

Interference, difrakce

Proseminář z Optiky, 5.12.2019

Difrakce - Fraunhoferova aproximace

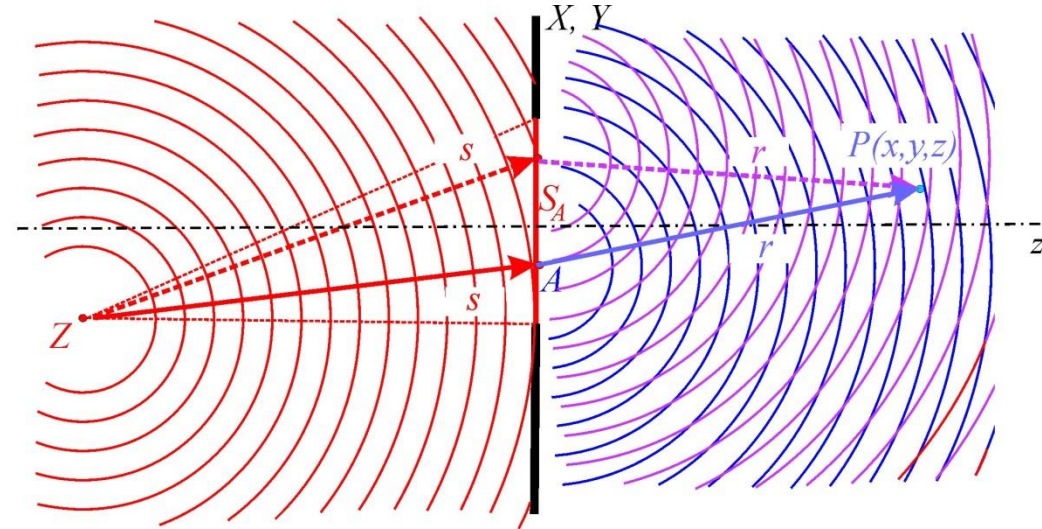
Difrakční integrál

$$E(x, y, z) \cong \frac{-i}{\lambda} \iint_{S_A} E(X, Y, 0) \frac{e^{ikr}}{r} dS_A,$$

Difrakční integrál ve Fraunhoferově aproximaci

$$E(x, y, z) \cong \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} e^{ik \frac{(x^2+y^2)}{2z}} \iint_{aper} E(X, Y, 0) e^{-ik \frac{(xX+yY)}{z}} dXdY$$

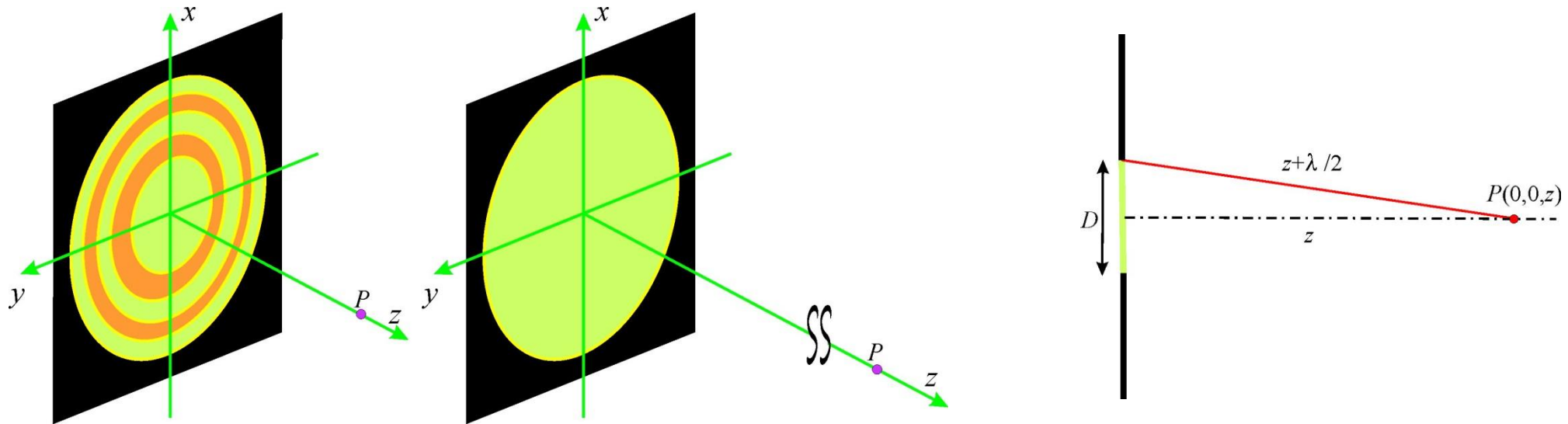
$$e^{ik \frac{(X^2+Y^2)}{2z}} \cong 1, \quad z \gg z_{MEZ} = \frac{k}{8} (\text{max. rozměr otvoru})^2$$



Uspořádání, ve kterém) integrace probíhá přes rovinnou plochu apertury S_A . Zakresleny jsou pouze dvě sady difraktovaných vln z nekonečně mnoha.

Použitelnost Fraunhoferovy aproximace

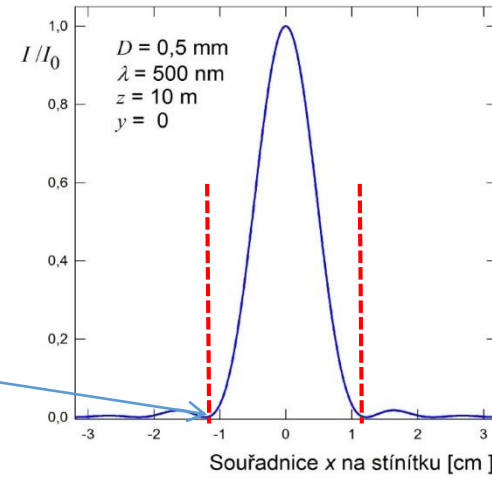
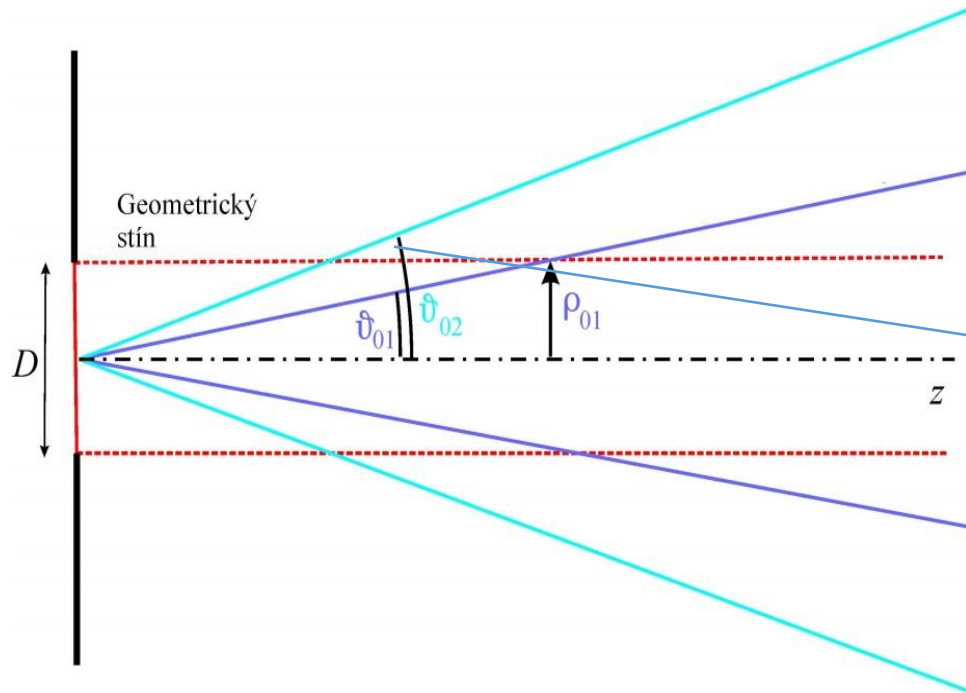
Celá apertura je vyplněna z pohledu bodu na ose kruhového otvoru jedinou Fresnelovou zónou $z > \frac{D^2}{4\lambda} = 0,25 \frac{D^2}{\lambda}$; pro větší vzdálenosti již nedochází k oscilacím intenzity na ose s růstem z , které jsou typické pro Fresnelovu difrakci.



K určení rozměru středové Fresnelovy zóny. Máme-li kruhovou aperturu o průměru D a bod pozorování P ležící na ose apertury v místě $z < z_{MIN}$ bližším k apertuře než je mezní vzdálenost pro platnost Fraunhoferovy aproximace, vyplňuje aperturu více Fresnelových zón. S rostoucím z se poloměry Fresnelových zón zvětšují, až dosáhneme bodu, kdy celou aperturu vyplňuje 1. Fresnelova zóna. V tuto chvíli se všechny elementární kulové vlny vycházející z apertury skládají konstruktivně. S dalším růstem z se poloměr 1.zóny dále zvětšuje, skládání vln je nadále konstruktivní. Na ose z je stále maximum intenzity (oblast Fraunhoferovy aproximace), ale intenzita v maximum s rostoucím z slábne jako $1/z^2$.

Použitelnost Fraunhoferovy aproximace

1. nulový bod Fraunhoferova difrakčního obrazce kruhového otvoru musí ležet v oblasti geometrického stínu.



Poloměr výskytu prvního nulového bodu je dán vztahem

$$\frac{kD}{2} \frac{\rho_{01}}{z} = 1,22\pi. \text{ Minimální } z \text{ určíme z podmínky } \rho_{01} = D/2, \\ z > 0,41 \frac{D^2}{\lambda} .$$

Schéma kritéria pro použitelnost Fraunhoferovy difrakce na kruhovém otvoru na základě polohy 1. nulového bodu intenzity difrakčního obrazce kruhového otvoru. Červená čárkovaná čára odděluje oblast geometrického stínu a „světla“, ϑ_{01} určuje rozbíhání prvního nulového bodu Fraunhoferova obrazce, ϑ_{02} ukazuje rozbíhání druhého nulového bodu. Obrázek není v měřítku, musí být $z(\rho_{01}) \gg D$

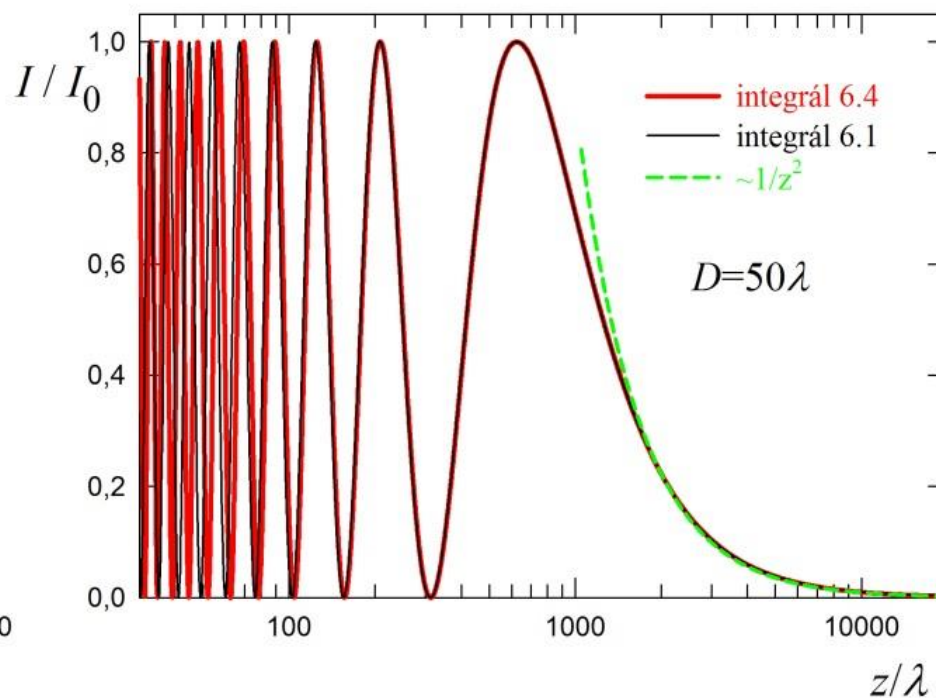
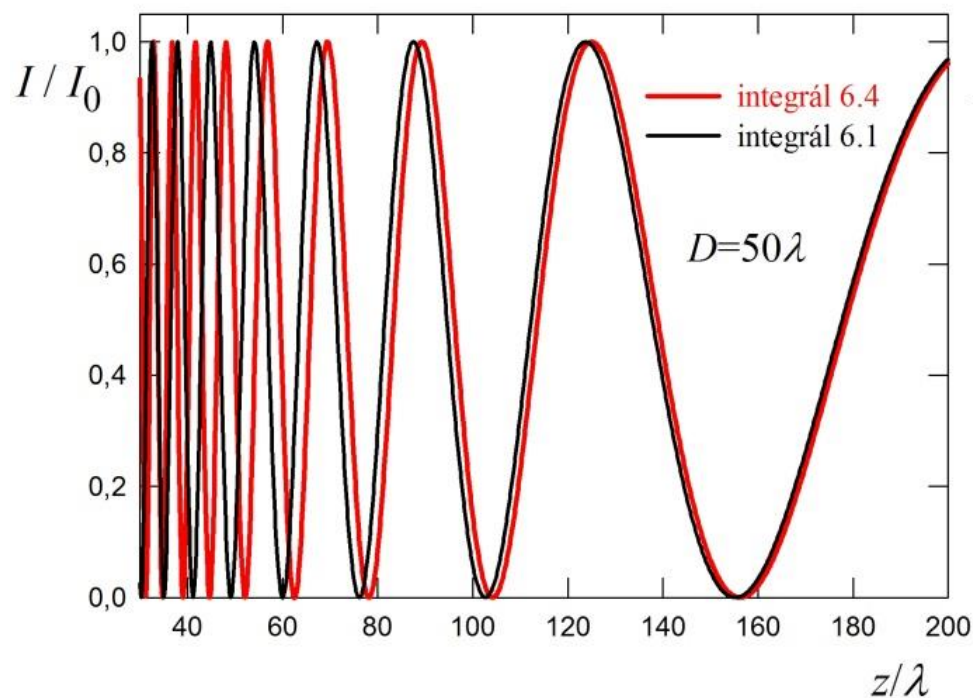
Výpočet difrakčních integrálů na ose kruhové apertury

**Přesný výpočet
(bez směrového faktoru)**

$$I(0,0,z) \propto E(0,0,z) \cdot E^*(0,0,z) = 2E_0^2 \left\{ 1 - \cos \left[k \left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2} - z \right) \right] \right\}$$

Fresnelova aproximace

$$I(0,0,z) \propto E(0,0,z) E^*(0,0,z) = 2E_0^2 \left(1 - \cos \frac{kD^2}{8z} \right)$$



Fraunhoferova aproximace

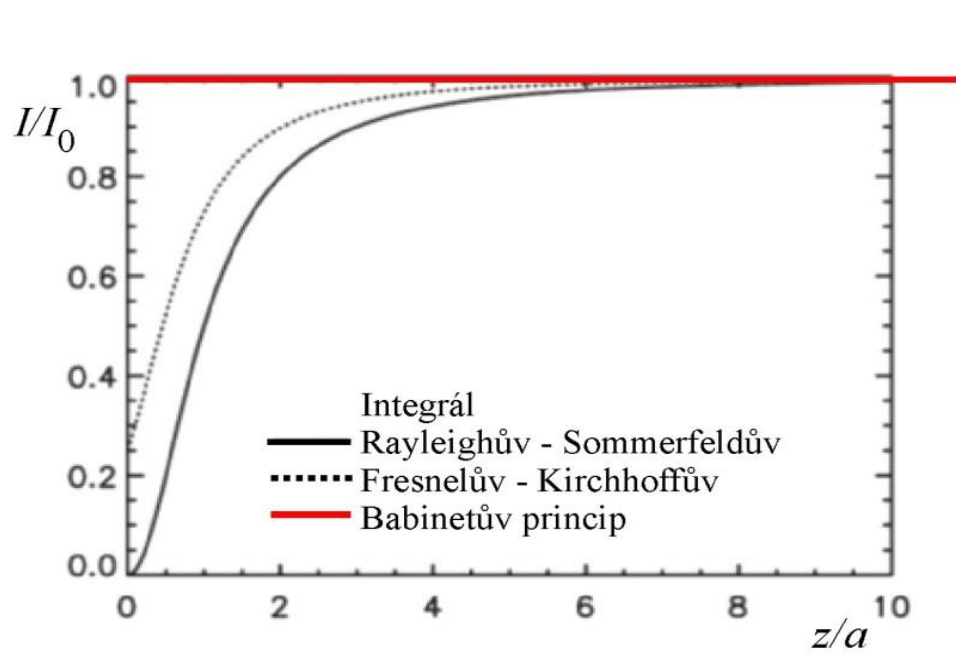
$$I(0,0,z) \propto E(0,0,z) E^*(0,0,z) = \frac{1}{\lambda^2 z^2} E_0^2 \pi^2 \frac{D^4}{16}$$

Výpočet difrakčních integrálů na ose kruhového stínítka

$$E_{\text{volný prostor}} = E_{\text{kruhový otvor}} + E_{\text{kruhové stínítka}}$$

$$E_{\text{kruhové stínítka}} = E_{\text{volný prostor}} - E_{\text{kruhový otvor}}$$

$$E_{\text{kruhové stínítka}} = E_0 e^{ikz} - E_0 \left(e^{ikz} - e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2}} \right) = E_0 e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2}}. \quad I(0,0,z) \sim E(0,0,z) \cdot E^*(0,0,z) = E_0^2$$



Relativní intenzita Poissonovy skvrny v závislosti na poměru vzdálenosti z od nepropustného kruhového terčíku k poloměru terčíku a . Je vidět, že výsledná intenzita je přibližně stejná (jako kdyby tam nepropustný terčík nebyl) pro všechny tři modely pro vzdálenosti $z > 5a$.

Simeon D. Poisson - Poissonova skvrna

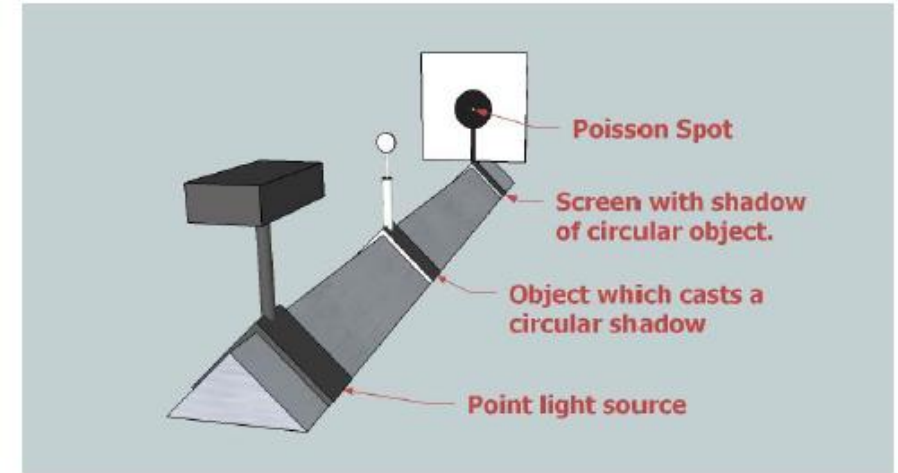


„The only two good things in life are doing mathematics and teaching it.“

Zdroj: <https://citaty.net/citaty/1823069-simeon-denis-poisson-the-only-two-good-things-in-life-are-doing-mathema/>

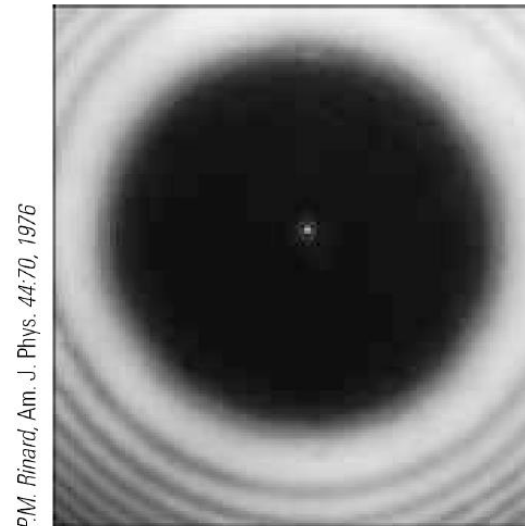
V roce publikoval **Augustin Fresnel** článek o teorii difrakce na základě soutěže vyhlášené francouzskou Akademií věd. Člen komise, **Simeon D. Poisson**, byl jako zastánce částicové teorie k závěrům Fresnela velmi kritický. Na základě Fresnelovy vlnové teorie dedukoval zdánlivě absurdní předpoklad, že za kruhovou překážkou by se na ose měla objevit jasná skvrna. To považoval za hřebíček do rakve vlnové teorie.

Ale jiný člen komise, **Dominique Arago** nechal Poissonem navržený experiment provést a skvrnu se podařilo změřit. Fresnel vyhrál cenu. Skvrnu, která by měla plné právo se nazývat Aragova, vešla do historie jako **Poissonova skvrna**

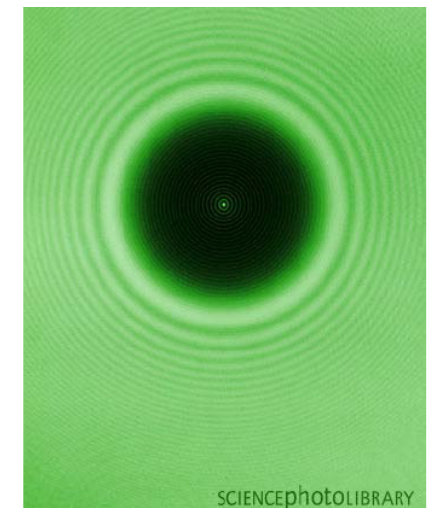


http://en.wikipedia.org/wiki/Arago_spot

$$I(0,0,z) \propto E(0,0,z) E^*(0,0,z) = |E_0|^2 e^{ik\sqrt{(D/2)^2+z^2}} e^{-ik\sqrt{(D/2)^2+z^2}} = |E_0|^2$$



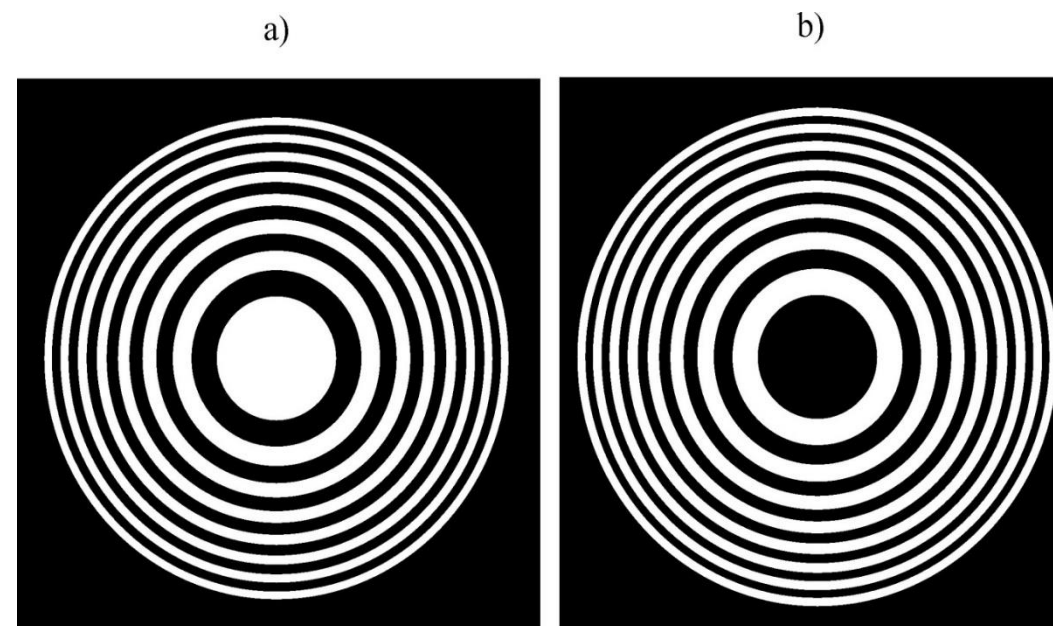
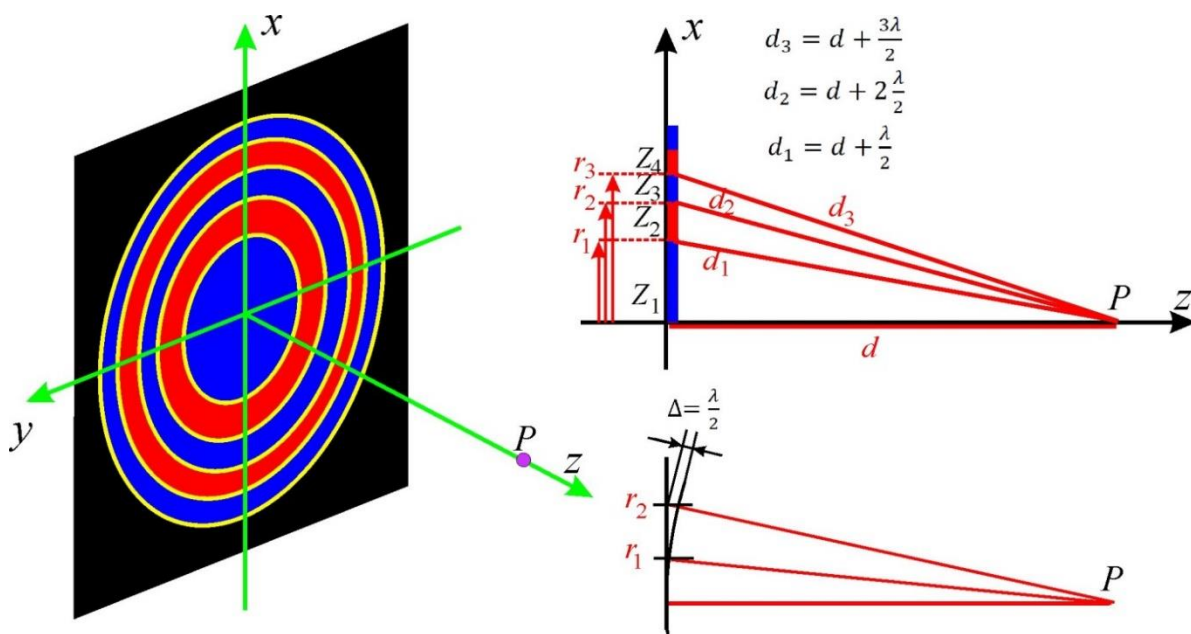
P.M. Rinaud, Am. J. Phys. 44:70, 1976



SCIENCEPHOTOLIBRARY

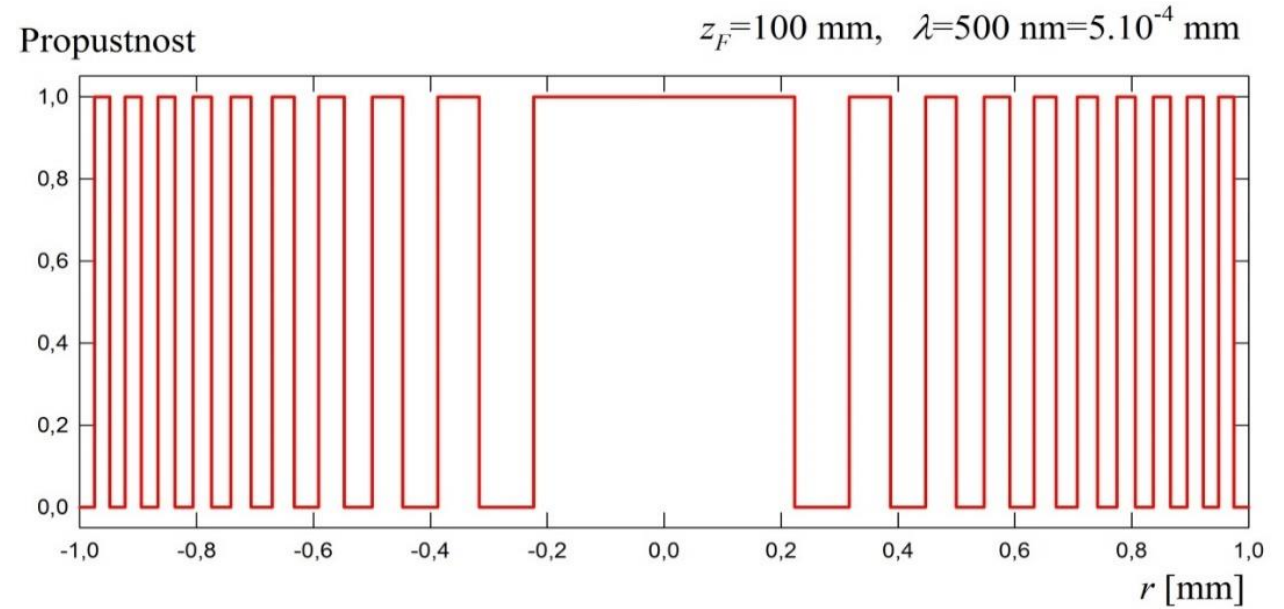
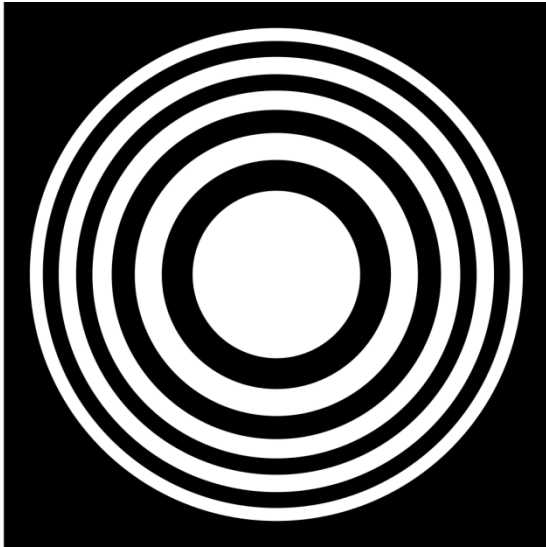
Fresnelovy zónové desky (zonální mřížky)

Binární amplitudové Fresnelovy zónové desky jsou tvořeny kruhově symetrickými aperturami, přičemž se střídají propustná a nepropustná mezikruží tak, že odpovídají sudým a lichým Fresnelovým zónám.



Fresnelova zónová deska a) lichá (pozitivní, je propustná pro liché zóny), b) sudá (negativní). Tmavé oblasti vyznačují plochy stínítka v apertuře, přes které neprochází světlo.

Fresnelova zónová deska s binární modulací

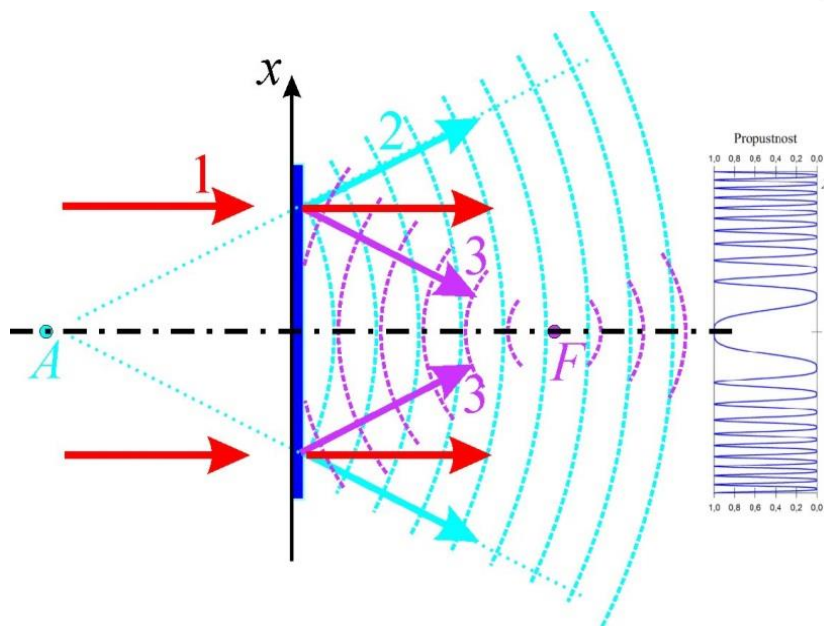
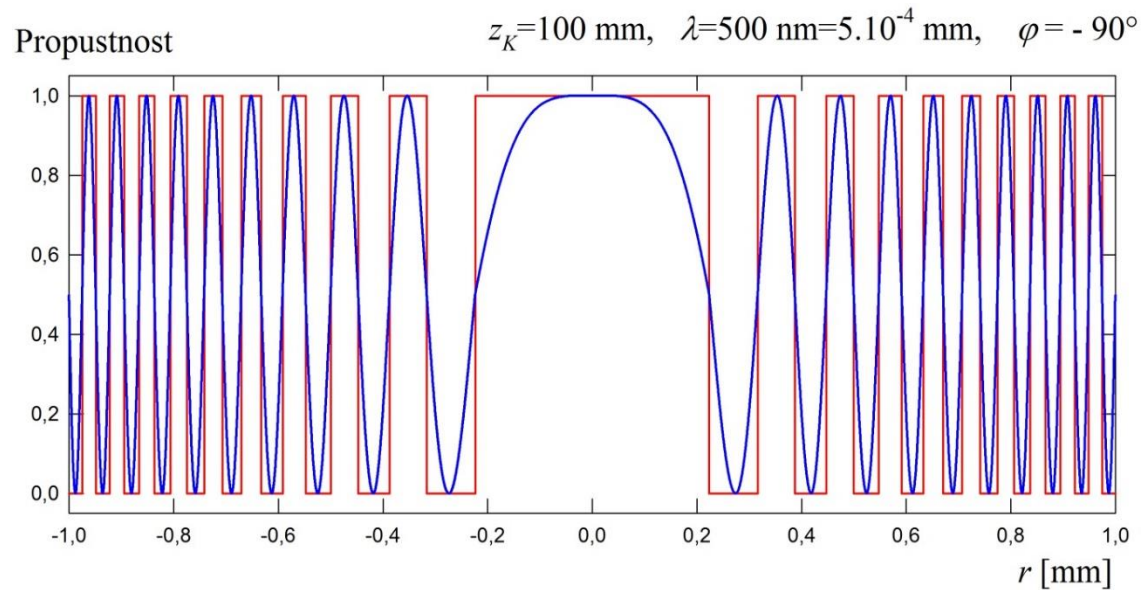
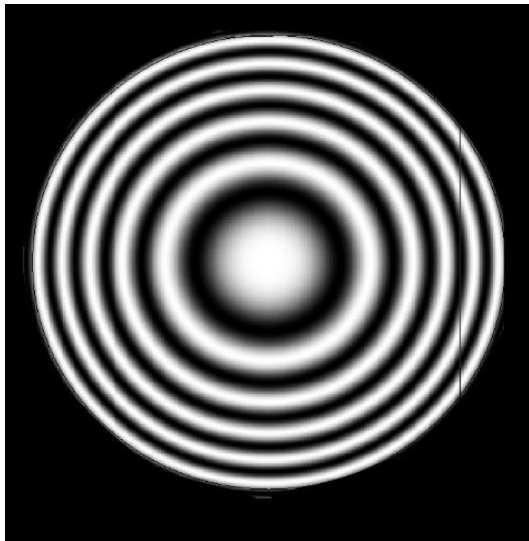


Radiální závislost propustnosti Fresnelovy zónové desky se základní ohniskovou vzdáleností $z_F = 10 \text{ cm}$ spočtená podle vztahu

$$r_m = \sqrt{m\lambda f_{ZP} + \frac{1}{4}m^2\lambda^2}.$$

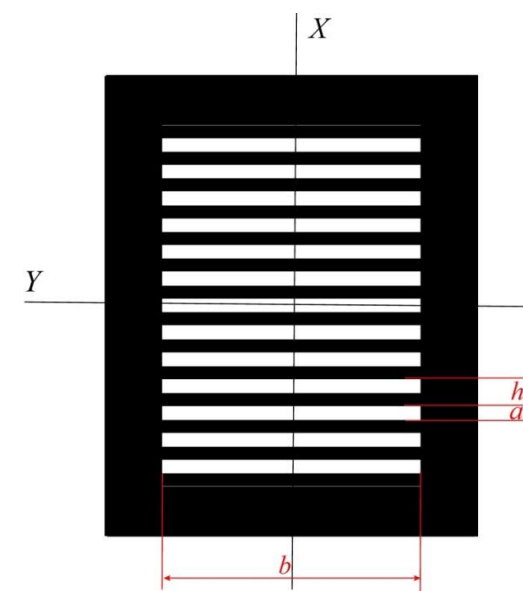
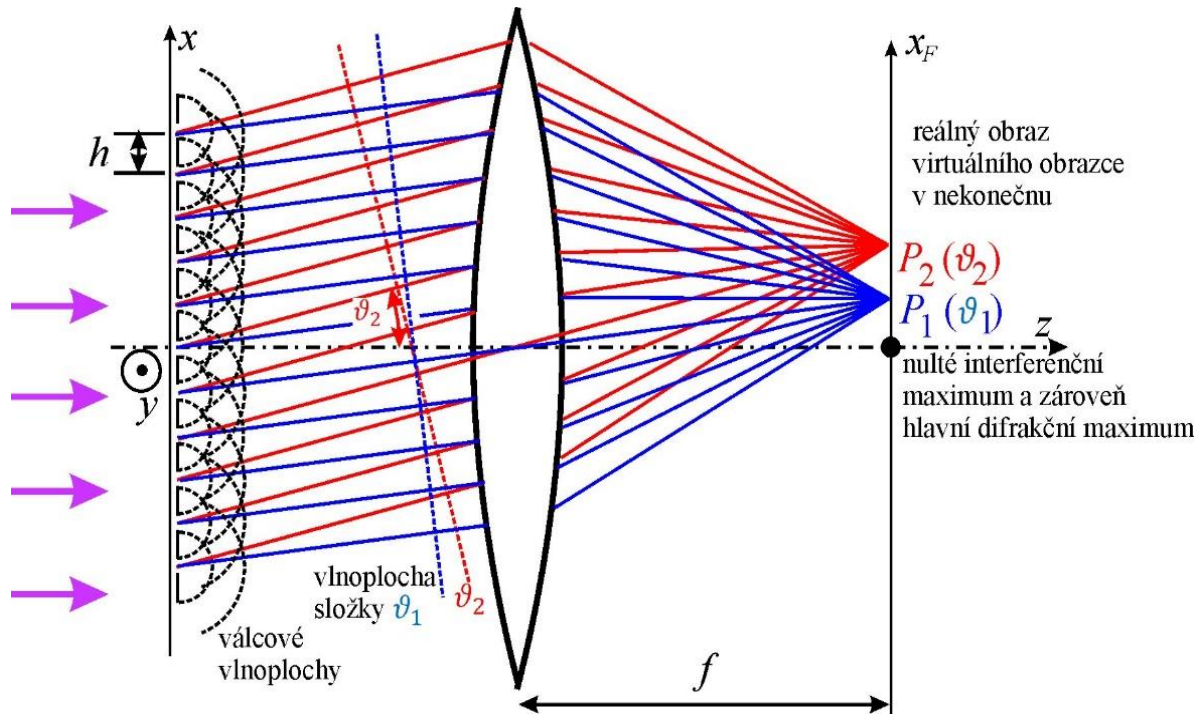
Obecně binární zónová deska (ostré střídání zóna propouští / nepropouští) je multifokální, maxima se objevují ve vzdálenostech $f_{ZP}, f_{ZP}/3, f_{ZP}/5, f_{ZP}/7$. f_{ZP} je analogií ohniskové vzdálenosti čočky

Fresnelova zónová deska s kosinovou modulací



Difrakce rovinné vlny na kruhově symetrické mřížce s kosinově modulovanou propustností Fresnelových zón. 1 dopadající rovinná vlna, 2 divergující kulová vlna tvořící virtuální obraz bodu A (holografický obraz bodu A), 3 konvergující kulová vlna směřující do reálného ohniska F . Vpravo je naznačena propustnost zónové desky).

Difrakční mřížka



$$I(x, 0, z) \cong I_0 \left(\frac{\sin N\eta}{N \sin \eta} \right)^2 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 = I_0 F_N^2 \times f_1^2,$$

$$u \cong \frac{h\pi}{\lambda} \sin \vartheta$$

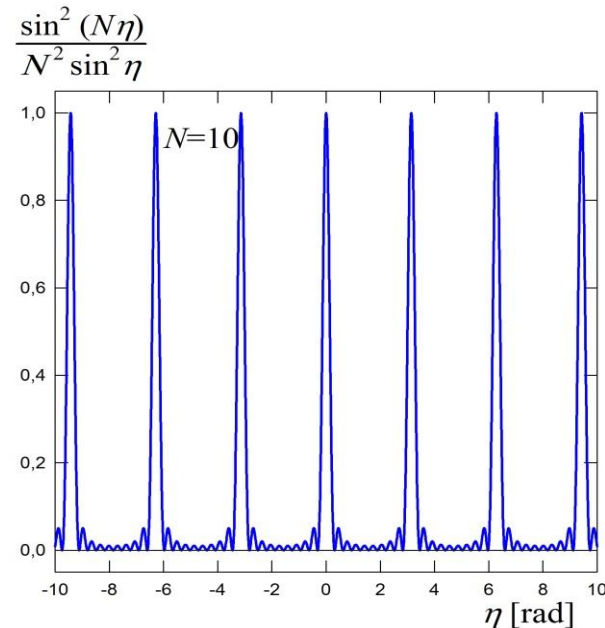
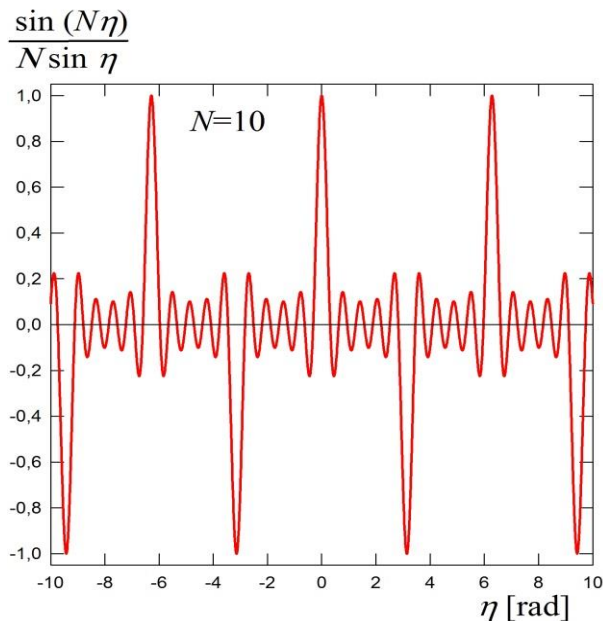
$$u \cong \frac{a\pi}{\lambda} \sin \vartheta$$

Virtuální interferenční obrazec N rovinných vln v nekonečnu je složen z rovinných komponent charakterizovaných úhlem ϑ . Tento obrazec si můžeme „přitáhnout“ do ohniskové roviny fokusační optiky. Předpokládáme, že na mřížku dopadá rovinná vlna s vlnovým vektorem rovnoběžným s osou z (úhel dopadu $\theta_i = 0$), takže pole ve všech šterbinách kmitají ve fázi. Intenzita v ohniskové rovině je určena úhlem ϑ . Nulté interferenční maximum je na ose z , $x_F = 0$ pro všechny vlnové délky.

Difrakční mřížka – interferenční část

Při výpočtu difrakce na souboru identických difrakčních apertur tedy stačí vypočítat difrakční obraz jedné apertury a tento výsledek vynásobit sumou přes všechny apertury (výraz před složenou závorkou).

Grafy funkcí $\frac{\sin(N\eta)}{N \sin \eta}$ a $F_N(\eta) = \frac{\sin^2(N\eta)}{N^2 \sin^2(\eta)}$ pro $N = 10$

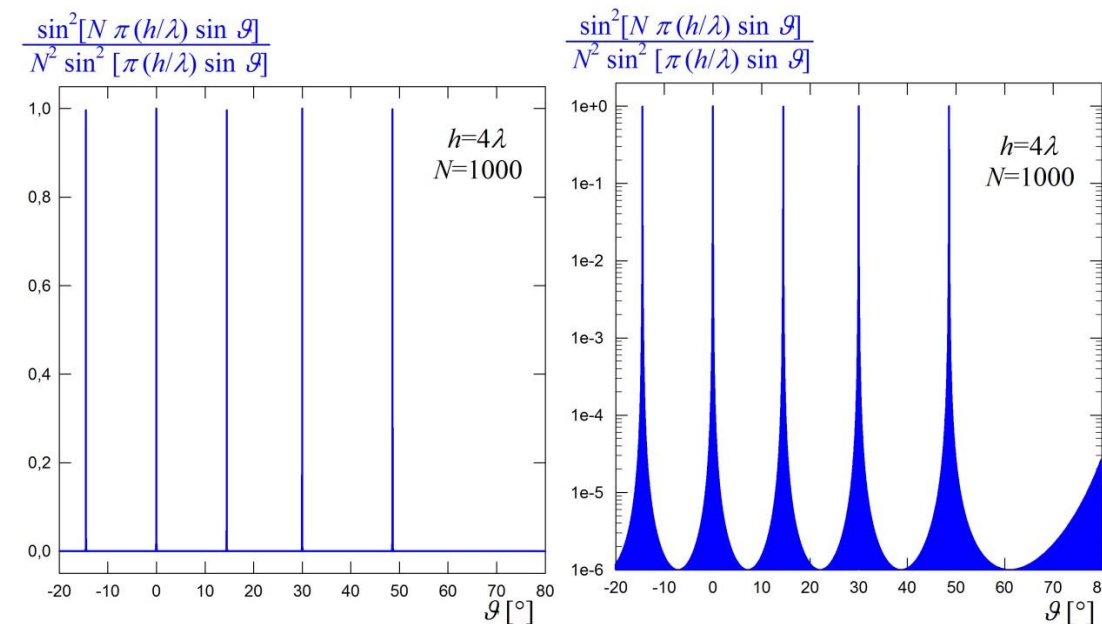
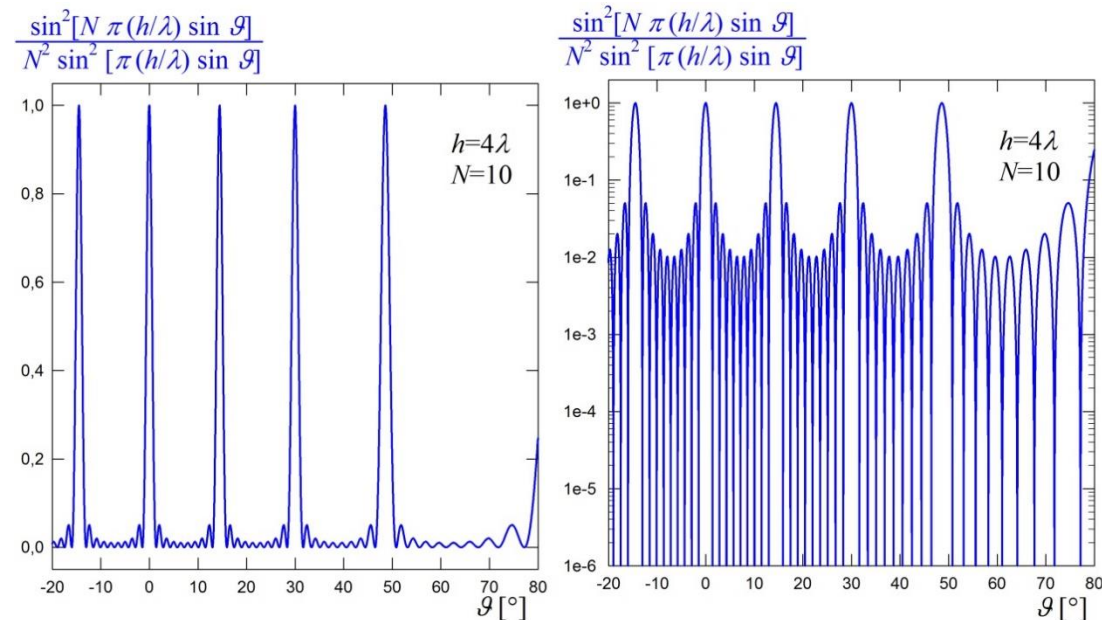


Funkce $\frac{\sin(N\eta)}{N \sin \eta}$ je periodická s periodou 2π . Funkce $F_N(\eta) = \frac{\sin^2(N\eta)}{N^2 \sin^2(\eta)}$ je periodická s periodou $\Delta\eta = \pi$. J

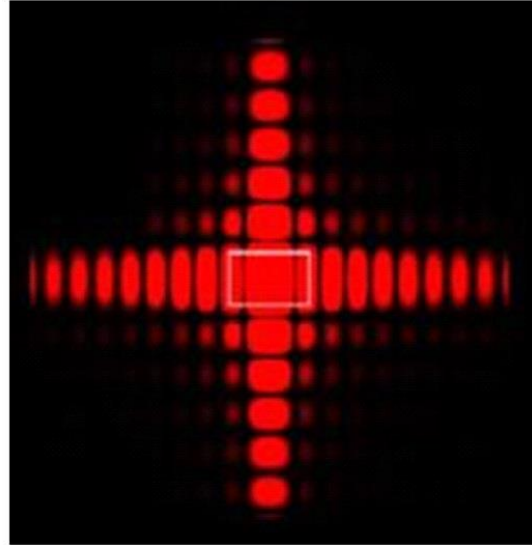
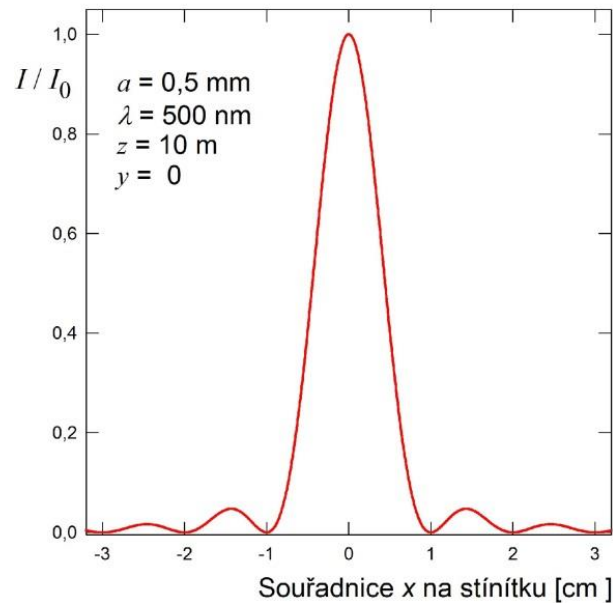
Difrakční mřížka – interferenční část

Grafy funkcí $F_N(\vartheta) = \frac{\sin^2\left(N \pi \frac{h}{\lambda} \sin \vartheta\right)}{N^2 \sin^2\left(\pi \frac{h}{\lambda} \sin \vartheta\right)}$ pro

$N = 10$ a $N = 1000$. S rostoucím N se hlavní maxima zužují, počet vedlejších maxim mezi sousedními hlavními maximy roste jako $(N - 2)$ a jejich výška se snižuje.



Difrakce na obdélníkové apertuře – difrakční část průběhu intenzity po dopadu světla na difrakční mřížku (kolmý dopad vlny na aperturu)



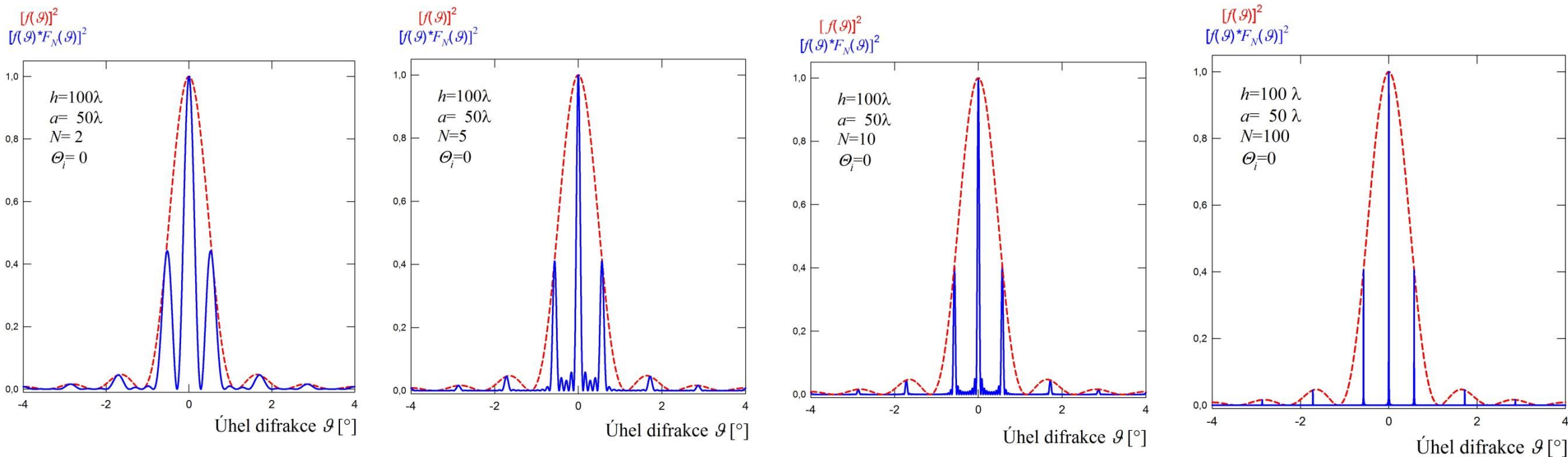
$$I = E(x, y, z) E^*(x, y, z)$$
$$= E_0^2 a^2 b^2 \left(-\frac{i}{\lambda}\right) \left(\frac{i}{\lambda}\right) \frac{1}{z^2} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2$$

$$u \cong \frac{a\pi}{\lambda} \sin \vartheta \quad v \cong \frac{b\pi}{\lambda} \sin \varphi$$

Příklad rozložení intenzity světla na matnici při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru. Vlevo rozložení intenzity pro $y = 0$. Vpravo difrakční obrazec. Hodnoty v levé části obrázku odpovídají apertuře o straně $a = 0,5 \text{ mm}$ a vzdálenosti matnice od apertury 10 m při vlnové délce 500 nm . Použití Fraunhoferovy aproximace je oprávněné. Bílý obdélník v difrakčním obrazci vyznačuje studovanou obdélníkovou aperturu.

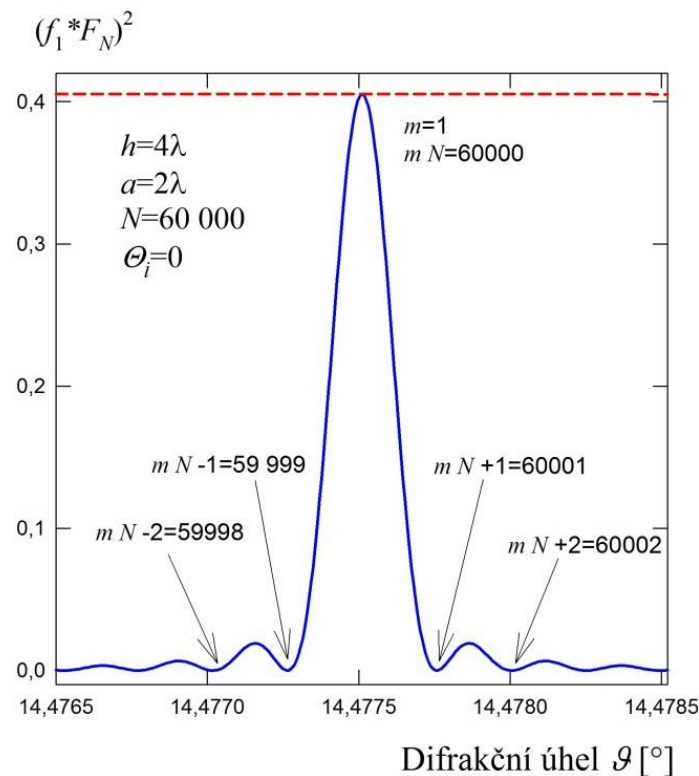
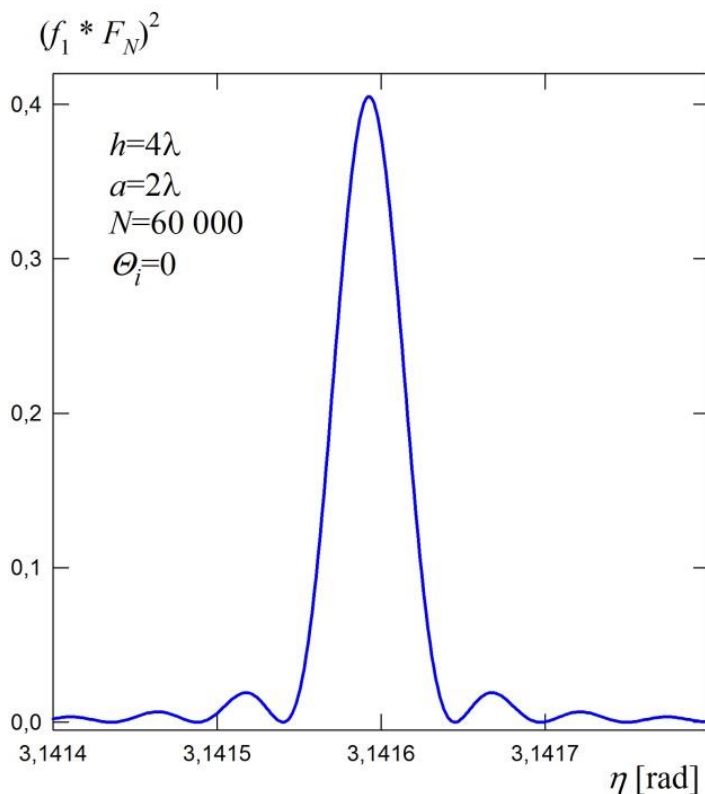
Modelový průběh intenzity světla po difrakci na difrakční mřížce

(součin difrakční a IF části průběhu intenzity)



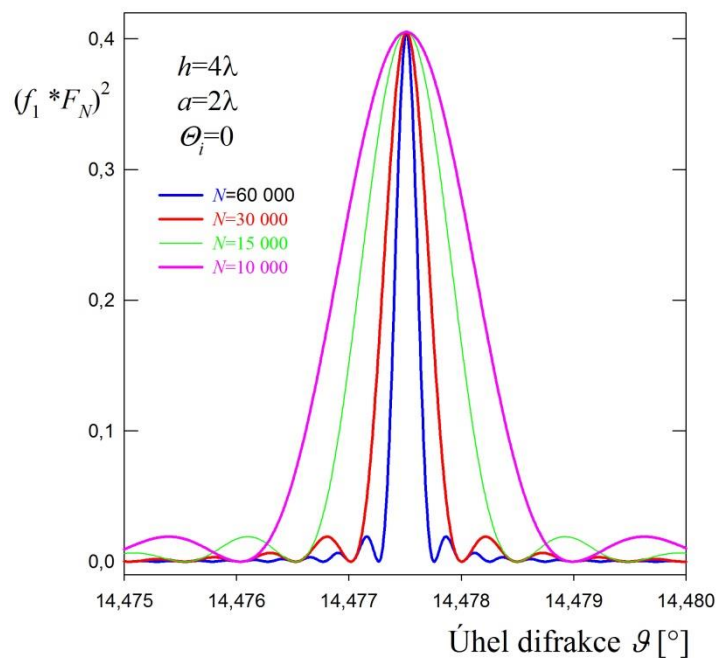
Modelový průběh intenzity světla po difrakci na difrakční mřížce v závislosti na počtu štěrbin $N = 2, 5, 10, 100$ a pro šířku štěrbin $a = h/2$. Červená přerušovaná křivka reprezentuje úhlovou závislost difrakční intenzity pro 1 štěrbinu $f^2(\vartheta) = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ která představuje obálku pro interferenci souboru identických štěrbin $\sim F_N^2$. Intenzita ve výsledném obrazci je úměrná součinu obou funkcí. Předpoklady našeho skalárního modelu Fraunhoferovy difrakce i paraxiální aproximace jsou splněny: široké štěrbin (pro $\lambda = 500 \text{ nm}$ je $a = 25 \mu\text{m}$), malé úhly difrakce.

Modelový průběh intenzity světla po difrakci na difrakční mřížce

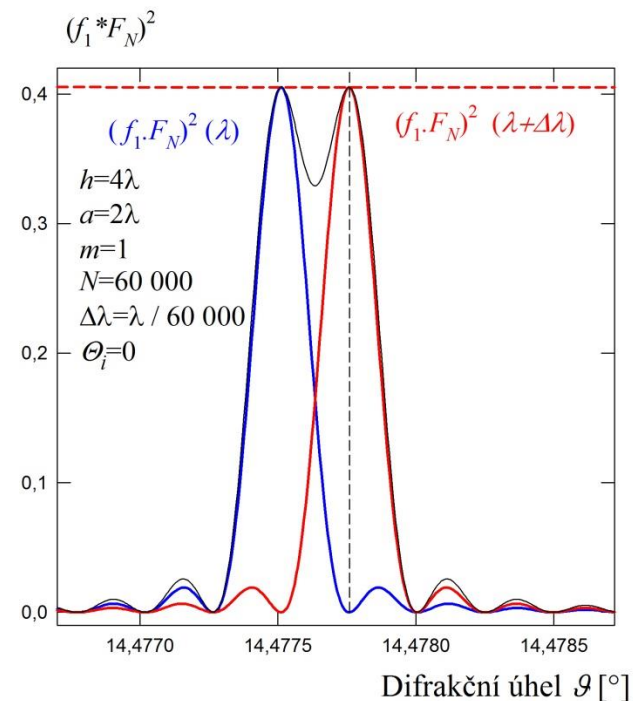


Modelová závislost normované intenzity difraktované vlny $(f_1 F_N)^2$ v okolí 1. hlavního interferenčního maxima $m = 1$ pro mřížku s $N = 60\,000$. V pravé části jsou vyznačeny podmínky pro nulové body. V tomto úhlovém intervalu je závislost difrakční funkce f_1 (červená přerušovaná čára) zcela nepatrná.

Modelový průběh intenzity světla po difrakci na difrakční mřížce

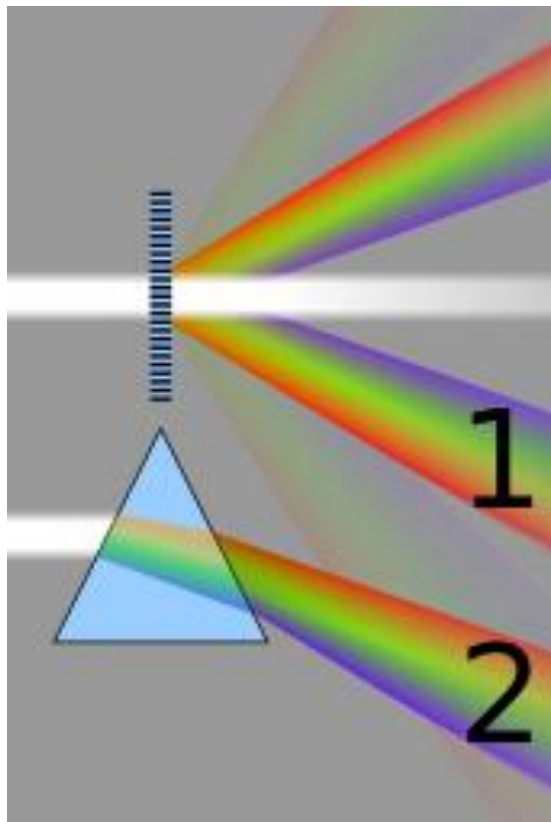


Modelová závislost normované intenzity difraktované vlny $(f_1 F_N)^2$ v okolí 1. hlavního maxima $m = 1$ pro mřížky s počtem štěrbin $N = 60\ 000, 30\ 000, 15\ 000$ a $10\ 000$.



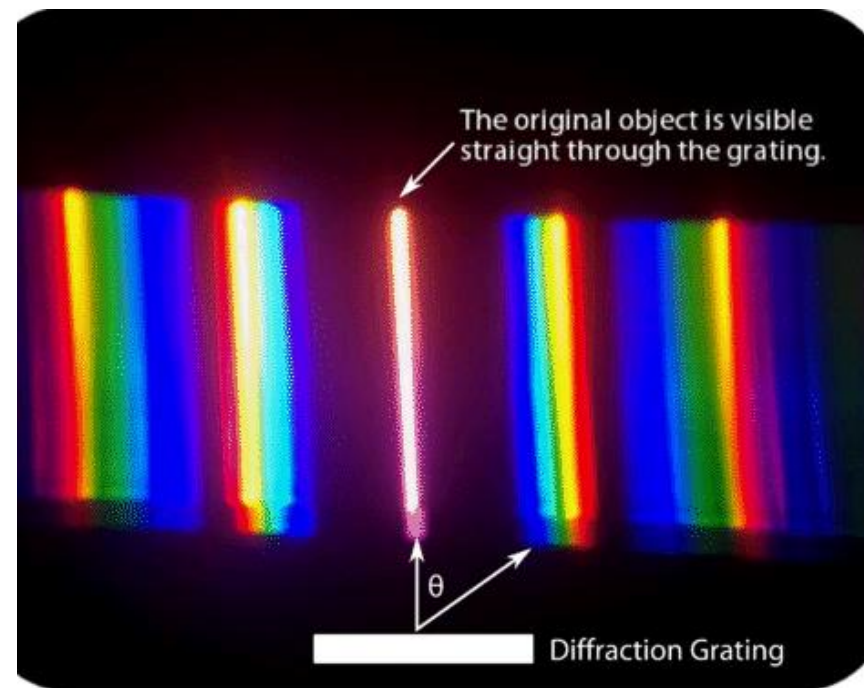
Normovaná intenzita $(f_1 F_N)^2$ pro dvě vlnové délky λ a $\lambda + \Delta\lambda$ stejných intenzit. Černá křivka je součet intenzit pro obě vlnové délky.

Spektrální rozklad při lomu na hranolu difrakci na mřížce

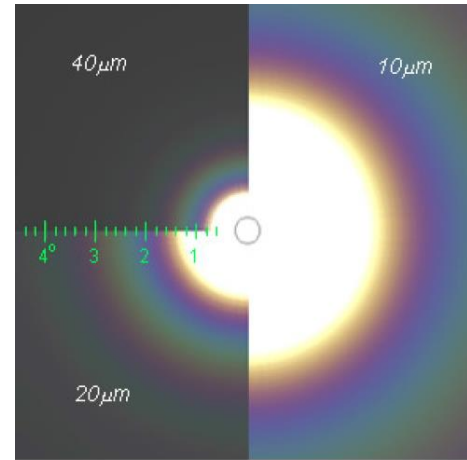
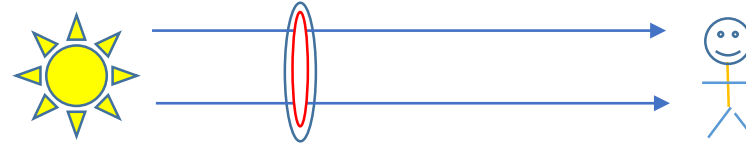
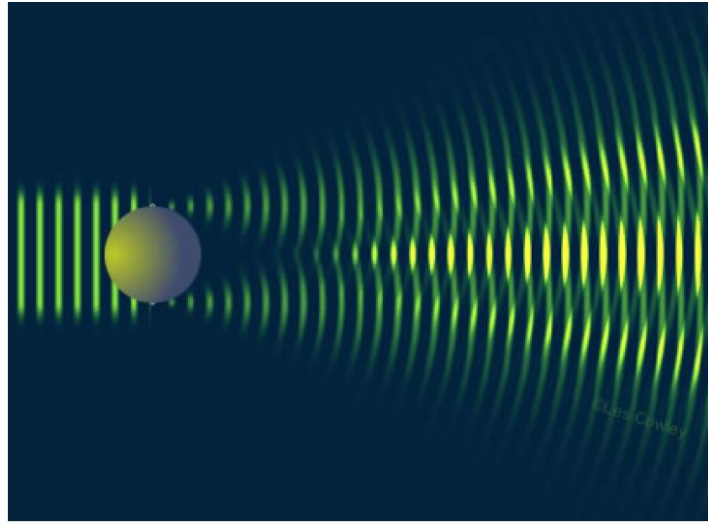


Při kolmém dopadu na transmisní mřížku

Je hlavní maximum ve směru dopadu, má největší intenzitu a je spektrálně nerozlišené (při dopadu bílého světla je bílé). Vedlejší maxima jsou spektrálně rozlišená, Mají menší intenzitu než hlavní maximum.

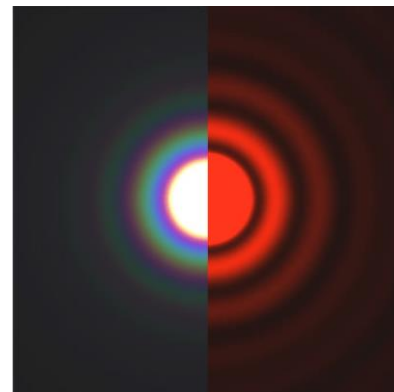
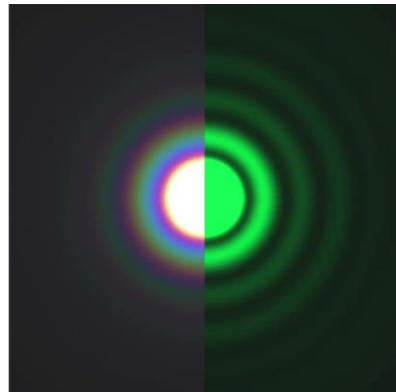
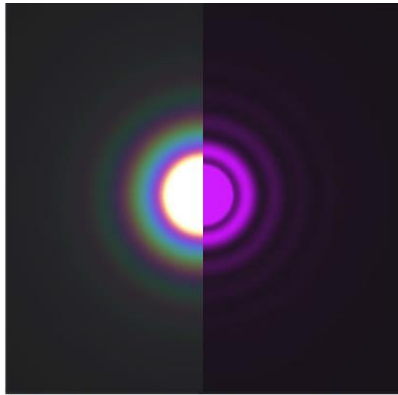


Příklad difrakčního jevu v přírodě - Koróna

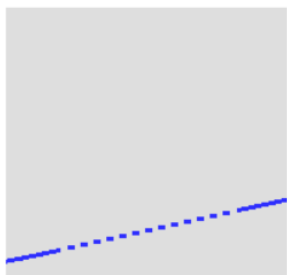


Malé kapky
vytvářejí
větší koróny

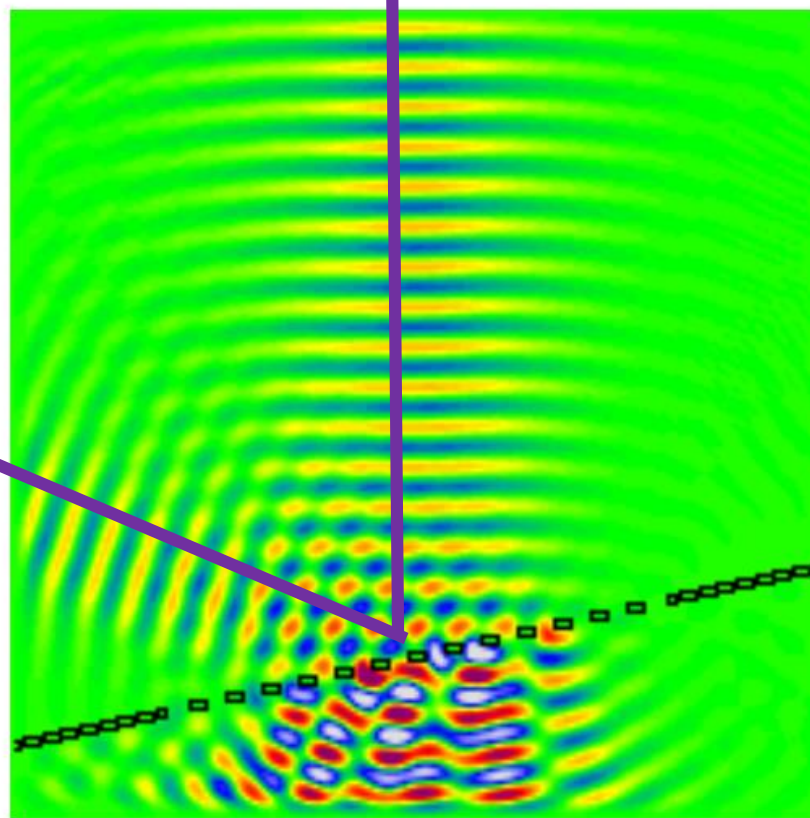
Příčinou vzniku koróny je difrakce



Difrakční mřížka na průchod – numerický výpočet

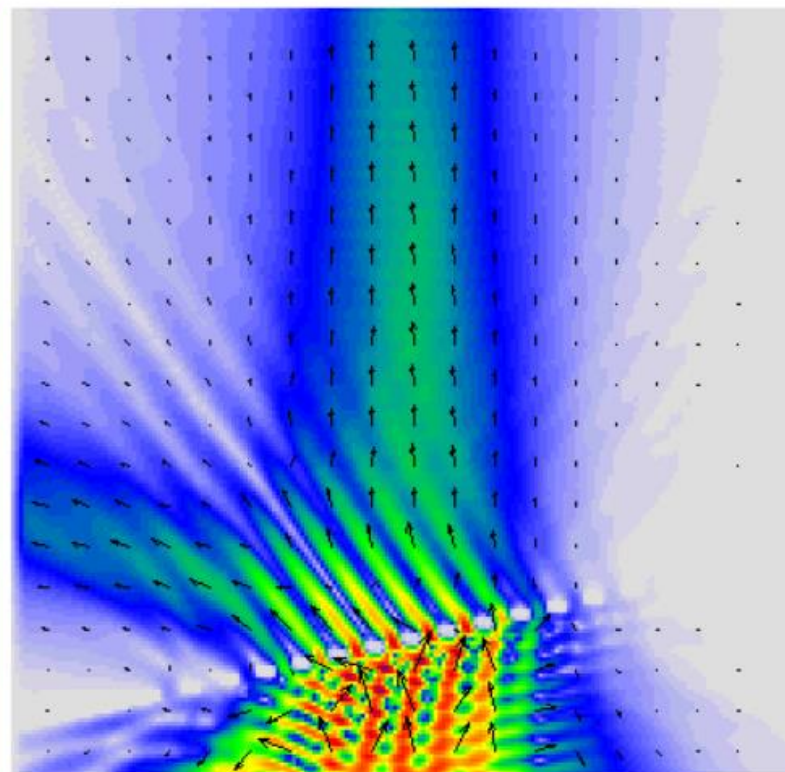


Electric field animation



This is an animation of the component of the electric field out of the plane of the page.

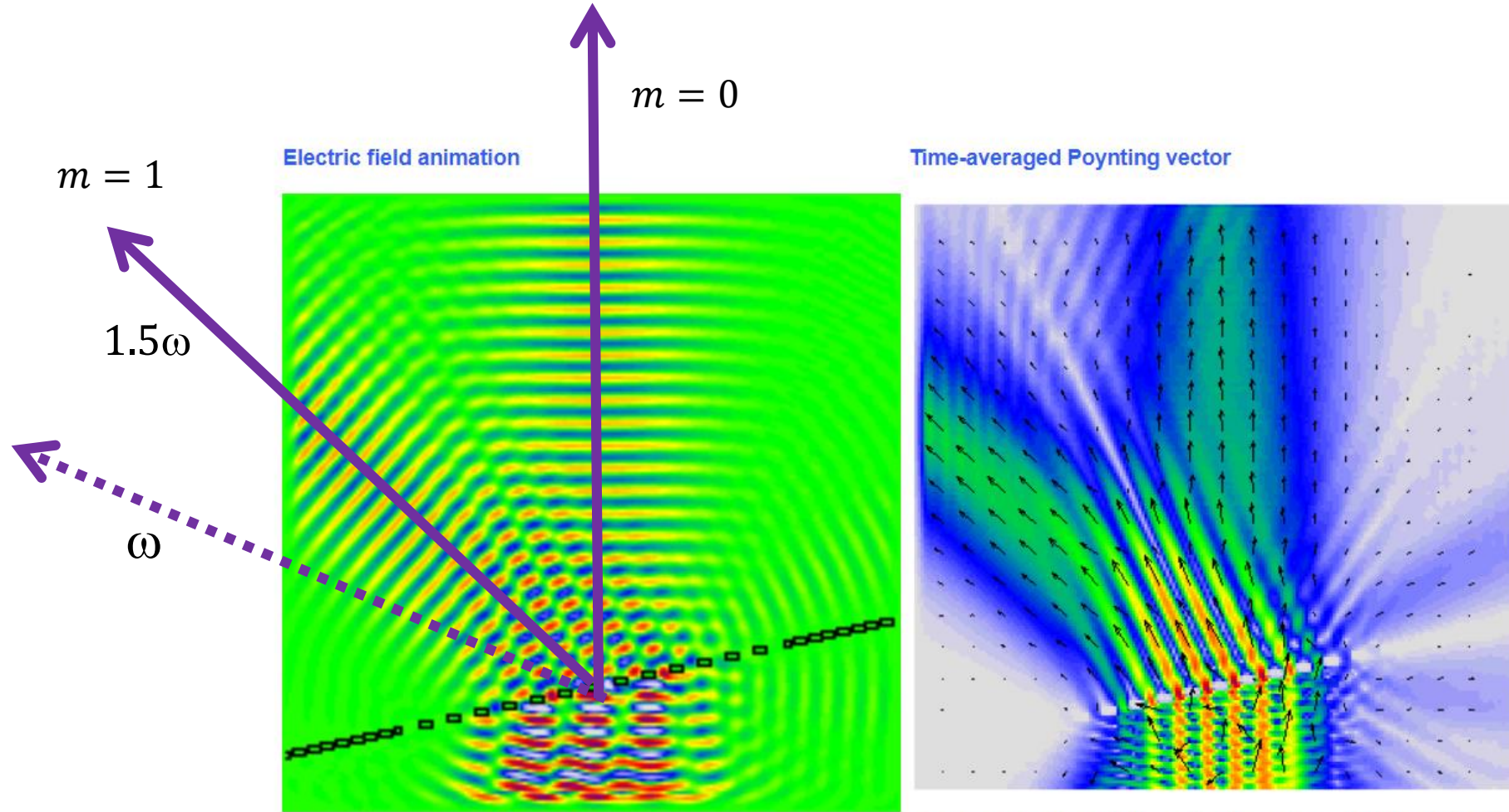
Time-averaged Poynting vector



The direction in which energy is travelling at any instant is proportional to the cross product of the electric and magnetic fields, known as the Poynting vector. The arrows show the direction of the Poynting vector averaged over the simulation, while the colours show its strength.

Difrakční mřížka na průchod – numerický výpočet

Frekvence vlny 1.5x větší než v předchozím obrázku – difrakční maxima se přibližují



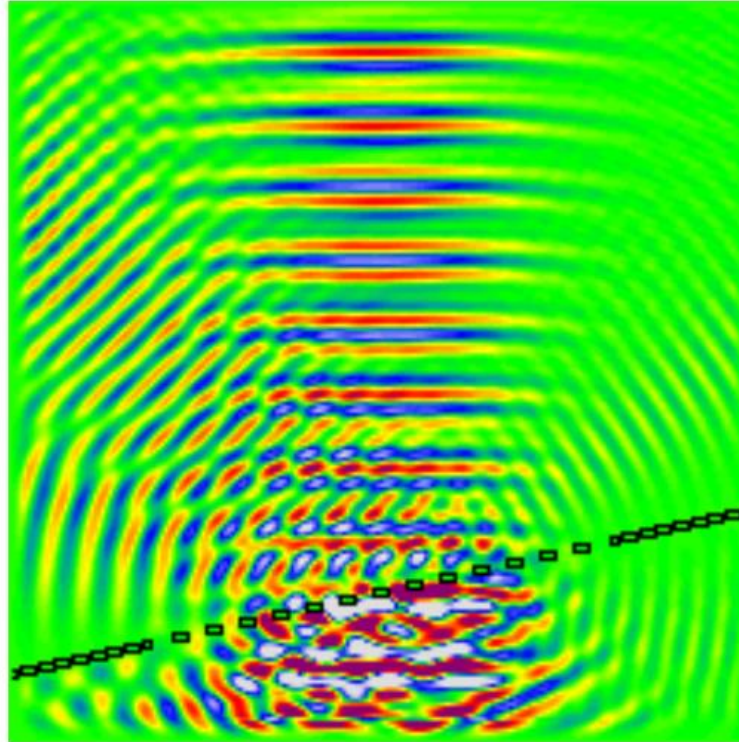
This is an animation of the component of the electric field out of the plane of the page.

The direction in which energy is travelling at any instant is proportional to the cross product of the electric and magnetic fields, known as the Poynting vector. The arrows show the direction of the Poynting vector averaged over the simulation, while the colours show its strength.

Difrakční mřížka na průchod – numerický výpočet

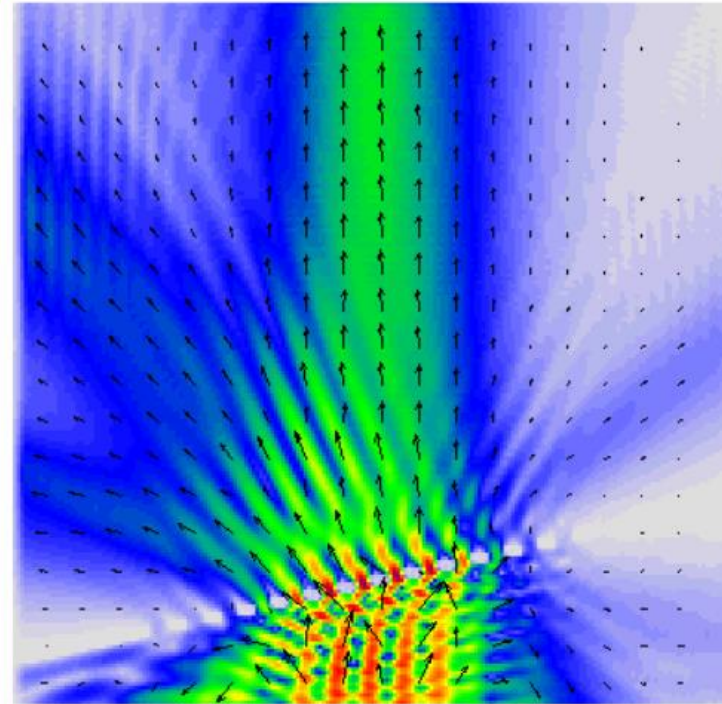
Na mřížku dopadají šikmo dvě vlny s různými frekvencemi

Electric field animation



This is an animation of the component of the electric field out of the plane of the page.

Time-averaged Poynting vector



The direction in which energy is travelling at any instant is proportional to the cross product of the electric and magnetic fields, known as the Poynting vector. The arrows show the direction of the Poynting vector averaged over the simulation, while the colours show its strength.

Difrakční rovnice

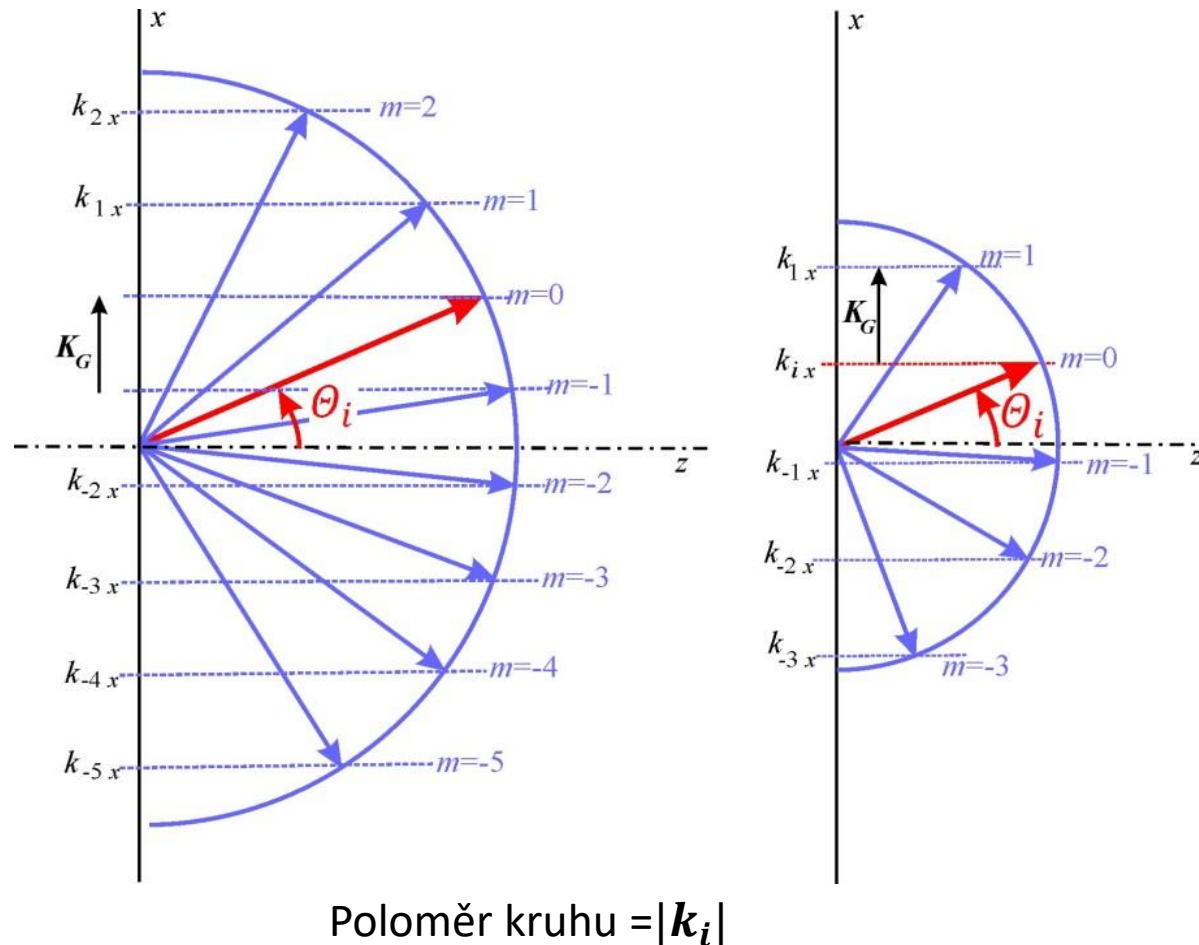
Dopadající vlna \mathbf{k}_i , difraktovaná vlna \mathbf{k}

$$\sin \vartheta_m - \sin \theta_i = \frac{\lambda}{h} m$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta_m = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_i + \frac{2\pi}{h} m,$$

$$k_{m,x} = k_{ix} + mK_{Gx} = k_{ix} + \frac{2\pi}{h} m$$

$$m = 0 \quad \sin \theta_i = \sin \vartheta_0, \theta_i = \vartheta_0$$

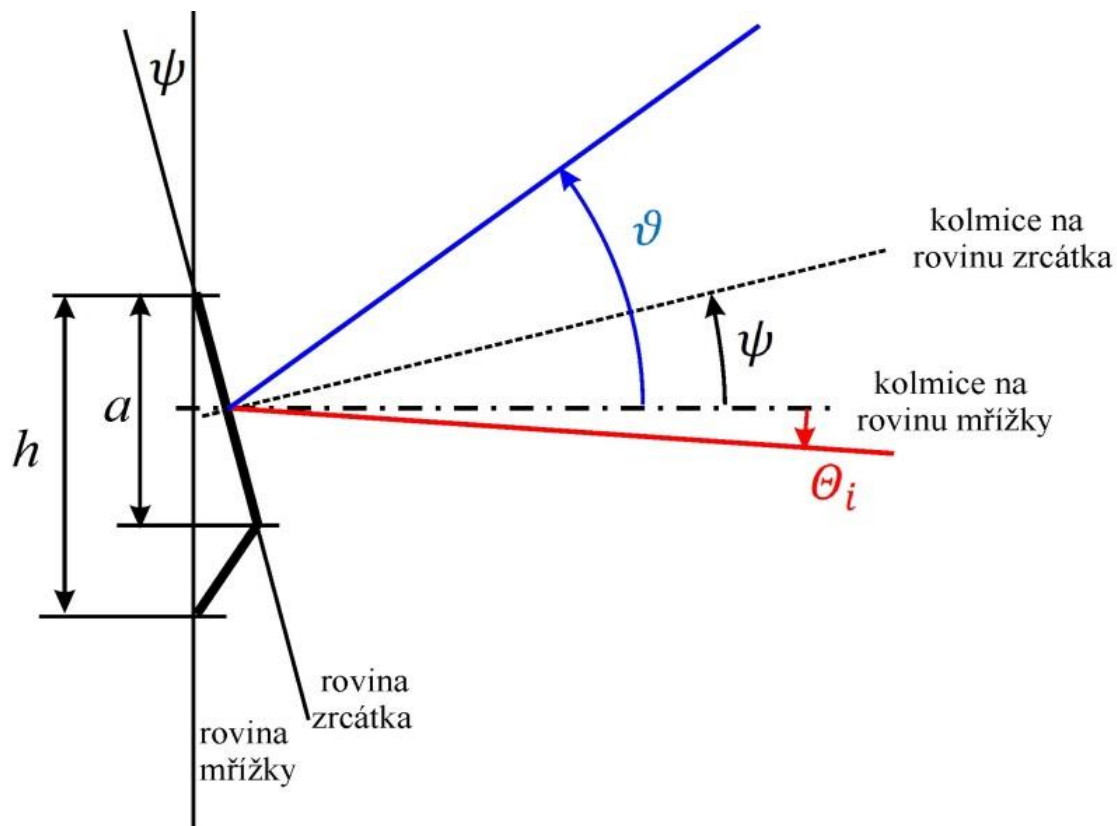


Nakreslená situace odpovídá velikému množství difraktujících štěrbin ($N \rightarrow \infty$, velmi úzká interferenční maxima), úhlu dopadu rovinné vlny $\theta_i = 22^\circ$ a $\varphi_i = \varphi = 0$. Připomeňme, že periodičita mřížky je popsána vektorem $\mathbf{K}_G = \left(\frac{2\pi}{h}, 0, 0\right)$. V levé části obrázku je vlnová délka $\lambda = 0,25h$ a do dalekého pole se jako téměř rovinné vlny mohou šířit dvě vlny s kladnými indexy $m = 1$ a 2 a pět vln se zápornými indexy $m = -1$ až -5 . V pravé části obrázku je náčrt pro větší vlnovou délku $\lambda = 0,42h$ (kratší vlnový vektor) a do dalekého pole se může šířit jediná vlna s kladným indexem $m = 1$ a tři vlny se zápornými indexy.

Difrakční mřížka na odraz s reliéfem -

Skalární popis difrakce na ploše zrcátka

●
P



$$u = -k[\sin \theta_i + \sin \vartheta - \tan \psi (\cos \theta_i + \cos \vartheta)]$$

$$I(P) \sim E(P) E^*(P) \propto a^2 \frac{\sin^2 \frac{au}{2}}{\left(\frac{au}{2}\right)^2}$$

má absolutní maximum pro $u = 0$. To znamená

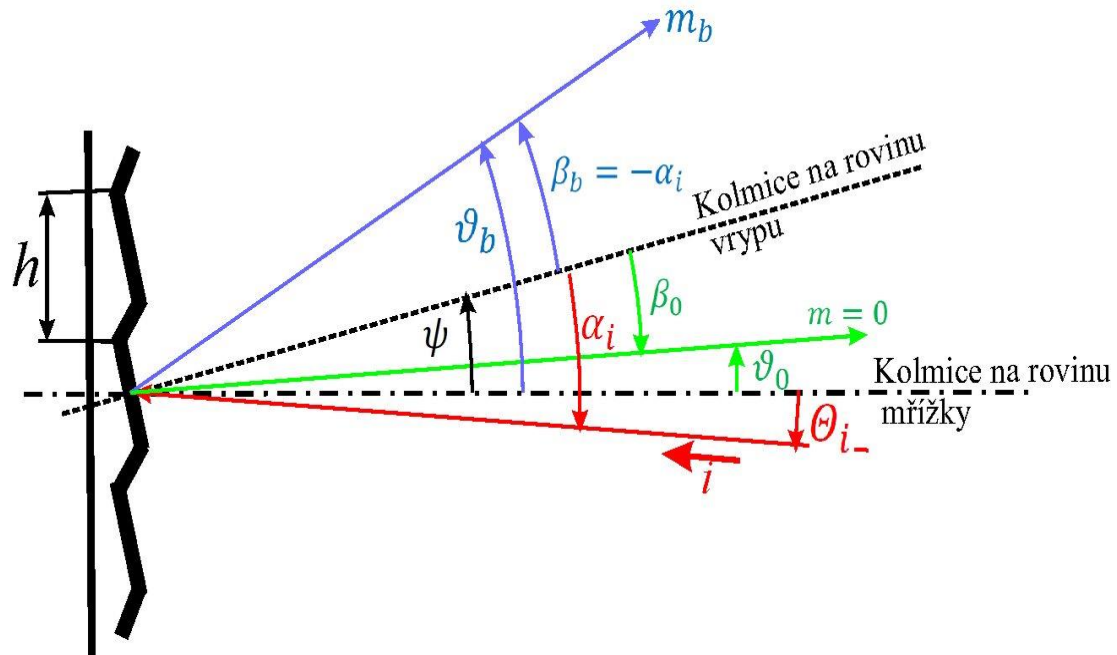
$$\sin \theta_i + \sin \vartheta = \tan \psi (\cos \theta_i + \cos \vartheta),$$

$$\tan \psi = \frac{\sin \frac{\theta_i + \vartheta}{2}}{\cos \frac{\theta_i + \vartheta}{2}} \quad \psi = \frac{\theta_i + \vartheta}{2}$$

Úhel maximální účinnosti difrakce.

$$\vartheta_b = 2\psi - \theta_i$$

Základní model mřížky na odraz s povrchovým reliéfem



Pro danou vlnovou délku λ_b lze nalézt takový úhel sklonu „zrcátka“ ψ vůči rovině mřížky, že směr maximální účinnosti difrakce a směr interferenčního řádu m určený mřížkovou rovnicí

$$h(\sin \vartheta_m + \sin \Theta_i) = m\lambda_b$$

se shodují.

$$\vartheta_b = \vartheta_m$$

Θ_i úhel dopadu dopadající vlny vzhledem ke kolmici na rovinu mřížky

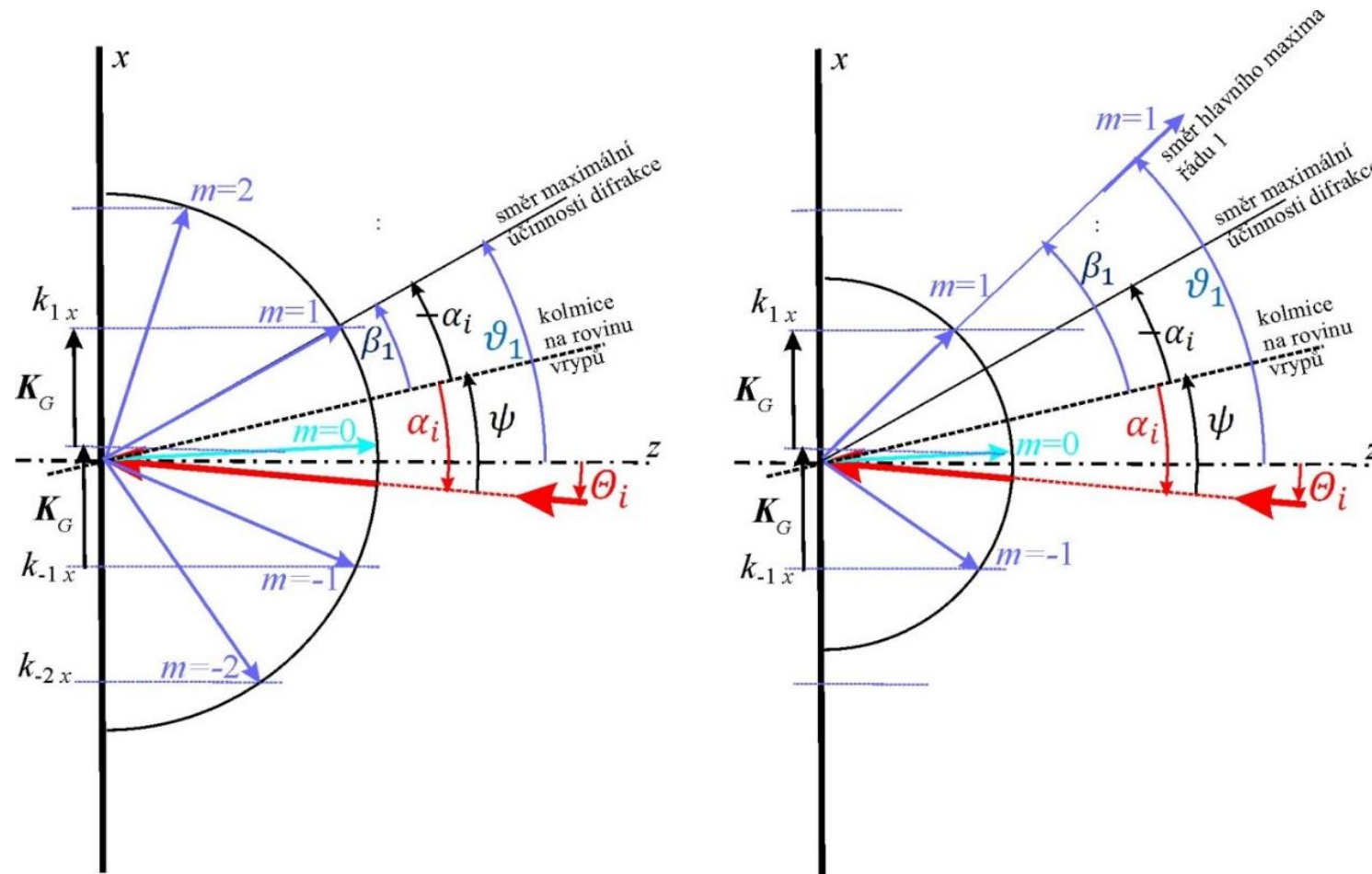
ϑ úhel difraktované vlny vzhledem ke kolmici na rovinu mřížky

ψ úhel mezi normálami k rovině mřížky a k rovině vrypu,

α_i úhel dopadu dopadající vlny vzhledem ke kolmici na rovinu vrypu

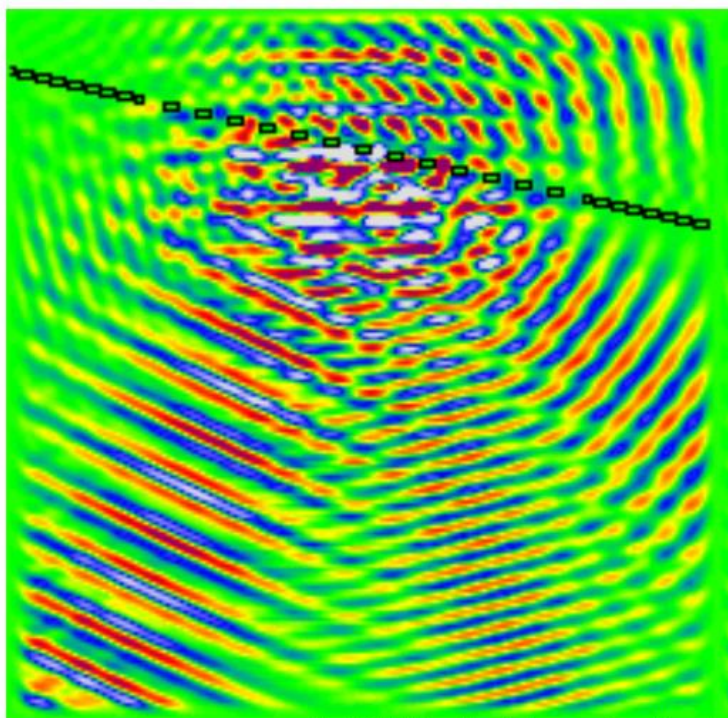
β úhel difraktované vlny vzhledem k normále na rovinu vrypu, index b („blaze“) znamená splnění podmínky maximální účinnosti difrakce $\beta_b = -\alpha_i$

Základní model mřížky na odraz s povrchovým reliéfem



Vlnové vektory dopadající a difraktovaných vln. Na obrázku vlevo je znázorněna situace, kdy v prvním řádu difrakce je splněna podmínka $\beta_1 = -\alpha_i$ pro maximální intenzitu difraktované vlny v prvním řádu. Pro jiné vlnové délky (na obr. vpravo kratší vlnové vektory) tato podmínka splněna není.

Difrakční mřížka na odraz – numerický výpočet



Total field (incident plus scattered) |

