsymbol{E}}(z,t) + \widetilde{\boldsymbol{E}}^*(z,t)\right], \tag{M.8}$$

případně můžeme konstantní fázový posuv zahrnout do komplexní amplitudy

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}_0 e^{i\delta}\, e^{i(kz-\omega t)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\delta}\, e^{i(kz-\omega t)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\delta} e^{i(kz-\omega t)} + \widetilde{\boldsymbol{E}}^*_{0\delta}\, e^{-i(kz-\omega t)}\right) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\boldsymbol{E}}(z,t) + \widetilde{\boldsymbol{E}}^*(z,t)\right].$$

b) **Materiálové parametry** jako jsou susceptibilita χ, relativní permitivita ε_r, vodivost σ atd. Zde je situace odlišná od případu a), protože fyzikální smysl mají reálná i imaginární část. Obecně reálná hodnota parametru znamená kmitání veličin ve fázi (případně v protifázi při záporné hodnotě parametru), ryze imaginární parametr znamená fázový posun $\pm\frac{\pi}{2}$. Označme reálnou a imaginární část susceptibility $\chi_R\ a\ \chi_I$.

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}(z,t) = \varepsilon_0 \tilde{\chi}\, \widetilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \varepsilon_0\,(\chi_R + i\chi_I)\,\boldsymbol{E}_0\, e^{i(kz-\omega t+\delta)} =$$

$$= \varepsilon_0\,\boldsymbol{E}_0\,[\chi_R \cos(kz-\omega t+\delta) + i\,\chi_I \cos(kz-\omega t+\delta) + \tag{M.9}$$

$$+ i\chi_R \sin(kz-\omega t+\delta) - \chi_I \sin(kz-\omega t+\delta)]$$

a reálná část polarizace je

$$\boldsymbol{P}(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\widetilde{\boldsymbol{P}}(z,t)\right\} = \varepsilon_0\,\boldsymbol{E}_0\,[\chi_R \cos(kz-\omega t+\delta) - \chi_I \sin(kz-\omega t+\delta)] =$$

$$= \varepsilon_0\,\boldsymbol{E}_0\,(\chi_R\,\cos\phi - \chi_I \sin\phi), \tag{M.10}$$

kde jsme užili zkratku pro fázi $\phi = kz - \omega t + \delta$. Komplexní veličinu můžeme zapsat též pomocí polárních souřadnic v Gaussově komplexní rovině

$$\tilde{\chi} = |\chi|\, e^{i\varphi_\chi} = |\chi|\big(\cos\varphi_\chi + i\sin\varphi_\chi\big), \quad \tan\varphi_\chi = \frac{\chi_I}{\chi_R}, \tag{M.11}$$

takže

$$\boldsymbol{P}(z,t) = \varepsilon_0\, \boldsymbol{E}_0\, |\chi| \big(\cos\varphi_\chi \cos\phi - \sin\varphi_\chi\, \sin\phi\,\big) = \varepsilon_0\, \boldsymbol{E}_0\, |\chi| \cos\big(\phi + \varphi_\chi\big) =$$
$$= \varepsilon_0\, \boldsymbol{E}_0\, |\chi| \cos\big(kz - \omega t + \delta + \varphi_\chi\big) \qquad \text{(M.12)}$$

a průběhy $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{E}$ jsou fázově posunuty o úhel φ_χ. V komplexním zápisu

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{P}}(z,t) &= \varepsilon_0 \tilde{\chi}\, \widetilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \varepsilon_0 |\chi| e^{i\varphi_\chi}\, \boldsymbol{E}_0\, e^{i(kz-\omega t+\delta)} \\ &= \varepsilon_0 |\chi|\, \boldsymbol{E}_0\, e^{i(\varphi_\chi+\delta)} e^{i(kz-\omega t)}.\end{aligned} \qquad \text{(M.13)}$$

c) **Součiny a mocniny** vyžadují jistou opatrnost, hlavně když provádíme součiny (mocniny) komplexních veličin nebo součiny komplexní veličiny a komplexně sdružené veličiny. Ukažme na příkladu $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$**,** nejprve pro případ neabsorbující látky, kdy vektory kmitají ve fázi (ε_r je reálné), a izotropní případ, kdy vektory jsou rovnoběžné. Tento součin souvisí s objemovou hustotou elektrické energie. Omezme se na 1 rovinu, např. $z = 0$, E_0 reálné. Pro okamžité hodnoty a pro střední hodnotu

$$\begin{aligned} u_E(t) &= \frac{1}{2}\, \boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{D}(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2\, [1+\cos(2\omega t)], \\ \langle u_E(t)\rangle_T &= \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2, \end{aligned} \qquad \text{(M.14)}$$

což jsou rychlé oscilace na kruhové frekvencí 2ω kolem nenulové střední hodnoty $\langle u_E(t)\rangle_T$. V „naivním" komplexním zápisu zkusme

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{En}(t) &= \frac{1}{2}\, \tilde{E}(t)\cdot\tilde{D}(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2 e^{-2i\omega t} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2 [\cos(2\omega t) + i\sin(2\omega t)], \end{aligned} \qquad \text{(M.15)}$$

$$u_E(t) \neq \mathrm{Re}\,\{\tilde{u}_{En}(t)\},$$

takže jsme s „naivním" užitím komplexního formalismu **neuspěli**. Reálná část $\tilde{u}_{En}(t)$ popisuje jen rychle kmitající složku $\cos(2\omega t)$. Správný postup je

$$u_E(t) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}[\,\tilde{E}(t) + \tilde{E}^*(t)]\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{1}{2}[\,\tilde{E}(t) + \tilde{E}^*(t)] =$$

$$= \frac{1}{8}\varepsilon_0\varepsilon_r\, [\tilde{E}(t)\,\tilde{E}(t) + \tilde{E}^*(t)\tilde{E}^*(t) + \tilde{E}(t)\tilde{E}^*(t) + \tilde{E}^*(t)\tilde{E}(t)] =$$

$$= \frac{1}{8}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2\, \big(e^{-2i\omega t} + e^{2i\omega t} + 1 + 1\big) = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2\, [\cos(2\omega t) + 1].$$

Podívejme se, které členy přispěly ke střídavé složce a které ke střední hodnotě nenulovou hodnotou. Ke střední hodnotě přispěly $\tilde{E}(t)\tilde{E}^*(t)$ a $\tilde{E}^*(t)\tilde{E}(t)$. Tedy v našem případu se osvědčilo

$$[u_E(t)]_{střídavá} = \frac{1}{8}\varepsilon_0\varepsilon_r[\tilde{E}(t)\,\tilde{E}(t) + \tilde{E}^*(t)\tilde{E}^*(t)] = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2\ \cos(2\omega t),$$

$$\langle u_E(t)\rangle_T = \frac{1}{8}\varepsilon_0\varepsilon_r\,[\tilde{E}(t)\tilde{E}^*(t) + \tilde{E}^*(t)\tilde{E}(t)] = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\tilde{E}(t)\tilde{E}^*(t) = \tag{M.16}$$

$$= \frac{1}{4}\tilde{E}(t)\widetilde{D}^*(t),$$

což dá reálné hodnoty, pokud oba činitelé v součinu kmitají ve fázi.

Podobně pro magnetickou složku energie, která má v souladu se vztahem (1.46) v neabsorbujícím dielektriku stejnou velikost jako složka elektrické energie (vztah M.17). Pro celkovou hodnotu energie pak dostaneme

$$U = \langle u\rangle_T = \langle u_E\rangle_T + \langle u_B\rangle_T = \frac{1}{4}\tilde{E}(t)\widetilde{D}^*(t) + \frac{1}{4}\tilde{E}(t)\widetilde{D}^*(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{E}(t)\widetilde{D}^*(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\tilde{E}(t)\tilde{E}^*(t) \tag{M.17}$$

Opatrně je nutno postupovat v **případě fázového posunu**, kdy je

$$\varepsilon_r = \varepsilon_R + i\varepsilon_I = |\varepsilon_r|\,e^{i\delta_\varepsilon} = |\varepsilon_r|(\cos\delta_\varepsilon + i\sin\delta_\varepsilon)$$

a potom

$$\widetilde{D}(t) = \varepsilon_0\,(\varepsilon_R + i\varepsilon_I)E_0\,e^{-i\omega t} = \varepsilon_0|\varepsilon_r|\,e^{i\delta_\varepsilon}\,E_0\,e^{-i\omega t},$$

$$D(t) = \mathrm{Re}\left\{\widetilde{D}(t)\right\} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,|\varepsilon_r|\,E_0\left(e^{i(\delta_\varepsilon - i\omega t)} + e^{-i(\delta_\varepsilon - i\omega t)}\right).$$

Objemová hustota elektrické energie

$$u_E(t) = \frac{1}{2}\,E(t)\cdot D(t) = \frac{1}{8}\varepsilon_0\,|\varepsilon_r|\,E_0^2\left(e^{i\delta_\varepsilon}e^{-2i\omega t} + e^{i\delta_\varepsilon} + e^{-i\delta_\varepsilon} + e^{-i\delta_\varepsilon}e^{2i\omega t}\right) =$$

$$= \frac{2}{8}\varepsilon_0\,|\varepsilon_r|\,E_0^2\ [\cos\delta_\varepsilon + \cos(\delta_\varepsilon - 2i\omega t)] =$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0\,|\varepsilon_r|\,E_0^2\cos\delta_\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon_0\,|\varepsilon_r|\,E_0^2\,[\cos\delta_\varepsilon\cos(2\omega t) + \sin\delta_\varepsilon\sin(2\omega t)] = \tag{M.18}$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0\,\varepsilon_R\,E_0^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2\,[\varepsilon_R\cos(2\omega t) + \varepsilon_I\sin(2\omega t)]$$

kde první člen nezávisí na čase a představuje střední hodnotu $\langle u(t)\rangle_T$ a druhý člen představuje rychle kmitající složku s nulovou střední hodnotou. Ke stejnému výsledku pro střední hodnotu nás rychleji a pohodlněji dovede postup

$$\begin{aligned}\langle u_E(t)\rangle_T &= \frac{1}{8}\left[\tilde{E}(t)\,\tilde{D}^*(t) + \tilde{E}^*(t)\,\tilde{D}(t)\right] = \\ &= \frac{1}{8}\varepsilon_0 E_0^2\left[e^{-i\omega t}(\varepsilon_R - i\varepsilon_I)e^{i\omega t} + e^{i\omega t}(\varepsilon_R + i\varepsilon_I)e^{-i\omega t}\right] = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_R E_0^2.\end{aligned} \tag{M.19}$$

Kombinaci v hranaté závorce je nutno použít, protože $\tilde{E}(t)\,\tilde{D}^*(t)$ v případě fázového posuvu není reálné číslo.

Shrňme obecné pravidlo pro součin 2 časových harmonických funkcí s fázovým posuvem $f(t) = f_0\cos(\omega t + \delta_f)$ a $g(t) = g_0\cos(\omega t + \delta_g)$.

$$\begin{aligned} f(t)\,g(t) &= \frac{1}{2}\,f_0\left[e^{-i(\omega t+\delta_f)} + e^{i(\omega t+\delta_f)}\right].\frac{1}{2}\,g_0\left[e^{-i(\omega t+\delta_g)} + e^{i(\omega t+\delta_g)}\right] = \\ &= \frac{1}{4}f_0 g_0\left[e^{-2i\omega t}e^{-i(\delta_f+\delta_g)} + e^{-i(\delta_f-\delta_g)} + e^{i(\delta_f-\delta_g)} + e^{2i\omega t}e^{i(\delta_f+\delta_g)}\right] = \\ &= \frac{1}{2}f_0 g_0\left[\cos(2\omega t + \delta_f + \delta_g) + \cos(\delta_f - \delta_g)\right].\end{aligned} \tag{M.20}$$

První člen v hranaté závorce rychle osciluje, druhý člen je časově nezávislý a udává střední hodnotu součinu,

$$\langle f(t)\,g(t)\rangle_T = \frac{1}{2}f_0 g_0\,\cos(\delta_f - \delta_g). \tag{M.21}$$

d) **Mocniny a odmocniny komplexních materiálových parametrů** vystupují např. ve vztazích mezi komplexní permitivitou a komplexním indexem lomu (komplexním vlnovým vektorem. Pro neabsorbující a nemagnetické prostředí jsme dostali

$$D(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)\,E(\boldsymbol{r},t),$$

$$B(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\,\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\,E(\boldsymbol{r},t), \quad H(\boldsymbol{r},t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\,E(\boldsymbol{r},t),$$

přičemž reálný index lomu $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$, čili $\varepsilon_r(\omega) = n^2(\omega)$. Tyto vztahy lze zobecnit i na absorbující prostředí zavedením komplexních veličin

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_r(\omega) &= \varepsilon_R(\omega) + i\varepsilon_I(\omega) = |\varepsilon_r(\omega)|\, e^{i\delta_\varepsilon}, \\
\widetilde{\mathcal{N}}(\omega) &= n(\omega) + i\kappa(\omega) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r(\omega)} = \sqrt{|\varepsilon_r(\omega)|}\, \exp\left(\frac{1}{2} i\delta_\varepsilon\right), \\
\tilde{\varepsilon}_r(\omega) &= \widetilde{\mathcal{N}}^2(\omega) = [n(\omega) + i\kappa(\omega)]^2 \\
&= n^2(\omega) - \kappa^2(\omega) + 2i\, n(\omega)\, \kappa(\omega).
\end{aligned} \tag{M.22}$$

Řešením soustavy pro reálnou a imaginární část dostaneme

$$\begin{aligned}
n(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2} + \varepsilon_R\right)}, \\
\kappa(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2} - \varepsilon_R\right)},
\end{aligned} \tag{M.23}$$

Zapišme tlumenou, homogenní, lineárně polarizovanou vlnu šířící se ve směru osy z pomocí komplexního indexu lomu

$$\begin{aligned}
E_x(z,t) &= \mathrm{Re}\left\{E_{0x}\ \exp\left[i\frac{\omega}{c}\widetilde{\mathcal{N}}(\omega)z - i\omega t\right]\right\} = \\
&= \mathrm{Re}\left\{E_{0x}\ \exp\left[i\left(\frac{\omega}{c}nz - \omega t\right)\right]\exp\left(ii\frac{\omega}{c}\kappa z\right)\right\} = \\
&= E_{0x}\, e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z} \cos\left(\frac{\omega}{c}nz - \omega t\right),
\end{aligned} \tag{M.24}$$

kde E_{0x} má význam reálné amplitudy v místě $z = 0$. Lze se setkat i se zavedením komplexního vlnového vektoru, jehož velikosti jsou $\widetilde{\mathcal{K}} = k_R + ik_I = \frac{\omega}{c}\,(n + i\,\kappa)$. Směry vektorů $\boldsymbol{k}_R$ a $\boldsymbol{k}_I$ mohou být stejné (ve vlnách homogenních) nebo pro vlny nehomogenní mohou být různé.

Základní princip Fourierovy transformace a spektrální hustota

Úvod z hlediska matematické analýzy lze najít na stránkách:

http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/ tabulka odkazující na jednotlivá témata matematické analýzy

http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/27-for/lekce27-for-dmax.pdf (Fourierovy řady)

http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/37-fou/lekce37-fou-dmax.pdf (Fourierova transformace)

Z hlediska základů a aplikací Fourierovy transformace v některých fyzikálních oborech jsou zajímavá skripta
http://physics.fme.vutbr.cz/~komrska/Fourier/FOURIER.ZIP.

Většina matematických vět vztahující se k tomuto tématu začíná: „Nechť f je po částech hladká na $\mathbb{R}$ a integrál $\int_{\mathbb{R}}|f|$ konverguje. Potom ...“

Omezíme se na jednorozměrnou Fourierovu transformaci reálné funkce $f(t)$ a pro názornost ji budeme prezentovat jako vztah mezi funkcemi závislými na čase t a kruhové frekvenci ω. FT je však mnohem obecnější a nachází široké uplatnění v nejrůznějších disciplínách.

Začněme reálným rozvojem **reálné periodické** funkce s periodou T s použitím kladných diskrétních kruhových frekvencí ω_n

$$f(t) = f(t+T), \qquad \delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad \omega_n = n\,\delta\omega > 0,$$

$$f_F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t),$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \quad 2 \times \text{střední hodnota}, \tag{M.25}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos \omega_n t\,dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin \omega_n t\,dt,$$

Pro výchozí funkci a součet řady jsme použili odlišné symboly, protože funkce $f(t)$ a $f_F(t)$ nemusí být totožné. Např. pokud se 2 funkce liší v konečném počtu bodů, dostaneme pro ně stejné koeficienty a_n a b_n.

Přejděme ke komplexnímu formalismu

$$f_F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left(e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}\right)\right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)\,e^{i\omega_n t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)\,e^{-i\omega_n t}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n{}'\,e^{i\,n\,\delta\omega\,t} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,e^{-i\,n\,\delta\omega\,t} = \tag{M.26}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{n<0}\, e^{-i\,n\,\delta\omega\,t} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n>0}\, e^{-i\,n\,\delta\omega\,t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{-i\,n\,\delta\omega\,t},$$

kde

$$c_{n<0} = \frac{1}{2}\,(a_n - ib_n), \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}, \;\; c_{n>0} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

$$f_F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\omega_n t} = \frac{\delta\omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{\frac{-\pi}{\delta\omega}}^{\frac{\pi}{\delta\omega}} f(t')\; e^{i\omega_n t'}\; dt' \right] e^{-i\omega_n t}\,. \qquad \text{(M.27)}$$

Půvab rozvoje spočívá v tom, že jak uvnitř hranaté závorky, tak vně oba členy $e^{i\omega_n t'}$ a $e^{-i\omega_n t}$ obsahují tutéž kruhovou frekvenci ω_n. To je důsledek ortogonálnosti soustavy trigonometrických funkcí

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\, mx \cos nx\; dx = 0 \qquad \text{pro všechna } m, n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\, mx \sin nx\; dx = 0 \qquad \text{pro } m \neq n,$$

$$= \pi \qquad \text{pro } m = n \neq 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\, mx \cos nx\; dx = 0 \qquad \text{pro } m \neq n,$$

$$= \pi \qquad \text{pro } m = n \neq 0,$$

$$= 2\pi \qquad \text{pro } m = n = 0.$$

Přechod k neperiodickým funkcím lze povést jako limitu pro prodlužování periody $T \to \infty$, tj. zkracováním rozdílu „sousedních“ frekvencí $\delta\omega \to 0$

$$f_F(t) = \lim_{\delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta\omega}{2\pi}\; e^{-i\,n\,\delta\omega\,t} \left[\int_{\frac{-\pi}{\delta\omega}}^{\frac{\pi}{\delta\omega}} f(t')\; e^{i\omega_n t'}\; dt' \right],$$

což lze pro „rozumné“ funkce $f(t')$ zapsat jako integrál, který je základním vztahem fourierovské analýzy a s vyjádřením patřičných předpokladů je nazýván Fourierova věta)

$$f_F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t') \; e^{i\omega t'} \; dt' \right] e^{-i\omega t} \, d\omega \tag{M.28}$$

Výraz v hranaté závorce

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) \equiv \mathcal{F}(f)\,(\omega) \equiv f_\omega(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t')\; e^{i\omega t'}\; dt' \tag{M.29}$$

představuje Fourierovu transformaci (Fourierův obraz) funkce $f(t)$ a jeho význam spočívá v určení velikosti i fáze monochromatických příspěvků. Jinými slovy určuje spektrální hustotu funkce $f(t)$. Objevuje se zde potíž s absolutní integrabilitou stacionární (nekonečně dlouho trvající) funkcí $f(t)$.

Pokud se objeví výraz „spektrální hustota" bez dalšího upřesnění, bývá často myšlena spektrální hustota energie $\propto f_\omega(\omega)\, f_\omega^*(\omega)$

Zpětná Fourierova transformace má v našem případě podobu

$$f_F(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\omega(\omega)\; e^{-i\omega t}\, d\omega \tag{M.30}$$

Poznámka k jednotkám: koeficienty a, b, c ve Fourierových řadách mají stejný fyzikální rozměr jako sama funkce $f(t)$. Tedy když se jedná o elektrické pole, budou vyjadřovány ve V m^{-1}. V případě spektrální hustoty je z integrálu zřejmé, že rozměr se bude lišit o rozměr veličiny t, v případě spektrální hustoty elektrického pole budeme užívat V m^{-1} s.

Poznámka ke koeficientu $\frac{1}{2\pi}$. Jeho rozdělení mezi přímou a zpětnou transformaci záleží na dohodě. Může být třeba symetrické jako $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ a $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$. Vzhledem k rozměru $d\omega$ rad s^{-1} se upřednostňuje volba připojení k integrálu $d\omega$ a koeficient $\frac{1}{2\pi}$ má rozměr rad^{-1}.

Alternativa k používání kruhové frekvence je užívat („obyčejnou") frekvenci $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ a pak Fourierovu větu lze psát

$$f_F(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t')\; e^{i2\pi\nu t'}\; dt' \right] e^{-i2\pi\nu t}\, d\nu. \tag{M.31}$$