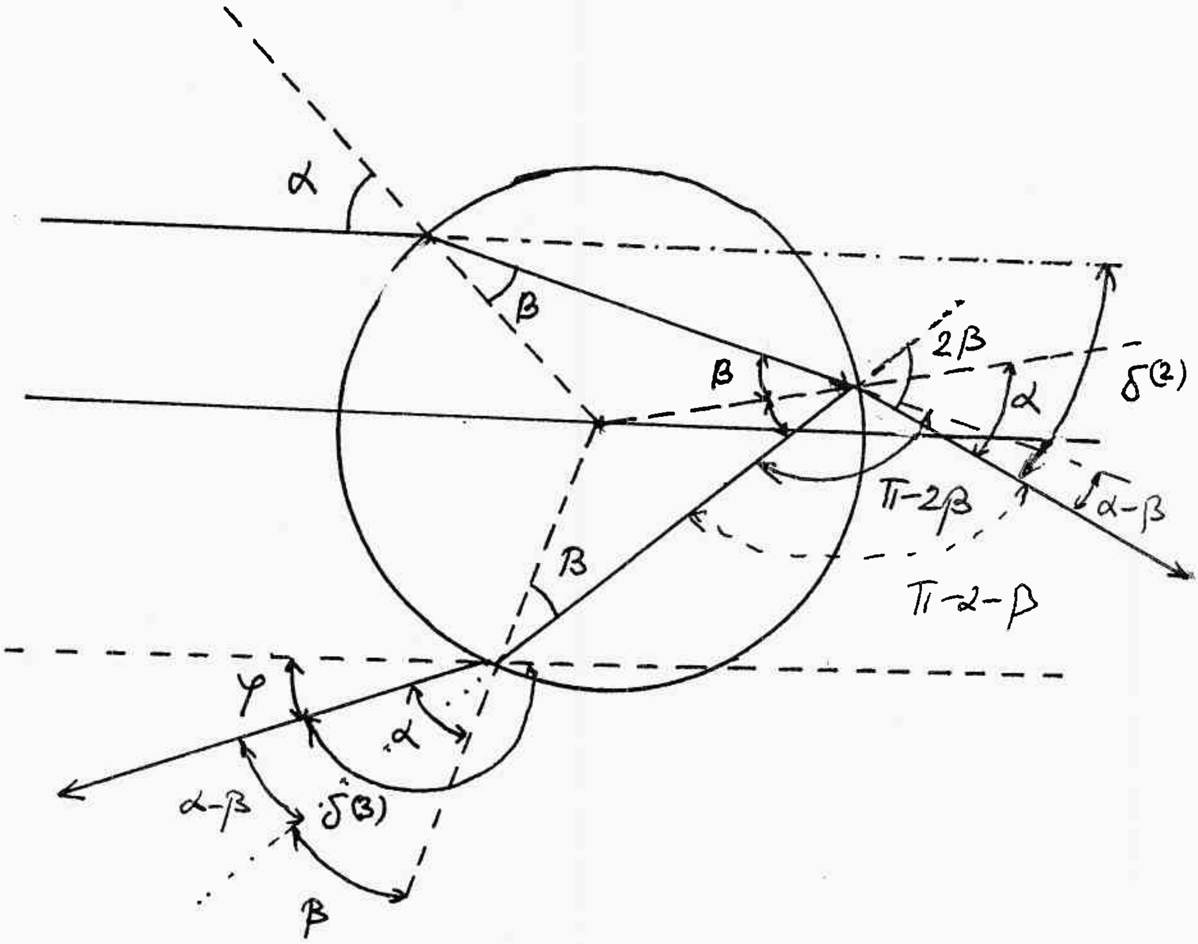
Geometrická teorie vzniku duhy



$$\delta^{(2)} = \alpha - \beta + \alpha - \beta = 2\alpha - 2\beta$$

$$\delta^{(3)} = \delta^{(2)} + \pi - 2\beta - \alpha + \beta + \alpha - \beta =$$

$$= \pi + 2\alpha - 4\beta$$

$$\varphi = \pi - \delta^{(3)} = 4\beta - 2\alpha$$

Pro $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

Existuje α, pro které je φ maximální ② tj

$(\approx 60°)$

α	β	φ
0	0	0
20	14,6	19,2
60	40,4	41,6
80	47,4	29,6

$$\frac{\partial \delta^{(3)}}{\partial \alpha} = 2 - 4\frac{d\beta}{d\alpha} = 2\left(1 - 2\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$$

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \qquad n_1 \approx 1 \quad n_2 = 1.336$$

$$\sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

$$\cos\alpha \, d\alpha = n_2 \cos\beta \, d\beta \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{n_2}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

$$\frac{\partial \delta^{(3)}}{\partial \alpha} = 2\left(1 - \frac{2}{n_2}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right) = 0$$ (Podmínka extrému.

$$\Rightarrow 1 = \frac{2}{n_2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad \cos\alpha = \frac{n_2}{2}\cos\beta =$$

$$= \frac{n_2}{2}\sqrt{1-\sin^2\beta} =$$

$$= \frac{n_2}{2}\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n_2^2}}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{n_2^2}{4}\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{n_2^2}\right) = \frac{n_2^2 - \sin^2\alpha}{4} =$$

$$= \frac{n_2^2 - 1 + \cos^2\alpha}{4} \Rightarrow 3\cos^2\alpha = n_2^2 - 1$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{n_2^2-1}{3}}$$

Lze ukázat, že $\frac{\partial^2 \delta^{(3)}}{\partial \alpha^2} > 0$ .. jedná se o minimum

$\Rightarrow \delta^{(3)}_{min} \Leftrightarrow \varphi_{max}$

Obecně platí, že

$$\delta^{(k)} = (k-2)\pi + 2\left[\alpha - (k-1)\beta\right]$$

$\frac{\partial^2 \delta^{(k)}}{\partial \alpha^2} > 0$ .. Vždy minimum pro libovolný počet odrazů

$\cos^2\alpha = \frac{n^2 - 1}{3}$

červené světlo $n_Č = 1.331$

fialové světlo $n_F = 1.343$

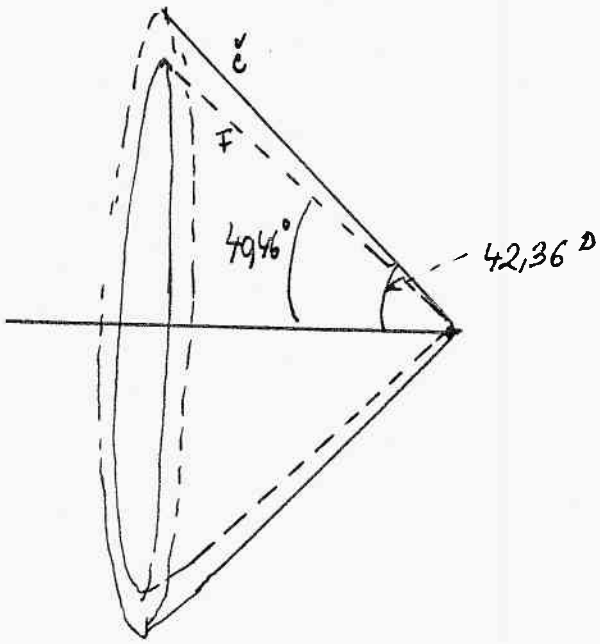
(indexy lomu pro čistou vodu)

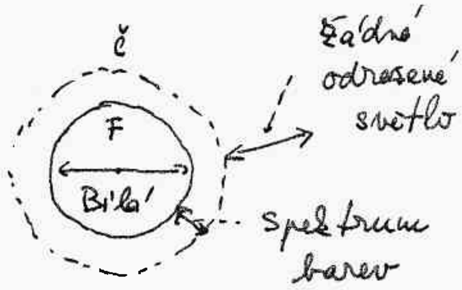
→ Rozdíl 1%

	Č	F
$\alpha(\varphi_{max})$	59,53°	58,83°
β_{max}	40,36°	39,58°
φ_{max}	42,37°	40,46°

? Co to znamená

1. Všechny α jsou možná, ale φ je možné jen do φ_{max}, a to se liší v závislosti na vlnové délce v důsledku disperze



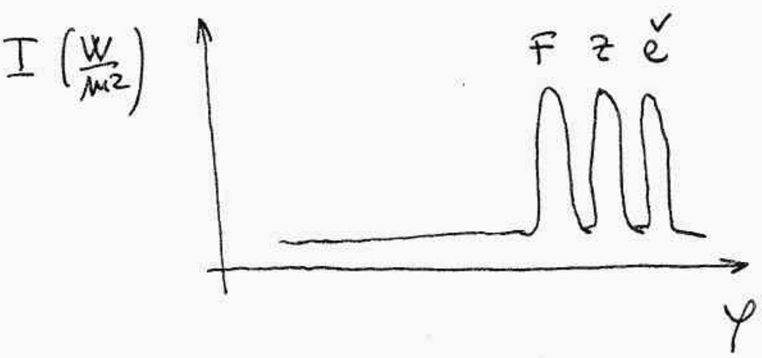


Pohled zepředu

Bílé světlo -- protože neexistuje minimální úhel φ

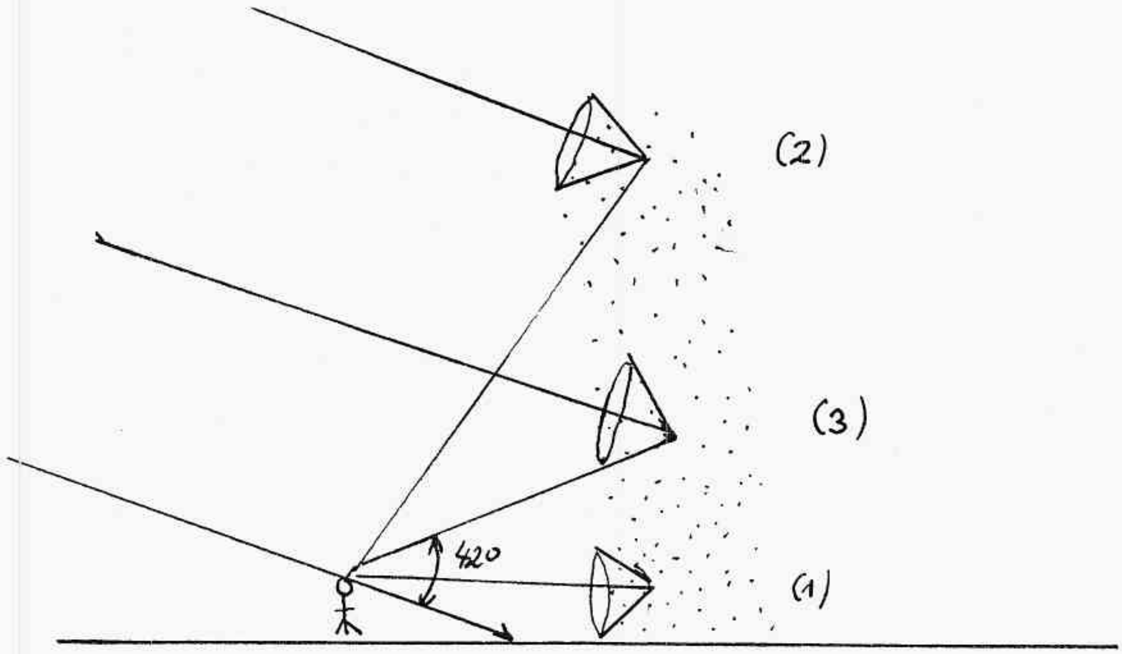
? Proč je vidět spektrum? Kdyby měly všechny barvy ve všech úhlech stejnou intenzitu, měla by být jasně vidět pouze červená na kraji a ostatní barvy by se měly míchat.

Ve skutečnosti existuje silná závislost intenzity světla o různých vlnových délkách na úhlu φ



Tato závislost je způsobena tím, že maximum intenzity vychází pod úhlem minimální odchylky, v našem případě $\delta^{(3)}_{min}$

? Proč vidíme duhu

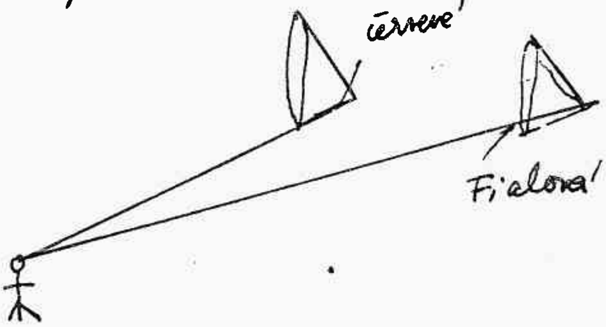


(1) ... Vidíme bílé světlo

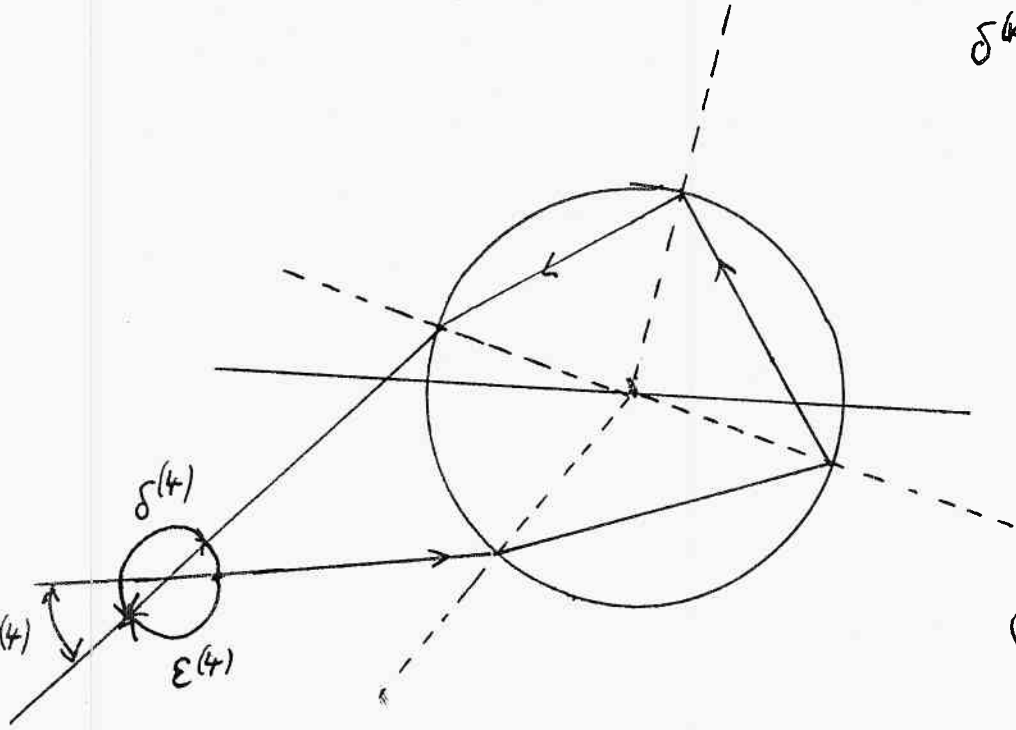
(2) Nevidíme žádné odražené světlo od kapky

(3) Vidíme duhu

Duha vzniká působením souboru kapek



Přestože individuální kapka odráží světlo tak, že červená barva je na vnějším okraji kužele, do oka dopadá fialová barva z vnitřní části kužele z níže ležících kapek, takže duha vznikající z celého souboru má na vnějším okraji fialovou barvu a na vnitřním červenou barvu.



$\delta^{(k)}$ ... minimum
(lze obecně dokázat, že $\delta^{(k)}$ $\forall k$ je vždy minimum)

$\Rightarrow$ $\varepsilon^{(k)}$ ... maximum

$\Rightarrow$ $\varphi^{(k)}$ ... minimum

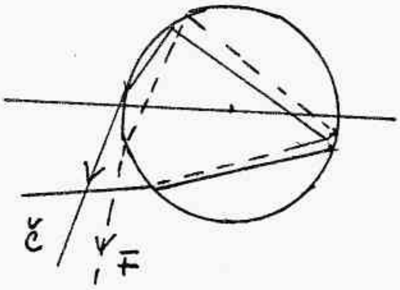
(vs. $\varphi^{(3)}$ ... maximum)

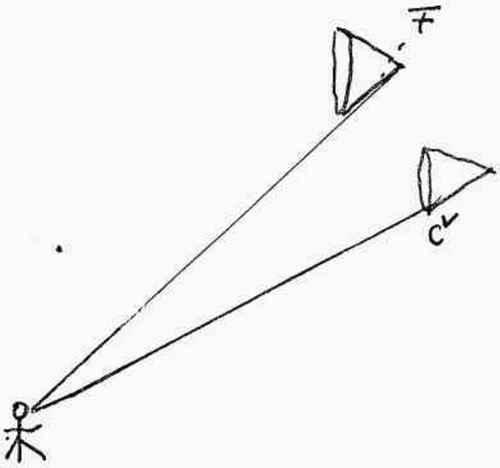
$$\varphi^{(4)} = 50{,}37^\circ \quad \text{červená}$$

$$\varphi^{(4)} = 53{,}47^\circ \quad \text{fialová}$$

úhlový rozměr $3{,}1^\circ + 0{,}5^\circ$ (úhlový rozměr slunce)

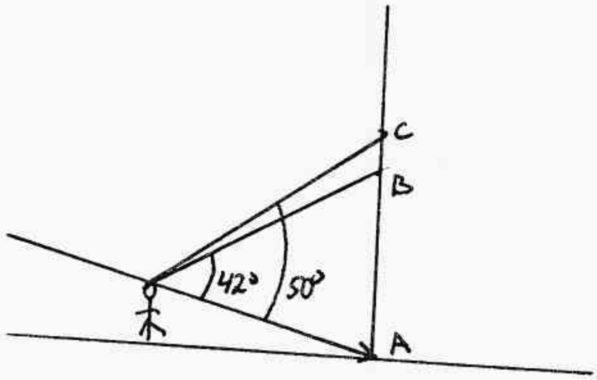
Barvy v duze jsou přehozené





V případě sekundární duhy je vnitřní okraj červený, vnější je fialový

V případě sekundární duhy je $\varphi^{(k)}$ minimální!! Světlo je odráženo vně kužele. V prostoru vně kužele sekundární duhy je tedy v důsledku míchání odraženého světla bílá barva. V prostoru mezi primární a sekundární duhou k odrazu světla nedochází; z hlediska pouze odraženého světla je tam tedy „tma"



B .. primární duha

C .. sekundární duha

AB ... bílé odražené světlo

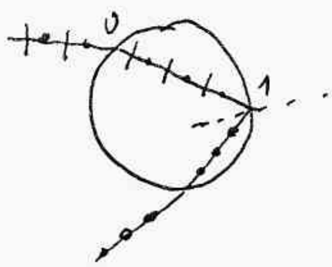
BC ... prostor mezi duhami - žádné odražené světlo

>C ... bílé světlo

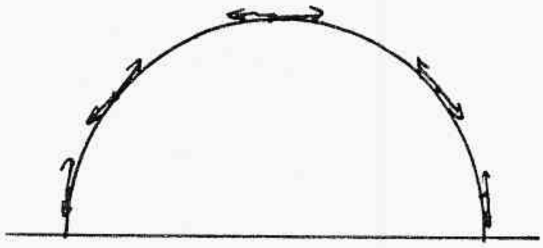
Polarizace duhy

V případě odrazu na rozhraní voda - vzduch je Brewsterův úhel $\theta_{Br} = 36{,}8°$ $\operatorname{tg} \theta_{Br} = \frac{1}{1{,}336}$

Pro úhel $\varphi^{(3)} \approx 42°$ je úhel $\beta \approx 40°$, t.j. je velmi blízko Brewsterovu úhlu.



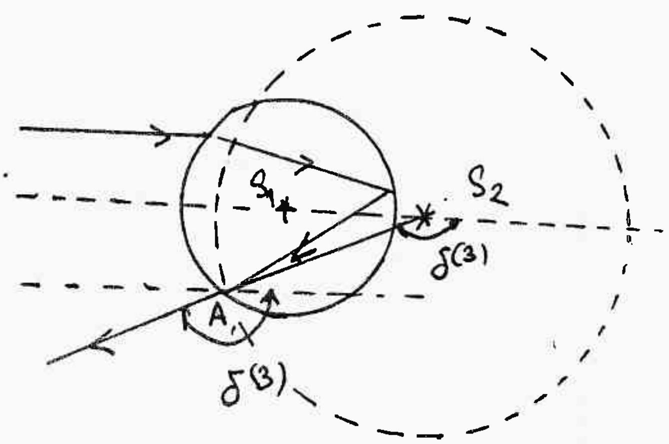
V bodě 1 dochází k odrazu téměř pod Brewsterovým úhlem. Světlo odražené zpět do kapky je polarizováno $\perp$ k rovině dopadu



Polarizace světla při pohledu na duhu.

Dále – důkaz, že pod úhlem minimální deviace vystupuje maximum světla (největší intenzita)

K .. koule se středem S_2

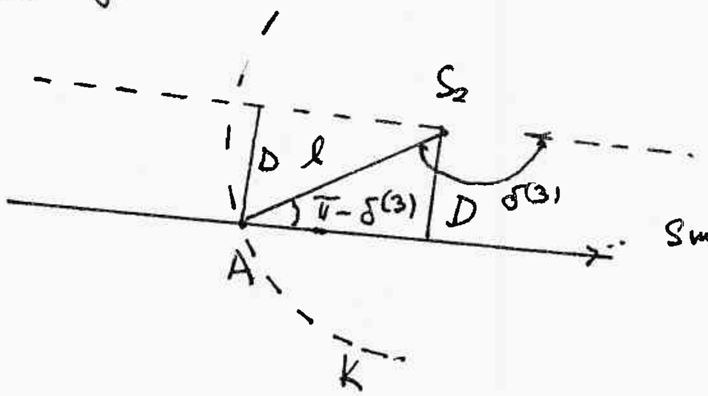


$\overline{S_2A} = l$

Změní-li se α o $d\alpha$, změní se $\delta^{(3)}$ o $d\delta^{(3)}$

Při průchodu paprsku dochází nejprve k lomu (intenzita dopadajícího světla je oslabena intenzitním koeficientem transmise $\tilde{T}$, dále dochází k vnitřnímu odrazu – zeslabení intenzity světla intenzitním koeficientem odrazu $\tilde{R}$ a nakonec dochází opět k transmisi ($\tilde{T}$). Celkové zeslabení intenzity tedy je $\tilde{T}^2 R$

Prostorový úhel do kterého prochází výstupní paprsek je $2\pi \sin\delta^{(3)} d\delta^{(3)}$ ... dokázat

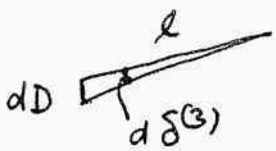


$$\sin(\pi - \delta^{(3)}) = \frac{D}{l}$$

$$\sin\delta^{(3)} = \frac{D}{l} \qquad D = l \sin\delta^{(3)}$$

$P = 2\pi l \sin\delta^{(3)}$ .. obvod pásku na kružnici K

Změní-li se $\delta^{(3)}$ o $d\delta^{(3)}$, změní se D o dD



$$\sin d\delta^{(3)} = \frac{dD}{l}$$

$$\sin d\delta^{(3)} \doteq d\delta^{(3)} = \frac{dD}{l}$$

$$dD \doteq l\, d\delta^{(3)}$$

Plocha pásku pak je $2\pi l \sin\delta^{(3)}\, l\, d\delta^{(3)} =$

$$= 2\pi l^2 \sin\delta^{(3)} d\delta^{(3)} = dS$$

Odpovídající prostorový úhel $d\omega = \dfrac{dS}{l^2}$

(plocha koule $S = 4\pi l^2$, $\Omega = 4\pi$)

$$d\omega = \frac{dS}{l^2} = \frac{2\pi l^2 \sin\delta^{(3)} d\delta^{(3)}}{l^2} = 2\pi \sin\delta^{(3)} d\delta^{(3)}$$

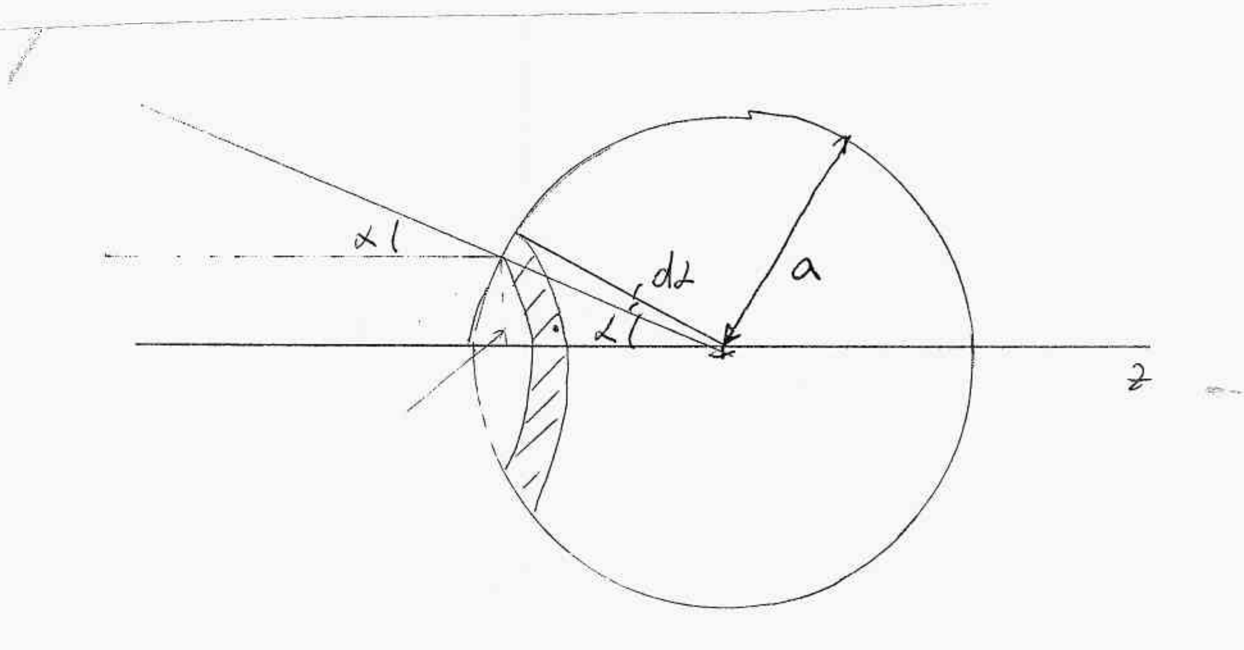
Tím jsme stanovili prostorový úhel, do kterého se odráží záření!

Nyní opíšeme kolem bodu S_2 ~~kružnici~~ kouli o poloměru R_0. Prostorový úhel odraženého záření $d\omega$ vytne na kouli plochu dS'

$$d\omega = \frac{dS'}{R_0^2} \qquad dS' = R^2 d\omega$$

Nechť je intenzita dopadajícího záření $dF^{(0)}$. Pak je intenzita odraženého záření (po 1 vnitřním odrazu) $dF^{(3)} = \tilde{T}^2 \tilde{R}^2 \, dF^{(0)}$

? Jak spočítat $dF^{(0)}$



Záření dopadá na kapku pod úhlem dopadu α

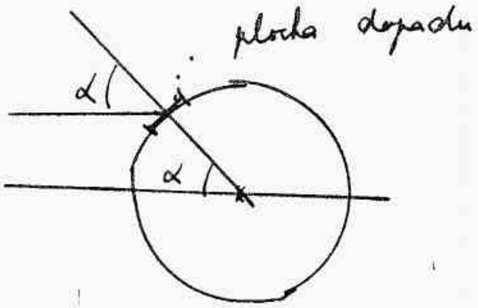
Nechť je poloměr kapky a, poloměr ohraničeného pásku pro případ, že úhel dopadu α se změní o $d\alpha$ je r. Potom

$$\frac{r}{a} = \sin\alpha \qquad r = a\sin\alpha \qquad \text{obvod pásku } 2\pi a \sin\alpha$$

odpovídající prostorový úhel $d\Omega = \dfrac{dS}{a^2} = 2\pi \sin\alpha \, d\alpha$

Nechť nyní dopadá na kapku světlo o intenzitě $I_0 \parallel$ s osou z

Plocha dS je natočena vůči směru dopadajícího záření úhlem α



Záření dopadá tedy s intenzitou $I_0 \cos\alpha$
(α je úhel mezi normálou k ploše a dopadajícím zářením)

Pak je $dF^{(0)} = I_0 \cdot 2\pi a^2 \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha$

$$dF^{(3)} = \tilde{T}^2 \tilde{R}^2 dF^{(0)} = \tilde{T}^2 \tilde{R} I_0 2\pi a^2 \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha$$

Pak je $I^{(3)} = \dfrac{dF^{(3)}}{R_0^2 d\omega} = \dfrac{I_0 \tilde{T}^2 \tilde{R}^2 2\pi a^2 \sin 2\alpha \, d\alpha}{2R_0^2 \, 2\pi \sin\delta^{(3)} d\delta^{(3)}} =$

$$= \frac{I_0 \tilde{T}^2 \tilde{R}^2 a^2 \sin 2\alpha \, d\alpha}{2R_0^2 \sin\delta^{(3)} \cdot \left|\frac{d\delta^{(3)}}{d\alpha}\right|}$$

Z předchozího víme, že

$$\frac{d\delta^{(3)}}{d\alpha} = 2\left(1 - \frac{2}{n_\alpha}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)$$

Pokud je $\dfrac{d\delta^{(3)}}{d\alpha} = 0$, je intenzita $I^{(3)}$ maximální

$$\Downarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{n_\alpha^{\,2} - 1}{3}}$$