Evanescentní vlna

Je-li úhel dopadu z opticky hustšího do opticky řidšího prostředí větší než kritický úhel θ_c, dochází k úplnému odrazu světla od rozhraní! Podél rozhraní se v opticky řidším prostředí šíří tzv. evanescentní vlna, která je ve směru $\perp$ k rozhraní silně tlumena.

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \qquad \sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i$$

$$\sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_t$$

je-li $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ je $\theta_i = \theta_c$; $\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i}$$

Pro $\theta_i > \theta_c$ je $\sin\theta_i > \frac{n_2}{n_1}$, tj.

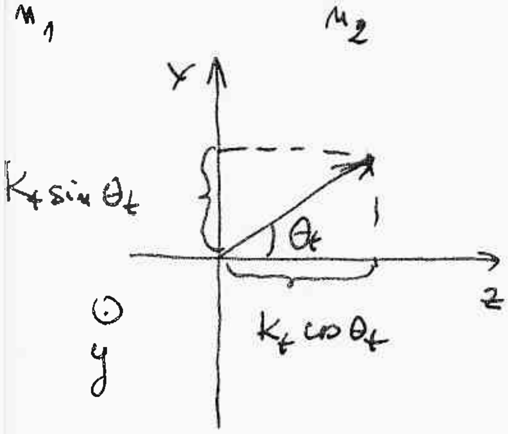
$$\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i > 1$$

a $1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i < 0$

pak

$$\cos\theta_t = \sqrt{-1\underbrace{\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1\right)}_{>0}} = i\underbrace{\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1}}_{b'}$$

V další části vyšetříme případ polarizace $\perp$



V případě $\perp$ polarizace je

$$\vec{E} = (0, E_y, 0)$$

$$\vec{k}_t = (k_t \sin\theta_t, 0, k_t \cos\theta_t)$$

$$E_y^t = E_0 t_\perp e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = E_0 t_\perp e^{i(\underbrace{k_t \sin\theta_t}_{a} x + k_t \cos\theta_t z)}$$

V našem vyšetřovaném případě je $\cos\theta_t = i b'$

$$k_t \cos\theta_t = i \underbrace{b' k_t}_{b} = i b$$

$$E_y^t = E_0 t_\perp e^{iax} e^{-bz} e^{-i\omega t}$$

tlumení ve směru z

Ve směru x, tj. podél rozhraní se šíří harmonická netlumená vlna. Ve směru z je vlna silně tlumená.

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{rot}\,\vec{E} = \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}; 0, \frac{\partial E_y}{\partial x}\right)$$

$$(\text{rot}\,\vec{E})_x = -\frac{\partial E_y^t}{\partial z} = -(-b) E_y^t = b E_y^t$$

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = b E_0 t_\perp e^{iax} e^{-bz} e^{-i\omega t}$$

$$B_x^t = \frac{-1}{-i\omega} E_y^t \cdot b = \frac{b}{i\omega} E_y^t$$

$$B_x = \mu_0 H_x \Rightarrow H_x = \frac{b}{i\mu_0 \omega} E_y^t$$

$$(\text{rot}\,\vec{E})_z = \frac{\partial E_y^t}{\partial x} = i a E_0^t = -\frac{\partial B_z^t}{\partial t}; \quad B_z = \frac{-ia}{-i\omega} E_y^t = \frac{a}{\omega} E_y^t$$

$$H_z = \frac{a}{\mu_0 \omega} E_y^t$$

Poyntingův vektor

$$\vec{S} = Re\{\vec{E}\} \times Re\{\vec{H}\} = \left(\frac{\tilde{\vec{E}}+\tilde{\vec{E}}^*}{2}\right)\cdot\left(\frac{\tilde{\vec{H}}\times\tilde{\vec{H}}^*}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\tilde{\vec{E}}\times\tilde{\vec{H}}^* + \tilde{\vec{E}}^*\times\tilde{\vec{H}} + \tilde{\vec{E}}^*\times\tilde{\vec{H}}^* + \tilde{\vec{E}}\times\tilde{\vec{H}}\right)$$

$$\langle\vec{S}\rangle_T = \frac{1}{4}\left(\langle\tilde{\vec{E}}\times\tilde{\vec{H}}^*\rangle + \langle\tilde{\vec{E}}^*\times\tilde{\vec{H}}\rangle\right)$$

$$\big(\langle\tilde{\vec{E}}\times\tilde{\vec{H}}\rangle_T \sim \langle e^{-2i\omega t}\rangle_T = 0$$

$$\downarrow \qquad \langle\tilde{\vec{E}}^*\times\tilde{\vec{H}}^*\rangle_T \sim \langle e^{2i\omega t}\rangle_T = 0$$

$$I = \langle S\rangle_T = \frac{1}{2} Re\,\langle\tilde{\vec{E}}\times\tilde{\vec{H}}^*\rangle$$

$$\vec{E}^t = (0, E_y^t, 0)$$
$$\vec{H}^t = (H_x^t, 0, H_y^t)$$

$$I_x = \langle S\rangle_{T,x} = \frac{1}{2} Re\{E_y H_z^* - \underbrace{E_z}_{=0} H_y^*\} =$$

$$= \frac{1}{2} Re\left\{E_0 t_\perp e^{iax} e^{-bz} e^{-i\omega t}\cdot\frac{a}{\mu_0\omega} E_0 t_\perp e^{-iax} e^{-bz} e^{i\omega t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} Re\left\{E_0^2 t_\perp^2 e^{-2bz}\cdot\frac{a}{\mu_0\omega}\right\} = \frac{1}{2}\frac{a}{\mu_0\omega} E_0^2 t_\perp^2 e^{-2bz}$$

$$I_y = \langle S\rangle_{T,y} = \frac{1}{2} Re\{E_z H_x^* - E_x H_z^*\} = 0$$

$$I_z = \langle S\rangle_{T,z} = \frac{1}{2} Re\{E_x H_y^* - E_y H_x^*\} = \frac{1}{2} Re\{-E_y H_x^*\} =$$

$$= \frac{1}{2} Re\left\{-E_y^t\cdot\frac{b}{-i\mu_0\omega} E_y^{t*}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} Re\left\{\frac{1}{i\mu_0\omega} E_0^2 t_\perp^2 e^{-2bz}\right\} = 0$$

Ryze imaginární

$\Rightarrow$ $I = (I_x, 0, 0)$ -- výkon teče podél rozhraní obou prostředí

$$\operatorname{div} \vec{S} = \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z}$$ (ve smyslu časových středních hodnot)

$S_y = S_z = 0$

$S_x \neq f(x) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{S} = 0$

Výkon není disipován, teče podél rozhraní

Hloubka průniku

$$b = k_t b' = k_t \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1} =$$

$$= k_t \cdot \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_t}\frac{n_1}{n_2}\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_2 \cdot \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_1 \sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}}$$

$$\lambda_t = \frac{\lambda_0}{n_2}$$

$$E_z \sim e^{-\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 \sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}}}_{b} z}$$

$$I_z \sim E_z^2 \sim e^{-\frac{4\pi}{\lambda_0} n_1 \sqrt{\sin^2\theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}} z} \sim$$

$$\sim e^{-2bz} \sim e^{-\frac{z}{d}}$$

$d = \frac{1}{2b}$ ... hloubka průniku

$$d = \frac{\lambda_0}{4\pi n_1} \cdot \left(\sin^2\theta_i - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^{-1/2}$$

$\lambda_0 = 400\,\mathrm{nm}$

$n_1 = 1.5$

$n_2 = 1.3$

$d = 106\,\mathrm{nm}$

EV5

Fresnelovy koeficienty pro případ úplného odrazu

$$r_\perp = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}$$

V případě evanescentní vlny je

$$\cos\theta_t = i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1}$$

$$r_\perp = \frac{n_1\cos\theta_i - i n_2\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1}}{n_1\cos\theta_i + i n_2\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1}} = \frac{c - id}{c + id}$$

Příklad $\quad n_1 = 2, \quad n_2 = 1, \quad \theta_i = \frac{\pi}{4}$

$$\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i - 1} = \sqrt{4\cdot\frac{1}{2} - 1} = \sqrt{1} = 1$$

$$r_\perp = \frac{\frac{2}{\sqrt2} - i}{\frac{2}{\sqrt2} + i} = \frac{\sqrt2 - i}{\sqrt2 + i} = \frac{\sqrt2 - i}{\sqrt2 + i}\cdot\frac{\sqrt2 - i}{\sqrt2 - i} =$$

$$= \frac{2 - 2i\sqrt2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt2\, i$$

$$c - id = \rho e^{-i\delta_\perp}$$

$$c + id = \rho e^{+i\delta_\perp}$$

$$r_\perp = \frac{c - id}{c + id} = \frac{e^{-i\delta_\perp}}{e^{+i\delta_\perp}} =$$

$$= e^{-2i\delta_\perp} =$$

$$= \cos(-2\delta_\perp) + i\sin(-2\delta_\perp)$$

$$= \cos 2\delta_\perp - i\sin 2\delta_\perp$$

EV6

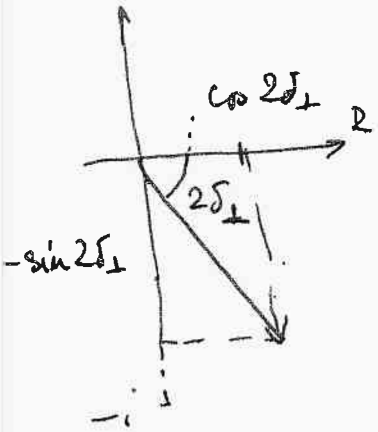
V našem případě je $\cos 2\delta_\perp = 0{,}33$

$$\sin 2\delta_\perp = \frac{2}{3}\sqrt{2} = 0{,}93$$

$\mathrm{tg}\, 2\delta_\perp = 2{,}83$

$$\mathrm{arctg}(2{,}83) = 1{,}23 \text{ rad} = 0{,}39\pi \text{ rad.}$$

$$r_\perp = e^{-i2\delta_\perp} = e^{-0{,}39\pi \cdot i}$$



$$E_y^{(r)} = r_\perp E_y^{(i)} =$$

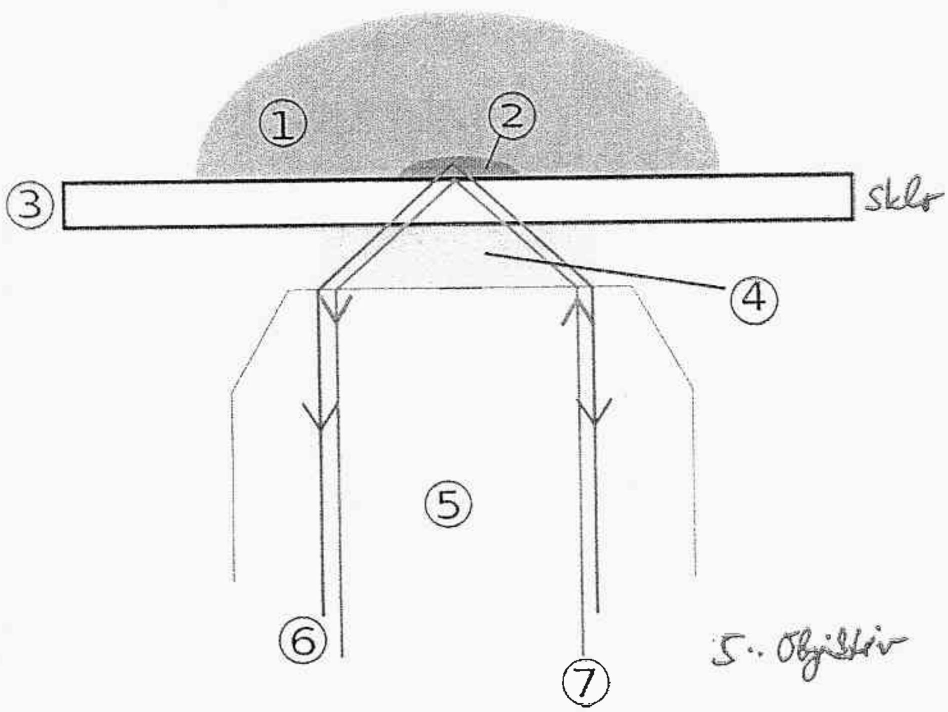
$$= E_{0y}^{(i)} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \cdot r_\perp =$$

$$= E_{0y}^{(i)} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} e^{\underbrace{-0{,}39\pi i}_{\Delta\varphi_\perp}}$$

Evanescentní vlny se využívá v mikroskopii totálního odrazu. Hlavní výhodou je malá hloubka průniku evanescentní vlny. Je tedy možné dostat informaci např. jen z povrchové vrstvy vzorků. Obvykle se vzorek umísťuje na skleněný substrát, index lomu skla $n_1 = 1.515$ Hlavní součástí biologického vzorku je voda - index lomu $n_2 = 1.33$. Pro $\lambda_0 = 514$ nm (zelená barva) je hloubka průniku $d \approx 140$ nm (úhel dopadu 64°)

---

1 .. Vzorek
2 .. Evanescentní vlna



5 .. Objektiv

6 .. Signál
7 .. Excitační svazek