SP1

Stokesovy parametry

$W_e = \frac{1}{2}\vec{E}.\vec{D}$ ve vakuu $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{1}{2}\vec{E}.\vec{E}\,\varepsilon_0$

v komplexním zápisu

$$w_e = \frac{1}{2} Re\{\tilde{\vec{E}}\} \cdot Re\{\tilde{\vec{E}}\}\,\varepsilon_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;= \frac{1}{2}\left\{\frac{\tilde{\vec{E}}+\tilde{\vec{E}}^*}{2}\right\} \cdot \left\{\frac{\tilde{\vec{E}}+\tilde{\vec{E}}^*}{2}\right\} = \frac{1}{8}\left(\tilde{\vec{E}}.\tilde{\vec{E}} + \tilde{\vec{E}}.\tilde{\vec{E}}^* + \tilde{\vec{E}}^*.\tilde{\vec{E}} + \tilde{\vec{E}}^*\tilde{\vec{E}}^*\right)$$

Dále přejdeme k časovým středním hodnotám

$$\langle w_e \rangle_T = \frac{1}{8}\left(\langle \tilde{\vec{E}}.\tilde{\vec{E}}\rangle_T + 2\langle \tilde{\vec{E}}.\tilde{\vec{E}}^*\rangle_T + \langle \tilde{\vec{E}}^*\tilde{\vec{E}}^*\rangle_T\right).\varepsilon_0$$

$$\tilde{\vec{E}} \sim e^{i\omega t} \qquad \tilde{\vec{E}}.\tilde{\vec{E}} \sim e^{-2i\omega t} \qquad \langle e^{-2i\omega t}\rangle_T = 0$$

podobně $\langle \tilde{\vec{E}}^*\tilde{\vec{E}}^*\rangle_T = 0$, protože $\langle e^{2i\omega t}\rangle_T = 0$

$$\tilde{\vec{E}}^* \sim e^{i\omega t} \qquad \tilde{\vec{E}}^*.\tilde{\vec{E}}^* \sim e^{2i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \langle w_e\rangle_T = \frac{\varepsilon_0}{4}\langle \tilde{\vec{E}}\tilde{\vec{E}}^*\rangle_T$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{4}\left(\langle \tilde{E}_x\tilde{E}_x^*\rangle_T + \langle \tilde{E}_y\tilde{E}_y^*\rangle_T\right)$$

Označme $\frac{\varepsilon_0}{4}\langle \tilde{E}_x\tilde{E}_x^*\rangle_T = J_{xx}$ $\quad \frac{\varepsilon_0}{4}\langle \tilde{E}_y\tilde{E}_y^*\rangle_T = J_{yy}$

a analogicky $\quad J_{xy} = \frac{\varepsilon_0}{4}\langle \tilde{E}_x\tilde{E}_y^*\rangle$

$$J_{yx} = \frac{\varepsilon_0}{4}\langle \tilde{E}_x^*.\tilde{E}_y\rangle_T$$

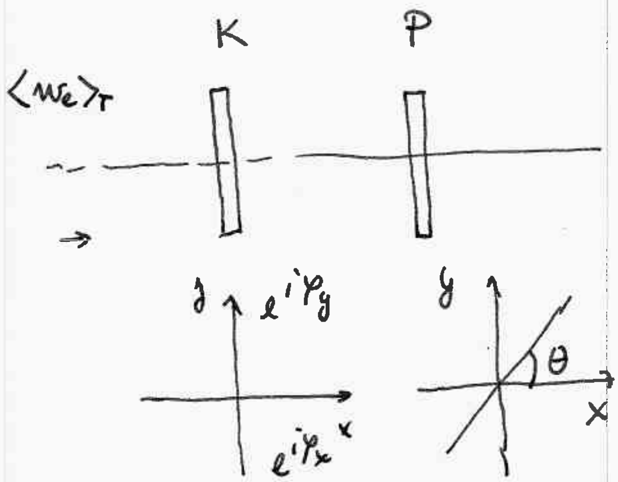
$$J_{xy}^* = \frac{\varepsilon_0}{4}\langle \tilde{E}_x^*\tilde{E}_y\rangle_T = J_{yx}$$

a dále zavedeme tzv. polarizační matici

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix} \; .. \; \text{Pol. matice}$$

Dále provedeme myšlenkový experiment, kdy světlo prochází fázovou destičkou (předp. rychlá osa $\parallel x$, pomalá $\parallel$ s y), $k_x < k_y$, $\varphi > 0$

Po průchodu fázovou destičkou prochází světlo polarizátorem P, který svírá s osou x úhel θ



$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

$$E_x^{(k)} = E_x(t)\, e^{i\varphi_x}$$
$$E_y^{(k)} = E_y(t)\, e^{i\varphi_y} \quad \Big| \cdot e^{-i\varphi_x}$$

$\downarrow$

Jonesova matice fázové destičky

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

Pole za polarizátorem $\rightarrow$ dané Jonesovou maticí polarizátoru

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Celkové pole na výstupu

$$\begin{pmatrix} E_x' \\ E_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

(SP3)

Nyní spočteme $\langle w_e \rangle_T = \frac{\varepsilon_0}{4} \left(\langle E_x'^{*} E_x' \rangle_T + \langle E_y'^{*} E_y' \rangle_T \right)$

$\Downarrow$ Po zdlouhavém výpočtu

$$\langle w_e'(\varphi,\theta) \rangle = J_{xx} \cos^2\theta + J_{yy} \sin^2\theta + \left(J_{xy} e^{i\varphi} + J_{xy}^{*} e^{-i\varphi} \right) \sin\theta \cos\theta$$

Kde J_{ij} jsou prvky polarizační matice

vstupního pole, tj. $J_{xx} = \frac{\varepsilon_0}{4} \langle E_x E_x^{*} \rangle_T$ atd

1) $w_e'(\varphi\theta)$ nezávisí na φ a θ. Tj. prochází stále stejná energie bez ohledu na fázový posun na fázové destičce a natočení polarizátoru

Aby toto platilo, musí být $|J_{xy}| = 0$

$\wedge \quad J_{xx} = J_{yy}$.

Potom je

$$\langle w_e'(\varphi,\theta) \rangle_T = J_{xx} \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} + 0 \cdot \cos(\beta_{xx} + \varphi)$$

$$J_{xx} = \frac{\varepsilon_0}{4} \langle E_x E_x^{*} \rangle_T = \frac{\varepsilon_0}{4} E_{0x}^2 \cdot \underbrace{e^{i(kz - \omega t + \overset{\sim}{\delta_x})} \cdot e^{-i(kz - \omega t)}}_{1}$$

Z řady kombinací dvojic φ a θ vybereme

$$\langle w_e' \rangle (0,0) = J_{xx}$$

$$\langle w_e' \rangle (0,\tfrac{\pi}{2}) = J_{yy}$$

$$\langle w_e' \rangle (0,\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy}) + \tfrac{1}{2}(J_{xy}+J_{yx})$$

$$\langle w_e' \rangle (0,\tfrac{3}{4}\pi) = \tfrac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy}) - \tfrac{1}{2}(J_{xy}+J_{yx})$$

$$\langle w_e' \rangle (\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy}) + \tfrac{i}{2}(J_{xy} - J_{xy}^{*})$$

$$\langle w_e' \rangle (\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3}{4}\pi) = \tfrac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy}) - \tfrac{i}{2}(J_{xy} - J_{xy}^{*})$$

Definujme

$$S_0 = \langle w_e' \rangle (0,0) + \langle w_e' \rangle (0,\tfrac{\pi}{2}) = J_{xx} + J_{yy}$$

$$S_1 = \langle w_e' \rangle (0,0) - \langle w_e' \rangle (0,\tfrac{\pi}{2}) = J_{xx} - J_{yy}$$

$$S_2 = \langle w_e' \rangle (0,\tfrac{\pi}{4}) - \langle w_e' \rangle (0,\tfrac{3}{4}\pi) = J_{xy} + J_{yx}$$

$$S_3 = \langle w_e' \rangle (\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4}) - \langle w_e' \rangle (\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3}{4}\pi) = i(J_{xy} - J_{xy}^{*}) = i(J_{xy} - J_{yx})$$

S_0 ... celková energie vlny

S_1 ... LHP − LVP (rozdíl energie lineárního horizontálně a vertikálně polarizovaného světla)

S_2 = L↗ − L↘ Rozdíl energie lineárně pol. světla pod úhlem $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{3}{4}\pi$

S_3 = LCP − RCP Rozdíl energie ~~lineárního~~ levotočivě a pravotočivě pol. světla ⇒

4 Stokesovy parametry

(SP5)

$\Rightarrow$ z podmínky $J_{xx} = J_{yy} \Rightarrow E_{0x} = E_{0y}$

$|J_{xy}| = 0 \quad \Rightarrow \quad |\langle E_x E_y^* \rangle| = 0$

Znamená to, že okamžité fázové rozdíly $\delta(t)$ složek záření ve směru x a y jsou náhodné. T.j. během doby středování detektoru se vždy najdou 2 takové dvojice $\delta_x(t)$ a $\delta_y(t)$, že $E_{0x} E_{0y} \cdot (p \cdot p')$

$p \in \langle -1, 1 \rangle$
$p' \in \langle -1, 1 \rangle$

tj. kladné a záporné členy $E_{0x} E_{0y} \cdot (p \cdot p')$ se navzájem odečtou.

$\Rightarrow$ V tomto případě je záření dokonale nepolarizované

Výraz $\langle w_e' \rangle_{MAX} - \langle w_e' \rangle_{min} = 0$

d) Definujme

$$P = \frac{\langle w_e' \rangle_{MAX} - \langle w_e' \rangle_{MIN}}{\langle w_e' \rangle_{MAX} + \langle w_e' \rangle_{MIN}}$$

.. stupeň polarizace

2) Pokud $\langle w_e' \rangle_{MIN} = 0 \Rightarrow P = 1$

záření je dokonale polarizované

$P \in (0, 1)$ ... částečně polarizované záření

SPσ

S_0, S_1, S_2, S_3 jsou měřitelné veličiny

Po jejich změření můžeme stanovit prvky polarizační matice

$$J_{xx} = \frac{1}{2}(S_0 + S_1)$$
$$J_{yy} = \frac{1}{2}(S_0 - S_1)$$
$$J_{yx} = \frac{1}{2}(S_2 + iS_3)$$
$$J_{xy} = \frac{1}{2}(S_2 - iS_3)$$

Vraťme se k dokonale nepolarizovanému záření

$\langle w_e' \rangle (\varphi, \theta)$ nezávisí na φ a θ

$S_0 \neq 0$ ... intenzita vlny

$S_1 = S_2 = S_3 = 0$ (protože $J_{xy} = J_{yx}$ a $J_{xx} = J_{yy}$)

Dokonale polarizované záření

$$E_x = E_{0x} e^{i\delta_x} e^{i\tau} \qquad \tau = kz - \omega t$$
$$E_y = E_{0y} e^{i\delta_y} e^{i\tau} \qquad / \cdot e^{-i\delta_x}$$

$\downarrow$

$$E_x = E_{0x} e^{i\tau}$$
$$E_y = E_{0y} e^{i\delta} e^{i\tau} \qquad \delta = \delta_y - \delta_x$$

Polarizační matice

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_0^2}{4} \begin{pmatrix} \langle E_x^* E_x \rangle_T & \langle E_x^* E_y \rangle_T \\ \langle E_y^* E_x \rangle_T & \langle E_y^* E_y \rangle_T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{0x}^2 & E_{0x}E_{0y}e^{i\delta} \\ E_{0x}E_{0y}e^{-i\delta} & E_{0y}^2 \end{pmatrix} = T_P$$

časové středování se neuplatní, členy $\sim e^{\pm i\sigma}$ z navzájem vyruší

$$\begin{pmatrix} w_{ex}' \\ w_{ey}' \end{pmatrix} = T_P \begin{pmatrix} w_{ex} \\ w_{ey} \end{pmatrix}$$

aby měla soustava rovnic řešení, musí být $\det T_P = 0$

$$\Rightarrow \quad J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = 0$$

$$\frac{1}{2}(S_0+S_1)\cdot\frac{1}{2}(S_0-S_1) = \frac{1}{2}(S_2+iS_3)\cdot\frac{1}{2}(S_2-iS_3)$$

$$S_0^2 - S_1^2 = S_2^2 + S_3^2$$

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \qquad S_0 = \sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$$

Platí v případě monochromatické rovinné vlny - dokonale polarizované

každé záření lze psát jako

$$I_{tot} = I_{un} + I_{pol}$$

stokesovy vektory

$$\vec{S}_t = \vec{S}_t^{(1)} + \vec{S}_t^{(2)} \qquad \begin{matrix} \vec{S}^{(1)} \dots \text{nepol.} \\ \vec{S}^{(2)} \dots \text{polariz.} \end{matrix}$$

$$\vec{S}_t^{(1)} = \left(S_0 - \sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$$

$$\vec{S}_t^{(2)} = \left(\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2},\ S_1,\ S_2,\ S_3\right)$$

SP8

$$\vec{S}_t = \vec{S}_t^{(1)} + \vec{S}_t^{(2)} = (S_0, S_1, S_2, S_3)$$

Stupeň polarizace

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \frac{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{S_0}$$

Příklady – dokonale polarizované záření

Kruhově polarizovaná vlna – levotočivá

$$E_x = E_0 \cos \omega t \Rightarrow E_0 e^{-i\omega t} = \tilde{E}_x$$

$$E_y = E_0 \sin \omega t \Rightarrow i E_0 e^{-i\omega t} = \tilde{E}_y$$

Jonesův vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $\quad E = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$

(v bodě $z = 0$)

Pol. matice

$$J_{xx} = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2$$

$$J_{yy} = \frac{\varepsilon_0}{4} E_y^* \cdot E_y = \frac{\varepsilon_0}{4} (-i E_0 e^{i\omega t}) \cdot (i E_0 e^{-i\omega t}) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2$$

$$J_{xy} = \frac{\varepsilon_0}{4} \langle E_x^* E_y \rangle_T = \frac{\varepsilon_0}{4} E_x^* E_y = i \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2$$

$$J_{yx} = -i \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2$$

Stokesovy parametry

$$S_0 = J_{xx} + J_{yy} = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2$$

$$S_1 = J_{xx} - J_{yy} = 0$$

$$S_2 = J_{xy} + J_{yx} = 0$$

$$S_3 = i (J_{xy} - J_{xy}^*) = i \cdot i \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 - i \left(i \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 \right)$$

$$\vec{S}_t = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

SP9

$$S_4 = -\frac{\varepsilon_0}{4}E_0^2 - \left(-i^2 \frac{\varepsilon_0}{4}E_0^2\right) =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{4}E_0^2 - \frac{\varepsilon_0}{4}E_0^2 = -\frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2$$

Stupeň polarizace

$$P = \frac{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2\right)^2}}{\frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2} = 1$$

Dle očekávání!

Pravotočivá vlna

$$\vec{S} = \frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dodatek – výpočet $w_e(\varphi,\Theta)$

Totéž pomocí Jonesova počtu pro monochromatickou vlnu

$$\begin{pmatrix} E_x' \\ E_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\Theta & \sin\Theta\cos\Theta \\ \sin\Theta\cos\Theta & \sin^2\Theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

Spočteme vliv fázové destičky a polarizátoru na měřitelnou veličinu

$$\langle w_e' \rangle_t = \frac{\varepsilon_0}{4}\left(\langle E_x'^* E_x' \rangle + \langle E_y'^* \cdot E_y' \rangle \right)$$

$$E_x'^* \cdot E_x' = \left(E_x^* \cos^2\Theta + E_y^* e^{-i\varphi} \sin\Theta\cos\Theta\right)\cdot\left(E_x \cos^2\Theta + E_y e^{i\varphi}\sin\Theta\cos\Theta\right) =$$
$$= E_x^* E_x \cos^4\Theta + E_x^* E_y e^{+i\varphi} \sin\Theta \cdot \cos^3\Theta +$$
$$+ E_y^* E_y \sin^2\Theta \cos^2\Theta\, e^{+i\varphi} + E_y^* E_x e^{-i\varphi} \sin\Theta\cos^3\Theta =$$
$$= \left(E_x^* E_x \cos^2\Theta + E_y^* E_y \sin^2\Theta\right)\cos^2\Theta +$$
$$+ \left(E_x^* E_y e^{+i\varphi} + E_x E_y^* e^{-i\varphi}\right)\sin\Theta\cos^3\Theta$$

$$E_y'^* \cdot E_y' = \left(E_x^* \sin\Theta\cos\Theta + E_y^* e^{-i\varphi}\sin^2\Theta\right)\cdot\left(E_x \sin\Theta\cos\Theta + E_y e^{+i\varphi}\sin^2\Theta\right) =$$
$$= E_x^* E_x \sin^2\Theta\cos^2\Theta + E_x^* E_y e^{+i\varphi}\sin^3\Theta\cos\Theta +$$
$$+ E_y^* E_y \cdot \sin^4\Theta + E_y^* E_x e^{-i\varphi}\sin^3\Theta\cos\Theta =$$
$$= \left(E_x^* E_x \cos^2\Theta + E_y^* E_y \sin^2\Theta\right)\sin^2\Theta +$$
$$+ \left(E_x^* E_y e^{+i\varphi} + E_x E_y^* e^{-i\varphi}\right)\sin^3\Theta\cos\Theta$$

$$E_x'^* E_x' + E_y'^* E_y' = E_x^* E_x \cdot \cos^2\Theta + E_y^* E_y \cdot \sin^2\Theta +$$
$$+ E_x E_y^* e^{-i\varphi}\sin\Theta\cos\Theta\cdot\left(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta\right) +$$
$$+ E_x^* E_y e^{+i\varphi}\sin\Theta\cos\Theta\cdot\left(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta\right)$$

$J_{xx} = \frac{\varepsilon_0}{4}\langle E_x^* E_x \rangle \qquad J_{yy} = \frac{\varepsilon_0}{4}\langle E_y^* E_y \rangle$ reálné

$J_{xy} = J_{yx}^* = \frac{\varepsilon_0}{4}\langle E_x^* E_y \rangle = |J_{xy}|\, e^{i\beta_{xy}}$ komplexní

Hustota elektrické energie vlny po průchodu fázovou destičkou (x, y, φ) a polarizátorem (Θ) je

$$\langle w_e' \rangle (\varphi, \Theta) = J_{xx} \cos^2\Theta + J_{yy} \sin^2\Theta + (J_{xy} e^{+i\varphi} + J_{xy}^* e^{-i\varphi}) \sin\Theta \cos\Theta$$

$$= J_{xx} \cos^2\Theta + J_{yy} \sin^2\Theta + 2|J_{xy}| \cos(\beta_{xy}+\varphi) \cdot \sin\Theta \cos\Theta$$

kde J_{xx}, J_{yy}, J_{xy} jsou prvky polarizační matice studovaného pole (tj. před vstupem do fázové destičky)

Poslední člen popisuje modulaci signálu při změně parametrů φ, Θ

2 extrémní případy:

a) při změně φ, Θ se signál $\langle w_e' \rangle$ vůbec nemění

$|J_{xy}| = 0$; E_x, E_y kmitají na sobě nezávisle, např. jejich „okamžité fázové rozdíly" $\delta(t)$ jsou náhodné v intervalu $(0, 2\pi)$, pak $\langle E_x^* \cdot E_y \rangle = 0$

Vyjádř. $\langle w_e' \rangle_{MAX} - \langle w_e' \rangle_{MIN} = 0$, říkáme „záření je (dokonale) nepolarizované"

b) lze najít takovou dvojici $(\varphi, \Theta)_{MIN}$, že systémem fázová destička + polarizátor nic neprojde.

Pak $$\frac{\langle w_e' \rangle_{MAX} - \langle w_e' \rangle_{MIN}}{\langle w_e' \rangle_{MAX} + \langle w_e' \rangle_{MIN}} = 1$$

říkáme „záření je (dokonale) polarizované".

Pro $$\frac{\langle w_e' \rangle_{MAX} - \langle w_e' \rangle_{MIN}}{\langle w_e \rangle_{MAX} + \langle w_e' \rangle_{MIN}} < 1$$ je záření částečně polarizované