Fourierova transformace

Fourierův teorém - každá funkce $f(x)$ s prostorovou periodou λ může být složena sumou harmonických funkcí, jejichž vlnové délky jsou celočíselnými zlomky λ.

$$f(x) = C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varepsilon_1\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{\frac{\lambda}{2}} + \varepsilon_2\right) + \dots$$

x může být nahrazeno $x - vt$ pro případ postupné vlny

To lze psát jako

$$f(x) = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m (\cos mkx + \varepsilon_m)$$

$$C_m \cos(mkx + \varepsilon_m) = A_m \cos mkx + B_m \sin mkx =$$

$$= C_m \cos mkx \cos \varepsilon_m - C_m \sin mkx \sin \varepsilon_m$$

$$\Rightarrow \quad A_m = C_m \cos \varepsilon_m \qquad B_m = -C_m \sin \varepsilon_m$$

označ $C_0 = \frac{A_0}{2}$

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mkx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mkx$$

$$\int_0^\lambda f(x) = \int_0^\lambda \frac{A_0}{2}\, dx = A_0 \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad \int_0^\lambda \cos mkx = \int_0^\lambda \sin mkx = 0$$

K nalezení A_m, B_m využijeme ortonormality sinusoidálních funkcí

$$\int_0^\lambda \sin akx \cos bkx\, dx = 0 \qquad \int_0^\lambda \cos akx \cos bkx = \frac{\lambda}{2}\delta_{ab}$$

$$\int_0^\lambda \sin akx \sin bkx = \frac{\lambda}{2}\delta_{ab}$$

Nyní vynásobíme funkci $f(x)$ funkcí $\cos lkx$

a zintegrujeme $\int_0^\lambda \sim$

$$\int_0^\lambda f(x)\cos lkx\,dx = A_0 \underbrace{\int_0^\lambda \cos lkx\,dx}_{=0} + \sum \int_0^\lambda A_m \cos mkx \cos lkx\,dx +$$

$$+ \sum \underbrace{\int_0^\lambda B_m \sin mkx \cos lkx\,dx}_{0} = \frac{\lambda}{2} A_m$$

$$\Rightarrow \quad A_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)\cos mkx\,dx$$

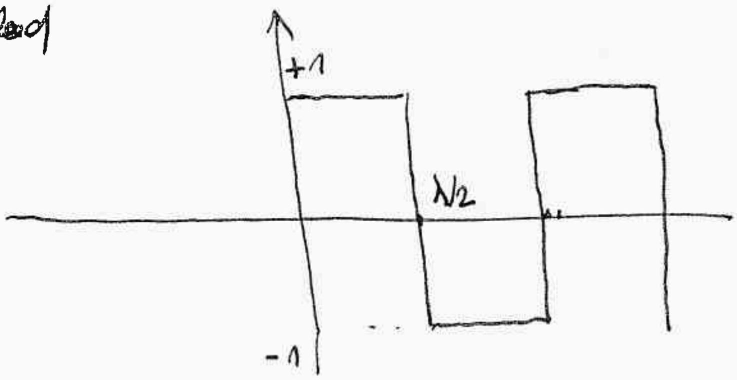
analogicky po vynásobení $f(x)\cdot \sin lkx$ a $\int_0^\lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad B_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)\sin mkx\,dx$$

Je-li $f(x)$ sudá, tj. $f(x) = f(-x) \Rightarrow B_m = 0\ \forall m$

Je-li $f(x)$ lichá, tj. $f(-x) = -f(x) \Rightarrow A_m = 0\ \forall m$

Příklad



$$f(x) = \begin{cases} +1 & 0 < x < \frac{\lambda}{2} \\ -1 & \frac{\lambda}{2} < x < \lambda \end{cases}$$

$f(x)$ je lichá $\Rightarrow A_m = 0\ \forall m$

$$B_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda/2} (+1)\cdot \sin mkx\,dx + \frac{2}{\lambda}\int_{\lambda/2}^{\lambda} (-1)\sin mkx\,dx$$

$$B_m = \frac{1}{m\pi} \underbrace{\left[\cos mkx\right]^{0}_{-\frac{\lambda}{2}}}_{1-\cos m\pi} + \frac{1}{m\pi} \underbrace{\left[-\cos mkx\right]^{\lambda/2}_{0}}_{1-\cos m\pi}$$

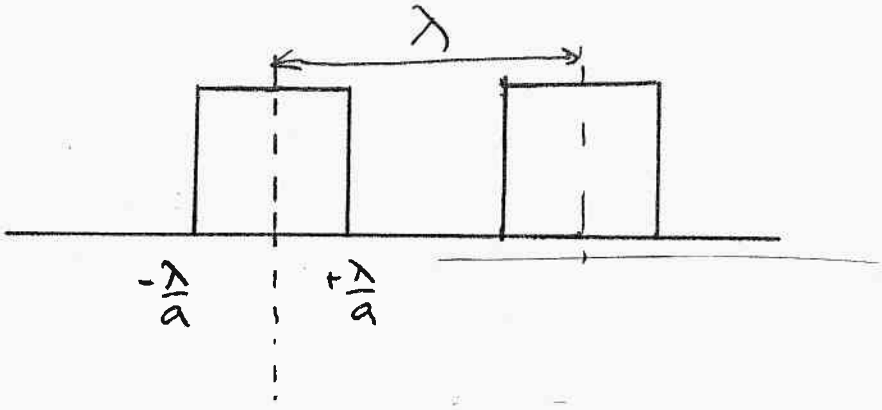
$$\left(\cos \frac{mk\lambda}{2} = \cos m\pi\right) \qquad K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$B_m = \frac{2}{m\pi}\left(1-\cos m\pi\right)$$

$$B_1 = \frac{4}{\pi}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad B_4 = 0, \quad B_5 = \frac{4}{5}\pi$$

Frekvenční spektrum fce představuje řada koeficientů B_m. $A_m = 0 \ \forall m$ kvůli lichosti počítané funkce

Příklad



Fourierova transformace

$$A_0 = \frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{a}}^{+\frac{\lambda}{a}} dx = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{2\lambda}{a} = \frac{4}{a}$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{a}}^{+\frac{\lambda}{a}} \cos nkx \, dx = \frac{2}{\lambda}\cdot\left[\frac{\sin nkx}{nk}\right]_{-\frac{\lambda}{a}}^{+\frac{\lambda}{a}} =$$

$$= \frac{2}{\lambda}\cdot\left[\frac{\sin nk\cdot\frac{\lambda}{a}}{nk} + \frac{\sin nk\frac{\lambda}{a}}{nk}\right] =$$

$$= \frac{4}{\lambda}\,\frac{\sin nk\cdot\frac{\lambda}{a}}{nk} = \frac{4}{\lambda}\,\frac{\sin\frac{2\pi n}{a}}{n\cdot\frac{2\pi}{a}}\cdot\frac{\lambda}{a}$$

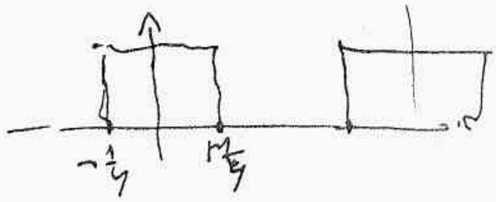
Šířka pulsu je $\frac{2\lambda}{a}$. Zvolme nejprve

$\lambda = 1\,\text{cm}$ $\quad a = 4 \Rightarrow$ šířka pulsu je $\frac{\lambda}{2}$; tj. $\frac{1}{2}$

Dále přepíšeme funkci $f(x)$ jako

$$f(x) = \frac{4}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{a}\left(\frac{\sin\frac{2\pi n}{a}}{\frac{2\pi n}{a}}\right)$$

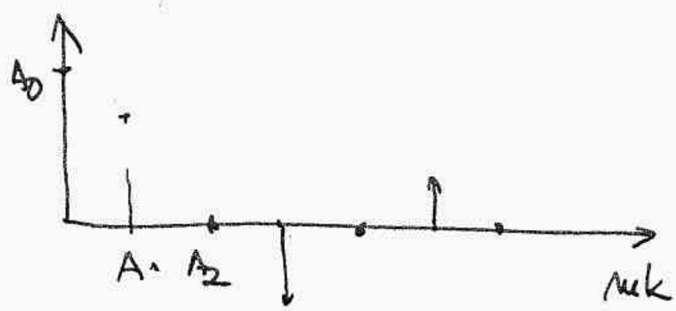
Pro $a = 4, \lambda = 1$ $\quad A_0 = 1$



$$A_1 = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$A_2 = \frac{\sin \pi}{\pi} = 0$$

atd



Frekvenční spektrum funkce

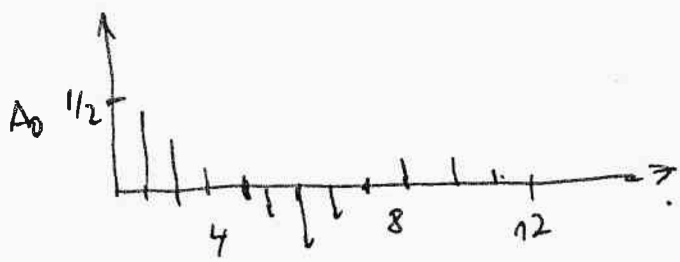
Nyní zvolíme $a = 8$, $\lambda = 2$

$$\Rightarrow \quad A_0 = \frac{1}{2} \qquad A_1 = \frac{1}{2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{2}}$$

$\vdots$

$$A_4 = \frac{4}{8} \cdot \frac{\sin 4 \cdot \frac{2\pi}{8}}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sin \pi = 0$$



Frekvenční spektrum pro 2x větší vzdálenost

Uvedený příklad ukazuje, že při přechodu od periodické funkce k funkci neperiodické dochází ke změně frekvenčního spektra z kvazispojitého na spojité. Nekonečné řady, které představují frekvenční spektrum (A_n, B_n) přecházejí na integrály.

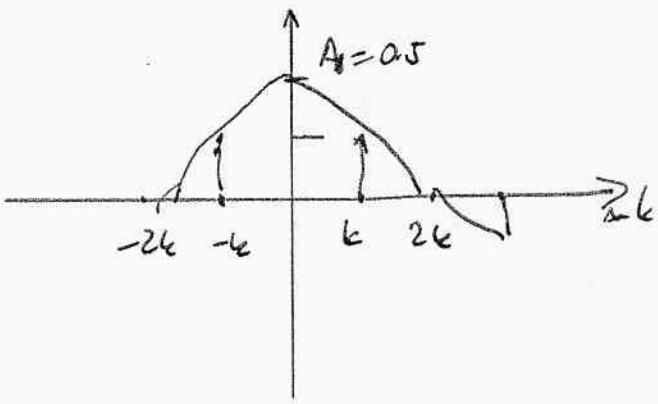
Fourierovy integrály (bez formálního důkazu)

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty A(k)\cos kx\,dk + \int_0^\infty B(k)\sin kx\,dk\right]$$

$$A(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad B(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin kx\,dx$$

Veličiny $A(k)$, $B(k)$ reprezentují amplitudy příspěvků sinové a cosinové řady v intervalu vlnových prostorových frekvencí mezi k a $k+dk$.

Frekvenční spektrum je možné prezentovat alternativním způsobem. Vzhledem k tomu, že $\cos(nkx) = \cos(-nkx)$ lze rozdělit amplitudu každého příspěvku (kromě $n=0$) na 1/2 a zobrazit ji 2x (jednou s kladným k, jednou se záporným)



V komplexním zápisu

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{-ikx}\,dk$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ikx}\,dx$$

$F(k) = A(k) + iB(k)$

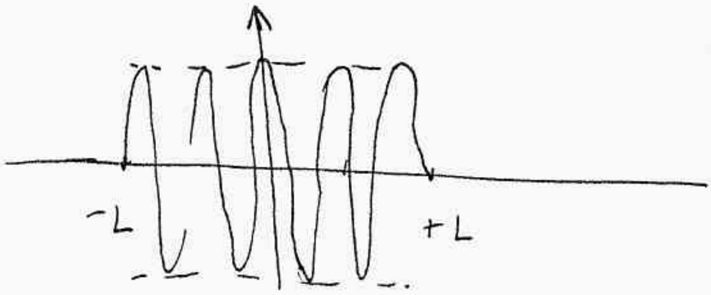
$F(k)$ .. Fourierova transformace $f(x)$

Symbolicky $F(k) = \mathcal{F}(f(x))$

a zpětná $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f(x))$ zpětná F. transformace

Příklad

Vypočtěte Fourierovu transformaci funkce



$$E(x) = E_0 \cos k_p x \qquad -L \leq x \leq L$$

$$E(x) = 0 \quad , \quad \text{když } |x| > L$$

funkce je sudá $\Rightarrow$ $F(k) = A(k)$

$$A(k) = \int_{-L}^{+L} E_0 \cos k_p x \cos k x \, dx$$

$$A(k) = \int_{-L}^{+L} E_0 \cdot \frac{1}{2} \left[\cos (k_p + k) x + \cos (k_p - k) x \right] dx$$

$$\cos (k_p + k) x = \cos k_p x \cos k x - \sin k_p x \sin k x$$

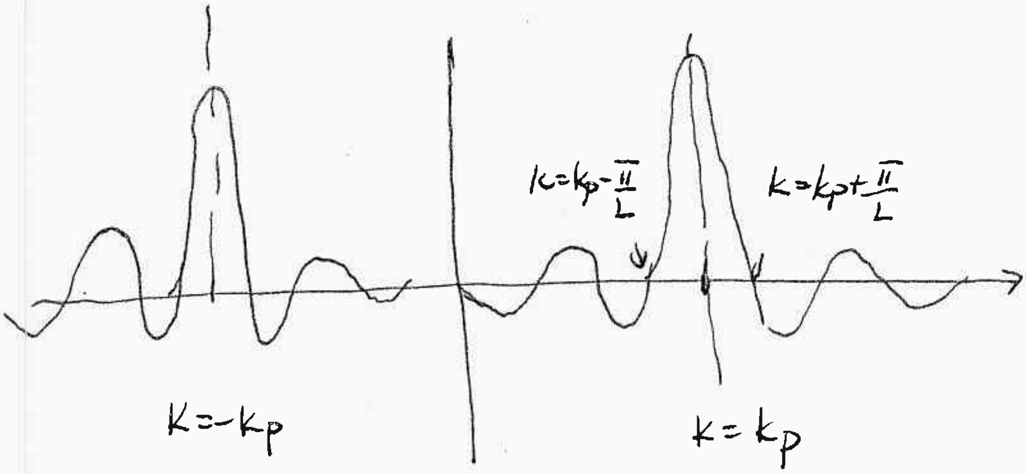
$$\cos (k_p - k) x = \cos k_p x \cos k x + \sin k_p x \sin k x$$

$$A(k) = E_0 \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (k_p + k) x}{k_p + k} + \frac{\sin (k_p - k) x}{k_p - k} \right]_{-L}^{L} =$$

$$= E_0 L \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (k_p + k) L}{(k_p + k) L} + \frac{\sin (k_p - k) L}{(k_p - k) L} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin (k_p + k)(-L)}{(k_p + k) L} - \frac{\sin (k_p - k)(-L)}{(k_p - k) L} \right] =$$

$$= E_0 L \left[\operatorname{sinc} (k_p + k) L + \operatorname{sinc} (k_p - k) L \right]$$



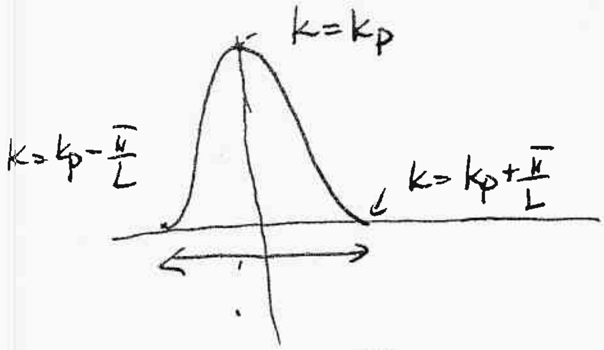
Záporné prost. frekvence – řešení nemá fyzikální význam

Kladné prostorové frekvence – řešení s fyzikálním významem

$$\Rightarrow \quad A(k) \sim \sin\frac{(k_p-k)L}{k_p-k}$$

Prostorové frekvence k_p, jež mají největší příspěvek do frekvenčního spektra, jsou soustředěny kolem nosné frekvence k_p. V časové doméně by tomu odpovídala frekvence ω_p. ($E(t)=E_0\cos\omega_p t$; $-T\le t\le T$

$$A(\omega)=E_0T\sin\frac{(\omega_p-\omega)T}{(\omega_p-\omega)}$$



$\Delta k=\frac{2\pi}{L}$ $\quad \Delta x=2L \Rightarrow \Delta x\cdot\Delta k=4\pi$

V časové doméně $\Delta\omega\cdot\Delta t=\frac{2\pi}{T}\cdot 2T=4\pi$

$\Rightarrow \Delta x\sim\frac{1}{\Delta k}$ $\quad \Delta\omega\sim\frac{1}{\Delta t}$ $\Leftrightarrow$ krátké pulsy obsahují více frekvencí ve F. transformaci

Zúžení pulsu v prostoru x (reálném) vede k jeho rozšíření v prostoru k (inverzním, Fourierově)

⇒ k popisu pulsu je potřeba většího počtu prostorových frekvencí z širšího intervalu.

Zkrácení pulsu (časové) vede k nutnosti zahrnutí širšího frekvenčního spektra (puls se stává tzv. více spektrálně nečistý).

Příklad

Odvoďte komplexní exponenciální formu Fourierových řad.

$$e^{iu} + e^{-iu} = 2\cos u \qquad e^{iu} = \cos u + i\sin u$$

$$e^{iu} - e^{-iu} = 2i\sin u$$

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nkx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nkx =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{e^{inkx} + e^{-inkx}}{2} \right) - i \sum_{i=1}^{\infty} B_n \left(\frac{e^{inkx} - e^{-inkx}}{2} \right) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n - iB_n}{2} \right) e^{inkx} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n + iB_n}{2} \right) e^{-inkx} =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inkx} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-inkx}$$

$$C_n = \frac{A_n - iB_n}{2} \qquad C_{-n} = \frac{A_n + iB_n}{2} \qquad C_0 = \frac{A_0}{2}$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos nkx \, dx \qquad n \to -n \qquad A_{-n} = A_n$$

(sudost $\cos nkx$)

$$B_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \sin nkx \, dx \qquad B_{-n} = -B_n \quad (\text{lichost } \sin nkx)$$

$$\Rightarrow \quad C_{-n} = C_n$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inkx} \qquad C_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) e^{-inkx} \, dx$$