PAVEL HLÍDEK

JAN FRANC

Tento učební text je určen pro studenty bakalářského studia fyziky na MFF UK jako podklad k přednášce NOFY022 – Fyzika III. Pokrývá témata probíraná na přednášce v akademickém roce 2021/2022.

# 1. Úvod – elektromagnetické vlny

Historicky se při pokusech o pochopení fyzikální podstaty světla střídavě prosazovaly dva základní koncepty – částicový a vlnový. V 17. století Sir Isaac Newton (1643-1727), který podstatně přispěl k rozvoji řady vědních oborů včetně optiky, předpokládal, že se světlo skládá z jednotlivých částic. Ve stejné době rozvinul Christiaan Huygens (1629-1695) vlnovou teorii světla. Postupně po bouřlivých diskusích začal vlnový model světla převažovat nad modelem částicovým. K tomu výrazně přispěl Thomas Young (1773-1829) svým slavným dvojštěrbinovým experimentem (1801), při kterém využil interferenci světla. Vlnový model definitivně potvrdil James Clerk Maxwell (1831-1879), který formuloval základní rovnice pro teorii elektromagnetického pole (1865) a rovněž predikoval existenci elektromagnetických vln, které se šíří rychlostí světla. O propojení vlastností světla s elektromagnetickou teorií a o propagaci této myšlenky se zasloužilo více vědců. Zde jmenujme Paula Drude a jeho učebnici (1900). Otázka fyzikální podstaty světla se tedy jevila jako vyřešená a uzavřená. Postupně se však objevovaly experimenty, které se pomocí pouhé vlnové teorie nedařilo objasnit. Mezi ně patřilo zejména měření spektra záření černého tělesa a existence prahu energie elektronů emitovaných z látky po ozáření světlem – vnější fotoelektrický jev. Přitom energie jednotlivých vyletujících elektronů závisí na frekvenci dopadajícího záření a nikoli na dopadajícím výkonu (Philipp Lenard, 1902). Na dopadajícím výkonu závisí počet vyletujících elektronů. V souladu s Planckovou hypotézou objasňující zákonitosti tepelného záření byly vlastnosti fotoelektrického jevu vysvětleny předpokladem, že světlo předává energii látce po dále nedělitelných porcích – kvantech (Albert Einstein, 1905), který za tento objev získal Nobelovu cenu v roce 1921. Vzhledem k tomu, že zjevně některé experimentální výsledky lze dobře popsat vlnovým modelem a jiné modelem částicovým (kvantovým), pracujeme často s modelem vlnově-částicového dualismu, který tuto skutečnost vystihuje. Hypotézu o vlnově – částicové dualitě (platící obecně, nejen pro elektromagnetické vlny – fotony) formuloval Louis-Victor de Broglie (1924, Nobelova cena 1929). Po vzniku kvantové mechaniky (1925) se začala rozvíjet i kvantová teorie elektromagnetického pole, jejíž součástí je kvantová optika.

Fyzikální realita „světla“ je komplikovaná. K vysvětlení vybraných jevů se užívají více či méně složité modely. Základním „objektem“, se kterým budeme v našich představách pracovat, je monochromatická, postupná, homogenní, netlumená, určitým způsobem polarizovaná, rovinná vlna [1]. Takový silně idealizovaný fiktivní „objekt“ by měl trvat nekonečně dlouho a tedy by měl být nekonečný ve směru šíření a časově dokonale stabilní (monochromatičnost).

[1] **Homogenní**: plochy konstantní amplitudy jsou totožné s rovinami konstantní fáze (vlnoplochami). Opakem jsou vlny nehomogenní, kde ve vlnoploše se amplituda mění.
**Netlumená**: amplituda vlny se nemění ve směru šíření. Opakem je vlna tlumená, kdy ve směru šíření amplituda klesá.
**Polarizovaná**: lineární polarizace znamená, že vektor elektrického pole kmitá v různých místech v jedné rovině. Další možností polarizace monochromatické vlny je kruhová nebo eliptická. Pojem nepolarizované světlo je statistický pojem vztahující se ke směsi různých vln. Pojem jedna monochromatická nepolarizovaná vlna nedává dobrý smysl.

Homogenita vlny (ve významu konstantní amplituda podél vlnoplochy) vede k požadavku na nekonečnost ve směrech kolmých na směr šíření. V tomto kurzu „Optika“ budeme používat převážně popis založený na klasické elektrodynamice, tj. na Maxwellových rovnicích. Pouze v závěru kurzu se dotkneme jevů, které v první polovině 20. století vedly k představám o energetických kvantech.

V této úvodní kapitole především shrneme některé vybrané poznatky z kurzu „Elektřina a magnetismus“, na které v „Optice“ navážeme.

## 1.2 Maxwellovy rovnice

Při popisu světla jako elektromagnetické vlny vyjdeme z Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru ve volném prostoru, ve kterém se mohou nacházet volné náboje a volné proudy. Tučně budeme značit vektorové veličiny. První divergenční rovnici zapišme jako

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\varepsilon_0}, \tag{1.1}$$

což rozepsáno do kartézských složek je

$$\frac{\partial E_x(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,y,z,t)}{\partial y} = \frac{\rho(x,y,z,t)}{\varepsilon_0}.$$

V dalším budeme $(\boldsymbol{r},t) = (x,y,z,t)$ většinou vynechávat, protože se bude jednat o lokální vztahy. V (1.1) je $\rho$ celková hustota náboje (rozměr A s m$^{-3}$) zahrnující jak náboj volných nosičů, tak polarizační náboj způsobený nehomogenní polarizací látky. Rovnice (1.1) ukazuje, že elektrické náboje jsou zdrojem vektorového elektrického pole $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$. Přesněji řečeno, jedná se o část elektrického pole označovanou jako pole zřídlové. Siločáry jsou orientované křivky vycházející z kladných nábojů a končící na záporných, přičemž vektory $\boldsymbol{E}$ jsou k těmto křivkám tečné.

Další divergenční rovnice je

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{1.2}$$

Rovnice (1.2) říká, že neexistují žádné magnetické náboje, ze kterých by vycházely siločáry magnetického pole. Magnetické siločáry jsou uzavřené křivky. Siločárou označujeme křivku, ke které je pole (v daném případě vektor $\boldsymbol{B}$) v daném místě tečnou.

Třetí Maxwellova rovnice je

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{1.3}$$

Rovnice (1.3) je formulací Faradayova zákona elektromagnetické indukce, tj. časová změna magnetické indukce $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ vyvolává pole elektrické. Ta popisuje tu část elektrického pole, kterou můžeme charakterizovat jako pole vírové, jehož siločáry jsou uzavřené křivky.

Čtvrtou rovnicí, která kompletuje popis elektromagnetického pole, je rovnice popisující Ampérův zákon, která v době, kdy se touto problematikou Maxwell začal zabývat, byla známa ve tvaru pro stacionární pole

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}, \tag{1.4}$$

kde $\boldsymbol{j}$ je vektor hustoty elektrického proudu vyvolaného pohybem nábojů (rozměr A $m^{-2}$). Tato rovnice byla pro nestacionární pole v rozporu s rovnicí kontinuity elektrického proudu (tj. se zákonem zachování elektrického náboje)

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

S využitím rovnice (1.4) a známé vektorové identity $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = 0$ dostáváme z rovnice (1.4)

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = 0,$$

což je skutečně v rozporu s rovnicí (1.5). Maxwell proto při své práci nad sjednocením teorie elektromagnetického pole doplnil elektrický proud o další člen, který se dnes nazývá Maxwellův posuvný proud ($\boldsymbol{j}_M$). Rovnici (1.4) upravíme a dostaneme

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_M).$$

Z doplněné rovnice dostaneme

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_M) = 0 \tag{1.5}$$

a tedy

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}_M = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon_0 \mathrm{div}\boldsymbol{E})}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right). \tag{1.6}$$

Pro Maxwellův posuvný proud pak platí

$$\boldsymbol{j}_M = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Úplná Maxwellova rovnice pro rotaci intenzity magnetického pole je konečně ve tvaru

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{1.7}$$

Doplnění Ampérova zákona o Maxwellův posuvný proud se ukázalo jako jedním z klíčových kroků pro odvození vlnové rovnice z Maxwellových rovnic (kap. 1.3). To byla velmi významná podpora názoru, že světlo je elektromagnetické vlnění. Uvedený diferenciální tvar Maxwellových rovnic je vhodný pro objemové hustoty. Plošné, lineární či bodové rozložení náboje vyžaduje doplnění, které zde nebudeme diskutovat. Podobně je tomu s proudem tekoucím v ploše nebo po křivce.

Maxwellovy rovnice doplňme o silové působení polí na diskrétní náboje $q$ pohybující se rychlostí $\mathbf{v}_q$ vyjádřené Lorentzovou silou

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_E + \boldsymbol{F}_B = q\big(\boldsymbol{E} + \mathbf{v}_q \times \boldsymbol{B}\big).$$

Diferenciálnímu tvaru Maxwellových rovnic, které obsahují objemové hustoty náboje a proudu, ovšem lépe odpovídá objemová hustota Lorentzovy síly (síla působící na jednotku objemu)

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_E + \boldsymbol{f}_B = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}.$$

Příslušné jednotky objemové hustoty síly jsou N m$^{-3}$.

## 1.3 Vlnová rovnice

Aplikujeme-li operátor rotace na rovnici (1.3), dostaneme

$$\text{rot rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial(\text{rot}\,\boldsymbol{B})}{\partial t} = \text{grad div}\,\boldsymbol{E} - \nabla^2\boldsymbol{E}, \tag{1.8}$$

kde $\nabla^2$ symbolizuje Laplaceův operátor. Alternativním označením Laplaceova operátoru je $\Delta$. Nejprve se omezíme na **případ vakua**, kdy je $\rho = 0,\ \boldsymbol{j} = 0$. Pak je div $\boldsymbol{E} = 0$ a z rovnic (1.7) a (1.8) dostaneme pro Laplaceův operátor působící na pole $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{1.9}$$

Připomeňme, že vektorová rovnice (1.9) zastupuje 3 rovnice pro jednotlivé složky. V kartézském souřadném systému můžeme rozepsat

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Tato rovnice je analogická **vlnové rovnici** známé z mechaniky

$$\nabla^2\boldsymbol{u} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}, \tag{1.10}$$

kde $\boldsymbol{u}$ je vektor výchylky mechanické vlny a v je velikost fázové rychlosti.

Porovnáním (1.9) a (1.10) dostaneme

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \tag{1.11}$$

kde dosazením dostaneme rychlost šíření vlny ve vakuu $c \cong 2{,}997 \times 10^8$ m s$^{-1}$.

V 19. století již bylo z řady experimentů zřejmé, že světlo má vlnovou, elektromagnetickou povahu. Jedním z pozorovaných jevů, které naznačovaly nějakou souvislost mezi magnetismem a světlem, byl Faradayův jev, který byl vysvětlen jako kruhový dvojlom indukovaný magnetickým polem. Rovněž byla poměrně dobře známá rychlost šíření světla. Ale teprve odvození vlnové rovnice (1.9) z Maxwellových rovnic jasně ukázalo, že světlo má charakter elektromagnetického vlnění s rychlostí šíření $c$ ve vakuu, která souhlasila s experimentálně známou rychlostí šíření světla.

### 1.3.1 Jednorozměrná vlnová rovnice

Nyní ukážeme, že každá funkce $f(z \pm \mathrm{v}t)$ je řešením jednorozměrné vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{1.12}$$

Označme $\xi = z - \mathrm{v}t$. Tento případ popisuje postupnou vlnu šířící se v kladném směru osy $z$. Pak je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\mathrm{v}\,\frac{\partial f}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

a dosazením do (1.12) dokážeme platnost tohoto vztahu. Analogickým postupem lze ukázat platnost vlnové rovnice i pro případ $\xi = z + \mathrm{v}t$, tedy pro postupnou vlnu šířící se v záporném směru osy $z$.

Každé řešení vlnové rovnice se nazývá vlnou. Pro základní popis šíření a interakce světla s látkami je nejvýznamnější postupná harmonická rovinná vlna, kterou lze zapsat např. jako

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0}\cos\,[k(z \pm \mathrm{v}t)] \tag{1.13}$$

pro případ šíření ve směru osy $z$. $\boldsymbol{E_0}$ je amplituda vlny. Zvolíme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ a nazveme jej velikost vlnového vektoru. Pro faktor $k$ je vhodné volit jednotky rad m$^{-1}$ (případně ° m$^{-1}$) což zajišťuje, že argument funkce cos je úhel. V soustavě SI je úhel považován za bezrozměrný a rozměr $k$ je m$^{-1}$. Potom se ovšem neodlišují jednotky veličin vlnočet $\frac{1}{\lambda}$ a vlnový vektor $\frac{2\pi}{\lambda}$. Podobná situace je mezi frekvencí $\nu = \frac{1}{T}$ (jednotky Hz $= \mathrm{s}^{-1}$) a kruhovou frekvencí $\omega = \frac{2\pi}{T}$, jednotky rad s$^{-1}$, v soustavě SI též s$^{-1}$.

Dalšími úpravami vztahu (1.13) dostaneme alternativní formy zápisu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0}\cos(kz \pm k\mathrm{v}t) = \boldsymbol{E_0}\cos\left(kz \pm \frac{2\pi\,\mathrm{v}t}{\lambda}\right) = \boldsymbol{E_0}\cos\left(kz \pm \frac{2\pi\,t}{T}\right) = \\ = \boldsymbol{E_0}\cos(kz \pm \omega\,t),\end{aligned} \tag{1.14}$$

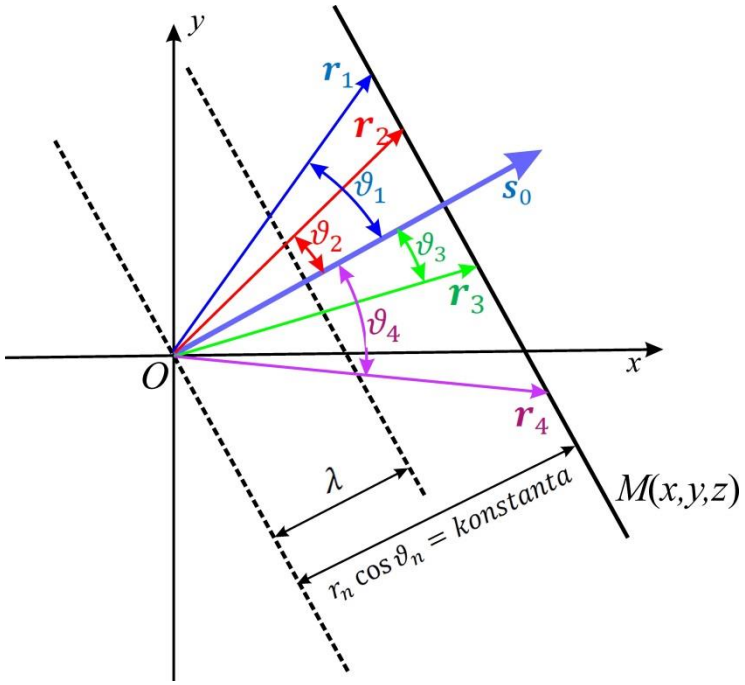
kde $T = \frac{\lambda}{\mathrm{v}}$ je perioda vlny (doba kmitu) a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je úhlová frekvence.

## 1.3.2 Vlna v třírozměrném prostoru

V obecném 3D případě lze harmonickou rovinnou vlnu zapsat ve formě

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} \cos\ (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \pm \omega t \pm \delta). \tag{1.15}$$

Argument $\Phi(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \pm \omega t \pm \delta$ se nazývá **fáze** vlny. Veličina $\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{s_0}$ se nazývá **vlnový vektor** a $\boldsymbol{s_0}$ je jednotkový vektor ve směru $\boldsymbol{k}$, $\delta$ je počáteční náběh fáze vlny v bodě $\boldsymbol{r} = 0$ a v čase $t = 0$. Položíme-li $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = konst.$, představuje množina polohových vektorů $\boldsymbol{r}$ rovinu kolmou na směr šíření daný vektorem $\boldsymbol{k}$ (resp. jednotkovým vektorem $\boldsymbol{s_0}$), obr. 1.1. Vlně popsané vztahem (1.15) se proto říká **rovinná vlna**. Faktor $\pm\omega t$ popisuje šíření vlny v čase ve směru vektoru $\boldsymbol{k}$ (znaménko -) nebo proti jeho směru (znaménko +).



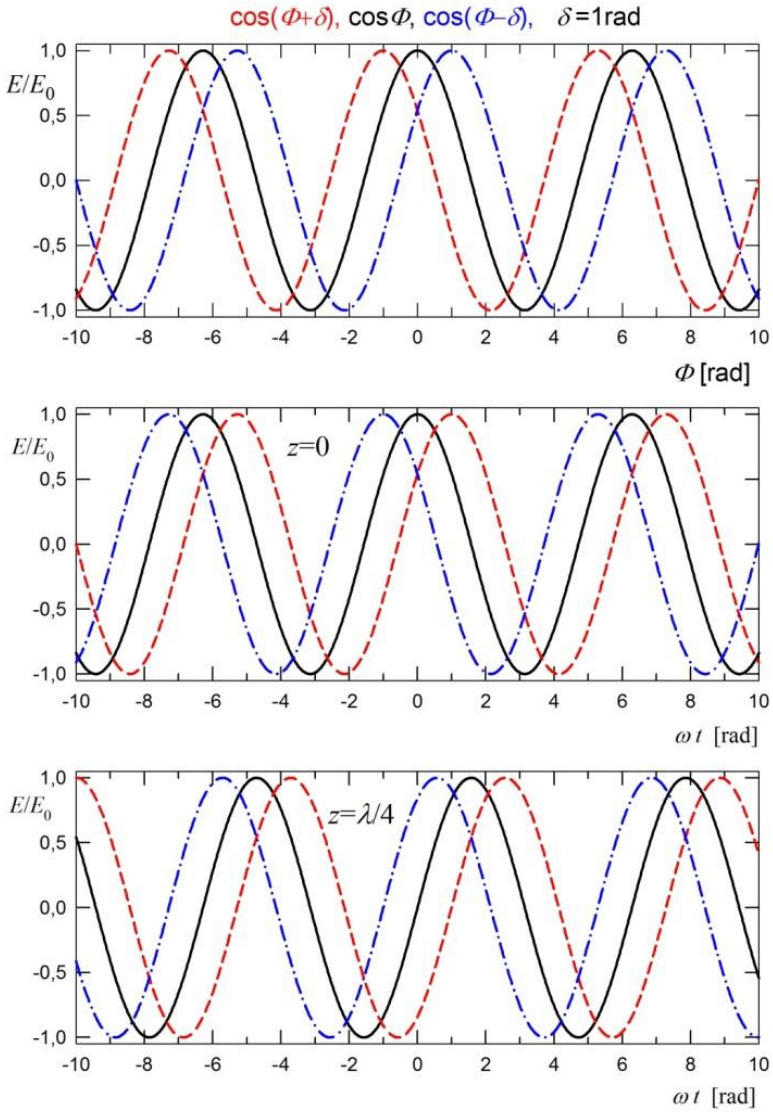

Obr. 1.1 Znázornění řezů rovinných vlnoploch pro vlnu s vlnovým vektorem $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, 0) = k\,\boldsymbol{s}_0$. Čárkovaně je zakreslen řez vlnoplochou procházející počátkem souřadné soustavy a řez další vlnoplochou vzdálenou od počátku o vlnovou délku $\lambda$. Barevně jsou zakresleny čtyři polohové vektory reprezentující obecný polohový vektor bodu na vlnoploše $M$. Vzdálenosti $r_i$ různých bodů vlnoplochy $M$ od počátku v jednom libovolném čase splňují podmínku $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i = k_x x_i + k_y y_i = k r_i \cos\vartheta_i = \mathrm{v}t$. Vlnová délka je $\lambda = \mathrm{v}T$, $T$ je doba kmitu.

S využitím komplexní proměnné lze (1.15) zapsat jako $\boldsymbol{E} = Re\{\widetilde{\boldsymbol{E}}\}$, kde

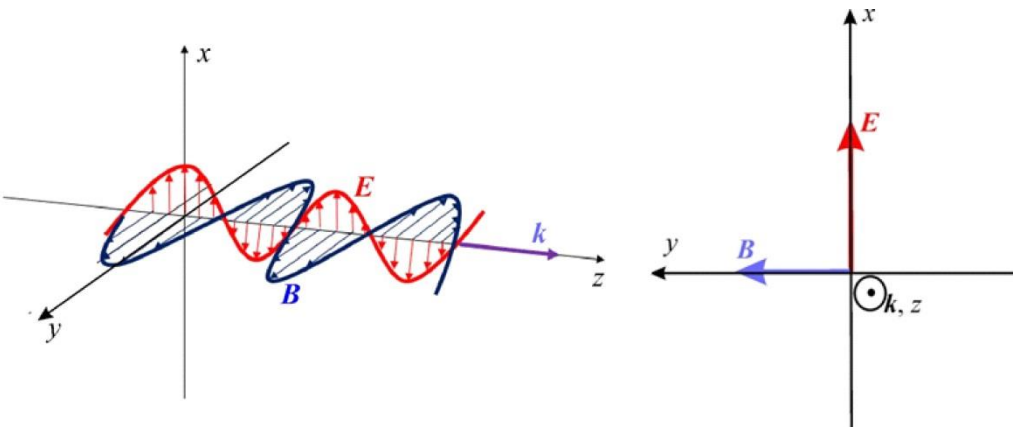
$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_0\, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\pm\omega t\pm\delta)}. \tag{1.16}$$

V případě vztahu (1.16) může být amplituda $\boldsymbol{E_0}$ reálná. Náběh fáze $\pm\delta$ je možné zahrnout do amplitudy, která se tím stane komplexní

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_0 = \boldsymbol{E}_0 e^{\pm i\delta}. \tag{1.17}$$




Obr. 1.2 V horní části obrázku jsou znázorněny závislosti poměru $\frac{E}{E_0}$ na fázi $\Phi = kz - \omega t = \frac{2\pi}{\lambda}z - \frac{2\pi}{T}t$ (černě), na fázi $\Phi + \delta$ (červeně) a na fázi $\Phi - \delta$ (modře). Prostřední část zachycuje časovou závislost $\frac{E}{E_0}(t)$ v místě $z = 0$ a spodní část časový průběh v místě $z = \frac{\lambda}{4}$, kam maxima doběhnou zpožděně o $\frac{T}{4}$. Prohození pořadí křivek červená – černá – modrá je způsobeno záporným znaménkem u $\omega t$.




Obr. 1.3. Vzájemná orientace vektorů v postupné, lineárně polarizované, rovinné vlně v jeden časový okamžik. Důkaz toho, že oba vektory kmitají ve fázi, bude proveden v další části, rovnice (1.34) a (1.35).

## 1.4 Vlnová rovnice v materiálovém prostředí

Při průchodu elektromagnetické vlny v optickém oboru spektra reaguje materiálové prostředí v mnoha případech převážně na elektrickou složku vlny vytvářením dipólů vychylováním elektronových oblaků z rovnovážných poloh. Dominanci působení elektrické složky lze ukázat z Lorentzovy síly porovnáním velikosti elektrické a magnetické složky

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_E + \boldsymbol{F}_B = q(\boldsymbol{E} + \mathbf{v}_e \times \boldsymbol{B}),$$

kde $\mathbf{v}_e$ je rychlost elektronu a

$$|\boldsymbol{F}_B| = |q\mathrm{v}_e B \sin\alpha|, \qquad |\boldsymbol{F}_B|_{max} = |q\mathrm{v}_e B|, \;\; |\boldsymbol{F}_E| = |qE|.$$

Dále využijeme vztah $B = \frac{E}{\mathrm{v}}$ (rovnice1.35), kde v je rychlost šíření elektromagnetické vlny v látce, a pro poměr sil dostaneme

$$\frac{|\boldsymbol{F}_B|_{max}}{|\boldsymbol{F}_E|} = \frac{\mathrm{v}_e}{\mathrm{v}}.$$

Obvykle je rychlost elektronu mnohem menší než rychlost šíření elektromagnetické vlny. Pak můžeme při popisu interakce elektromagnetického záření s látkou magnetickou část interakce v řadě případů v oboru optických frekvencí zanedbat. V následujícím textu budeme užívat **aproximaci „nemagnetického" prostředí** $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \cong \mu_0 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$.

Když látka reaguje na elektrickou část Lorentzovy síly coulombickou interakcí, dochází ke vzniku různých dipólů (např. dipól vzniklý vzájemným posunem záporně nabitého elektronového obalu vzhledem ke kladně nabitému atomovému jádru, posunem kladných a záporných nábojů v materiálech s iontovou nebo částečně iontovou vazbou apod.). Pole v látce se v prostoru na nanoskopických vzdálenostech rychle mění. „Mikroskopické" Maxwellovy rovnice jsou též známy jako **Lorentzovy rovnice**, které formálně popisují působení lokálních polí na částice tvořící látku. Vhodným časovým a prostorovým zprůměrováním polí vystupujících v Lorentzových rovnicích můžeme rozmazat atomární strukturu látky a

dostaneme tak fenomenologický **model spojitého prostředí**, který popisuje pole makroskopicky. V dalším použijeme tento fenomenologický popis na případ elektromagnetických vln. Jedním z výsledků je závislost rychlosti šíření monochromatické vlny na permitivitě materiálu $\varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)$ a případně na permeabilitě $\mu_0\mu_r(\omega)$. **Mikroskopický** model šíření elektromagnetických vln v látce je podstatně složitější a je založen na interferenci dopadající vlny a kulových vln vyzařovaných mikroskopickými vybuzenými kmitajícími dipóly, přičemž všechny tyto komponenty se šíří rychlostí $c$ a výsledná (experimentálně měřitelná) rychlost složené vlny je výsledkem interference těchto složek.

K odvození **Maxwellových rovnic a vlnové rovnice v modelu spojitého prostředí** se vztahují následující úpravy. Rozepíšeme Maxwellovy rotační rovnice

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{1.18}$$

a v aproximaci nemagnetického prostředí je

$$\begin{aligned}\text{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\left(\boldsymbol{j}_f + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \\ = \mu_0\,\boldsymbol{j}_f + \mu_0\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\left(\boldsymbol{j}_f + \boldsymbol{j}_P + \boldsymbol{j}_M\right) = \mu_0\boldsymbol{j}_f + \mu_0\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Hustotu elektrického proudu $\boldsymbol{j}$ jsme rozdělili na proud volných nosičů $\boldsymbol{j}_f$ a polarizační proud vyvolaný časovou změnou vektoru polarizace $\boldsymbol{j}_P = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$.

Označili jsme

$$\boldsymbol{j}_P + \boldsymbol{j}_M = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

Spojením členů obsahujících proudové hustoty Maxwellova posuvného proudu $\boldsymbol{j}_M$ a polarizačního proudu jsme dospěli k veličině elektrická indukce $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$.

Aplikací operátoru rot na Maxwellovu rovnici dostaneme

$$\text{rot rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial(\text{rot}\,\boldsymbol{B})}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{j}_f}{\partial t} - \mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \text{grad div}\,\boldsymbol{E} - \nabla^2\boldsymbol{E}, \tag{1.20}$$

kde

$$\text{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho_P). \tag{1.21}$$

Elektrický náboj $\rho$ jsme rozdělili na náboj volných nosičů $\rho_f$ a polarizační (vázaný) náboj $\rho_P$. Z rovnice (1.20) dostaneme

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial \boldsymbol{j}_f}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} + \frac{\text{grad}\,\rho_f}{\varepsilon_0} + \frac{\text{grad}\,\rho_P}{\varepsilon_0}. \tag{1.22}$$

Abychom spojili $\rho_P$ a $\boldsymbol{P}$, napíšeme rovnici kontinuity pro náboje spojené s polarizací

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{j}_P &= -\frac{\partial \rho_P}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{P}}{\partial t}, \\ \rho_P &= -\operatorname{div} \boldsymbol{P}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Dostáváme vlnovou rovnici

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{j}_f}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{P} + \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \rho_f. \tag{1.24}$$

Rovnice (1.24) je obecnou vlnovou rovnicí vyplývající z „makroskopických“ Maxwellových rovnic. Zdůrazněme, že tato rovnice není vázána na materiálové vztahy a tedy neobsahuje materiálové parametry typu susceptibilita, permitivita, permeabilita či vodivost, které jsou přinejmenším frekvenčně závislé. Podobně můžeme diskutovat magnetické veličiny. Rovnici (1.24) pak můžeme upravovat s přihlédnutím k předpokladům o materiálových vztazích. Poznamenejme, že nenulový volný proud $\boldsymbol{j}_f$ může téci i v elektricky neutrálním prostředí, kde $\rho_f = \rho_f^+ - \left|\rho_f^-\right| = 0$, když hustoty kladných a záporných nábojů jsou nenulové a mohou přispívat k nenulovému proudu.

V dalším budeme obvykle předpokládat homogenní, izotropní prostředí[2] a slabé působící elektrické pole, pokud nebude řečeno jinak. Dále můžeme předpokládat:

a) Materiál „bez paměti“ (tj. s okamžitou odezvou, z čehož plyne bezfrekvenční závislost susceptibility $\chi$), tj. materiál bez **disperze** a beze ztrát. To je platné ve vakuu, kde polarizace $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$.

b) Všechny veličiny se mění harmonicky s kruhovou frekvencí $\omega$, tj. $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H} \propto e^{-i\omega t}$, jsou monochromatické. Za uvedených předpokladů (izotropie a slabé pole) můžeme předpokládat jednoduchý lineární vztah mezi vektory polarizace a elektrického pole

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t),$$

kde susceptibilita $\chi(\omega)$ je skalární veličinou a vektory $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)$ a $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ jsou rovnoběžné. Prostorová lokálnost (polohový vektor $\boldsymbol{r}$ stejný na obou stranách rovnice) znamená, že neuvažujeme **prostorovou disperzi**. O některých běžných typech modelových materiálových vztahů je stručný přehled v kapitolách 10 - 12. Uvedený typ materiálových vztahů dostaneme v kapitole 12 - „Absorpce a index lomu – interakce světla s látkou“ v Lorentzově modelu, který uvažuje látku jako soubor harmonických oscilátorů.

Vlastnosti látek absorbujících elektromagnetickou energii jsou téměř výhradně popisovány komplexními parametry, jako jsou již zmíněné susceptibilita, permitivita nebo vodivost. Z této skutečnosti plyne důležitost komplexního formalismu i při popisu vln, pro které je základním

[2] Homogenní prostředí znamená, že materiálové parametry nezávisí na poloze. Izotropní zde znamená, že parametry důležité pro šíření vln nezávisí na směru šíření vlny.

východiskem komplexní index lomu. Např. fázový posuv mezi vektory $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ a $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ lze popsat tak, že $\chi(\omega)$ je komplexní. „Nemagnetické“ prostředí je popsáno bezdisperzním vztahem

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t).$$

Dále můžeme předpokládat i lineární vztah mezi proudem volných nosičů $\boldsymbol{j}_f$ a elektrickým polem (Ohmův zákon) s vodivostí $\sigma(\omega)$ jako koeficientem úměrnosti

$$\boldsymbol{j}_f = \sigma(\omega)\boldsymbol{E}\,.$$

Jakmile do vlnové rovnice umístíme frekvenčně závislé materiálové parametry $\chi(\omega), \varepsilon_r(\omega), \sigma(\omega)$, popisujeme monochromatický děj. Chceme-li popisovat obecnější závislosti, musíme časové průběhy rozdělit na monochromatické složky. K tomu slouží matematický aparát Fourierových transformací, který spočte „váhové“ koeficienty pro jednotlivé monochromatické složky. Např. pokud popisujeme šíření nějakých pulzů látkovým prostředím, provedeme fourierovský spektrální rozklad vlny vstupující do prostředí, jednotlivé spektrální složky (monochromatické vlny) necháme nezávisle na sobě projít prostředím a na výstupu tyto složky sečteme. Právě spojení Fourierových transformací s vlastnostmi monochromatických vln je účinným nástrojem pro řešení mnoha úloh.

Vraťme se k vlnové rovnici (1.24) pro případ dielektrika bez volných nábojů a proudů ($\rho_f = 0,\ \boldsymbol{j}_f = \boldsymbol{0}$), pro který dostaneme

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{\operatorname{grad}\rho_f}{\varepsilon_0} + \mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{P} + \mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}. \tag{1.25}$$

Případ $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{P} \neq 0$ je důležitý v anizotropních materiálech, kdy vektory $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{P}$ nejsou rovnoběžné.

Pokud je $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{P} = 0$, a tudíž i $\operatorname{grad}\rho_P = -\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{P} = 0$, rovnici (1.25) můžeme dále upravit

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.26}$$

S využitím vztahů $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\chi(\omega)\boldsymbol{E}$, kde jsme zavedli relativní permitivitu $\varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega)$, dostaneme pro lineární, izotropní a monochromatický případ

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \varepsilon_0\mu_0\chi(\omega)\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \nabla^2\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r(\omega)\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} =$$

$$= \nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{\mathrm{v}(\omega)^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.27}$$

Pro fázovou rychlost šíření vlny v homogenním, izotropním, neabsorbujícím ($\varepsilon_r$ reálné) a nemagnetickém dielektriku ($\mu_r = 1$) pak zřejmě platí

$$\mathrm{v}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r(\omega)}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} = \frac{c}{n(\omega)}, \tag{1.28}$$

kde jsme zavedli **index lomu** $n(\omega)$ jako poměr mezi rychlostí šíření elektromagnetické vlny ve vakuu a v látce popsané reálnou relativní permitivitou $\varepsilon_r$. Velikost vlnového vektoru je přímo úměrná indexu lomu a vlnová délka v materiálu je nepřímo úměrná indexu lomu

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)} = \frac{c}{\mathrm{v}(\omega)}, \qquad k(\omega) = \frac{n(\omega)\,\omega}{c}, \qquad \lambda_{látka}(\omega) = \frac{\lambda_{vakuum}(\omega)}{n(\omega)}. \tag{1.29}$$

V dalším textu budeme pro zkrácení zápisu označovat $\lambda_{látka} = \lambda$, $\lambda_{vakuum} = \lambda_0$.

Dále ukážeme, že v **homogenní[3] rovinné vlně** platí vzájemná kolmost vektorů $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{k}$ (resp. $\boldsymbol{s}_0$).

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \pm \omega t = \frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{r} - \frac{2\pi}{T}t = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{r} - \frac{\lambda}{T}t\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{v}t). \tag{1.30}$$

Označme $\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{v}t = \xi$. Dále předpokládejme, že máme elektromagnetickou vlnu popsanou nějakými funkcemi argumentu $\xi$ , tj. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\xi)$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\xi)$. Podstatná je závislost složek pole na jediném argumentu $\xi$, tedy v ploše $\xi = konst.$ jsou i tyto složky konstantní a vlna je homogenní.

Vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{r} = s_{0x}x + s_{0y}y + s_{0z}z$, platí pro funkci $f(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{v}t) \equiv f(\xi)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = s_{0x}\frac{\partial f}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = s_{0y}\frac{\partial f}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = s_{0z}\frac{\partial f}{\partial \xi}, \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \\ &= \left(s_{0y}\frac{\partial E_z}{\partial \xi} - s_{0z}\frac{\partial E_y}{\partial \xi},\ s_{0z}\frac{\partial E_x}{\partial \xi} - s_{0x}\frac{\partial E_z}{\partial \xi},\ s_{0x}\frac{\partial E_y}{\partial \xi} - s_{0y}\frac{\partial E_x}{\partial \xi}\right) = \\ &= \boldsymbol{s}_0 \times \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi}.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Rovnici (1.32) pak můžeme psát jako

$$\boldsymbol{s}_0 \times \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{1.33}$$

Její časovou integrací v pevném místě $d\xi = -\mathrm{v}\,dt$ dostaneme

$$\boldsymbol{s}_0 \times \boldsymbol{E} = \mathrm{v}\boldsymbol{B}. \tag{1.34}$$

[3] Pojem homogenní vlna označuje, že amplituda kmitů je stejná po celé vlnoploše, kde je podle definice stejná také fáze.

Vynásobením rovnice (1.34) velikostí vlnového vektoru $k$ dostaneme rovnici $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B}$, kterou budeme využívat v dalším textu.

Z rovnice (1.34) plyne pro velikosti vektorů

$$E = \mathrm{v}B. \tag{1.35}$$

Oba vektory v neabsorbujícím dielektriku kmitají ve fázi. Ve vakuu je $\mathrm{v} = c$. Integrační konstantu jsme bez újmy na obecnosti položili rovnou nule, protože představuje konstantní příspěvek $\boldsymbol{B}_0$ k magnetickému poli $\boldsymbol{B}$, který nemá žádný vliv na šíření elektromagnetické vlny, protože $\frac{\partial \boldsymbol{B}_0}{\partial t} = 0$.

Z vlastností vektorového součinu a rovnice (1.34) pak vyplývá, že vektor $\boldsymbol{B}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{s}_0$ a $\boldsymbol{E}$.

Analogicky vede Maxwellova rovnice v homogenním, izotropním, nemagnetickém a neabsorbujícím dielektriku

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.38}$$

ke vztahu

$$\boldsymbol{s}_0 \times \boldsymbol{B} = -\frac{1}{\mathrm{v}} \boldsymbol{E}. \tag{1.39}$$

Z tohoto vztahu tedy plyne, že vektory $\boldsymbol{s}_0$ a $\boldsymbol{E}$ jsou rovněž navzájem kolmé. Ze vztahů (1.34) a (1.39) je tedy zřejmé, že vektory $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{s}_0$ jsou v rovinných homogenních vlnách navzájem kolmé a tvoří pravotočivý systém. Tento závěr platí v případě platnosti vlnové rovnice (1.27), tedy pro homogenní, izotropní, nemagnetické prostředí bez volných nábojů a proudů, což samozřejmě zahrnuje i vakuum.

Protože rovinné homogenní vlny jsou používány v mnoha modelech pro popis různých jevů spojených s elektromagnetickými vlnami, může vzniknout dojem, že příčnost je obecnou vlastností elektromagnetických vln. Není tomu tak. Ve vodivých nebo nehomogenních prostředích, kdy je nutno použít obecnějších tvarů vlnové rovnice (1.23) nebo (1.24), jsou možné situace rozmanitější a složitější. Vektory $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{s}_0$ nemusí být obecně navzájem kolmé ani v izotropním materiálu, dokonce ani ve vakuu. Důležitou roli hrají okrajové podmínky pro řešení vlnových rovnic, např. evanescentní vlny v popisu totální reflexe.

Ve formulaci pro vektor elektrického pole pro prostorovou oblast, ve které se nenacházejí zdroje vlny a je z hlediska parametrů prostředí homogenní, je vlnová rovnice (1.27)

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{\mathrm{v}(\omega)^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = 0\,. \tag{1.40}$$

Její řešení uvažujeme ve tvaru součinu prostorové závislosti a časové závislosti (separace proměnných prostor, čas), v monochromatickém případě

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E_r}(\boldsymbol{r})f(t) = \boldsymbol{E_r}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\omega t}.$$

Pak pro prostorovou závislost $\boldsymbol{E_r}(\boldsymbol{r})$ dostáváme pro případ homogenního prostředí, kdy velikost vlnového vektoru $k = {}^{\omega}/_{c}\, n$ na poloze nezávisí, vektorovou diferenciální rovnici

$$\nabla^2 \boldsymbol{E_r}(\boldsymbol{r}) + k^2\, \boldsymbol{E_r}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}\,. \tag{1.41}$$

Pro její obecné řešení jsou důležité okrajové podmínky. Bezčasovou rovnici (1.41) nazýváme homogenní (tj. s nulovou pravou stranou) **Helmholtzova rovnice**

Dosazením se můžeme přesvědčit, že v obzvlášť jednoduchém případě rovinná vlna ve volném prostoru

$$\boldsymbol{E_r}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E_0} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

skutečně Helmholtzovu rovnici splňuje.

V řadě případů je vektorový popis složitý a mnohdy je jednodušší pracovat se skalární aproximací, kdy vlnovou funkci označme $\psi(\boldsymbol{r},t)$

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}\,. \tag{1.42}$$

V monochromatickém případě opět

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \varphi(r)\, e^{-i\omega t}$$

a

$$\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}) + k^2\, \varphi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}\,,$$

což je skalární Helmholtzova rovnice. V Poznámce P1 se přesvědčíme, že skalární popis kulové vlny vyhovuje skalární vlnové rovnici a tedy i skalární Helmholtzově rovnici.

## 1.5. Energie postupné rovinné monochromatické vlny

V další části se budeme zabývat energií pole a přenášeným výkonem, které jsou spojeny s elektromagnetickou vlnou. Objemovou hustotu elektrické energie v neabsorbujícím prostředí ($\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{D}$ kmitají ve fázi) můžeme psát jako

$$u_E(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r(\omega)E^2(\boldsymbol{r},t). \tag{1.43}$$

Ve vakuu je $\varepsilon_r = 1$ a $u_E(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(\boldsymbol{r},t)$, (jednotky J m$^{-3}$). V dalším budeme zdůraznění lokálnosti $(\boldsymbol{r},t)$ opět vynechávat.

Podobně pro magnetickou složku v „nemagnetickém“ materiálu platí (stejně jako ve vakuu)

$$u_B = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{1}{2\mu_0}B^2. \tag{1.44}$$

V lineárním „nemagnetickém“ prostředí je

$$B = \frac{E}{\mathrm{v}(\omega)} = E\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)\mu_0},$$

$$B^2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)\mu_0 E^2,$$

z čehož dostaneme

$$u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)E^2 = u_E. \tag{1.45}$$

Ve vakuu a v neabsorbujícím dielektriku nese elektrická a magnetická část vlny stejnou energii. Celkově pro hustotu energie vlny dostaneme

$$u = u_E + u_B = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)E^2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)\,\mathrm{v}(\omega)\,EB. \tag{1.46}$$

V oboru optických frekvencí ($\sim 10^{15}\mathrm{s}^{-1}$) mají praktický význam časové střední hodnoty $u$, tj. $\langle u\rangle_T$, protože žádný detektor v optické oblasti spektra nemá tak rychlou časovou odezvu, aby změny $E, B$ v čase mohl sledovat. Detektor sleduje časové střední hodnoty energie záření, které na něj dopadá za nějakou dobu (např. za dobu určenou časovou odezvou detektoru). Středování je možné provádět pro periodické děje přes periodu vlny $T$ nebo obecněji přes časovou konstantu odezvy detektoru.

V případě postupné, homogenní, netlumené, monochromatické, **lineárně polarizované** rovinné vlny šířící se ve směru $z$ pak můžeme psát [4]

$$\langle u_E(z,t)\rangle_T = \langle u_B(z,t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2 \cos^2(kz-\omega t)dt = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2, \tag{1.47}$$

a celkově pro hustotu energie záření pro tento typ vlny

$$U = \langle u\rangle_T = \langle u_E\rangle_T + \langle u_B\rangle_T = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n^2 E_0^2. \tag{1.48}$$

Při použití komplexní symboliky dostaneme pro monochromatickou vlnu (1.16) vztah

$$\langle u_E\rangle_T = I = \frac{1}{2}\langle \mathrm{Re}\{\widetilde{\boldsymbol{E}}\}\cdot \mathrm{Re}\{\widetilde{\boldsymbol{D}}\}\rangle_T = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r \langle \frac{1}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{E}} + \widetilde{\boldsymbol{E}}^*\right)\cdot \frac{1}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{E}} + \widetilde{\boldsymbol{E}}^*\right)\rangle_T =$$

[4]

$$\langle f(z,t)\rangle_T = \langle \cos^2(kz-\omega t)\rangle_T = \frac{1}{4}\langle \left[e^{i(kz-\omega t)} + e^{-i(kz-\omega t)}\right]^2\rangle_T =$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2ikz}\langle e^{-2i\omega t}\rangle_T + 2 + e^{-2ikz}\langle e^{2i\omega t}\rangle_T\right] = \frac{1}{2},$$

protože $\langle e^{-2i\omega t}\rangle_T = \langle e^{2i\omega t}\rangle_T = 0$, a též

$$\langle \sin(\omega t)\rangle_T = \langle \sin 2\omega t\rangle_T = \langle \cos \omega t\rangle_T = \langle \cos 2\omega t\rangle_T = 0.$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\langle \widetilde{\boldsymbol{E}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{E}}^* \rangle_T \,, \tag{1.49}$$

kdy jsme využili výsledků středování přes periodu harmonických funkcí

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{E}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{E}} \rangle_T = E_0^2 \langle e^{2i\omega t} \rangle_T = 0 \,,$$

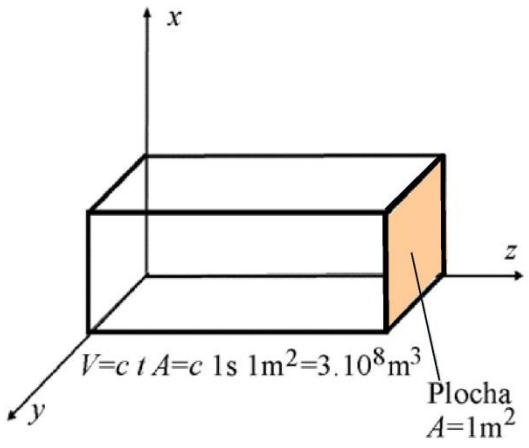
$$\langle \widetilde{\boldsymbol{E}}^* \cdot \widetilde{\boldsymbol{E}}^* \rangle_T = E_0^2 \langle e^{-2i\omega t} \rangle_T = 0.$$

V souladu s reálným výpočtem - rovnice (1.47) – pak dostaneme

$$\langle u_E \rangle_T = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\langle \widetilde{\boldsymbol{E}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{E}}^* \rangle_T = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2.$$

Podobným způsobem lze postupovat i při výpočtu časové střední hodnoty hustoty magnetické energie. Vedle objemové hustoty energie má v případě postupných vln význam i výkon dopadající na jednotku plochy. Předpokládejme, že postupná, monochromatická, lineárně polarizovaná, rovinná vlna se šíří ve vakuu ($\varepsilon_r = 1$) ve směru $z$ rychlostí $c$. Plochou $A = 1\mathrm{m}^2$ umístěnou kolmo na osu z, proteče za $t = 1\mathrm{s}$ energie vlny s objemovou hustotou $u$, která je obsažena v objemu $V = Act$ (obr. 1.4), tedy zářivý výkon (energie za jednotku času)

$$\langle u\, c \rangle_T = \langle \varepsilon_0 E^2 c \rangle_T \,. \tag{1.50}$$




Obr.1.4 Objem $V = ctA$, ve kterém se nachází záření, které projde plochou $1\mathrm{m}^2$ za 1s. Postupná rovinná vlna se šíří ve směru osy $z$.

Vypočtěme nyní Poyntingův vektor (John Poynting, 1883) $\boldsymbol{S}$ a jeho časovou střední hodnotu pro lineárně polarizovanou vlnu ve vakuu, kde vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ jsou na sebe kolmé,

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}, \qquad S = E\,H = \frac{E\,B}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c},$$

$$\langle S \rangle_T = \frac{1}{2}\frac{{E_0}^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2}\frac{{E_0}^2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\mu_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2 = \langle u\, c \rangle_T. \tag{1.51}$$

Pro Poyntingův vektor tedy dostáváme, že má fyzikální význam energie, která proteče v postupné rovinné vlně plochou $A = 1\mathrm{m}^2$ za 1s, tedy plošné hustoty výkonu v jednotkách $\mathrm{Wm}^{-2}$, rovnice (1.50). Podobně v homogenním, izotropním, neabsorbujícím, „nemagnetickém" prostředí můžeme v případě šíření monochromatické, rovinné vlny fázovou rychlostí $\mathrm{v} = \frac{c}{n}$ psát pro střední hodnotu součinu

$$\langle u\,\mathrm{v}(\omega)\rangle_T \;=\; \langle \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) E^2 \mathrm{v}(\omega)\rangle_T \,. \tag{1.52}$$

Pro okamžitou velikost Poyntingova vektoru můžeme napsat

$$S = EH = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 \mathrm{v}(\omega)} = \frac{E^2}{\mu_0}\frac{n(\omega)}{c} = \varepsilon_0 c\; n(\omega)\; E^2 \tag{1.53}$$

a pro časovou střední hodnotu lineárně polarizované vlny

$$\langle S\rangle_T \;= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c\; n(\omega)\; E_0^2 \tag{1.54}$$

Veličinu $I = \langle S\rangle_T$ budeme dále též nazývat **intenzita** vlny. Poznamenejme, že se stejným názvem i symbolem označuje často i hustota energie záření (1.48), případně hustota elektrické energie (1.43).

## 1.6 Tlak světelného záření

Pro vysvětlení použijeme částicový model, který je názornější než vlnový model. Ve „fotonovém modelu" rovinné homogenní vlny šířící se ve směru osy $z$ předpokládáme, že světlo se skládá z fotonů – kvant, každý s energií $\varepsilon_{foton} = h\nu = \hbar\omega$ a jedinou složkou vektoru hybnosti fotonu je

$$g_z = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\varepsilon_{foton}}{c} = \hbar k_z \,.$$

Budeme předpokládat úplnou absorpci dopadajících fotonů v látce a tedy i úplné předání hybnosti fotonů látce. Velikost Poyntingova vektoru $S$ představuje výkon, který je absorbován jednotkovou plochou za jednotku času při kolmém dopadu na plochu. Stejný výkon můžeme připsat $N_f$ fotonům, které jsou absorbovány ve stejné ploše za stejný čas. Pro případ, kdy světlo popisujeme jako soubor fotonů, můžeme tedy psát

$$S = N_f \varepsilon_{foton}.$$

Stejný počet fotonů při absorpci předá jednotkové ploše hybnost ve směru osy $z$

$$\Delta G_z = N_f g_z = N_f \frac{\varepsilon_{foton}}{c} = \frac{S}{c} = |\boldsymbol{p}|. \tag{1.55}$$

Tlak $\boldsymbol{p}$ jakožto síla působící na jednotku plochy je dán změnou hybnosti (pro každý foton z hodnoty $\frac{\varepsilon_{foton}}{c}$ na nulu) dopadajících částic na jednotku plochy za jednotku času. Vztah (1.55)

platí v případě úplné absorpce dopadajících fotonů a jejich hybnosti látkou. V případě dokonalého zrcadlového odrazu je předaná hybnost dvojnásobná (odražené fotony odnášejí hybnost opačného znaménka, tj. nastává změna hybnosti z $\frac{\varepsilon_{foton}}{c}$ na $-\frac{\varepsilon_{foton}}{c}$).

V objemu prostoru o jednotkovém průřezu a délce $c$ (obr. 1.4) je uložena hybnost, která proběhne jednotkovou plochou za jednotku času. Pak je **objemová hustota vektoru hybnosti** pro rovinnou homogenní vlnu ve vakuu se směrem šíření podél osy $z$

$$(\boldsymbol{G}_V)_z = \frac{1}{c}\Delta G_z = \frac{1}{c}\frac{S_z}{c} = \frac{1}{c^2}\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_z = (\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\mu_0\boldsymbol{H})_z = (\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})_{\boldsymbol{z}}\,.$$

Ostatní složky objemové hustoty vektoru hybnosti jsou nulové.

Poznámka k jednotkám a fyzikálním rozměrům: $N_f$ [m$^{-2}$s$^{-1}$], hybnost $g_z$ [kg m s$^{-1}$], energie fotonu $\varepsilon_{foton}$ [J]=[kg m$^2$ s$^{-2}$], $c$ [m s$^{-1}$], změna hybnosti na jednotku plochy za jednotku času $\Delta G$ [m$^{-2}$ s$^{-1}$ kg m s$^{-1}$] = [kg m$^{-1}$ s$^{-2}$], Poyntingův vektor $S$ [W m$^{-2}$] = [kg m$^2$ s$^{-2}$ s$^{-1}$ m$^{-2}$] = [kg s$^{-3}$], tlak $p$ [Pa] = [N m$^{-2}$] = [kg m$^{-1}$ s$^{-2}$], intenzita elektrického pole $E$ [V m$^{-1}$], intenzita magnetického pole $H$ [A m$^{-1}$], elektrická indukce $D$ [C m$^{-2}$] = [A s m$^{-2}$], magnetická indukce $B$ [T] = [kg s$^{-2}$ A$^{-1}$], $\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}$ [A s m$^{-2}$ kg s$^{-2}$ A$^{-1}$] = [kg m$^{-2}$ s$^{-1}$], objemová hustota hybnosti $G_V$ [kg m s$^{-1}$ m$^{-3}$] = [kg m$^{-2}$ s$^{-1}$].

## 1.7 Kulová vlna

Popis vln s vlnoplochami různými od rovinných je podstatně složitější než popis homogenní rovinné vlny. Jako příklad uveďme kulovou vlnu (tj. vlnu s kulovými vlnoplochami) vyzařovanou „malým“, harmonicky kmitajícím dipólem tvořeným dvojicí opačných nábojů $\pm q$, jejichž dipólový moment je

$$p(t) = ql\,e^{-i\omega t} = p_0 e^{-i\omega t}.$$

Příslušná vlna je označována jako záření Hertzova dipólu a představuje nejjednodušší kulovou vlnu, která vyhovuje Maxwellovým rovnicím ve volném prostoru. Rozměr kmitání dipólu je omezen $l \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

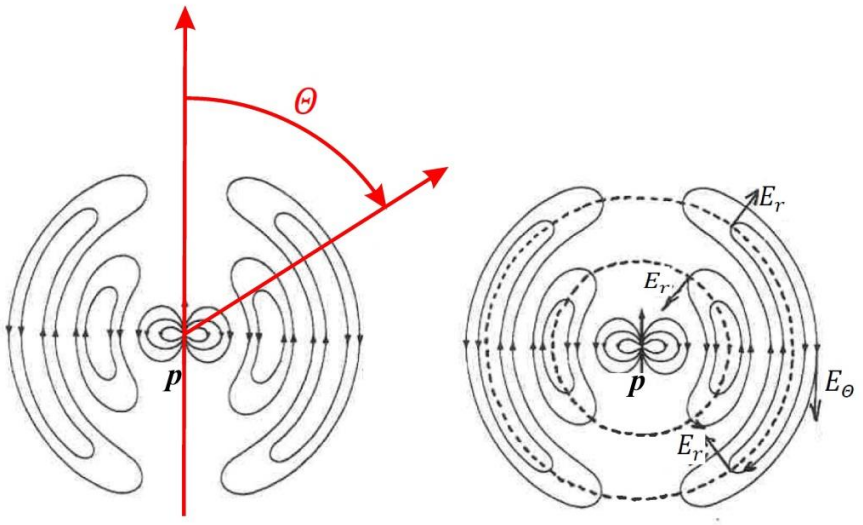
Na obr. 1.5 jsou nakresleny elektrické siločáry v jednom okamžiku v okolí kmitajícího Hertzova dipólu. V průběhu času se z dipólu odtrhávají v rytmu kmitání dipólu uzavřené smyčky siločar, které odnášejí energii ve směru od dipólu. Na obr. 1.6 je nakreslen vyzařovací diagram, tj. úhlová závislost radiální složky Poyntingova vektoru ve sférických souřadnicích $\langle S_r\rangle_T(\Theta)$ tak, že délky úseček vycházející z počátku jsou úměrné velikosti $\langle S_r\rangle_T(\Theta)$. Z obrázku je patrné, že Hertzův dipól nevyzařuje do směru kmitání dipólu a maximální výkon vyzařuje do směrů kolmých. Vlny, které jsou produkovány pohybem nábojů v objemech větších (srovnatelných s vlnovou délkou či ještě větších) mají strukturu podstatně komplikovanější.

Pro celkový výkon vyzařovaný do všech směrů stabilně kmitajícím Hertzovým dipólem platí vztah

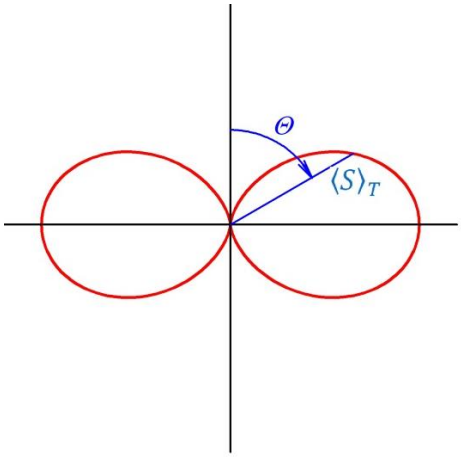
$$P_{tot} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}.$$

Energii potřebnou k udržení kmitů je nutno dodávat zvnějšku.

Vlastnosti záření velmi malého dipólu vysvětlují Rayleighův rozptyl světla. Tak se zdůvodňuje modrá barva a polarizační vlastnosti světla z modré oblohy, kdy sluneční záření rozkmitává dipóly koncentračních (tlakových) nehomogenit vzduchu rozměrů podstatně menších než je vlnová délka. Toto sluneční buzení určuje směry kmitů těchto dipólů, které pak vyzařují a díky úměrnosti na $\omega^4$ je rozptyl nejvíce účinný v modré části spektra.




Obr. 1.5 Plné čáry naznačují siločáry elektrického pole Hertzova dipólu v jednom okamžiku v kulové souřadné soustavě $r, \Theta, \alpha$ zakreslené v řezu $\alpha = 0$. V pravé části jsou čárkovaně zakresleny řezy kulovými vlnoplochami, na kterých je v daný okamžik $E_\Theta = 0$, takže v tomto okamžiku je tam pole longitudinální $\boldsymbol{E} \parallel r$.




Obr. 1.6 Řez vyzařovacím diagramem Hertzova dipólu. Délka úsečky ve směru určeném úhlem $\Theta$ je úměrná střední hodnotě velikosti Poyntingova vektoru do tohoto směru. Diagram je osově symetrický kolem „svislé“ osy ($\Theta = 0$).

Kulové vlny podstatně složitějších úhlových závislostí vysílají objekty rozměrů srovnatelných s vlnovou délkou. Příkladem je Mieův rozptyl na dielektrických kuličkách mikronových rozměrů. V kontrastu s modrým světlem jasné oblohy dostáváme bílé rozptýlené světlo oblaků (rozptyl na vodních kapkách).

Jak z předchozího můžeme nahlédnout, je popis pomocí vektorových vln mnohdy hodně složitý. V některých případech si můžeme vypomoci aproximacemi, které zanedbávají vektorový charakter elektromagnetického pole. Skalární aproximace jsou obvykle použitelné jen v nějaké části prostoru. Pro skalární aproximace je důležitá **skalární vlnová rovnice** ve vakuu nebo v neabsorbujícím prostředí bez zdrojů

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}. \tag{1.56}$$

Nejjednodušším řešením skalární vlnové rovnice je skalární, kulová a kulově symetrická vlna se středem v $\boldsymbol{r} = 0$

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{f(r \pm \mathrm{v}t)}{r}, \qquad r = |\boldsymbol{r}|. \tag{1.57}$$

Speciálním případem řešení je skalární, harmonická, kulová, kulově symetrická vlna se středem v počátku souřadné soustavy

$$\begin{aligned} \psi(r,t) &= \frac{A}{r}\cos[k(r \pm \mathrm{v}t)], \\ \psi(r,t) &= \frac{A}{r}e^{ik(r \pm \mathrm{v}t)}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Funkce s fází $k(r - \mathrm{v}t)$ představuje expandující (divergující) kulovou vlnu. S rostoucím časem $t$ vždy kladná hodnota $r$ musí též narůstat, aby nějaká hodnota fáze představující určitou vlnoplochu kulové vlny zůstala konstantní. Podobně funkce s fází $k(r + \mathrm{v}t)$ představuje sbíhavou (konvergující) kulovou vlnu. $A$ je amplituda v jednotkové vzdálenosti $r = 1$. Amplituda kulové vlny klesá s faktorem $\frac{1}{r}$.

Je třeba zdůraznit, že neexistuje kulově symetrická elektromagnetická vlna, která by splňovala **vektorovou** vlnovou rovnici (1.9) pro $\boldsymbol{E}$ ve vakuu nebo její variantu pro materiálové prostředí, resp. analogické rovnice pro vektor $\boldsymbol{B}$**.** Důvodem je to, že kulová symetrie není slučitelná s vektorovým charakterem polí $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ (resp. $\boldsymbol{B}$) v celém prostoru.

Uvedenou nejjednodušší skalární kulovou vlnu (1.58) využíváme pouze jako skalární aproximaci ve skutečnosti vektorových polí. Je vhodná pro aproximaci elektromagnetické kulové vlny v omezeném prostoru, např. pro úzký interval úhlů $\Theta$ kolem směru $\Theta \approx \frac{\pi}{2}$, kde skalární aproximace bývá doplněna i o aproximaci kulové vlny vlnou parabolickou, jako např. ve skalární a paraxiální aproximaci difrakčních jevů, viz kapitola 6 „Difrakce (skalární popis).“ Dalším typickým příkladem použití skalárních vln je skalární aproximace laserových svazků, např. gaussovského svazku.

## Poznámka P1 - Skalární kulová harmonická vlna splňuje skalární vlnovou rovnici

Obvykle uváděný vzorec pro Laplaceův operátor $\Delta \equiv \nabla^2$ v kulových souřadnicích působící na **skalární funkci** $\varphi(r, \Theta, \alpha)$ je

$$\nabla^2 \varphi(r, \Theta, \alpha) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

Pokud se zabýváme kulově symetrickou vlnou $\varphi(r)$, je nenulový pouze první člen. Ověřme, že skalární kulově symetrická harmonická vlna

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i\,(kr - \omega t)} = \varphi(r)\, e^{-i\omega t}$$

vyhovuje vlnové rovnici

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = A\, e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r}\, e^{ikr} \right) = A\, e^{-i\omega t} \left( \frac{-1}{r^2} e^{ikr} + \frac{ik}{r} e^{ikr} \right),$$

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = A\, e^{-i\omega t} (-e^{ikr} + r\, ike^{ikr}),$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = A\, e^{-i\omega t} [-ike^{ikr} + ike^{ikr} + r\, (ik)^2 e^{ikr}] = -A\, e^{-i\omega t}\, rk^2 e^{ikr},$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -k^2 \frac{A}{r}\, e^{i\,(kr - \omega t)},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2\, \frac{A}{r}\, e^{i\,(kr - \omega t)}.$$

Protože fázová rychlost je $\mathrm{v} = \frac{\omega}{k}$, je splněna skalární vlnová rovnice

$$\psi(r, t) = \frac{-\nabla^2\, \psi}{k^2} = \frac{-1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\ ,$$

$$\nabla^2\, \psi = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

a samozřejmě i skalární Helmholtzova rovnice

$$\nabla^2\, \psi = -k^2 \psi\ .$$

# 2. Polarizace rovinné monochromatické vlny

Polarizace elektromagnetické vlny popisuje směry oscilace vektoru elektrické intenzity. Pokud se tento vektor v prostoru a čase vyvíjí předpověditelným způsobem (deterministicky), říkáme, že světlo je **polarizované**. Pokud je tento vývoj zcela náhodný (stochastický), světlo je **nepolarizované**. Záření z termálních zdrojů (např. Slunce, žárovka) se vyznačuje tím, že směr vektoru elektrického pole se rychle a náhodně mění. Často můžeme světelný svazek charakterizovat jako směs polarizovaného a nepolarizovaného světla. Takové světlo se nazývá **částečně polarizované**. V této kapitole se budeme se zabývat rovinnou vlnou, která má dobře definovanou polarizaci (lineární, kruhovou nebo eliptickou), což je užitečný model pro polarizované světlo, např. záření laseru nebo záření po průchodu polarizátorem a dalšími polarizačními zařízeními.

## 2.1 Šíření v neabsorbujícím, izotropním prostředí bez lineárního a kruhového dvojlomu

Pro základní popis polarizace a způsobů jejího ovlivňování použijeme model šíření jedné rovinné monochromatické vlny diskutovaný v úvodní kapitole. Pro směr šíření vezmeme směr osy $z$, tj. $\boldsymbol{k} = (0,0,k)$. Rozborem Maxwellových rovnic jsme dospěli k závěru o vzájemné ortogonalitě vektorů $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$. Lineárně polarizovanou vlnou rozumíme takovou, ve které koncové body vektoru $\boldsymbol{E}$ kmitají po úsečce. Jako výchozí situaci vezmeme skládání dvou lineárně polarizovaných vln, jejichž vlnové vektory jsou totožné a roviny polarizace na sebe kolmé. Zvolíme souřadnou soustavu tak, že osy $x$ a $y$ jsou určeny směry kmitů těchto dvou vln a směr vlnového vektoru obou vln je osa $z$:

$$\tilde{E}_x = a_x\, e^{i(k\,z-\omega t)} = a_x\, e^{i\varphi}, \tag{2.1}$$

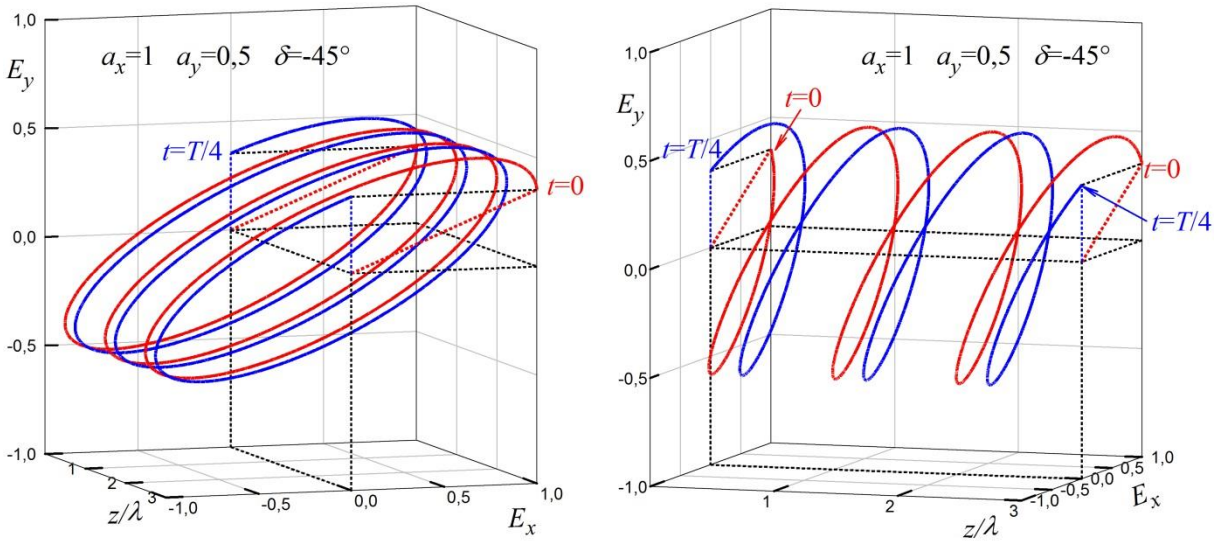
$$\tilde{E}_y = a_y\, e^{i(k\,z-\omega t-\delta)} = a_y\, e^{i(\varphi-\delta)}. \tag{2.2}$$

Amplitudy $a_x$ a $a_y$ budeme v této části textu považovat za konstanty, které se ani v čase, ani v prostoru nemění. To je splněno při šíření vlny v neabsorbujícím, izotropním prostředí bez lineárního i kruhového dvojlomu. Uvidíme, že v takovém případě se polarizace vlny v čase ani v prostoru nemění. Naopak v prostředí vykazujícím lineární nebo kruhový dvojlom se po dráze šíření vlny polarizační stav vlny mění a to se využívá pro ovlivnění polarizace, jak uvidíme v kapitole 10 „Anizotropní neabsorbující prostředí – lineární dvojlom."

Konstanty $a_x > 0$, $a_y > 0$ jsou reálné amplitudy složek $\tilde{E}_x$ a $\tilde{E}_y$, $\delta$ je fázový posun mezi oběma složkami. Rovnice (2.1) a (2.2) představují parametrické vyjádření povrchu eliptického válce. Speciální případ, kdy jedna z amplitud je nulová, popisuje lineárně polarizovanou vlnu kmitající ve směru druhé osy, neboli válec zdegeneruje v pás šířky $2a_x$ (případně $2a_y$). Lineárně polarizovanou vlnu dostaneme též v případě, že fázový rozdíl $\delta = 0$.

V celé rovině $z = konstanta$ kmitají vektory $\boldsymbol{E}$ stejným způsobem. Pokud ve vztazích (2.1) a (2.2) zafixujeme čas, koncové body vektorů $\boldsymbol{E}(z)$ leží na spirále natočené na povrchu

eliptického válce. „Stoupání“ této spirály, tj. prostorová perioda, je rovno vlnové délce vln. Při uvolnění času se tato spirála posouvá po povrchu válce. Za dobu periody $T$ množina koncových bodů vektorů $\boldsymbol{E}(z)$ vyplní celý povrch válce.

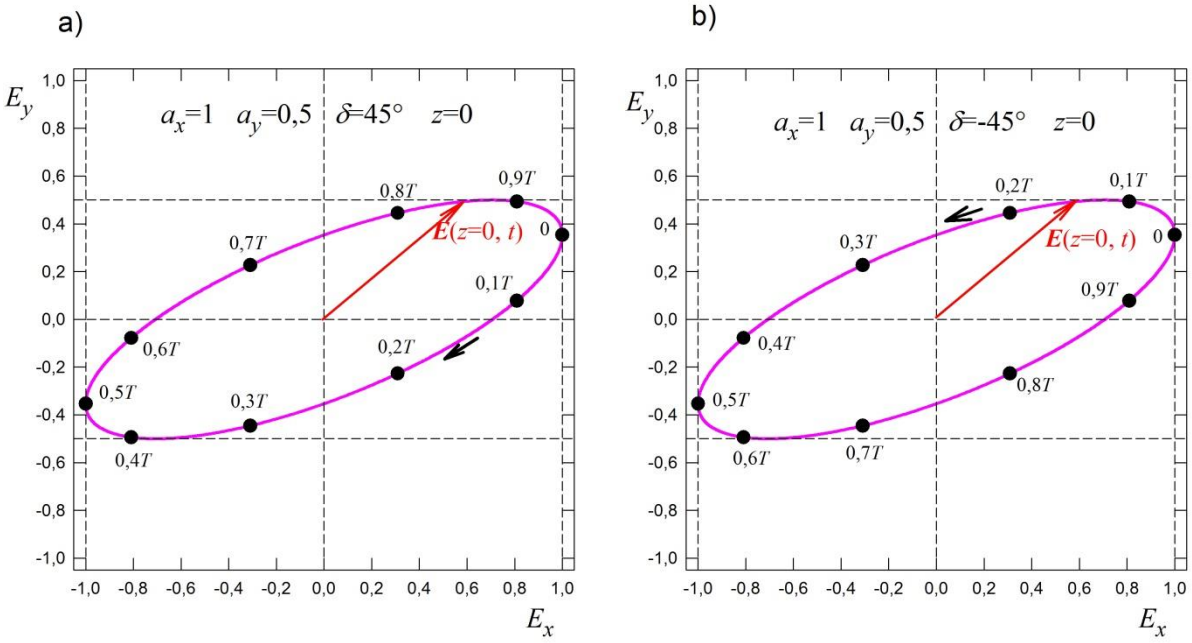



Obr. 2.1 Znázornění prostorové závislosti poloh koncových bodů vektoru $\boldsymbol{E}(z,t)$ pro dva časy: $t = 0$ (červeně)a $t = {}^{T}/_{4}$ (modře). Vypočteno z parametrických rovnic (2.1) a (2.2).

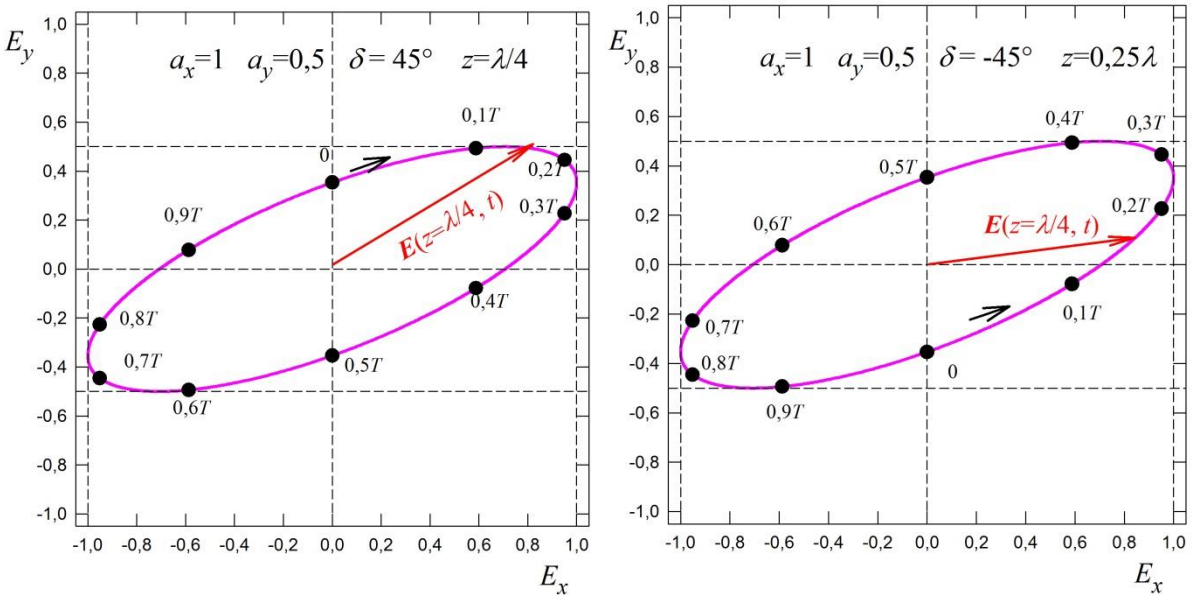
Pokud zafixujeme polohu $z$, dostáváme v rovině $xy$ parametrické vyjádření elipsy, která představuje trajektorii koncových bodů vektoru $\boldsymbol{E}(t)$ pro dané $z$, která je určena tím, jak spirála projíždí touto rovinou. Právě pojmem „polarizace vlny“ se často označuje časový vývoj vektoru polarizace v pevném místě $z$. S posuvem souřadnice $z$ se sice mění fáze rotace $\boldsymbol{E}$, ale tvar elipsy, kterou tvoří množina koncových bodů $\boldsymbol{E}$, a orientace této elipsy v prostoru zůstává stále stejná (pro výše uvedené předpoklady o prostředí bez dvojlomů).

Pravotočivá vlna je charakterizována tím, že v pravotočivé souřadné soustavě $xyz$ pro vlnový vektor ve směru kladné osy $z$ je smysl otáčení vektoru $\boldsymbol{E}$ od kladné osy $x$ k záporné ose $y$. Názorněji: při pohledu proti směru šíření se vektor $\boldsymbol{E}$ otáčí po smyslu chodu hodinových ručiček. V levotočivé vlně s vlnovým vektorem ve směru kladné osy $z$ je smysl otáčení od kladné osy $x$ ke kladné ose $y$, proti smyslu otáčení hodinových ručiček.

Zdůrazněme, že výsledky a závěry související se znaménkem fázového rozdílu $\delta$ jsou vázány na naši volbu popisu vlny šířící se ve směru kladné osy $z$. V literatuře se lze setkat i s jinými volbami, např. $\tilde{E}_y = a_y\, e^{i(\omega t - kz\, -\delta)}$ nebo $\tilde{E}_y = a_y\, e^{i(kz - \omega t\, +\delta)}$ s opačnými znaménky u členů $\omega t$ a $\delta$. Důsledkem je prohození souvislosti pravotočivosti/levotočivosti se znaménkem $\delta$.




Obr. 2.2 Koncové body vektoru ***E*** se postupně objevují v rovině $z = 0$. Znázorněný časový vývoj odpovídá a) vlně pravotočivé, b) levotočivé.




Obr. 2.3 Totéž jako obr. 2.2, ale pro rovinu $z = \frac{\lambda}{4}$. Vektor ***E*** rotuje v této rovině se zpožděním $0{,}25\ T = \frac{\pi}{2\omega}$.

## 2.2 Polarizační elipsa

Neměnnost tvaru a orientace elipsy při změně $z$ můžeme ukázat eliminací parametrů $z, t$ z parametrických rovnic (2.1) a (2.2). Tímto způsobem přejdeme od dvou parametrických rovnic k jedné rovnici elipsy v analytické geometrii $F(E_x, E_y) = 0$.

$$F(E_x, E_y) = \left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a_x}\frac{E_y}{a_y}\cos\delta + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 - \sin^2\delta = 0. \tag{2.3}$$

V rovině $E_x, E_y$ tento vztah popisuje elipsu, jejíž poloosy nemusí být totožné s osami souřadné soustavy $x, y, z$. Odstraněním prostorové a časové závislosti $\varphi(z,t)$ jsme se vzdali informace o čase, kdy koncový bod $\boldsymbol{E}$ bude mít v místě $z$ určité souřadnice $E_x$, $E_y$. Rovnice (2.3) obsahuje pouze sudé funkce $\sin^2\delta$ a $\cos\delta$, které nezávisí na znaménku $\delta$, takže je ztracena i informace o smyslu rotace vektoru $\boldsymbol{E}$. V trojrozměrném prostoru se koncové body vektoru elektrického pole mohou objevit „někde“ na povrchu eliptického válce, jehož parametry se podél osy $z$ nemění.

Pro $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ přejde rovnice (2.3) na vztah

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 = 1,$$

což je rovnice elipsy v osové poloze. Pokud je $a_x > a_y$, je $a_x = a$ velká poloosa elipsy a $a_y = b$ je malá poloosa.

Geometrický popis elipsy je zvykem provést za pomoci

- velké $a$ a malé $b$ poloosy elipsy,
- úhlu natočení $\vartheta$ velké poloosy vzhledem k souřadné soustavě a
- elipticity $\chi$.

Tyto veličiny jsou spojeny s veličinami $a_x, a_x, \delta$ vystupujícími v rovnicích (2.1) až (2.3) následujícími vztahy.

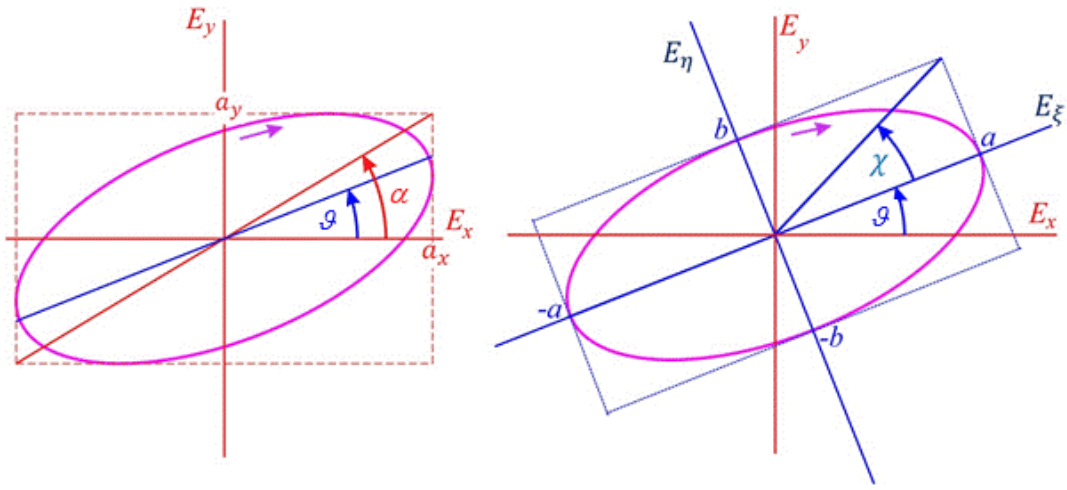
$$a^2 + b^2 = a_x^2 + a_y^2, \qquad a, b, a_x, a_y \geq 0 \tag{2.4}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x}, \qquad 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2a_x a_y}{a_x^2 - a_y^2} \quad \cos\delta = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \cos\delta = \operatorname{tg} 2\alpha \cos\delta, \qquad 0 \leq \vartheta < \pi \tag{2.6}$$

$$\operatorname{tg}\chi = \pm\frac{b}{a}, \qquad \frac{-\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \tag{2.7}$$

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin\delta, \qquad \frac{-\pi}{2} \leq 2\chi \leq \frac{\pi}{2}. \tag{2.8}$$




Obr. 2.4 Zakreslení elipsy pravotočivě polarizované vlny s vyznačením parametrů $a_x$ , $a_y$ , $\delta$ a parametrů $a, b, \chi, \vartheta$.

Proberme několik speciálních případů, vše pro $z = 0$:

1) $\delta = 0$

$$\tilde{E}_x = a_x\, e^{i(k_z\, z-\omega t)}, \qquad \tilde{E}_y = a_y\, e^{i(k_z\, z-\omega t)},$$

$$E_x(z=0,t) = a_x\, \cos\omega t, \qquad E_y(z=0,t) = a_y\, \cos\omega t.$$

Obě složky kmitají ve fázi, vlna je lineárně polarizovaná. Koncový bod vektoru $\boldsymbol{E}$ se pohybuje po úsečce mezi body $(-a_x\,, -a_y\,)$ a $(a_x\,, a_y\,)$.

2) $\delta = \pi$

$$\tilde{E}_x = a_x\, e^{i(k_z\, z-\omega t)}, \qquad \tilde{E}_y = a_y\, e^{i(k_z\, z-\omega t+\pi)} = -a_y\, e^{i(k_z\, z-\omega t)},$$

$$E_x(z=0,t) = a_x\, \cos\omega t, \qquad E_y(z=0,t) = -a_y\, \cos\omega t.$$

Obě složky kmitají ve fázi, vlna je lineárně polarizovaná. Koncový bod vektoru $\boldsymbol{E}$ se pohybuje po úsečce mezi body $(a_x\,, -a_y\,)$ a $(-a_x\,, a_y\,)$.

3) $\delta = \frac{\pi}{2}$, $a = a_x > a_y = b$

$$\tilde{E}_x = a e^{i(k_z\, z-\omega t)}, \qquad \tilde{E}_y = b e^{i(k_z\, z-\omega t-\frac{\pi}{2})},$$

$$E_x(z=0,t) = a\cos\omega t, \qquad E_y(z=0,t) = -b\sin\omega t\,.$$

Prozkoumejme nyní, jak se pohybuje vektor $\boldsymbol{E}$ po elipse v rovině $z = 0$ v čase. V čase $t = 0$ je

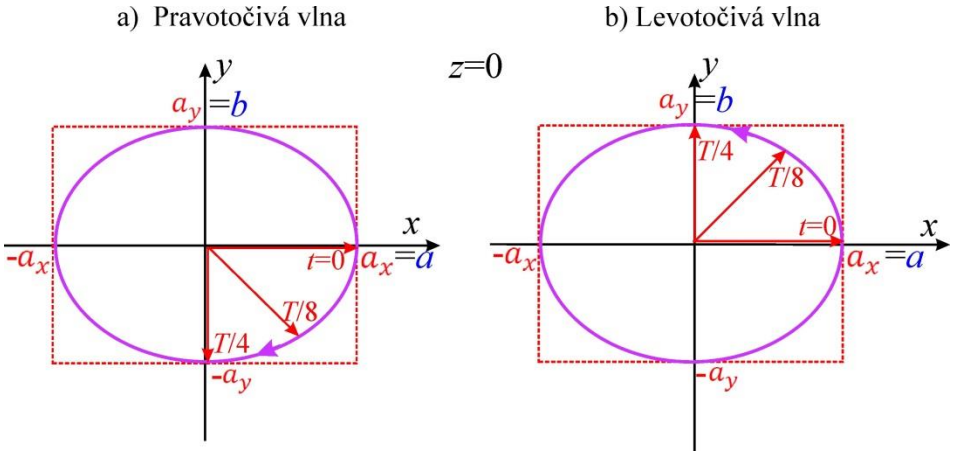
$$E_x = a, \qquad E_y = b\sin\,0 = 0.$$

Zvolme $t = \frac{T}{4}$, kde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ je doba kmitu. Dostáváme

$$E_x = a\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right) = a\cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$E_y = -b\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b.$$

Z obr. 2.5 a) je zřejmé, že se jedná o **pravotočivou**, elipticky polarizovanou vlnu. Je třeba zdůraznit, že tyto výsledky platí pro námi zvolený zápis fáze vlny $\varphi = kz - \omega t - \delta$, který budeme dodržovat v celém učebním textu.




Obr. 2.5 a) Pravotočivá, elipticky polarizovaná vlna, pro kterou platí $\delta = \frac{\pi}{2}$, $a = a_x > a_y = b$. Pohled proti směru šíření v jedné rovině prostoru (zvoleno $z = 0$). Koncový bod vektoru $\boldsymbol{E}$ obíhá elipsu po směru hodinových ručiček. b) Levotočivá, elipticky polarizovaná vlna, pro kterou platí $a = a_x > a_y = b$, $\delta = -\frac{\pi}{2}$. Koncový bod vektoru $\boldsymbol{E}$ obíhá elipsu proti směru hodinových ručiček.

4) $\delta = \frac{-\pi}{2}$, $a = a_x > a_y = b$

Analogickým postupem dostaneme

$$\tilde{E}_x = ae^{i(k_z z - \omega t)}, \qquad \tilde{E}_y = be^{i(k_z z - \omega t + \frac{\pi}{2})}.$$

$$E_x(z=0,t) = a\cos\omega t, \qquad E_y(z=0,t) = b\sin\omega t\,.$$

V čase $t = 0$ je

$$E_x = a, \qquad E_y = 0.$$

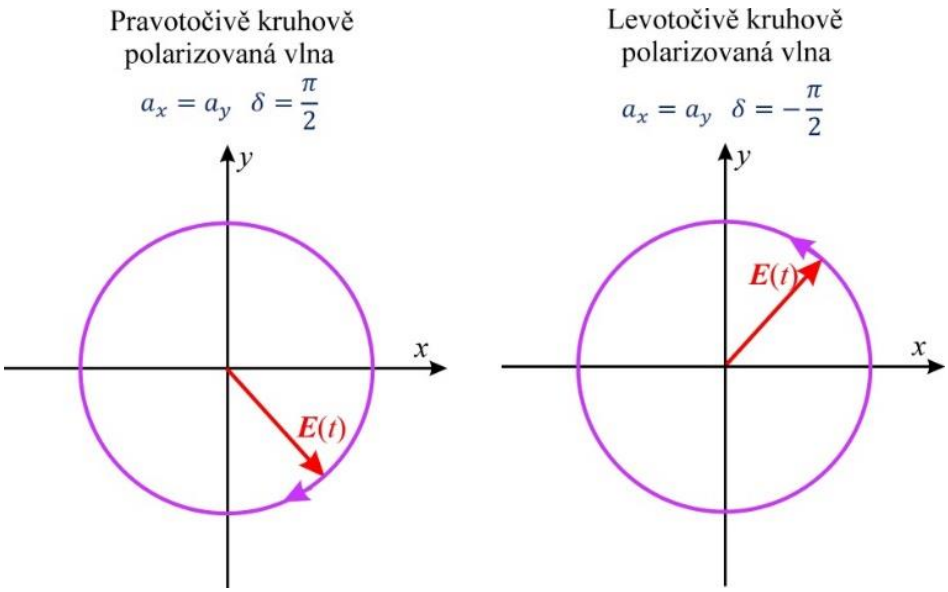
V čase $t = \frac{T}{4}$ dostáváme

$$E_x = a\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right) = a\cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

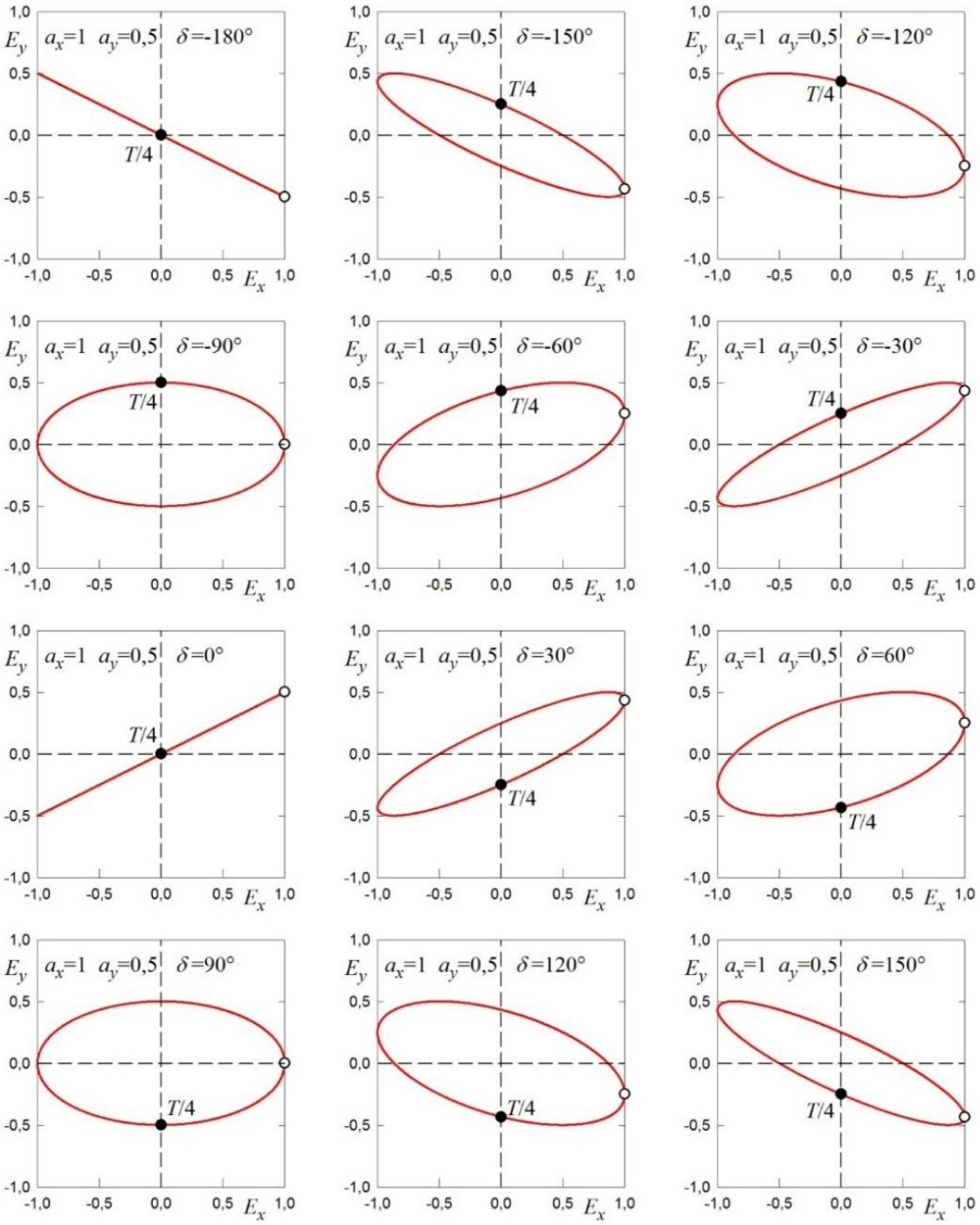
$$E_y = b\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = b.$$

Z obr. 2.5 b) je zřejmé, že se jedná o **levotočivou**, elipticky polarizovanou vlnu.

Pokud jsou navíc amplitudy složek elektrického pole shodné, tj. $a_x = a_y$, dostaneme pro $\delta = \frac{\pi}{2}$ pravotočivou kruhově polarizovanou vlnu a pro $\delta = -\frac{\pi}{2}$ levotočivou kruhově polarizovanou vlnu.




Obr. 2.6 Rotace vektoru elektrického pole v pravotočivě a levotočivě kruhově polarizované vlně v rovině $z = konst$.




Obr. 2.7 Závislost tvaru polarizační elipsy na fázovém posuvu $\delta$. Pro všechny elipsy je $E_x(t=0)=1$. Pro $E_y(t={}^{T}/_{4})>0$ je vlna levotočivá, pro $E_y(t={}^{T}/_{4})<0$ je vlna pravotočivá. Podle rovnic (2.1) a (2.2) pro $z=0$.

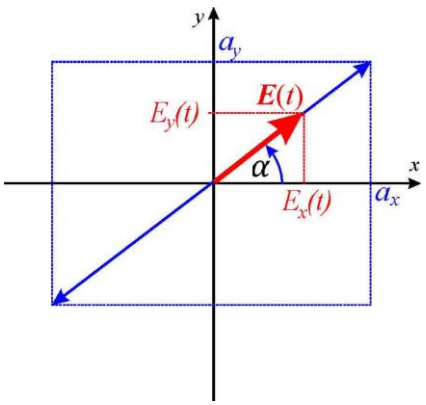
## 2.3 Jonesův formalismus

Vhodným formalismem pro popis zcela polarizovaného záření je Jonesův formalismus. Polarizační stav záření popisují **Jonesovy vektory.** Polarizační zařízení, která polarizační stav záření mění, se popisují pomocí **Jonesových matic**. Tento popis nelze použít pro popis částečně

polarizovaného záření, které si můžeme představit jako směs polarizovaného a zcela nepolarizovaného záření Pro tento obecnější případ se často využívá **Stokesův** formalismus (Stokesovy vektory a Muellerovy matice), kterým se v této kapitole zabývat nebudeme.

Pro zavedení Jonesova formalismu vyjádřeme nejprve podle obr. 2.9 pro **lineárně polarizovanou vlnu** úhel $\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}. \tag{2.9}$$




Obr. 2.8 Vektor $\boldsymbol{E}$ lineárně polarizované vlny a jeho složky

Z rovnice (2.9) dostaneme $a_x = a_y \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Pro **obecně polarizované vlnění** dosazením do rovnic (2.1) a (2.2) můžeme napsat

$$\tilde{E}_x(z,t) = a_y \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} e^{i\varphi(z,t)},$$

$$\tilde{E}_y(z,t) = a_y \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} e^{i\varphi(z,t)}\, e^{-i\delta}.$$

Označme

$$E_{eff} = \frac{a_y}{\sin\alpha} = \frac{a_x}{\cos\alpha} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,. \tag{2.10}$$

Složky $\tilde{E}_x$ a $\tilde{E}_y$ uspořádejme do sloupcového vektoru a rovnice popisující vektor $\tilde{\boldsymbol{E}}(z,t)$ dostaneme ve tvaru

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(z,t) \\ \tilde{E}_y(z,t) \end{pmatrix} = E_{eff} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\ e^{-i\delta} \end{pmatrix} e^{i\varphi(z,t)},$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = E_{eff}\, \tilde{\boldsymbol{J}} e^{i\varphi(z,t)}, \tag{2.11}$$

kde $\tilde{\boldsymbol{J}}$ nazýváme Jonesův vektor, což je komplexní vektor (vlnovku nad symbolem v dalším textu již nebudeme psát). Tento vektor obsahuje zásadní informace o polarizaci. Je to vektor jednotkový, jak můžeme ukázat výpočtem

$$\boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{J} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \; e^{i\delta} e^{-i\delta} = 1, \tag{2.12}$$

kde $\boldsymbol{J}^*$ je řádkový vektor $\boldsymbol{J}^* = \left(\cos\alpha \, , \sin\alpha \; e^{i\delta}\right)$.

Veličina $E_{eff}$ má význam efektivní hodnoty lineárně polarizovaného pole, které by neslo stejnou energii jako obecně polarizované pole popsané rovnicemi (2.1) a (2.2).

$$U = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r \tilde{\boldsymbol{E}}.\tilde{\boldsymbol{E}}^* = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r(\tilde{E}_x\tilde{E}_x^* + \tilde{E}_y\tilde{E}_y^*) = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\left(a_x^2 + a_y^2\right) = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r|E_{eff}|^2. \tag{2.13}$$

Uveďme nyní, jak vypadají Jonesovy vektory pro lineárně a kruhově polarizované světlo. V případě lineárně polarizovaného světla je fázový posun $\delta = 0$ a pro Jonesův vektor dostáváme

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Pokud $\alpha = 0,$ je $\cos\alpha = 1,$ $\sin\alpha = 0,$ $\boldsymbol{J_{LHP}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Vektor $\boldsymbol{E}$ kmitá ve směru osy $x$. Takové světlo nazveme lineárně horizontálně polarizované světlo (LHP – linear horizontally polarized light). Analogicky pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je $\boldsymbol{J}_{LVP} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Vektor $\boldsymbol{E}$ kmitá ve směru osy $y$. Toto světlo nazveme lineárně vertikálně polarizované světlo (LVP – linear vertically polarized light).

Pokud fázový posun $\delta = \frac{\pi}{2}$ a $a_x = a_y = a$, je $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Jonesův vektor má tvar

$$\boldsymbol{J}_{RCP} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \; e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -i \; \sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Využili jsme $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$. V tomto případě platí

$$E_{eff} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a,$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \begin{pmatrix}\tilde{E}_x(z,t)\\ \tilde{E}_y(z,t)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_{eff}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i(kz-\omega t)} = a\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i(kz-\omega t)},$$

kde

$$\tilde{E}_x(z,t) = a\cos(kz-\omega t) + ia\sin(kz-\omega t) \quad ,$$

$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}\{\tilde{E}_x(z,t)\} = a\cos(kz-\omega t)$$

a podobně

$$\tilde{E}_y(z,t) = -ia\cos(kz-\omega t) - ii\ a\sin\ (kz-\omega t),$$

$$E_y(z,t) = \mathrm{Re}\{\tilde{E}_y(z,t)\} = \ a\sin(kz-\omega t).$$

Zvolíme-li rovinu $z = 0$, je v čase $t = 0$

$$E_x(0,0) = a, \qquad E_y(0,0) = 0$$

a v čase $t = \frac{T}{4}$

$$E_x\left(0,\frac{T}{4}\right) = a\cos\left(-\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right) = a\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$E_y\left(0,\frac{T}{4}\right) = a\sin\left(-\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right) = a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -a$$

Je tedy zřejmé, že se jedná o vlnu pravotočivou – pravotočivé kruhově polarizované světlo (RCP – right circularly polarized light).

Podobně pro levotočivé kruhově polarizované světlo (LCP – left circularly polarized light) s využitím $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$ má Jonesův vektor tvar

$$\boldsymbol{J}_{LCP} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

## 2.4 Příprava lineárně polarizovaného světla

Světlo z běžných zdrojů (slunce, žárovka, svíčka apod.) je nepolarizované. Směr vektoru $\boldsymbol{E}$ a fáze vln se rychle a náhodně mění. Z nepolarizovaného světla můžeme vytvořit světlo polarizované celou řadou metod. Nejběžnější způsob je použití optického prvku zvaného **polarizátor**. Lze jej realizovat za použití několika fyzikálních principů, např.:

- polarizace lineárním dvojlomem;
- různá **absorpce** záření pro různé směry kmitů v anizotropních látkách (lineární dichroismus);
- polarizační závislost **odrazivosti** na rozhraní.

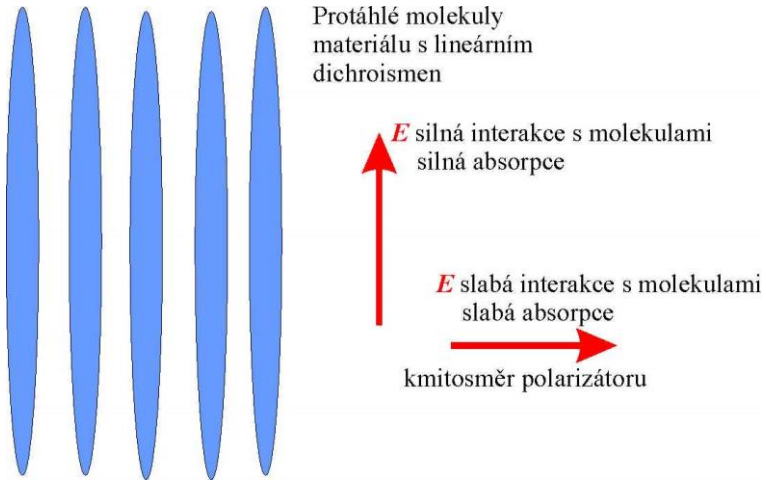
Směr polarizace záření, které polarizátor propouští, se nazývá **kmitosměr** polarizátoru.

1. **Lineární dvojlom**

Krystalové polarizátory využívají závislosti indexu lomu v anizotropních materiálech na směru šíření vůči význačným směrům v krystalech a na polarizaci vln, které se v daném směru šíří. Podrobněji bude tento efekt diskutován v kapitole 10 „Anizotropní neabsorbující prostředí – lineární dvojlom.“

## 2. Lineární dichroismus

Běžně používanou možností je využití různé absorpce záření pro různé směry lineární polarizace. Jedna ze složek vektoru ***E*** je absorbována, zatímco složka na ní kolmá polarizátorem prochází. K absorpci dochází v důsledku pohybu elektronů vyvolaných elektrickým polem záření v polarizátoru. Pohyb elektronů je díky struktuře polarizátoru silně omezen na jeden směr (např. výrazně protáhlé organické molekuly v polaroidu nebo protáhlé nanočástice Ag, orientovaně zabudované ve skleněné nebo plastové matrici). V tomto směru dochází k absorpci složky elektrického pole s tímto směrem paralelním a v konečném výsledku k tepelným ztrátám (Jouleovo teplo).



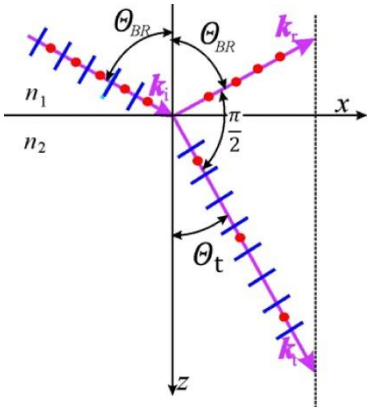

Obr. 2.9 Schématické znázornění principu dichroického polarizátoru

## 3. Polarizace odrazem

Dopadající nepolarizované světlo na rozhraní dvou dielektrických prostředí můžeme vždy rozložit na složku s lineární polarizací rovnoběžnou s rovinou dopadu a na složku kolmou k rovině dopadu. Při dopadu světla z prostředí opticky řidšího do prostředí opticky hustšího (s větším indexem lomu) pod tzv. **Brewsterovým úhlem**, dochází při dopadu pouze k odrazu složky s polarizací kolmou k rovině dopadu. Úhel dopadu $\Theta_{BR}$ je určen podmínkou

$$\mathrm{tg}\,\Theta_{BR} = \frac{n_2}{n_1}\,.$$

Odražené světlo je v tomto případě úplně lineárně polarizované. Podobněji bude tento případ diskutován v kapitole 3 „Odraz a lom na rozhraní dvou dielektrik.“




Obr. 2.10 Schématické znázornění principu polarizace odrazem na rozhraní dvou prostředí

## 2.5 Intenzita záření procházejícího „ideálním“ polarizátorem

Předpokládejme, že kmitosměr polarizátoru je rovnoběžný s osou $y$, obr. 2.11. Nechť na polarizátor dopadá nepolarizované záření skládající se z vln, které jsou polarizovány se stejnou pravděpodobností pod různými úhly $\gamma \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Polarizátor tedy propustí složku elektrického pole každé lineárně polarizované vlny

$$E_y(t) = E_0 \cos\gamma \cos\left(\varphi_\gamma - \omega_\gamma t\right),$$

kde $E_0$ je amplituda dopadajících vln a $\gamma$ je úhel kmitání vektoru $\boldsymbol{E}_\gamma(t)$ vůči kmitosměru polarizátoru (osa $y$).

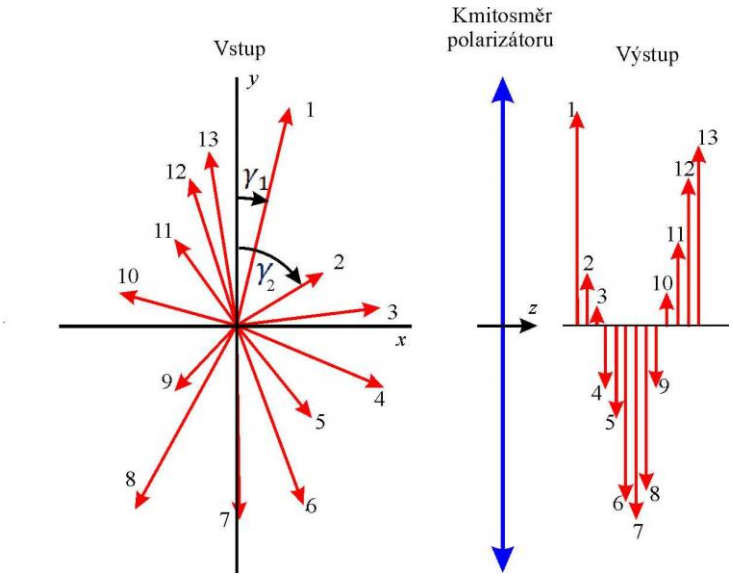
Intenzita propuštěné vlny, tj hustota elektrické energie – rovnice (1.47), je při **vstupu** jedné **lineárně polarizované vlny**

$$I(\gamma) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2\gamma = I_0 \cos^2\gamma, \tag{2.17}$$

což je nazýváno Malusův zákon. Protože jednotlivé komponenty kmitají nekoherentně (s°náhodnými fázemi $\varphi_\gamma$), je celkově intenzita záření propuštěného polarizátorem při **vstupu nepolarizovaného záření dána součtem (integrálem) jednotlivých složek** (za dobu integrace detektorem se interferenční členy díky náhodnosti fází interferujících vln vyruší a výsledná intenzita je součtem intenzit jednotlivých vln – bude podrobněji vysvětleno v kapitole 7 „Koherence“).

$$I_P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_0 \cos^2\gamma \, d\gamma = \frac{I_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\gamma}{2}\right)d\gamma = \frac{I_0}{2\pi}\left[\frac{\gamma}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{I_0}{2}. \tag{2.18}$$

Ideální („bezztrátový“) polarizátor tedy propustí polovinu intenzity dopadajícího nepolarizovaného světla.



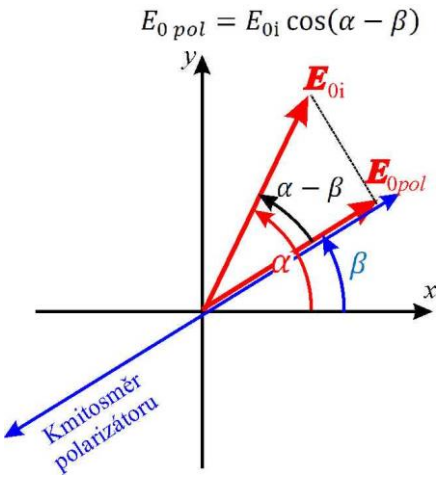

Obr. 2.11 Průchod nepolarizovaného světla polarizátorem. Vektor $\boldsymbol{E}$ nabývá se stejnou pravděpodobností všech směrů v rovině $xy$. Úhly $\gamma$ nabývají všech hodnot v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Na obrázku jsou vyznačeny úhly $\gamma_1$ a $\gamma_2$ pro vektory $\boldsymbol{E}_1(t)$ a $\boldsymbol{E}_2(t)$ v nějakém časovém okamžiku. V obrázku je naznačen obecnější případ, kdy jednotlivé vlny mají různé amplitudy. Výpočet vedoucí k rovnici (2.18) předpokládá stejnou amplitudu vln $\boldsymbol{E}_0$.

# 2.5 Změna polarizačního stavu polarizátorem a fázovou destičkou

Pokud máme nějakým způsobem připravené polarizované světlo (lineárně, kruhově nebo elipticky) můžeme jeho polarizační stav změnit pomocí polarizačních zařízení. Mezi ně patří opět zejména **polarizátor** a dále **fázová destička.**

***Polarizátor***

Nejprve zavedeme popis polarizátoru pomocí Jonesova formalismu. Uvažujme, že kmitosměr polarizátoru je natočen vůči ose $x$ o úhel $\beta$. Vektor elektrického pole lineárně polarizovaného záření dopadajícího na polarizátor nechť je vůči ose $x$ natočen o úhel $\alpha$. Úhel mezi $\boldsymbol{E}$ a kmitosměrem polarizátoru je $\alpha - \beta$, (obr. 2.12).




Obr. 2.12 Průchod lineárně polarizovaného světla polarizátorem. $\boldsymbol{E}_{0i}$ je amplituda vlny vstupující do polarizátoru, $E_{0pol}$ je amplituda vlny vystupující z polarizátoru.

Předpokládejme, že do polarizátoru vstupuje ve směru $z$ ($k_z = k$) lineárně polarizované záření popsané Jonesovým vektorem

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_{IN} = E_0 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}.$$

Průmět do kmitosměru polarizátoru je

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = E_0 \cos(\alpha - \beta) \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}.$$

Ve složkách můžeme rozepsat

$$\tilde{E}_x = E_0(\cos\alpha\ \cos^2\beta + \sin\alpha\ \sin\beta\cos\beta)\, e^{i(kz-\omega t)},$$

$$\tilde{E}_y = E_0(\sin\alpha\ \sin\beta\cos\beta + \sin\alpha\ \sin^2\beta)\, e^{i(kz-\omega t)}.$$

Zapsáno ve sloupcových vektorech

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = E_0 \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \sin\beta\ \cos\beta \\ \sin\beta\ \cos\beta & \sin^2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)},$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \sin\beta\ \cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta \end{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{E}}_{IN} = \vec{\vec{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{POL}} \tilde{\boldsymbol{E}}_{IN},$$

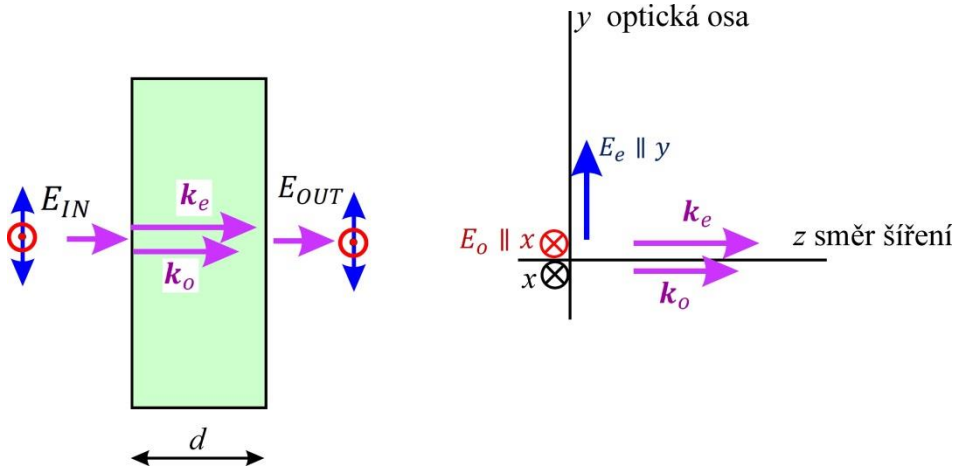
kde

$$\vec{\vec{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{POL}} = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \sin\beta\ \cos\beta \\ \sin\beta\ \cos\beta & \sin^2\beta \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

je **Jonesova matice** polarizátoru.

*Fázová destička*

Jedním z nejvýznamnějších optických prvků používaných k ovlivnění polarizačního stavu světla je **fázová destička.** Jedná se o destičku z dvojlomného materiálu vyříznutou tak, že vykazuje ve dvou navzájem kolmých směrech lineární polarizace různé indexy lomu, tedy různé fázové rychlosti šíření. Podrobněji se fyzikálnímu popisu fázové destičky budeme věnovat v kapitole 10 „Anizotropní neabsorbující prostředí – lineární dvojlom.“ Základní princip je znázorněn na obr. 2.13.




Obr. 2.13 Uspořádání pro vysvětlení principu fázové destičky. Je zakreslen případ kladného krystalu, tj. $n_e > n_0$, např. křemen. Pak je fázová rychlost řádné vlny $\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_o$ větší než fázová rychlost mimořádné vlny $\mathrm{v}_y = \mathrm{v}_e$ a osu $x$ označíme jako „rychlá osa“.

Pokud by vlna postupovala ve směru $y$, šířily by se obě vlny stejnou fázovou rychlostí. Takový směr se nazývá **optická osa.** Vyřízneme z takového materiálu destičku tak, že její větší plochy jsou v rovině $xy$, ve které leží optická osa orientovaná ve směru $y$. Pak při kolmém dopadu lineárně polarizované monochromatické rovinné vlny se složky s polarizacemi $E_x, E_y$ šíří destičkou různými fázovými rychlostmi $\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y$. Je-li $\mathrm{v}_x > \mathrm{v}_y$ (čili $n_x < n_y$) nazveme osu $x$ **rychlou osou.** Pojmenování se vztahuje k **polarizaci vlny** a šíření probíhá podél osy $z$.

Nechť na fázovou destičku dopadá lineárně polarizovaná monochromatická vlna $e^{-i\omega t}$

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_{IN} = \tilde{\boldsymbol{E}}_0 e^{i(kz-\omega t)}.$$

Položíme-li přední plochu $xy$ fázové destičky do $z = 0$, je pole na vstupu destičky

$$\tilde{E}_x(0) = \tilde{E}_{0x} e^{-i\omega t},$$

$$\tilde{E}_y(0) = \tilde{E}_{0y} e^{-i\omega t}.$$

Na výstupu destičky ($z = d$) mají složky $\tilde{E}_x$ a $\tilde{E}_y$ rozdílné fáze v důsledku různých fázových rychlostí

$$\tilde{E}_x(d) = \tilde{E}_{0x} e^{i(k_0 n_x d-\omega t)},$$

$$\tilde{E}_y(d) = \tilde{E}_{0y} e^{i(k_0 n_y d - \omega t)}.$$

V Jonesově formalismu napíšeme

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x(d) \\ \tilde{E}_y(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_0 n_x d} & 0 \\ 0 & e^{ik_0 n_y d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(0) \\ \tilde{E}_y(0) \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\varphi} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(0) \\ \tilde{E}_y(0) \end{pmatrix},$$

kde $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\varphi}$ je Jonesova matice fázové destičky s rychlou osou rovnoběžnou s osou $x$. V případě, že by rychlá osa byla rovnoběžná s osou $y$, byla by $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\varphi}$ identická (jen $n_x > n_y$).

Matici $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\varphi}$ můžeme dále upravit

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\varphi} = \begin{pmatrix} e^{ik_0 n_x d} & 0 \\ 0 & e^{ik_0 n_y d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} = e^{i\varphi_x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix},$$

kde $\phi(n_x, n_y, d) = \varphi_y - \varphi_x$. Pro popis činnosti fázové destičky je důležitý rozdíl fází obou složek. Náběh fáze $\varphi_x$ můžeme položit rovný nule. Tím se celý fázový rozdíl přesune do složky $\varphi_y$, což zjednoduší zápis. Pro $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\varphi}$ pak dostaneme Jonesovu matici fázové destičky v osové poloze.

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Dále probereme některé speciální případy fázových destiček. Předpokládejme nejprve, že fázový rozdíl

$$\phi = \varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2} = k_0(n_y - n_x)d = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_y - n_x)d$$

a z toho plyne rozdíl optických drah

$$\Delta_{\boldsymbol{OD}} = (n_y - n_x)d = \frac{\lambda_0}{4}. \tag{2.21}$$

Veličiny $k_0$ a $\lambda_0$ se vztahují k hodnotám ve vakuu. Takové fázové destičce se říká čtvrtvlnová a tento název se vztahuje k **rozdílu** optických drah, nikoli k tloušťce destičky. Její Jonesova matice v osové poloze je

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\frac{\lambda}{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Nejprve probereme průchod lineárně horizontálně polarizované vlny LHP.

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}_{LHP} \tag{2.23}$$

Při průchodu čtvrtvlnovou destičkou v osové poloze tedy zůstává LHP světlo beze změny.

Pro lineárně polarizované světlo s polarizací pod úhlem $\frac{\pi}{4}$ s Jonesovým vektorem

$$\boldsymbol{J}_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

dostaneme po průchodu čtvrtvlnovou destičkou levotočivé kruhově polarizované světlo (LCP).

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}_{LCP}. \tag{2.25}$$

Podobně pro lineárně polarizované světlo pod úhlem $\frac{-\pi}{4}$ s Jonesovým vektorem

$$\boldsymbol{J}_{-\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

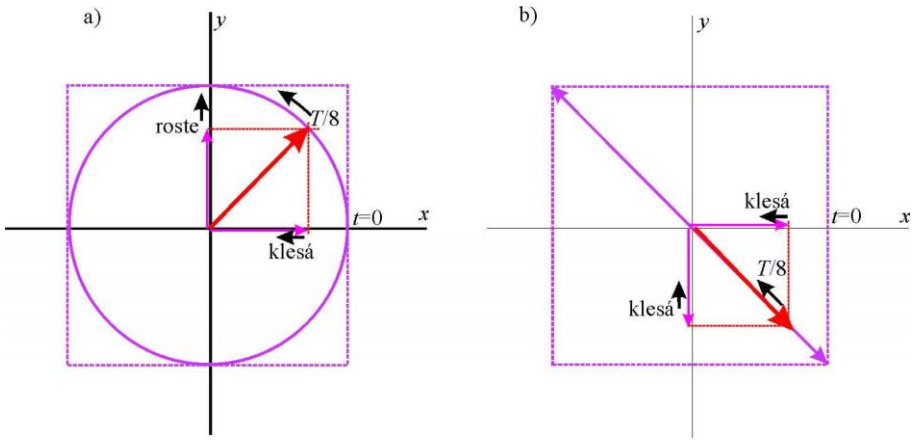
dostaneme po průchodu čtvrtvlnovou destičkou pravotočivé kruhově polarizované světlo (RCP).

Při průchodu LCP světla čtvrtvlnovou destičku dostaneme lineárně polarizované světlo pod úhlem $\frac{-\pi}{4}$:

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}_{-\frac{\pi}{4}}. \tag{2.27}$$

Při průchodu RCP světla čtvrtvlnovou destičkou dostaneme lineárně polarizované světlo pod úhlem $\frac{\pi}{4}$:

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}_{\frac{\pi}{4}}. \tag{2.28}$$




Obr. 2.14 Vliv čtvrtvlnové fázové destičky na levotočivě kruhově polarizovanou vlnu a) na vstupu. Na výstupu b) získáme lineárně polarizovanou vlnu.

Okomentujme situaci na obr. 2.14 a) znázorňující kruhově polarizovanou vlnu před vstupem do fázové $\lambda/4$ destičky

$$E_x(z=0,t) = E_0 \,\mathrm{Re}\left\{e^{-i\omega t}\right\} = E_0 \,\cos\omega t,$$

$$E_y(z=0,t) = E_0 \,\mathrm{Re}\left\{e^{-i\omega t + i\frac{\pi}{2}}\right\} = E_0 \,\sin\omega t,$$

Nechť je tloušťka $\lambda/4$ destičky několikanásobek vlnové délky v rychlejší ose $x$. Obr. 2.14b) ukazuje polarizaci vlny po výstupu z destičky.

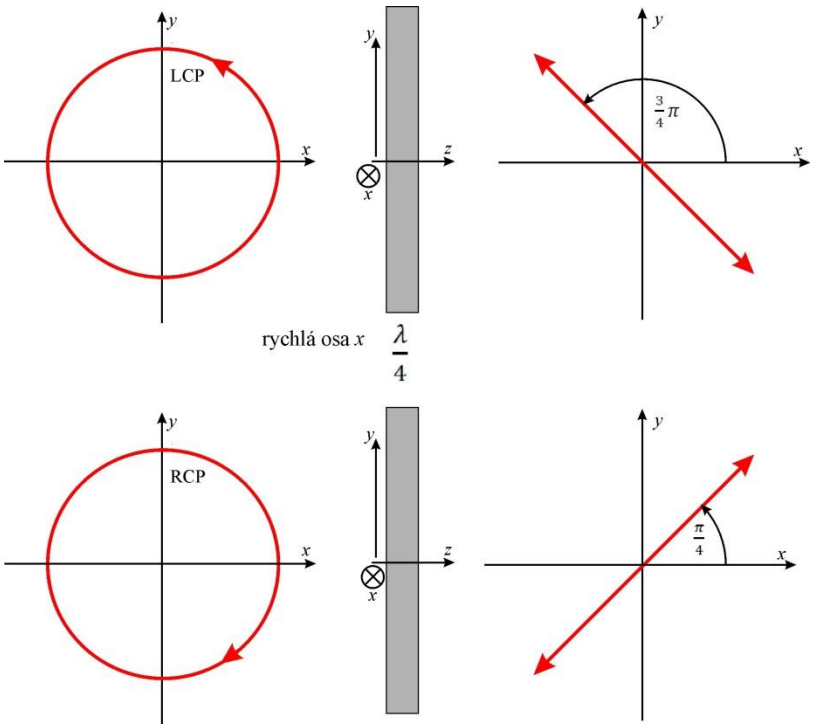
$$E_x(z=l\lambda_x,t) = E_0 \,\mathrm{Re}\left\{e^{i\frac{\omega}{c}n_x l\lambda_x - i\omega t}\right\} = E_0 \,\mathrm{Re}\left\{e^{i2\pi l - i\omega t}\right\} = E_0 \,\cos\omega t,$$

$$E_y(z=l\lambda_x,t) = E_0 \,\mathrm{Re}\left\{e^{-i\omega t + i\frac{\pi}{2} + i\frac{\omega}{c}n_y l\lambda_x + i\frac{\omega}{c}n_x l\lambda_x - i\frac{\omega}{c}n_x l\lambda_x}\right\} =$$

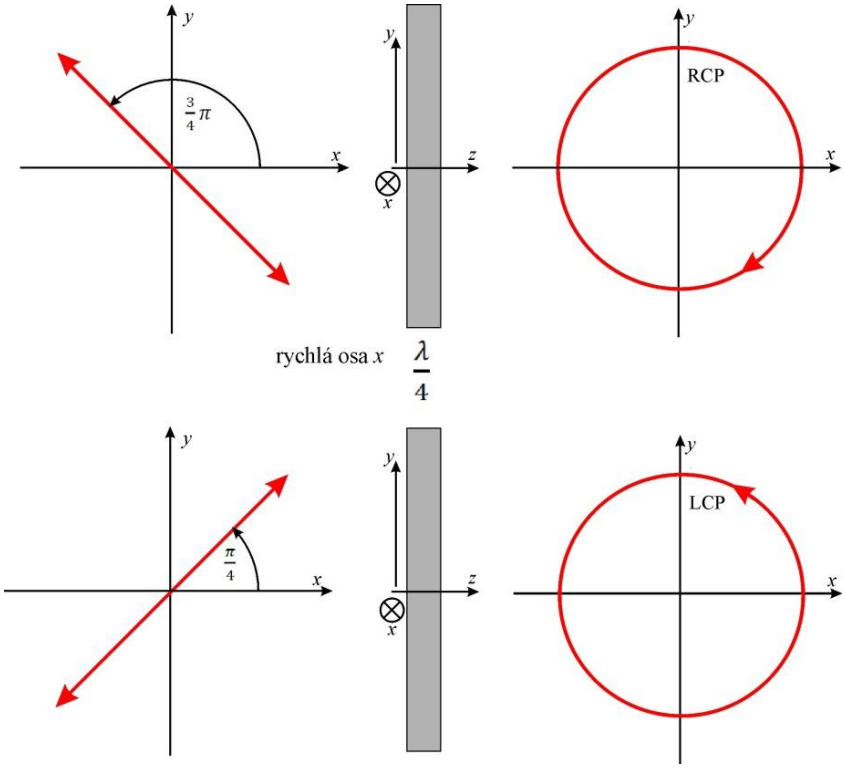
$$= E_0 \,\mathrm{Re}\left\{e^{-i\omega t + i\frac{\pi}{2} + i\frac{\omega}{c}(n_y - n_x)l\lambda_x + i2\pi l}\right\} = E_0 \,\mathrm{Re}\left\{e^{-i\omega t + i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} + i2\pi l}\right\} =$$

$$= E_0 \,\mathrm{Re}\left\{e^{-i\omega t + i\pi\,(2l+1)}\right\} = E_0\,(\cos\pi\cos\omega t + \sin\pi\sin\omega t) = -E_0 \,\cos\omega t,$$

což popisuje lineárně polarizovanou vlnu naznačenou na obrázku. Použili jsme vztahu popisujícího čtvrtvlnovou destičku tloušťky $d$ podmínkou $\frac{\omega}{c}(n_y - n_x)d = \frac{\pi}{2}$.




Obr. 2.15 Schématické znázornění působení čtvrtvlnové destičky na kruhově polarizovanou vlnu.



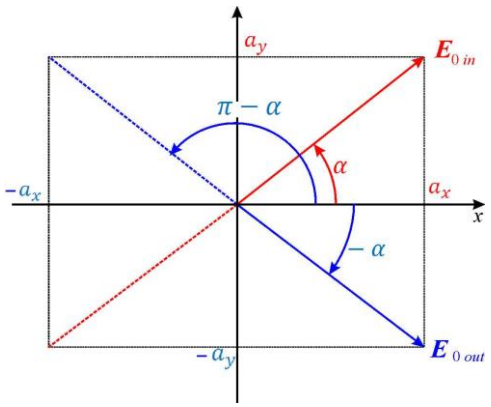

Obr. 2.16 Schématické znázornění působení čtvrtvlnové destičky na lineárně polarizovanou vlnu.

Dalším významným speciálním případem fázové destičky je destička **polovlnová**, kdy fázový rozdíl $\phi = \pi$. Její Jonesova matice je

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{\frac{\lambda}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Při průchodu lineárně polarizovaného světla s obecným úhlem natočení $\alpha$ vůči rychlé ose polovlnové fázové destičky vystupuje opět lineárně polarizované světlo, které je natočeno vůči rychlé ose o úhel $-\alpha$. Dojde tedy k rotaci roviny lineární polarizace vůči směru kmitání $\boldsymbol{E}$ vstupujícího lineárně polarizovaného světla o úhel $|2\alpha|$, obr. 2.17.

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}_{2\alpha}. \tag{2.30}$$



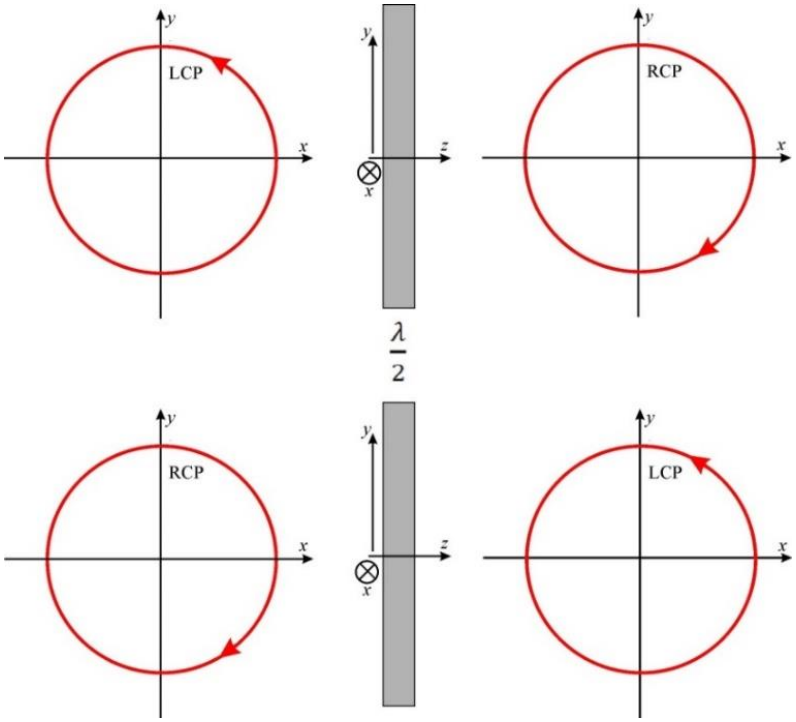

Obr. 2.17 Rotace lineárně polarizovaného světla při průchodu polovlnovou destičkou

Prochází-li polovlnovou destičkou levotočivé kruhově polarizované světlo (LCP) dostaneme na výstupu pravotočivé kruhově polarizované světlo (RCP)

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}_{RCP.} \tag{2.31}$$

Podobně při průchodu RCP světla dostaneme LCP vlnu

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}_{LCP}. \tag{2.32}$$




Obr. 2.18 Schématické znázornění působení polovlnové destičky na kruhově polarizované světlo

Zařízení, která umožňují nastavit v určitém intervalu **obecný fázový posuv** mezi rychlou a pomalou složkou rovinné vlny, se nazývají kompenzátory (viz. kapitola 10 „Anizotropní neabsorbující prostředí – lineární dvojlom“).

# 3. Odraz a lom na rozhraní dvou dielektrik

## 3.1 Zákon odrazu a lomu

Budeme popisovat odraz a lom rovinné vlny na rovinném rozhraní dvou homogenních, izotropních, „nemagnetických“ a neabsorbujících prostředí, v nichž je fázová rychlost rovinné elektromagnetické vlny určena reálnými a kladnými indexy lomu $n_1$ a $n_2$. Jedno z těchto prostředí může být vakuum (častěji vzduch, jehož index lomu je aproximován hodnotou $n \cong 1$). Neabsorbující prostředí je charakterizováno tím, že frekvence dopadající vlny je daleko od rezonančních frekvencí všech typů oscilátorů v obou prostředích (bude rozebráno v kapitole 12 „Absorpce a index lomu – interakce světla s látkou“). Budeme se zabývat stacionárním, prostorově a časově neomezeným dějem v modelu pracujícím s monochromatickými rovinnými vlnami. V modelu vystupují pouze tři vlny:

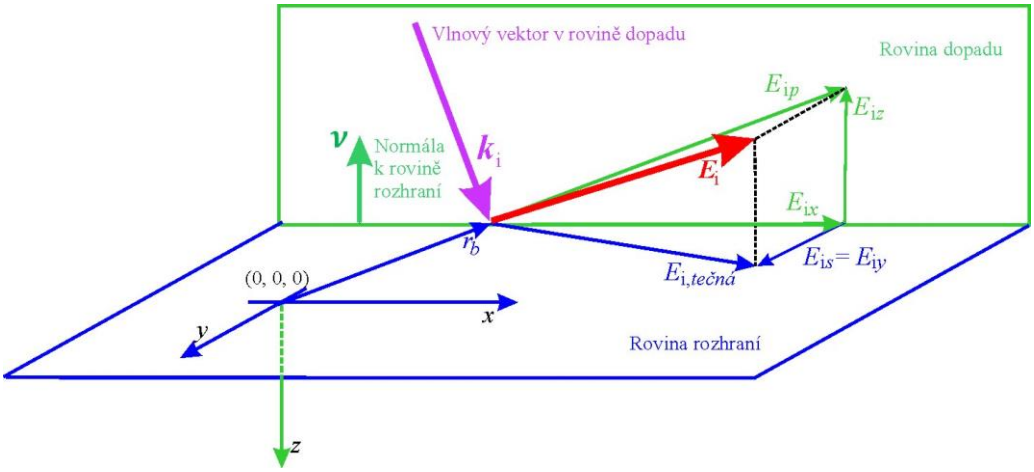
1) dopadající, která přichází z prostředí 1 a vyvolává odezvu (tj. nuceně rozkmitává dipóly v látkách – atomy, ionty, molekuly, ...) v obou prostředích na své frekvenci (nebo alespoň v jednom z nich, pokud je druhé vakuum);
2) odražená, která se šíří v prostředí 1;
3) lomená, která se šíří v prostředí 2.

Výsledek velmi složitých interferencí vln, které vysílají oscilátory nuceně rozkmitané nejen dopadající vlnou, ale též rozkmitané vlnami vysílanými okolními oscilátory, je z makroskopického hlediska kupodivu jednoduchý. Jsou to zmíněné tři rovinné vlny, které se v daných prostředích šíří fázovými rychlostmi popsanými reálnými indexy lomu $n_1$ a $n_2$. Odražená vlna vzniká složením vln vysílaných rozkmitanými oscilátory. Její fáze (jak se časově sejde s dopadající vlnou na rozhraní) je ovlivněna parametry těchto nuceně kmitajících oscilátorů (polarizovatelnost, „síla oscilátoru“, viz kapitola 12) a jejich koncentrací.

Základem **makroskopického** popisu jevů odrazu a lomu je splnění podmínek spojitosti na rozhraní pro tečné složky elektrického a magnetického pole pro rozhraní bez volných nábojů a bez volných (magnetizačních) proudů. Zvolme souřadnou soustavu $x, y, z$ tak, že rovina rozhraní bude ležet v rovině $z = 0$. V rovině rozhraní leží body s polohovými vektory $\boldsymbol{r}_b = (x, y, 0)$. Z podmínek spojitosti tečných složek na rozhraní dvou dielektrik plyne

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i},tečná}(\boldsymbol{r}_b, t) + \widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{r},tečná}(\boldsymbol{r}_b, t) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{t},tečná}(\boldsymbol{r}_b, t), \tag{3.1}$$

kde $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i},tečná}$ je průmět vektoru $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_b, t)$ dopadající vlny do roviny rozhraní. Podobné označení použijme pro vlnu odraženou $\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{r}_b, t)$ a vlnu lomenou $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}_b, t)$. Podmínka spojitosti celkového pole v prostředí 1 a pole v prostředí 2 musí být splněna v každém místě rozhraní $\boldsymbol{r}_b$ a v každém čase $t$.




Obr. 3.1 Průmět vektoru elektrického pole (červeně) do roviny rozhraní a do roviny dopadu. Modře jsou zakresleny složky ležící v rovině rozhraní, zeleně v rovině dopadu. Tečná složka k rovině rozhraní $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i},tečná}$ má souřadnice $(E_{\mathrm{i}x}, E_{\mathrm{i}y}, 0)$, složka $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}p}$ ležící v rovině dopadu má souřadnice $(E_{\mathrm{i}x}, 0, E_{\mathrm{i}z})$. Pro popis odrazu a lomu je důležité rozložení na komponentu $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}s} = (0, E_{\mathrm{i}y}, 0)$ a komponentu $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}p} = (E_{\mathrm{i}x}, 0, E_{\mathrm{i}z})$.

Pro intenzitu magnetického pole na rozhraní bez volných proudů platí obdobná podmínka spojitosti na rozhraní bez volných proudů

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{i},tečná}(\boldsymbol{r}_b, t) + \widetilde{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{r},tečná}(\boldsymbol{r}_b, t) = \widetilde{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{t},tečná}(\boldsymbol{r}_b, t). \tag{3.2}$$

Dopadající vlna nechť nabíhá z poloprostoru $z < 0$ (na obr. 3.1 v části nad rozhraním). Tam se nachází i odražená vlna. Lomená vlna (procházející rozhraním) je v poloprostoru $z \geq 0$. Tyto vlny můžeme zapsat

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}, t) &= \widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{i}}\, e^{i(\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\mathrm{i}} t)}, \qquad z \leq 0, \\
\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{r}, t) &= \widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{r}}\, e^{i(\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\mathrm{r}} t)}, \qquad z \leq 0, \\
\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}, t) &= \widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{t}}\, e^{i(\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\mathrm{t}} t)}, \qquad z \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor a $\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}$ a $\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}$ jsou vlnové vektory dopadající, odražené a lomené vlny, $\omega_{\mathrm{i}}, \omega_{\mathrm{r}}$ a $\omega_{\mathrm{t}}$ jejich kruhové frekvence, $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{i}}, \widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{r}}$ a $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{t}}$ komplexní vektorové amplitudy nezávislé na čase a prostorových souřadnicích. Tyto amplitudy určují směr kmitů, jejich velikost a zahrnují i fáze, se kterými se vlny setkávají, tedy i to, s jakou fází jednotlivé složky procházejí bodem $(0,0,0)$. Pro rovinnou postupnou homogenní vlnu jsou tyto vektory kolmé na vlnové vektory.

Protože komplexní vektorové amplitudy $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{i}}, \widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{r}}, \widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{t}}$ nezávisí na čase ani na souřadnici $\boldsymbol{r}_b$, časová a prostorová závislost dopadající, odražené a lomené vlny je pouze ve členech $\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{r}_b - \omega_{\mathrm{i}} t$ a spojitost tečných složek (3.1) musí platit ve **všech bodech rozhraní a ve všech časech,** musejí mít všechny její členy stejnou funkční závislost na $\boldsymbol{r}_b, t$ (poznámka P3.1) Platí tedy

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{r}_b - \omega_{\mathrm{i}} t = \boldsymbol{k}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{r}_b - \omega_{\mathrm{r}} t = \boldsymbol{k}_{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{r}_b - \omega_{\mathrm{t}} t. \tag{3.4}$$

Ve stacionárním případě skalární součiny $\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{r}_b$, $\boldsymbol{k}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{r}_b$, $\boldsymbol{k}_\mathrm{t} \cdot \boldsymbol{r}_b$ na čase nezávisí, protože pracujeme s rovinnými, monochromatickými (harmonickými) vlnami. Na čase jsou závislé pouze členy $\propto \omega_\mathrm{i} t, \omega_\mathrm{r} t, \omega_\mathrm{t} t$. Ani případné fázové posuny, které jsou zahrnuty v komplexních vektorových amplitudách, na tom nic nemění, protože jsou také prostorově a časově konstantní. Přitom (3.4) musí platit pro všechny časy v libovolném místě $\boldsymbol{r}_b$, např. i v $\boldsymbol{r}_b = 0$

$$\omega_\mathrm{i} t = \omega_\mathrm{r} t = \omega_\mathrm{t} t, \tag{3.5}$$

$$\omega_\mathrm{i} = \omega_\mathrm{r} = \omega_\mathrm{t} = \omega. \tag{3.6}$$

Dopadající, odražená a lomená vlna mají stejnou frekvenci. Položme nyní $t = 0$. Z rovnice (3.5) dostaneme pro libovolný bod rozhraní $\boldsymbol{r}_b$

$$\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{r}_b = \boldsymbol{k}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{r}_b = \boldsymbol{k}_\mathrm{t} \cdot \boldsymbol{r}_b. \tag{3.7}$$

Tyto součiny určují prostorovou periodicitu **v rovině rozhraní**. Aby mohly být splněny hraniční podmínky ve všech bodech rozhraní, průměty vlnových vektorů do roviny rozhraní jsou stejné pro dopadající, odraženou a lomenou vlnu.. Zvolili jsme souřadnou soustavu tak, že rovina dopadu bude určena osami $x, z$ (je kolmá na osu $y$) a rovina rozhraní osami $x, y$. Vlnový vektor dopadající vlny je z definice roviny dopadu, obr. 3.2 a)

$$\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \equiv (k_{\mathrm{i}x} \geq 0, 0, k_{\mathrm{i}z} > 0\ ) = \frac{\omega}{c} n_1 (\sin \Theta_\mathrm{i}, 0\ , \cos \Theta_\mathrm{i}). \tag{3.8}$$

Rozepišme skalární součiny tak, že nahradíme vektor $\boldsymbol{r}_b$ jeho kartézskými složkami $(x, y, 0)$.

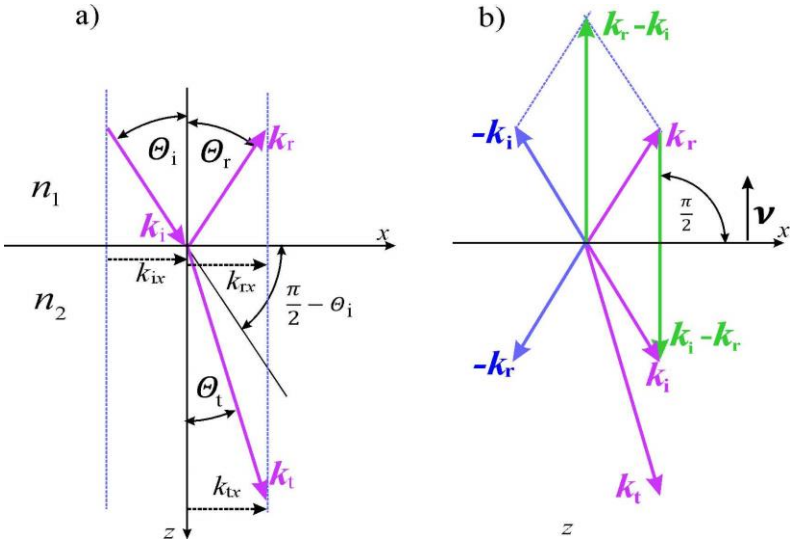
$$\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{r}_b = k_{\mathrm{i}x} x = k_{\mathrm{r}x} x + k_{\mathrm{r}y} y = k_{\mathrm{t}x} x + k_{\mathrm{t}y} y, \tag{3.9}$$

což musí platit pro všechny body rozhraní $\boldsymbol{r}_b = (x, y, 0)$, a to lze splnit jen pro $k_{\mathrm{r}y} = k_{\mathrm{t}y} = 0$. Vlnové vektory odražené a prošlé vlny mají tvar

$$\boldsymbol{k}_\mathrm{r} \equiv (k_{\mathrm{r}x} \geq 0, 0, k_{\mathrm{r}z} < 0) = \frac{\omega}{c} n_1 (\sin \Theta_\mathrm{r}, 0\ , -\cos \Theta_\mathrm{r}), \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{k}_\mathrm{t} \equiv (k_{\mathrm{t}x} \geq 0, 0, k_{\mathrm{t}z} > 0\ ) = \frac{\omega}{c} n_2 (\sin \Theta_\mathrm{t}, 0\ , \cos \Theta_\mathrm{t}). \tag{3.11}$$

To znamená, že **vlnové vektory dopadající, odražené a lomené vlny leží v rovině dopadu** (v námi zvolené soustavě souřadné je to rovina $xz$). Podmínka $k_{\mathrm{i}x} = k_{\mathrm{r}x} = k_{\mathrm{t}x}$ je graficky znázorněna na obr. 3.2 a).




Obr. 3.2 a) Pohled na rovinu dopadu, kde jsou zavedeny orientace vlnových vektorů a naznačeny úhly dopadu, odrazu a lomu. b) Geometrická konstrukce ukazující, že rozdíl vlnových vektorů dopadající a odražené vlny $\boldsymbol{k}_\mathrm{i} - \boldsymbol{k}_\mathrm{r}$ leží v rovině dopadu kolmé k rovině rozhraní.

Shrňme, k čemu jsme došli,

$$k_{\mathrm{i}x}x = k_{\mathrm{r}x}x = k_{\mathrm{t}x}x = \boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{r}_b = \boldsymbol{k}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{r}_b = \boldsymbol{k}_\mathrm{t} \cdot \boldsymbol{r}_b,$$

rozepsáním $x$-ových komponent vektorů $\boldsymbol{k}$ obdržíme

$$k_{\mathrm{i}x} = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\Theta_\mathrm{i} = k_{\mathrm{r}x} = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\Theta_\mathrm{r} = k_{\mathrm{t}x} = \frac{\omega}{c} n_2 \sin\Theta_\mathrm{t}$$

a vydělením konstantami pak dostaneme

$$\sin\Theta_\mathrm{i} = \sin\Theta_\mathrm{r}\,.$$

Protože jsme uvažovali úhly dopadu, odrazu i lomu jen z intervalu $(0, \frac{\pi}{2}\rangle$ dostáváme nakonec

$$\Theta_\mathrm{i} = \Theta_\mathrm{r}, \qquad \text{zákon odrazu} \qquad (3.12)$$

$$n_1 \sin\Theta_i = n_2 \sin\Theta_\mathrm{t}. \qquad \text{zákon lomu} \qquad (3.13)$$

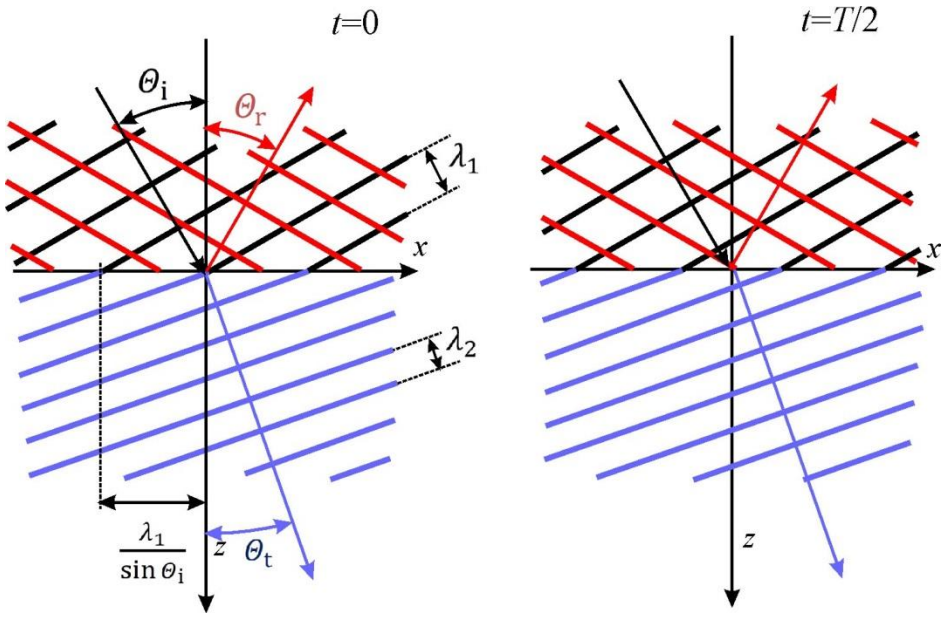
Poslední řádky představují zákon odrazu a zákon lomu s tím, že **všechny tři vlnové vektory leží v rovině dopadu** ($k_{\mathrm{i}y} = k_{\mathrm{r}y} = k_{\mathrm{t}y} = 0$). Zákon lomu je pojmenován Snellův zákon lomu (Willebrord Snell, 1580 – 1626, který zákon pro moderní dobu znovuobjevil). Dopadající rovinná homogenní vlna vytváří v rovině rozhraní periodickou strukturu podél osy $x$ s periodou vyplývající z průmětu vlnového vektoru do osy $x$

$$\Lambda_x = \frac{2\pi}{k_{\mathrm{i}x}} = \frac{2\pi c}{\omega n_1 \sin\Theta_\mathrm{i}} = \frac{cT}{n_1 \sin\Theta_\mathrm{i}} = \frac{\lambda_0}{n_1 \sin\Theta_\mathrm{i}} = \frac{\lambda_1}{\sin\Theta_\mathrm{i}}. \qquad (3.14)$$

Tato periodická struktura se za dobu časové periody $T = \frac{2\pi}{\omega}$ posune podél rozhraní právě o tuto prostorovou periodu, tedy se podél osy $x$ v rovině rozhraní $xy$ pohybuje rychlostí

$$v_{bx} = \frac{\Lambda_x}{T} = \frac{c}{n_1 \sin \Theta_i}, \tag{3.15}$$

což je znázorněno na obr. 3.3.

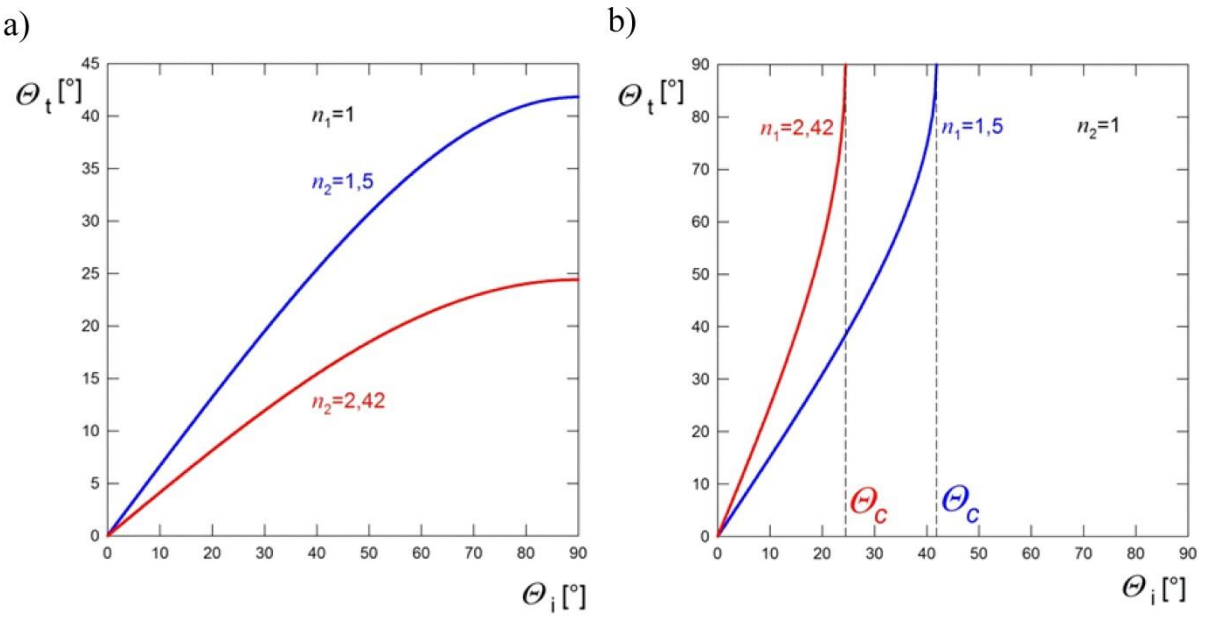



Obr. 3.3 Znázornění navazování vlnoploch při odrazu a lomu. Situace odpovídá odrazu na opticky hustším prostředí pro úhel dopadu $\Theta_i = 30°$. Zakreslena jsou kladná maxima elektrických polí: černě dopadající vlna, červeně odražená vlna a modře lomená vlna. Posun vlnoploch za čas $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ v pravé části obrázku odpovídá polovině periody $\frac{\Lambda_x}{2} = \frac{\lambda_1}{2 \sin \Theta_i}$. Maxima odražené vlny jsou v tomto případě (odraz na neabsorbujícím opticky hustším prostředí) posunuta o $\frac{\Lambda_x}{2}$ vůči maximům vlny dopadající i lomené.

Ve směru osy $y$ dopadající vlna periodicky proměnnou strukturu nevytváří, $k_{iy} = 0$, což znamená $\Lambda_y \to \infty$. Struktury (harmonické funkce) se stejnou periodou musí mít i vlny odražená a lomená, protože vznikají jako důsledek odezvy na excitaci vlnou dopadající a splňují podmínky na rozhraní.

Na obr. 3.4 jsou uvedeny příklady závislosti úhlu lomu na úhlu dopadu podle Snellova zákona (3.13). V případě lomu pro $n_1 > n_2$ dochází pro úhly dopadu větší než je úhel kritický $\Theta_i > \Theta_C$ k jevu zvanému **totální (úplný) odraz**. Kritický úhel dopadu (zvaný též mezní úhel) je dán vztahem (odvození je uvedeno v části 3.2.3)

$$\sin \Theta_C = \frac{n_2}{n_1}. \tag{3.16}$$




Obr. 3.4 Závislosti úhlu lomu a) pro prostředí 1 je $n_1 = 1$ a $n_2 = 1{,}5$ (sklo) a $n_2 = 2{,}42$ (diamant); b) pro lom z prostředí opticky hustšího do prostředí s nižším indexem lomu.

## 3.2 Fresnelovy vztahy

Dále se budeme zabývat intenzitou odražené a lomené vlny a odvodíme tzv. Fresnelovy vztahy. Augustin-Jean Fresnel byl francouzský fyzik (1788 – 1827), který významně přispěl k rozvoji vlnové teorie světla. V případě vlny obecné polarizace začneme tím, že rozložíme tuto vlnu do dvou lineárně polarizovaných vln, čili intenzitu elektrického pole dopadající vlny rozložíme do dvou vektorů, a to do vektoru kolmého k rovině dopadu $\boldsymbol{E}_{is}$ (tento případ bývá označován jako polarizace $s$ - z německého senkrecht) a vektoru rovnoběžného s rovinou dopadu $\boldsymbol{E}_{ip}$ (polarizace *p*, z německého parallel), viz obr. 3.1. Jak uvidíme, vztahy pro intenzity odražené a lomené vlny závisejí na polarizaci tak, že jedna sada rovnic platí pro polarizaci, kdy elektrické vektory vln $\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{E}_t$ jsou kolmé k rovině dopadu a jiné vztahy platí pro polarizaci, ve které tyto vektory leží v rovině dopadu. Případy těchto dvou polarizací je potřeba pro $\Theta_i \neq 0$ diskutovat odděleně. I nadále budeme pracovat v pravotočivé souřadné soustavě $x, y, z$, ve které osa $z$ je normála k rovině rozhraní, osa $x$ leží v rovině rozhraní a zároveň v rovině dopadu a osa $y$ leží v rovině rozhraní a je kolmá k rovině dopadu. Připomeňme, že rovina dopadu je určena normálou k rovině rozhraní (osa $z$) a vlnovým vektorem dopadající vlny $\boldsymbol{k}_i$. Rovněž vlnové vektory $\boldsymbol{k}_r$ a $\boldsymbol{k}_t$ leží v této rovině (obr. 3.2). Vztah mezi magnetickým polem, vlnovým vektorem a elektrickým polem postupné, rovinné, homogenní a netlumené vlny je dán součinem (rovnice (1.34))

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{n}{c}\,\boldsymbol{s}_0 \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t). \tag{3.17}$$

### 3.2.1 Fresnelovy vztahy - Elektrické pole vln kolmé k rovině dopadu (polarizace $s$)

Zopakujme podmínku spojitosti elektrického pole, která pro polarizaci $s$ zní

$$E_{\mathrm{i}y} + E_{\mathrm{r}y} = E_{\mathrm{t}y}. \tag{3.18}$$

Budeme pro další odvození předpokládat, že všechny veličiny v rovnici (3.18) jsou kladné. Vlnové vektory byly uvedeny ve vztazích (3.8), (3.10) a (3.11). Ostatní složky elektrického pole jsou nulové. Magnetické pole dopadající vlny je

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{i}} = \frac{1}{\omega}\left(k_{\mathrm{i}y}E_{\mathrm{i}z} - k_{\mathrm{i}z}E_{\mathrm{i}y},\qquad k_{\mathrm{i}z}E_{\mathrm{i}x} - k_{\mathrm{i}x}E_{\mathrm{i}z},\qquad k_{\mathrm{i}x}E_{\mathrm{i}y} - k_{\mathrm{i}y}E_{\mathrm{i}x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\omega}\,E_{\mathrm{i}y}(-k_{\mathrm{i}z}, 0, k_{\mathrm{i}x}) = \frac{n_1}{c}\,E_{\mathrm{i}y}\,(-\cos\Theta_{\mathrm{i}}, 0, \sin\Theta_{\mathrm{i}})\,.$$

Stejně odvodíme složky $B_{\mathrm{r}x}$ a $B_{\mathrm{t}x}$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{\omega}\,E_{\mathrm{r}y}(-k_{\mathrm{r}z}, 0, k_{\mathrm{r}x}) = \frac{n_1}{c}\,E_{\mathrm{r}y}\,(\cos\Theta_{\mathrm{i}}, 0, \sin\Theta_{\mathrm{i}}),$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{t}} = \frac{1}{\omega}\,E_{\mathrm{t}y}(-k_{\mathrm{t}z}, 0, k_{\mathrm{t}x}) = \frac{n_2}{c}\,E_{\mathrm{t}y}\,(-\cos\Theta_{\mathrm{t}}, 0, \sin\Theta_{\mathrm{t}}).$$

Vzhledem k tomu, že v rovině rozhraní má magnetické pole dopadající, odražené i lomené vlny nenulové jen $x$-ové složky, je podmínka spojitosti tečných složek magnetického pole

$$\begin{gathered} B_{\mathrm{i}x} + B_{\mathrm{r}x} = B_{\mathrm{t}x}, \\ -n_1 E_{\mathrm{i}y}\cos\Theta_{\mathrm{i}} + n_1 E_{\mathrm{r}y}\cos\Theta_{\mathrm{i}} = -n_2\,E_{\mathrm{t}y}\cos\Theta_{\mathrm{t}}\,, \end{gathered} \tag{3.19}$$

kam můžeme dosadit ze spojitosti elektrického pole

$$-n_1 E_{\mathrm{i}y}\cos\Theta_{\mathrm{i}} + n_1 E_{\mathrm{r}y}\cos\Theta_{\mathrm{i}} = -n_2\left(E_{\mathrm{i}y} + E_{\mathrm{r}y}\right)\cos\Theta_{\mathrm{t}}\,.$$

Zavedeme amplitudové koeficienty odrazu a průchodu pro polarizaci $s$

$$r_s = \frac{E_{\mathrm{r}y}}{E_{\mathrm{i}y}} = \frac{E_{\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{i}}},\qquad t_s = \frac{E_{\mathrm{t}y}}{E_{\mathrm{i}y}} = \frac{E_{\mathrm{t}}}{E_{\mathrm{i}}}\,. \tag{3.20}$$

a dostaneme

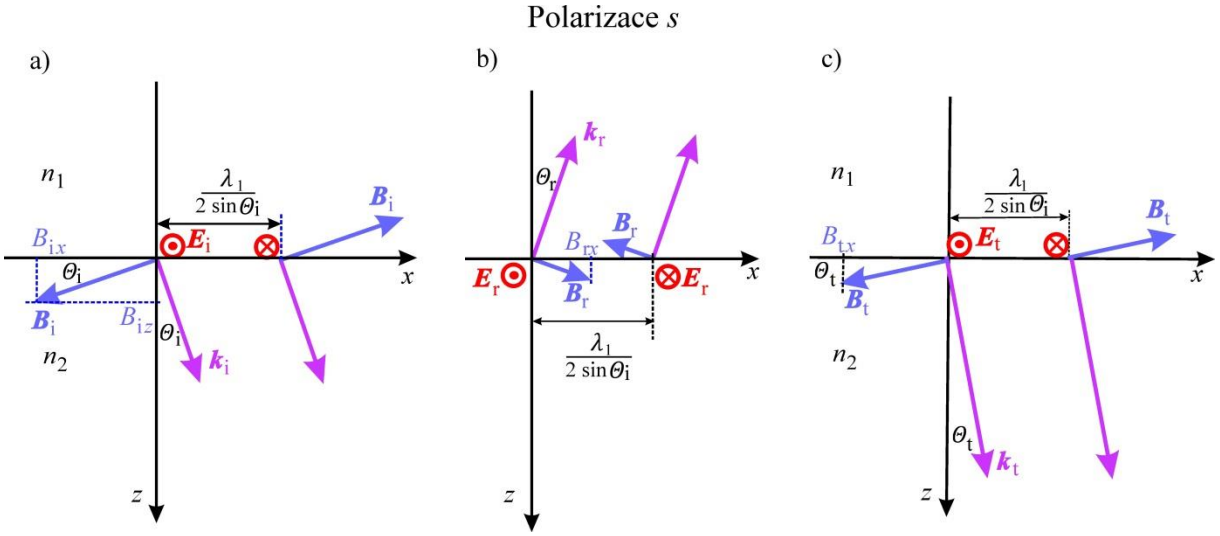
$$-n_1\cos\Theta_{\mathrm{i}} + n_1 r_s\cos\Theta_{\mathrm{i}} = -n_2\cos\Theta_{\mathrm{t}} - n_2 r_s\cos\Theta_{\mathrm{t}}\,,$$

$$r_s\,(n_1\cos\Theta_{\mathrm{i}} + n_2\cos\Theta_{\mathrm{t}}) = n_1\cos\Theta_{\mathrm{i}} - n_2\cos\Theta_{\mathrm{t}}\,,$$

$$r_s = \frac{n_1\cos\Theta_{\mathrm{i}} - n_2\cos\Theta_{\mathrm{t}}}{n_1\cos\Theta_{\mathrm{i}} + n_2\cos\Theta_{\mathrm{t}}}\,. \tag{3.21}$$

Ze spojitosti tečných složek elektrického pole plyne

$$t_s = 1 + r_s = \frac{2n_1 \cos\Theta_\mathrm{i}}{n_1 \cos\Theta_\mathrm{i} + n_2 \cos\Theta_\mathrm{t}}. \tag{3.22}$$




Obr. 3.5 Vzájemná orientace vektorů $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ v dopadající vlně (a), odražené vlně (b) a v lomené vlně (c) zakreslené v jednom čase a ve dvou místech vzdálených o půlperiodu $\frac{\lambda_1}{2\sin\Theta_\mathrm{i}}$

## 3.2.2 Fresnelovy vztahy - Elektrické pole vln v rovině dopadu (polarizace $p$)

Podobným postupem jako při výkladu polarizace $s$, odvodíme Fresnelovy vztahy pro polarizaci $p$. Pro polarizaci $p$ je podmínka spojitosti tečných složek elektrického pole

$$E_{\mathrm{i}x} + E_{\mathrm{r}x} = E_{\mathrm{t}x}\,. \tag{3.23}$$

V tomto uspořádání tyto složky elektrického pole nejsou jediné, ale nenulové jsou i $z$-ové komponenty, viz obr. 3.6

$$E_{\mathrm{i}x} = E_\mathrm{i}\ \cos\Theta_\mathrm{i}, \qquad E_{\mathrm{i}z} = -E_\mathrm{i}\ \sin\Theta_\mathrm{i},$$
$$E_{\mathrm{r}x} = E_\mathrm{r}\ \cos\Theta_\mathrm{i}, \qquad E_{\mathrm{r}z} = E_\mathrm{r}\ \sin\Theta_\mathrm{i},$$
$$E_{\mathrm{t}x} = E_\mathrm{t}\ \cos\Theta_\mathrm{t}, \qquad E_{\mathrm{t}x} = E_\mathrm{t}\ \sin\Theta_\mathrm{t},$$

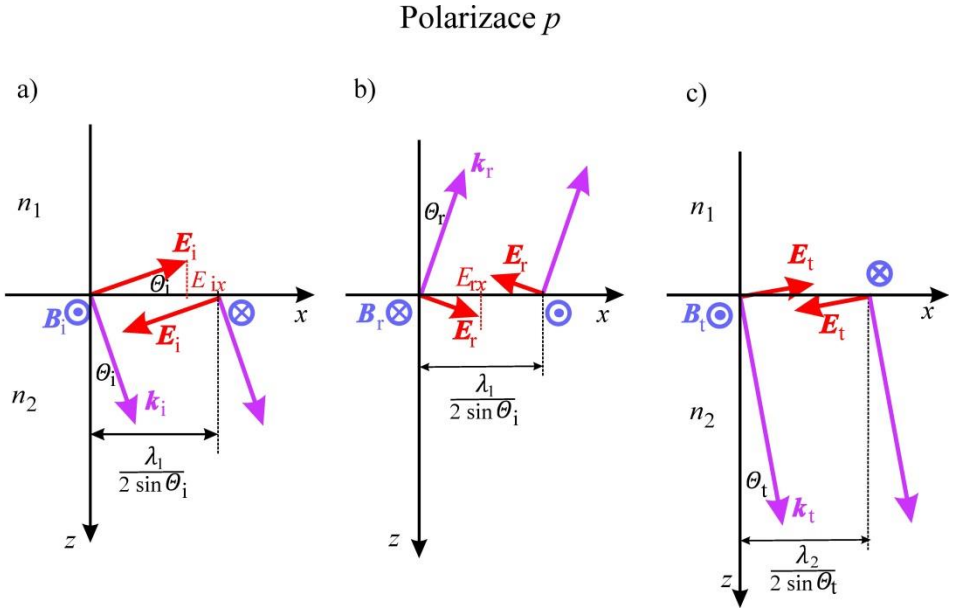
$y$-ové složky jsou nulové. Pro složky magnetického pole platí

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{i} = \frac{1}{\omega}\left(k_{\mathrm{i}y}E_{\mathrm{i}z} - k_{\mathrm{i}z}E_{\mathrm{i}y},\quad k_{\mathrm{i}z}E_{\mathrm{i}x} - k_{\mathrm{i}x}E_{\mathrm{i}z},\quad k_{\mathrm{i}x}E_{\mathrm{i}y} - k_{\mathrm{i}y}E_{\mathrm{i}x}\right) =$$
$$= \left(0,\quad \frac{\omega}{c}n_1 E_\mathrm{i}(\cos\Theta_\mathrm{i}\ \cos\Theta_\mathrm{i} + \sin\Theta_\mathrm{i}\sin\Theta_\mathrm{i}),\quad 0\right)$$

a podobně

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{r} = \left(0, \quad \frac{\omega}{c} n_1 E_\mathrm{r}(-\cos\Theta_\mathrm{i}\ \cos\Theta_\mathrm{i} - \sin\Theta_\mathrm{i}\sin\Theta_\mathrm{i}), \quad 0\right),$$

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{t} = \left(0, \quad \frac{\omega}{c} n_2 E_\mathrm{t}(\cos\Theta_\mathrm{t}\ \cos\Theta_\mathrm{t} + \sin\Theta_\mathrm{t}\sin\Theta_\mathrm{t}), \quad 0\right).$$




Obr. 3.6 Vzájemná orientace vektorů $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ v dopadající (a) odražené (b) a lomené (c) vlně zakreslené v jednom čase a ve dvou místech vzdálených o půlperiodu $\frac{\lambda_1}{2\sin\Theta_\mathrm{i}}$. pro případ polarizace $p$.

Podmínka spojitosti tečných složek je

$$B_{\mathrm{i}y} + B_{\mathrm{r}y} = B_{\mathrm{t}y},$$

$$\frac{\omega}{c} n_1 E_\mathrm{i} - \frac{\omega}{c} n_1 E_\mathrm{r} = \frac{\omega}{c} n_2 E_\mathrm{t}. \tag{3.24}$$

Opět zaveďme amplitudové koeficienty, nyní pro polarizaci $p$

$$r_p = \frac{E_\mathrm{r}}{E_\mathrm{i}}, \qquad t_p = \frac{E_\mathrm{t}}{E_\mathrm{i}}. \tag{3.25}$$

Podmínky spojitosti elektrického a magnetického pole

$$\cos\Theta_\mathrm{i} + r_p\ \cos\Theta_\mathrm{i} = t_p\ \cos\Theta_\mathrm{t},$$

$$n_1 - n_1 r_p = n_2 t_p\ .$$

Z druhé rovnice dosadíme do první

$$n_2\cos\Theta_\mathrm{i} + n_2\, r_p \cos\Theta_\mathrm{i} = n_1\cos\Theta_\mathrm{t} - n_1 r_p \cos\Theta_\mathrm{t},$$

z čehož plyne

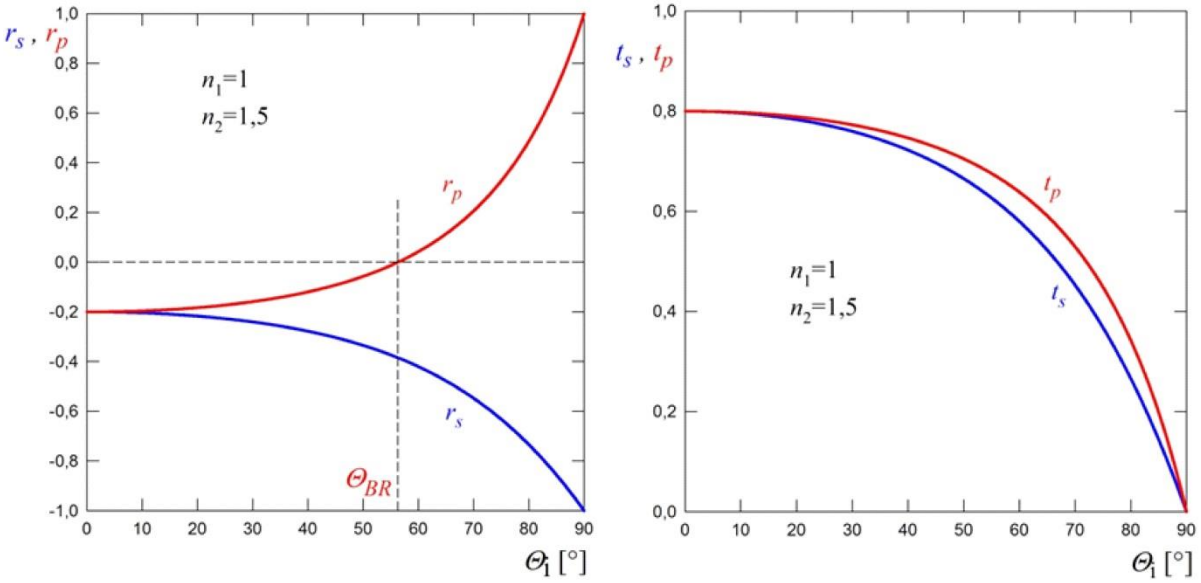
$$r_p = \frac{n_1 \cos \Theta_\mathrm{t} - n_2 \cos \Theta_\mathrm{i}}{n_1 \cos \Theta_\mathrm{t} + n_2 \cos \Theta_\mathrm{i}} \tag{3.26}$$

a

$$t_p = \left(1 + r_p\right) \frac{\cos \Theta_\mathrm{i}}{\cos \Theta_\mathrm{t}} = \frac{2 n_1 \cos \Theta_\mathrm{i}}{n_1 \cos \Theta_\mathrm{t} + n_2 \cos \Theta_\mathrm{i}} . \tag{3.27}$$

### 3.2.3 Odraz a lom na opticky hustším prostředí $(n_1 < n_2)$

Závislosti amplitudových koeficientů odrazu a transmise na úhlu dopadu pro případ odrazu a lomu na opticky hustším prostředí $n_1 < n_2$ jsou zobrazeny pro obě polarizace na obr. 3.7. V případě odrazu na opticky hustším prostředí ze zákona lomu (3.13) plyne, že pro $\Theta_\mathrm{i} > \Theta_\mathrm{t}$, dochází k lomu ke kolmici v rovině rozhraní. Úhly dopadu, odrazu a lomu uvažujeme z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, kdy je funkce sinus rostoucí a funkce kosinus klesající. Proto platí, že $\cos \Theta_\mathrm{i} < \cos \Theta_\mathrm{t}$, tedy i $n_1 \cos \Theta_\mathrm{i} < n_2 \cos \Theta_\mathrm{t}$. Čitatel vztahu (3.21) je pro všechny úhly dopadu záporný, jmenovatel je vždy kladný. Proto je $r_s < 0$ v celém rozsahu úhlů dopadu $\Theta_\mathrm{i}$.




Obr. 3.7 Závislosti amplitudových Fresnelových koeficientů odrazu a transmise na úhlu dopadu pro případ rozhraní vzduch (index lomu $n_\mathrm{i} = n_1 = 1$) a sklo (index lomu $n_\mathrm{t} = n_2 = 1{,}5$)

Pro složky $y$ odražené vlny můžeme psát pro reálné $r_s < 0$

$$r_s = \frac{|E_{\mathrm{r}y}|}{|E_{\mathrm{i}y}|} \, e^{i\pi} = -\frac{|E_{\mathrm{r}y}|}{|E_{\mathrm{i}y}|} . \tag{3.28}$$

Záporné znaménko amplitudového Fresnelova koeficientu odrazu $r_s$ tedy znamená změnu fáze dopadající vlny při odrazu o fázový úhel $\pi$. Stejně to platí i pro případ koeficientu $r_p$

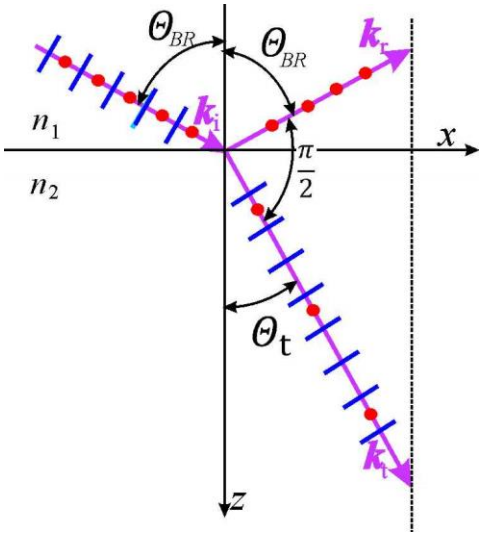
diskutovaný dále. Připomeňme, že při odvození jsme **předpokládali**, že vektory $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$ a $\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}$ jsou orientovány tak, že složky $E_{\mathrm{i}y}\ a\ E_{\mathrm{r}y}$ jsou obě kladné – vztah (3.18) a obr. 3.5. V intervalech úhlů dopadu $\Theta_{\mathrm{i}}$, pro které jsou koeficienty $r_s$ a $r_p$ záporné (obr. 3.7), tedy tento náš předpoklad nebyl splněn a oba vektory jsou orientovány opačně. Je-li v daný okamžik složka $E_{\mathrm{i}y}$ kladná, je složka $E_{\mathrm{r}y}$ záporná. Naopak pro koeficient $r_p(\Theta_{\mathrm{i}} > \Theta_{BR}) > 0$ kmitají $E_{\mathrm{i}y}(z=0)$ a $E_{\mathrm{r}y}(z=0)$ ve fázi.

Vztah pro koeficienty $r_s$ a $r_p$ lze s využitím zákona lomu upravit (poznámka P3.2) do tvaru

$$r_s = \frac{n_1 \cos\Theta_{\mathrm{i}} - n_2 \cos\Theta_{\mathrm{t}}}{n_1 \cos\Theta_{\mathrm{i}} + n_2 \cos\Theta_{\mathrm{t}}} = \frac{\sin(\Theta_{\mathrm{t}} - \Theta_{\mathrm{i}})}{\sin(\Theta_{\mathrm{t}} + \Theta_{\mathrm{i}})}, \qquad \Theta_{\mathrm{i}} \neq 0,$$
$$r_p = \frac{n_1 \cos\Theta_{\mathrm{t}} - n_2 \cos\Theta_{\mathrm{i}}}{n_1 \cos\Theta_{\mathrm{t}} + n_2 \cos\Theta_{\mathrm{i}}} = \frac{\mathrm{tg}\,(\Theta_{\mathrm{t}} - \Theta_{\mathrm{i}})}{\mathrm{tg}\,(\Theta_{\mathrm{t}} + \Theta_{\mathrm{i}})}, \qquad \Theta_{\mathrm{i}} \neq 0. \tag{3.29}$$

Pro $\Theta_{\mathrm{t}} + \Theta_{\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2}$ je zjevně $r_p = 0$. Složka polarizace ležící v rovině dopadu se v tomto případě neodráží. Odráží se pouze složka kolmá k rovině dopadu, čehož lze využít k přípravě lineárně polarizovaného světla odrazem. Úhel dopadu $\Theta_{BR}$, při kterém k tomu dochází, se nazývá Brewsterův úhel

$$\Theta_{\mathrm{i}} = \Theta_{BR}, \qquad \mathrm{tg}\,(\Theta_{\mathrm{t}} + \Theta_{BR}) \to \infty,$$
$$\Theta_{\mathrm{t}} + \Theta_{BR} = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{tg}\,\Theta_{BR} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{3.30}$$




Obr. 3.8 Odraz a lom při dopadu pod Brewsterovým úhlem. Odražená vlna je lineárně polarizovaná kolmo k rovině dopadu.

Souhrnně můžeme říci, že v případě odrazu na opticky hustším, neabsorbujícím prostředí jsou Fresnelovy koeficienty (3.21), (3.22), (3.26) a (3.27) reálná čísla pro všechny úhly dopadu $\Theta_{\mathrm{i}}$. Z obr. 3.7 je patrné, že transmisní koeficienty jsou vždy kladné. To znamená, že vektor elektrické intenzity kmitá v lomené (propuštěné) vlně ve fázi s vlnou dopadající.

V matematickém zápisu jsme předpokládali při odvození koeficientů, že tomu tak je a kladné znaménko výsledků výpočtů zobrazených pro $t_s$ a $t_p$ náš předpoklad potvrdilo.

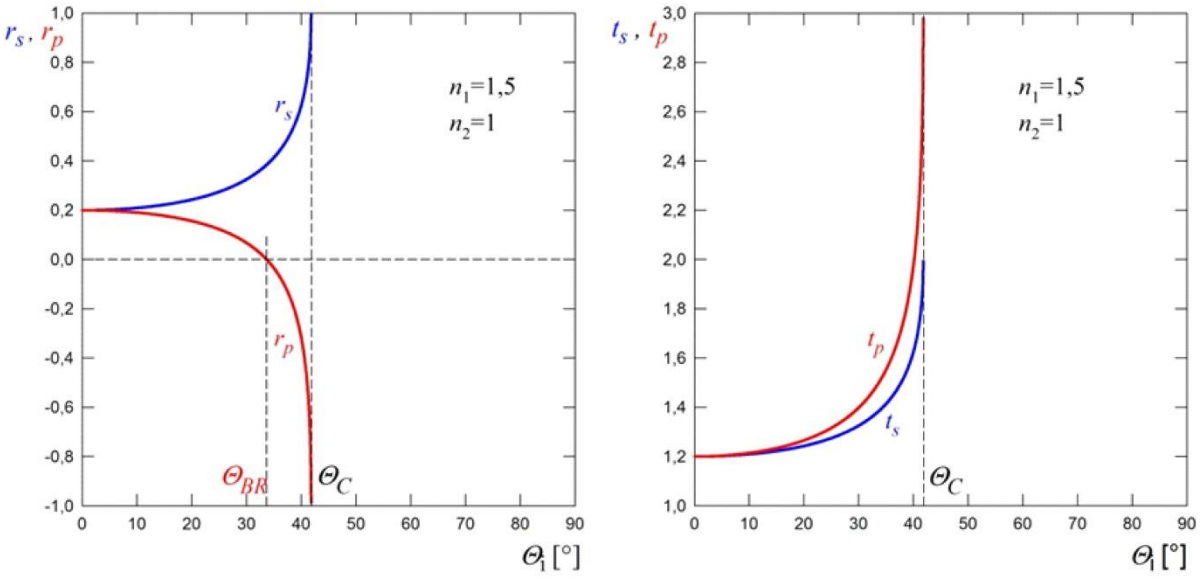
V případě odrazu na opticky hustším prostředí je Fresnelův koeficient $r_s$ záporný pro všechny úhly dopadu $\Theta_\mathrm{i}$. Náš předpoklad o souhlasném směru vektorů elektrické intenzity v dopadající a odražené vlně tedy splněn nebyl. Elektrické pole odražené vlny kmitá v protifázi vůči vlně dopadající.

### 3.2.4 Odraz a lom na opticky řidším prostředí $(n_1 > n_2)$

V případě odrazu na opticky řidším prostředí ze zákona lomu (3.13) plyne, že $\Theta_\mathrm{i} < \Theta_\mathrm{t}$ a dochází k lomu od kolmice k rovině rozhraní. Se zvětšujícím se úhlem dopadu nastane situace, kdy úhel lomu dosáhne 90°. Úhel dopadu pro tento případ $\Theta_C$ nazýváme kritický nebo mezní. Ze zákona lomu plyne

$$n_1 \sin\Theta_C = n_2 \sin\frac{\pi}{2} = n_2, \qquad \sin\Theta_C = \frac{n_2}{n_1}. \tag{3.31}$$

Průběhy amplitudových Fresnelových koeficientů odrazu a lomu pro $\Theta_\mathrm{i} < \Theta_C$ jsou zobrazeny na obr. 3.9. V případě odrazu na opticky řidším prostředí nabývají Fresnelovy koeficienty reálných hodnot pouze pro úhly dopadu menší než kritický úhel $\Theta_C$. Pro $\Theta_\mathrm{i} \geq \Theta_C$ nastává totální odraz spojený s obecným fázovým posuvem mezi dopadající a odraženou vlnou popsatelný komplexními amplitudovými koeficienty odrazu, jejichž absolutní hodnoty jsou $|\tilde{r}_s| = |\tilde{r}_p| = 1$.




Obr. 3.9 Závislosti amplitudových Fresnelových koeficientů odrazu a transmise na úhlu dopadu pro případ rozhraní sklo (index lomu $n_\mathrm{i} = n_1 = 1.5$) a vzduch (index lomu $n_\mathrm{t} = n_2 = 1$)

V polarizaci $p$ koeficient odrazu $r_p$ mění znaménko právě při Brewsterově úhlu $\Theta_{BR}$. Pro úhly dopadu menší než Brewsterův úhel je koeficient odrazu kladný, což znamená, že elektrické pole odražené vlny v rovině rozhraní kmitá ve fázi s vlnou dopadající. Znamená to, že elektrická

pole dopadající a odražené vlny kmitají ve fázi. Správné započtení případné změny fáze při odrazu je klíčové při odvozování fázových rozdílů interferujících vln (podrobněji v kapitole 4 „Interference (část 1) – skládání monochromatických vln stejné frekvence“). Pro úhly dopadu větší než Brewsterův úhel je znaménko $r_p$ záporné.

Přehled o změnách fáze při odrazu a průchodu rozhraním v polarizaci $s$ i $p$ je v následujících tabulkách 3.1, 3.2 a 3.3.

| | $r_s$ | Změna fáze při odrazu | $t_s$ | Změna fáze při lomu |
|---|---|---|---|---|
| $n_1 < n_2$ | $r_s < 0$ | $\pi$ | $t_s > 0$ | 0 |
| $n_1 > n_2$ | $r_s > 0$ | 0 | $t_s > 0$ | 0 |

Tabulka 3.1 Shrnutí změn fáze pro polarizaci $s$. Platí pro všechny úhly dopadu $\Theta_\mathrm{i}$.

| $\Theta_\mathrm{i} < \Theta_{BR}$ | $r_p$ | Změna fáze při odrazu | $t_p$ | Změna fáze při lomu |
|---|---|---|---|---|
| $n_1 < n_2$ | $r_p < 0$ | $\pi$ | $t_s > 0$ | 0 |
| $n_1 > n_2$ | $r_p > 0$ | 0 | $t_s > 0$ | 0 |

Tabulka 3.2 Shrnutí změn fáze pro polarizaci $p$ pro úhly dopadu menší než Brewsterův úhel ($\Theta_\mathrm{i} < \Theta_{BR}$)

| $\Theta_\mathrm{i} > \Theta_{BR}$ | $r_p$ | Změna fáze při odrazu | $t_p$ | Změna fáze při lomu |
|---|---|---|---|---|
| $n_1 < n_2$ | $r_p > 0$ | 0 | $t_s > 0$ | 0 |
| $n_1 > n_2$ | $r_p < 0$ | $\pi$ | $t_s > 0$ | 0 |

Tabulka 3.3 Shrnutí změn fáze pro polarizaci $p$ pro úhly dopadu větší než Brewsterův úhel ($\Theta_\mathrm{i} > \Theta_{BR}$)

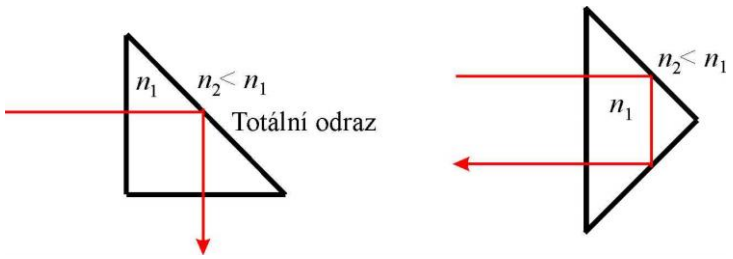
Je třeba zdůraznit, že v literatuře se v některých případech používá opačného předpokladu o vzájemné orientaci vektorů elektrické intenzity v dopadající a odražené vlně (např. [1]). Potom pochopitelně vyjdou z odvození Fresnelových vztahů rovnice s opačným znaménkem. Změna fáze při odrazu o $\pi$ je v tomto případě již zahrnuta do počátečního předpokladu o orientaci polí. Obě varianty ovšem popisují stejnou fyzikální realitu.

### 3.2.5 Úplný (totální) odraz

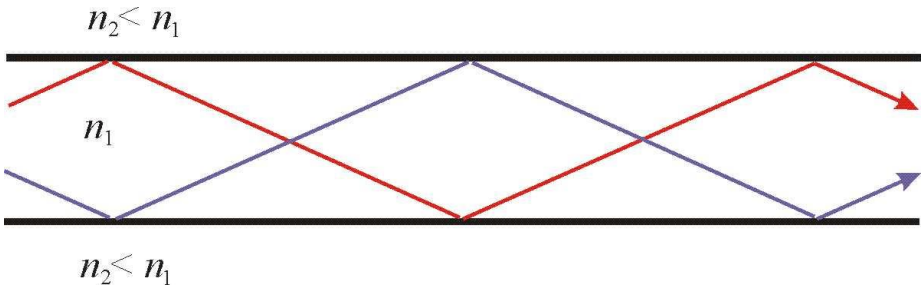
Je–li úhel dopadu z opticky hustšího (dále prostředí 1) do opticky řidšího prostředí (dále prostředí 2) větší než kritický úhel ($\theta_\mathrm{i} > \theta_C$), dochází k úplnému odrazu světla od rozhraní. Název úplný (totální) odraz vystihuje skutečnost, že výkon nesený odraženou vlnou je ve stacionárním případě roven výkonu nesenému dopadající vlnou.

Odražená vlna má některé zajímavé vlastnosti, které jsou i prakticky využívány:

- využití jako zrcátek; oproti kovovým zrcadlovým plochám má větší odrazivost a je odolnější vůči působení vnějšího prostředí;
- totální odraz od stěn je základním principem světlovodů, které hrají v dnešní technické praxi obrovskou úlohu;
- měření kritického úhlu $\Theta_C$ je základem několika prakticky užívaných typů refraktometrů – přístrojů na měření indexu lomu;
- totálně odražená vlna získává při odrazu fázový posuv, který závisí na polarizaci, úhlu dopadu a indexech lomu. Právě rozdíl fázového posuvu mezi vlnami polarizace $s$ a polarizace $p$ lze využít ke změně polarizačního stavu dopadající vlny, např. z dopadající lineárně polarizované vlny lze odrazem získat vlnu polarizovanou elipticky, při dvojnásobném odrazu i vlnu polarizovanou kruhově (prvek zvaný Fresnelův hranol).

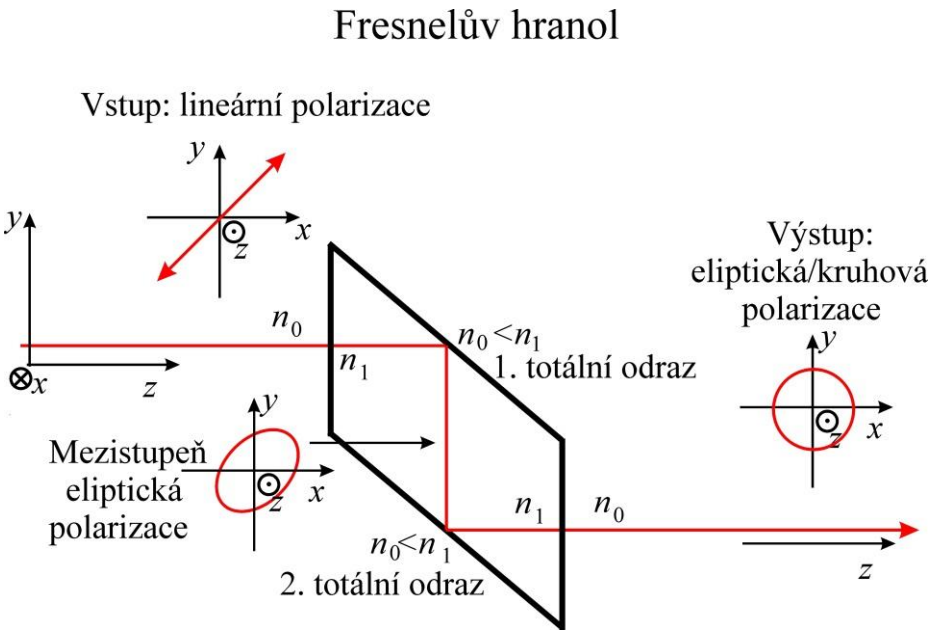



Obr. 3.10 Pravoúhlý hranol fungující jako zrcátko



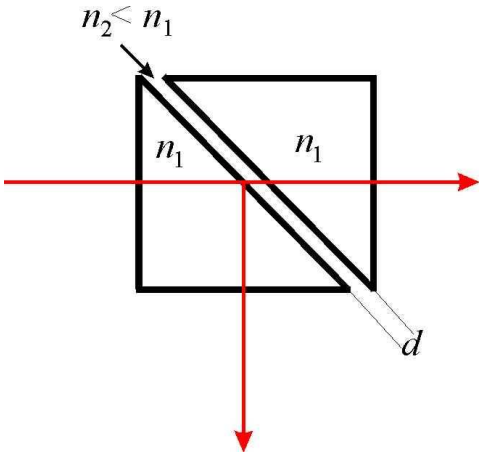

Obr. 3.11 Paprskový model vlnovodu

Zajímavé vlastnosti vykazuje i vlna, která proniká do prostředí 2 (tzv. **evanescentní vlna**). Je nutná pro zajištění podmínek na rozhraní (spojitosti tečných složek elektrického a magnetického pole). Tato vlna je směrem do prostředí 2 exponenciálně tlumená, podél rozhraní nese výkon a není příčná (existují nenulové složky elektrického nebo magnetického pole rovnoběžné se směrem šíření, tj. reálnou složkou vlnového vektoru.




Obr. 3.12 Fresnelův hranol, ve kterém dochází k dvojitému totálnímu odrazu uvnitř hranolu pod úhlem větším, než je kritický úhel. Index lomu vnějšího prostředí $n_0$ a index lomu materiálu hranolu $n_1$.

Pokud je prostředí 2 dostatečně tenké, dochází k porušení totálního odrazu, a pokud má další prostředí opět vyšší index lomu, část výkonu může téci do tohoto dalšího prostředí 3. Tloušťkou vrstvy 2 (mezi 1 a 3) lze regulovat výkon přenášený do prostředí 3, což technicky využívají různé vazební členy.



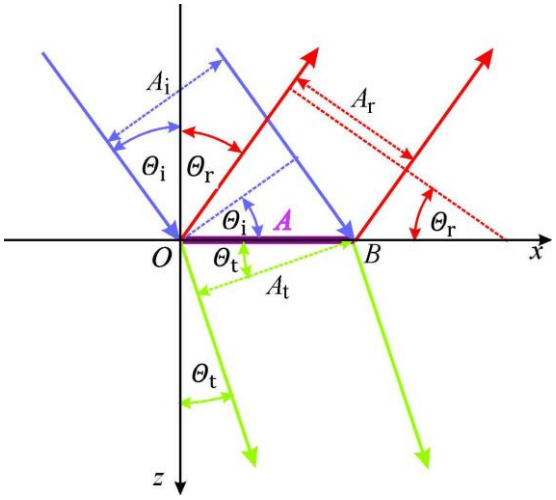

Obr. 3.13 Dvojhranol s mezerou, který může pracovat jako dělič svazku nebo jako regulovatelný vazební člen. Poměr mezi intenzitami vystupujících svazků lze regulovat šířkou štěrbiny $d$.

## 3.3 Výkonové koeficienty odrazu a lomu

V této části zavedeme výkonové koeficienty odrazu a lomu. Základní veličinou pro sledování toku výkonu je Poyntingův vektor. Odvození provedeme jen pro polarizaci s , pro polarizaci p je možno postupovat analogicky. V případě reálných Fresnelových koeficientů můžeme pro

intenzitu dopadající, odražené a lomené vlny (velikosti středních hodnot Poyntingových vektorů, tj. výkony nesené vlnami v průřezu o ploše 1 m$^2$) psát (vztah (1.54)

$$I_\mathrm{i} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c n_1 E_{0i}^2 = \langle S_\mathrm{i}\rangle$$
$$I_\mathrm{r} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c n_1 E_{0r}^2 = \langle S_\mathrm{r}\rangle \qquad (3.32)$$
$$I_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c n_2 E_{0t}^2 = \langle S_\mathrm{t}\rangle$$




Obr. 3.14 Dopadající, odražený a lomený svazek spojený s plochou $A$ na rozhraní

Protože dochází k lomu omezeného svazku na rozhraní, mění se průměty dopadajícího, odraženého a lomeného svazku do roviny rozhraní $\overline{OB}$, přičemž platí (obr. 3.14)

$$\overline{OB} = A = \frac{A_\mathrm{i}}{\cos\Theta_\mathrm{i}} = \frac{A_\mathrm{r}}{\cos\Theta_\mathrm{r}} = \frac{A_\mathrm{t}}{\cos\Theta_\mathrm{t}}. \qquad (3.33)$$

Výkon $A_\mathrm{i}\langle S_\mathrm{i}\rangle$ , kde $A_\mathrm{i}$ je příčný průřez vybrané části dopadající vlny, dopadá na plochu rozhraní $A = \frac{A_\mathrm{i}}{\cos\Theta_\mathrm{i}}$.

$$J_\mathrm{i} = A_\mathrm{i}\langle S_\mathrm{i}\rangle = \langle S_\mathrm{i}\rangle\, A\cos\Theta_\mathrm{i}. \qquad (3.34)$$

Přitom ze stejné plochy se odráží výkon do průřezu odražené vlny $A_\mathrm{r} = A\cos\Theta_\mathrm{r}$,

$$J_\mathrm{r} = A_\mathrm{r}\langle S_\mathrm{r}\rangle = \langle S_\mathrm{r}\rangle\, A\cos\Theta_\mathrm{r}$$

a do prostředí 2 ze stejné plochy vstupuje výkon

$$J_\mathrm{t} = A_\mathrm{t}\langle S_\mathrm{t}\rangle = \langle S_\mathrm{t}\rangle A\cos\Theta_\mathrm{t}.$$

Z výkonové bilance na ploše dostaneme

$$J_\mathrm{i} = J_\mathrm{r} + J_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c n_1 E_{0i}^2 A\cos\Theta_\mathrm{i} = \qquad (3.35)$$

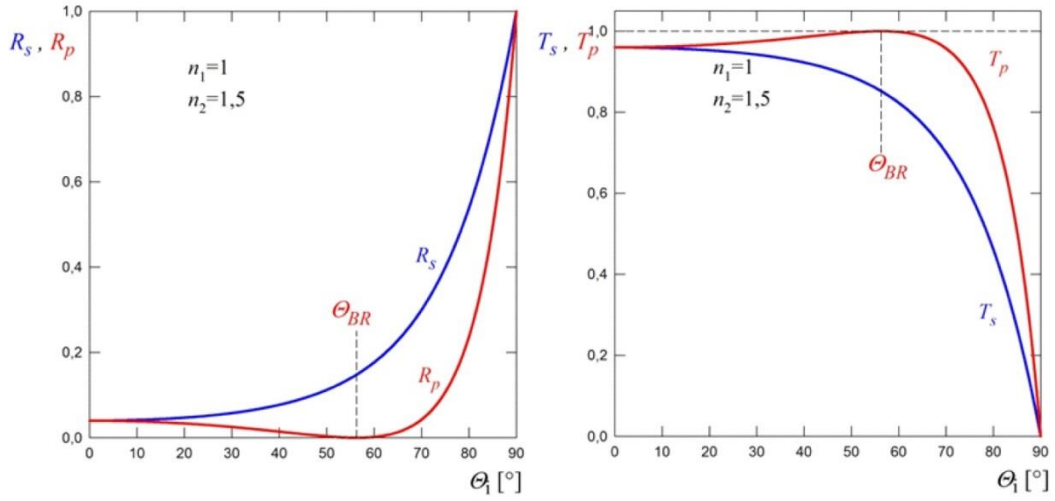
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c n_1 E_{0r}^2 A \cos\Theta_\mathrm{r} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 c n_2 E_{0t}^2 A \cos\Theta_\mathrm{t}\,.$$

Dále zavedeme Fresnelovy **výkonové** koeficienty odrazu $R$ a transmise $T$, které je nutné počítat zvlášť pro kolmou a rovnoběžnou složku polarizace s rovinou dopadu. Tyto koeficienty se vztahují na výkony nesené v celém svazku daných průřezů a souvisejí s amplitudovými koeficienty

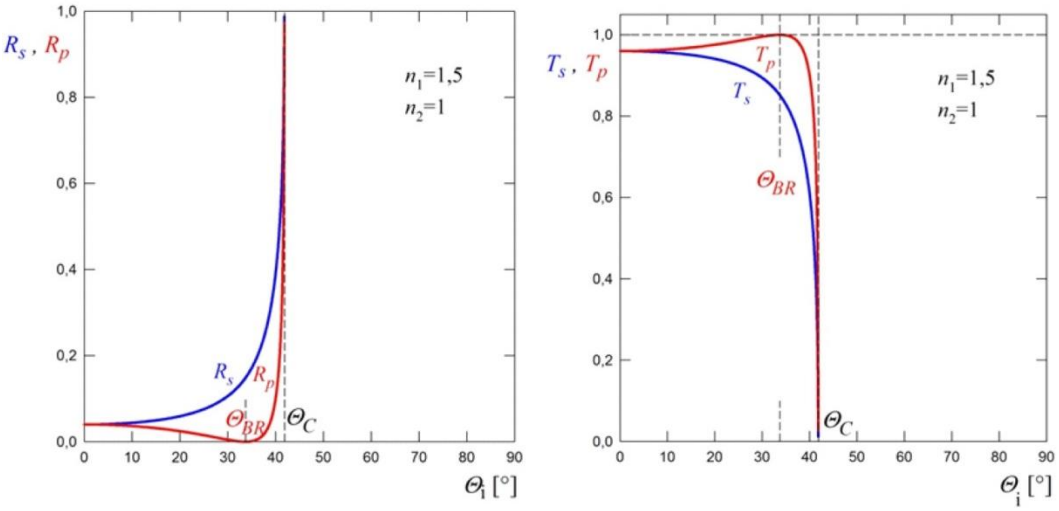
$$R_{s,p} = \frac{A_\mathrm{r}\langle S_\mathrm{r}\rangle}{A_\mathrm{i}\langle S_\mathrm{i}\rangle} = \frac{\langle S_\mathrm{r}\rangle}{\langle S_\mathrm{i}\rangle} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = |r_{s,p}|^2, \tag{3.36}$$

$$T_{s,p} = \frac{A_\mathrm{t}\langle S_\mathrm{t}\rangle}{A_\mathrm{i}\langle S_\mathrm{i}\rangle} = = \frac{n_2 E_{0t}^2 A_\mathrm{t}}{n_1 E_{0i}^2 A_\mathrm{i}} = \frac{n_2 \cos\Theta_\mathrm{t}}{n_1 \cos\Theta_i}|\, t_{s,p}|^2. \tag{3.37}$$

Závislosti výkonových koeficientů $R$ a $T$ na úhlu dopadu jsou zobrazeny na obr. 3.15 a 3.16.




Obr. 3.15 Závislosti výkonových koeficientů odrazu a transmise na úhlu dopadu pro případ rozhraní vzduch (index lomu $n_\mathrm{i} = n_1 = 1$) a sklo (index lomu $n_\mathrm{t} = n_2 = 1{,}5$)




Obr. 3.16 Závislosti výkonových koeficientů odrazu a transmise na úhlu dopadu pro případ rozhraní sklo (index lomu $n_\mathrm{i} = n_1 = 1{,}5$) a vzduch (index lomu $n_\mathrm{t} = n_2 = 1$)

# Poznámka P3.1 – Podmínka spojitosti tečných složek elektrického pole na rozhraní

Tečnou složku dopadající vlny v rovině rozhraní můžeme vyjádřit ve složkách

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i},tečná} = (E_{\mathrm{i}x}, E_{\mathrm{i}y}, 0).$$

Normálový vektor k rovině rozhraní (obr. 3.1) je $\boldsymbol{\nu} = (0,0,-1)$ **.**

Tečnou složku můžeme pro naši volbu normálového vektoru vyjádřit jako

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i},tečná} = \boldsymbol{\nu} \times \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_b, t) \times \boldsymbol{\nu}\right].$$

Důkaz:

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_b, t) \times \boldsymbol{\nu} = \left(E_{\mathrm{i}x}, E_{\mathrm{i}y}, 0\right) \times (0,0,-1) = \left(-E_{\mathrm{i}y}, E_{\mathrm{i}x}, 0\right),$$
$$\boldsymbol{\nu} \times \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_b, t) \times \boldsymbol{\nu}\right] = (0,0,-1) \times \left(-E_{\mathrm{i}y}, E_{\mathrm{i}x}, 0\right) = \left(E_{\mathrm{i}x}, E_{\mathrm{i}y}, 0\right).$$

Podobné vztahy platí pro vlnu odraženou a lomenou.

Podmínka spojitosti (3.1) pak má tvar

$$\boldsymbol{\nu} \times \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_b, t) \times \boldsymbol{\nu}\right] + \boldsymbol{\nu} \times \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{r}_b, t) \times \boldsymbol{\nu}\right] = \boldsymbol{\nu} \times \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}_b, t) \times \boldsymbol{\nu}\right],$$
$$\boldsymbol{\nu} \times \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{i}} e^{i(\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{r}_b - \omega_{\mathrm{i}} t)} \times \boldsymbol{\nu}\right] + \boldsymbol{\nu} \times \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{r}} e^{i(\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{r}_b - \omega_{\mathrm{r}} t)} \times \boldsymbol{\nu}\right] =$$
$$= \boldsymbol{\nu} \times \left[\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0\mathrm{t}} e^{i(\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{r}_b - \omega_{\mathrm{t}} t)} \times \boldsymbol{\nu}\right].$$

Aby byla tato podmínka splněna ve všech bodech rozhraní $\boldsymbol{r}_b$ a ve všech časech $t$, musí platit

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{r}_b - \omega_{\mathrm{i}} t = \boldsymbol{k}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{r}_b - \omega_{\mathrm{r}} t = \boldsymbol{k}_{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{r}_b - \omega_{\mathrm{t}} t\,.$$

# Poznámka P3.2 - Alternativní výrazy pro $r_s$ a $r_p$, Brewsterův úhel, Stokesovy vztahy

***Alternativní výrazy pro*** $r_s$ ***a*** $r_p$ ***při*** $\Theta_{\mathrm{i}} \neq 0$

Pro $\Theta_{\mathrm{i}} \neq 0$ s použitím zákona lomu $n_1 \sin\Theta_{\mathrm{i}} = n_2 \sin\Theta_{\mathrm{t}}$ pro polarizaci $s$

$$r_s = \frac{n_1 \cos\Theta_{\mathrm{i}} - n_2 \cos\Theta_{\mathrm{t}}}{n_1 \cos\Theta_{\mathrm{i}} + n_2 \cos\Theta_{\mathrm{t}}} = \frac{n_1 \cos\Theta_{\mathrm{i}} - n_1 \frac{\sin\Theta_{\mathrm{i}}}{\sin\Theta_{\mathrm{t}}} \cos\Theta_{\mathrm{t}}}{n_1 \cos\Theta_{\mathrm{i}} + n_1 \frac{\sin\Theta_{\mathrm{i}}}{\sin\Theta_{\mathrm{t}}} \cos\Theta_{\mathrm{t}}} =$$
$$= \frac{\sin\Theta_{\mathrm{t}} \cos\Theta_{\mathrm{i}} - \sin\Theta_{\mathrm{i}} \cos\Theta_{\mathrm{t}}}{\sin\Theta_{\mathrm{t}} \cos\Theta_{\mathrm{i}} + \sin\Theta_{\mathrm{i}} \cos\Theta_{\mathrm{t}}} = \frac{\sin(\Theta_{\mathrm{t}} - \Theta_{\mathrm{i}})}{\sin(\Theta_{\mathrm{t}} + \Theta_{\mathrm{i}})}.$$

Pro amplitudový koeficient reflexe pro polarizaci $p$

$$r_p = \frac{n_1 \cos\Theta_\mathrm{t} - n_2 \cos\Theta_\mathrm{i}}{n_1 \cos\Theta_\mathrm{t} + n_2 \cos\Theta_\mathrm{i}} = \frac{\frac{n_2 \sin\Theta_\mathrm{t}}{\sin\Theta_\mathrm{i}} \cos\Theta_\mathrm{t} - \frac{n_2 \sin\Theta_\mathrm{i}}{\sin\Theta_\mathrm{t}} \cos\Theta_\mathrm{i}}{\frac{n_2 \sin\Theta_\mathrm{t}}{\sin\Theta_\mathrm{i}} \cos\Theta_\mathrm{t} + \frac{n_2 \sin\Theta_\mathrm{i}}{\sin\Theta_\mathrm{t}} \cos\Theta_\mathrm{i}} =$$

$$= \frac{\sin\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{t} - \sin\Theta_\mathrm{i} \cos\Theta_\mathrm{i}}{\sin\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{t} + \sin\Theta_\mathrm{i} \cos\Theta_\mathrm{i}}.$$

Upravíme čitatel

$$\sin\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{t} - \sin\Theta_\mathrm{i} \cos\Theta_\mathrm{i} = \sin\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{t}(\sin^2\Theta_\mathrm{i} + \cos^2\Theta_\mathrm{i}) -$$

$$-\sin\Theta_\mathrm{i} \cos\Theta_\mathrm{i} (\sin^2\Theta_\mathrm{t} + \cos^2\Theta_\mathrm{t}) =$$

$$= \sin\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{i} \cos\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{i} - \sin\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{i} \sin\Theta_\mathrm{t} \sin\Theta_\mathrm{i} +$$

$$+\sin\Theta_\mathrm{i} \cos\Theta_\mathrm{t} \sin\Theta_\mathrm{t} \sin\Theta_\mathrm{i} - \sin\Theta_\mathrm{i} \cos\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{i} =$$

$$= (\cos\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{i} - \sin\Theta_\mathrm{t} \sin\Theta_\mathrm{i}) (\sin\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{i} - \sin\Theta_\mathrm{i} \cos\Theta_\mathrm{t}) =$$

$$= \cos\,(\Theta_\mathrm{t} + \Theta_\mathrm{i})\,\sin(\Theta_\mathrm{t} - \Theta_\mathrm{i}).$$

Podobně úpravou jmenovatele bychom dospěli ke vztahu

$$\sin\Theta_\mathrm{t} \cos\Theta_\mathrm{t} + \sin\Theta_\mathrm{i} \cos\Theta_\mathrm{i} = \sin\,(\Theta_\mathrm{t} + \Theta_\mathrm{i}) \cos(\Theta_\mathrm{t} - \Theta_\mathrm{i}).$$

Podělením dostaneme výsledný vztah

$$r_p = \frac{\cos\,(\Theta_\mathrm{t} + \Theta_\mathrm{i})\,\sin(\Theta_\mathrm{t} - \Theta_\mathrm{i})}{\sin\,(\Theta_\mathrm{t} + \Theta_\mathrm{i})\,\cos(\Theta_\mathrm{t} - \Theta_\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{tg}(\Theta_\mathrm{t} - \Theta_\mathrm{i})}{\mathrm{tg}(\Theta_\mathrm{t} + \Theta_\mathrm{i})}.$$

### *Brewsterův úhel*

$$n_1 \sin\Theta_{BR} = n_2 \sin\Theta_\mathrm{t} = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta_{BR}\right) =$$

$$= n_2 \left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\Theta_{BR} - \sin\Theta_{BR}\cos\frac{\pi}{2}\right) = n_2 \cos\Theta_{BR},$$

$$n_1 \sin\Theta_{BR} = n_2 \cos\Theta_{BR}, \qquad \tan\Theta_{BR} = \frac{\sin\Theta_{BR}}{\cos\Theta_{BR}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

### *Stokesovy vztahy*

Stokesovy vztahy vyjadřují relace mezi reálnými Fresnelovými amplitudovými koeficienty odrazu a lomu při přechodu z jednoho prostředí do druhého a zpět. Mějme rozhraní dvou prostředí s indexy lomu $n_1$ (prostředí 1) a $n_2$(prostředí 2). Při přechodu z prostředí 1 do prostředí 2 a zpět platí pro amplitudové koeficienty odrazu $r_{12}$ a $r_{21}$ podle (3.26)

$$r_{p12} = \frac{n_1 \cos\Theta_\mathrm{t} - n_2 \cos\Theta_\mathrm{i}}{n_1 \cos\Theta_\mathrm{t} + n_2 \cos\Theta_\mathrm{i}}, \qquad r_{p21} = \frac{n_2 \cos\Theta_\mathrm{i} - n_1 \cos\Theta_\mathrm{t}}{n_2 \cos\Theta_\mathrm{i} + n_1 \cos\Theta_\mathrm{t}},$$

tedy

$$r_{p12} = -\,r_{p21}.$$

Podobně (vztah 3.21)

$$r_{s12} = \frac{n_1 \cos\Theta_\mathrm{i} - n_2 \cos\Theta_\mathrm{t}}{n_1 \cos\Theta_\mathrm{i} + n_2 \cos\Theta_\mathrm{t}}, \qquad r_{s21} = \frac{n_2 \cos\Theta_\mathrm{t} - n_1 \cos\Theta_\mathrm{i}}{n_2 \cos\Theta_\mathrm{t} + n_1 \cos\Theta_\mathrm{i}},$$

$$r_{s12} = -r_{s21}.$$

Pro amplitudové Fresnelovy transmisní koeficienty podle (3.22)

$$t_{s12} = \frac{2\, n_1 \cos\Theta_\mathrm{i}}{n_1 \cos\Theta_\mathrm{i} + n_2 \cos\Theta_\mathrm{t}} = 1 + r_{s12},$$

$$t_{s21} = \frac{2n_2 \cos\Theta_\mathrm{t}}{n_1 \cos\Theta_\mathrm{i} + n_2 \cos\Theta_\mathrm{t}} = 1 + \ r_{s21} = 1 - r_{s12},$$

$$t_{s12}\, t_{s21} = 1 - r_{s12}^2,$$

$$1 = r_{s12}^2 + t_{s12}\, t_{s21}.$$

Podobně podle (3.27)

$$t_{p12} = \frac{2n_1 \cos\Theta_\mathrm{i}}{n_1 \cos\Theta_\mathrm{t} + n_2 \cos\Theta_\mathrm{i}} = \frac{n_1}{n_2}\left(1 - r_{p12}\right),$$

$$t_{p21} = \frac{2n_2 \cos\Theta_\mathrm{t}}{n_1 \cos\Theta_\mathrm{t} + n_2 \cos\Theta_\mathrm{i}} = \frac{n_2}{n_1}\left(1 - r_{p21}\right) = \frac{n_2}{n_1}\left(1 + r_{p12}\right).$$

Z toho plyne

$$t_{p12}\, t_{p21} = 1 - r_{p12}^2.$$

# 4. Interference (část 1) – skládání monochromatických vln stejné frekvence

Ve vakuu nebo v lineárním prostředí platí v důsledku linearity Maxwellových rovnic v každém okamžiku součtové pravidlo pro intenzitu elektrického a magnetického pole (princip superpozice)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sum_n \boldsymbol{E}_n(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\sum_n \boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r},t). \tag{4.1}$$

Elektrické pole však nejsme schopni ve spektrálním oboru viditelného záření detekovat. Zjednodušeně řečeno, za běžných podmínek v optické oblasti spektra pozorujeme při skládání vln střední hodnoty objemové **hustoty elektrické energie.** Její velikost pro postupnou, rovinnou, homogenní, netlumenou, lineárně polarizovanou monochromatickou vlnu definuje intenzitu

$$I = \langle u_E \rangle_T = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 E_0^2,$$

která nezávisí ani na prostorových souřadnicích ani na čase. Pro nemonochromatické vlnění středování probíhá přes obrovské množství dob kmitů. Jako interferenční jevy lze označit **odchylky od sčítání výkonových intenzit záření**. Tyto odchylky se za určitých podmínek projevují v prostorové modulaci výsledné intenzity $I(r,t)$, přičemž

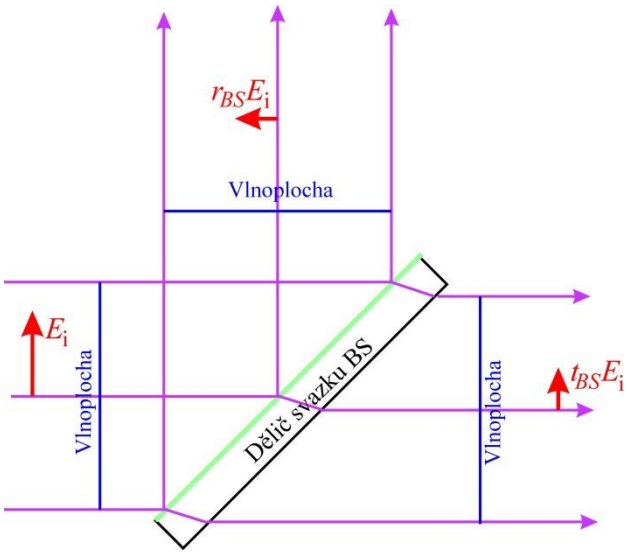
$$I(\boldsymbol{r},t) \neq \sum_n I_n(\boldsymbol{r},t)),$$

kde $I_n(\boldsymbol{r},t)$ jsou výkonové intenzity vln vstupujících do interference. Schopnost vln interferovat je kvantitativně zachycena ve veličině zvané stupeň koherence, o které bude pojednáno v kapitole 7 „Koherence.“ Základním předpokladem pro dobré pozorování interferenčních jevů je podmínka, že doba integrace optického signálu (doba odezvy detektoru) je podstatně kratší než tzv. koherenční čas. V této kapitole se budeme zabývat sčítáním monochromatických vln stejné frekvence, které jsou dokonale koherentní (jejich koherenční délka je nekonečná).

Interferenční obrazce, které jsou dostatečně stabilní v čase, můžeme ve viditelné části spektra registrovat buď přímo zrakem nebo pomocí různých detektorů registrujících obraz (fotografický film, CCD propojené systémy křemíkových fotodiod atd.) nebo nás může zajímat jen výsledek interference v určité malé oblasti prostoru, tj. v „bodě“. V případě vizuálního pozorování máme možnost vložit do prostoru interferujících vln matnici a okem sledovat rozptýlené záření na jejím drsném povrchu nebo zaměřit interferující vlny přímo do oka. V prvním případě sledujeme reálný interferenční obrazec buď delokalizovaný v daném prostoru, kdy viditelnost obrazce nezávisí na poloze matnice, nebo reálný obrazec lokalizovaný v místě matnice, případně obrazec lokalizovaný v nekonečnu. V případě, kdy interferující vlny vstupují do oka, mozek registruje obraz na sítnici oka vytvořený zobrazovacím systémem oka

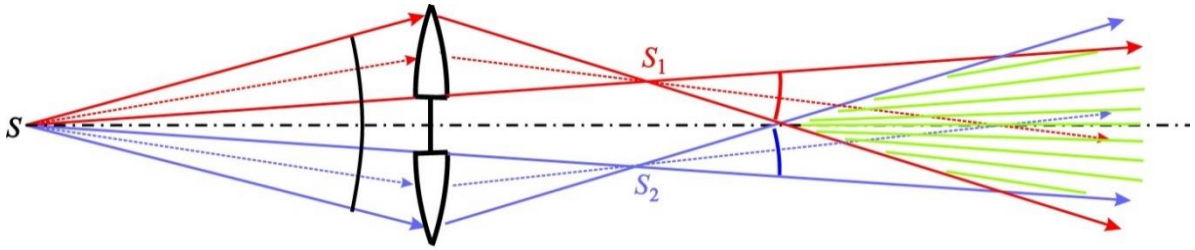
(rohovka + oční čočka). Obecně při použití zobrazovacích prvků (ať v přístroji nebo v oku či obojí) se naskýtá možnost pozorovat i virtuální interferenční obrazce jako jsou interferenční obrazce lokalizované v nekonečnu (případ Haidingerových kroužků stejného sklonu) nebo interference na klínové vrstvě (Fizeauovy proužky stejné tloušťky).

Protože je velmi obtížné realizovat 2 a více zdrojů záření, které by produkovaly záření dostatečně shodných frekvencí, aby vznikl dostatečně dlouho stabilní interferenční obrazec, jsou interferenční jevy zpravidla demonstrovány při skládání vln odvozených z jednoho kvazimonochromatického zdroje po proběhnutí různých optických drah. Při „**dělení amplitudy**“ dochází k rozdělení elektrického pole (např. odrazem na rozhraní dvou prostředí) ve všech zúčastněných místech vlnoplochy. V některých optických přístrojích (např. ve většině interferometrů) dochází k „dělení amplitudy“ na speciálních strukturách – děličích svazku.

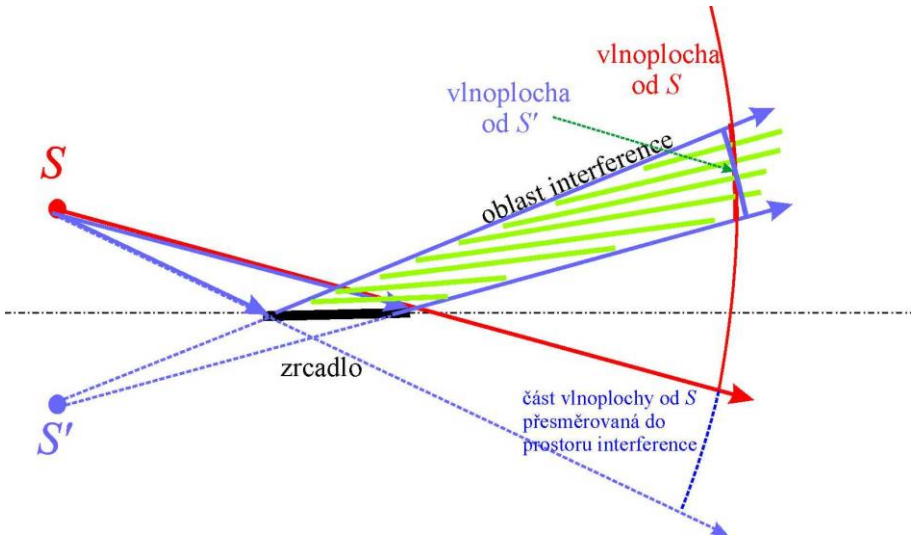



Obr. 4.1 Příklad dělení amplitudy rovinné vlny v děliči svazku. Rovně ve směru dopadající vlny postupuje vlna, kterou lze charakterizovat polem $t_{BS}E_i$, pole odkloněné vlny je $r_{BS}E_i$. $r_{BS}$ a $t_{BS}$ jsou Fresnelovy amplitudové koeficienty odrazu a transmise.

V druhém případě – při „**dělení vlnoplochy**“ jedna prostorová část vlnoplochy postupuje jednou optickou drahou, druhá část jinou drahou. Jako příklad experimentálního uspořádání vedoucího k **dělení vlnoplochy** můžeme uvést Billetovu dvojčočku (obr. 4.2). Jedná se o spojnou čočku, která je rozříznutá, a poloviny jsou vůči sobě posunuty. Centrální část je pro světlo neprůhledná. Bodový zdroj světla $S$ je průhlednými částmi čočky zobrazen do dvou reálných zdrojů $S_1$ a $S_2$. Kulové vlny emitované těmito reálnými obrazy zdroje $S$ pak v čárkované oblasti prostoru interferují. Dalšími historickými příklady zdvojení zdroje kulových vln a dělení vlnoplochy jsou Fresnelův dvojhranol, Fresnelova zrcátka či Lloydovo zrcadlo (obr. 4.3.). Ze zdroje světla $S_1$ se šíří kulové vlny a část vlnoplochy se odráží na zrcadle. Odražené vlny lze popsat jako vlny šířící se z virtuálního zdroje světla $S_2$, který je lokalizován symetricky vůči zdroji $S_1$ vzhledem k rovině zrcadla. Odražené vlny interferují s vlnami postupujícími ze zdroje $S_1$ přímo (bez odrazu).




Obr. 4.2 Příklad dělení vlnoplochy: Billetova dvojčočka. $S_1$ a $S_2$ jsou obrazy zdroje $S$ vytvořené dvěma vertikálně posunutými polovinami čočky. Jedna část kulové vlnoplochy vycházející ze zdroje $S$ je zpracována horní částí čočky (naznačeno červeně), zatímco druhá část téže vlnoplochy je využita k zobrazení pomocí spodní částí čočky. V interferenčním prostoru jsou zeleně naznačena místa maximální intenzity určená interferencí kulových vln vycházejících ze zdrojů $S_1$ a $S_2$.




Obr. 4.3 Lloydovo zrcadlo jako příklad uspořádání využívající interference polí odvozených z různých částí původní kulové vlnoplochy. V oblasti interference kulových vln jsou zeleně symbolicky naznačena maxima intenzity.

Protože pro většinu detektorů ve viditelné oblasti spektra (včetně buněk v sítnici oka) je důležitá elektrická komponenta elektromagnetické vlny, budeme většinu výsledků prezentovat ve tvaru časově zprůměrované hustoty elektrické energie.

V následujícím textu se omezíme na několik modelů interference pracujících s idealizací monochromatických rovinných vln. Budeme předpokládat, že vlny mají naprosto shodné frekvence. Probereme interferenci ve speciálních uspořádáních

- dvou rovinných vln s rovnoběžnými vlnovými vektory (část 4.1.1)
- dvou vln s nerovnoběžnými vlnovými vektory (část 4.1.2)
- více vln s rovnoběžnými vlnovými vektory (část 4.2).

# 4.1 Dvousvazková interference rovinných vln

Budeme předpokládat, že se prostředím šíří dvě monochromatické, lineárně polarizované, rovinné vlny stejné frekvence, které jsou obecně fázově posunuté. Obě tyto vlny jsou homogenní, netlumené (tj. bez prostorové závislosti amplitud), mohou se lišit jen směry vlnových vektorů $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$, případně velikostí amplitud. Spočteme intenzitu elektrického pole a časovou střední hustotu elektrické energie záření složené vlny v nějakém místě $\boldsymbol{r}$ prostoru.

Podle vztahu (1.47), v komplexním zápisu (1.49), pro hustotu elektrické energie takové vlny v neabsorbujícím prostředí platí

$$I(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\, \widetilde{\boldsymbol{E}}\,(\boldsymbol{r},t)\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\,, \tag{4.2}$$

kde

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}\,(\boldsymbol{r},t) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{r},t) + \widetilde{\boldsymbol{E}}_2(\boldsymbol{r},t), \tag{4.3}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_{01}e^{i\varphi_1(\boldsymbol{r})}e^{-i\omega t}, \tag{4.4}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_2(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_{02}\,e^{i\varphi_2(\boldsymbol{r})}e^{-i\omega t}. \tag{4.5}$$

Pro prostorové části fází platí

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k}_1.\boldsymbol{r} + \delta_{01}, \qquad \varphi_2(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k}_2.\boldsymbol{r} + \delta_{02}, \\ &\varphi_1(\boldsymbol{r}) - \varphi_2(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\cdot\,\boldsymbol{r} + \delta_{01} - \delta_{02}\,, \\ &\boldsymbol{k}_1 = k\boldsymbol{s}_1 = \frac{\omega}{c}n\boldsymbol{s}_1, \qquad \boldsymbol{k}_2 = k\boldsymbol{s}_2 = \frac{\omega}{c}n\boldsymbol{s}_2, \end{aligned} \tag{4.6}$$

kde $\boldsymbol{s}_1$ a $\boldsymbol{s}_2$ jsou jednotkové vektory ve směrech šíření vln a úhly $\varphi_{01}$ a $\varphi_{02}$ určují fázi vln 1 a 2 v počátku souřadné soustavy $\boldsymbol{r} = 0$ a v čase $t = 0$. Pro hustotu elektrické energie podle vztahu (4.2) dostaneme

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\,\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}^* = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\big[\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{r},t) + \widetilde{\boldsymbol{E}}_2(\boldsymbol{r},t)\big]\cdot\big[\widetilde{\boldsymbol{E}}_1^*(\boldsymbol{r},t) + \widetilde{\boldsymbol{E}}_2^*(\boldsymbol{r},t)\big] \\ &= \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\left\{E_{01}^2 + \boldsymbol{E}_{01}\cdot\boldsymbol{E}_{02}e^{i[\varphi_1(\boldsymbol{r})-\varphi_2(\boldsymbol{r})]} + \boldsymbol{E}_{01}\cdot\boldsymbol{E}_{02}e^{-i[\varphi_1(\boldsymbol{r})-\varphi_2(\boldsymbol{r})]} + E_{02}^2\right. \\ &= \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\,\left\{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2\boldsymbol{E}_{01}\cdot\boldsymbol{E}_{02}\cos\big[\varphi_1(\boldsymbol{r}) - \varphi_2(\boldsymbol{r})\big]\right\}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$I(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\,\left\{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\,\cos\alpha\,\cos\,\big[\varphi_1(\boldsymbol{r}) - \varphi_2(\boldsymbol{r})\big]\right\} = \tag{4.8}$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 \ [E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos\alpha \cos \delta_{12}(\boldsymbol{r})] .$$

Povšimněme si, že výsledek ve výrazu (4.8) je reálný a nezávislý na čase. Interferenční jev popisuje člen úměrný součinu amplitud $E_{01}E_{02}$. Vektory $\boldsymbol{E}_{01}$ a $\boldsymbol{E}_{02}$ svírají úhel $\alpha$. Nejvýraznější interferenční jevy lze očekávat pro $\cos\alpha = \pm 1,\ \alpha = 0,\ \pi$, zatímco interferenční člen vymizí pro $\alpha = {}^{\pi}/_{2}$. Ortogonálně polarizovaná záření „neinterferují“ (ve smyslu, že nevznikají odchylky od pravidla sčítání intenzit záření), což platí i pro eliptickou / kruhovou polarizaci opačných smyslů rotace vektoru $\boldsymbol{E}$.

V dalších částech této kapitoly budeme předpokládat, že úhel $\alpha$ mezi $\boldsymbol{E}_{01}$ a $\boldsymbol{E}_{02}$ je malý a můžeme brát $\cos\alpha \cong 1$. Tím se omezujeme na výklad interference téměř souhlasně polarizovaných vln. Vztah (4.8) pak můžeme přepsat s využitím výrazů pro jednotlivé hustoty elektrické energie skládaných vln

$$I(\boldsymbol{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta_{12}(\boldsymbol{r}), \tag{4.9}$$

kde $I_1 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 E_{01}^2$ a $I_2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 E_{02}^2$ jsou střední hustoty elektrické energie homogenních rovinných vln vstupujících do interference, které nezávisí na $(\boldsymbol{r}, t)$. Jak již bylo řečeno, $\delta_{12}(\boldsymbol{r}) = \varphi_1(\boldsymbol{r}) - \varphi_2(\boldsymbol{r})$ představuje rozdíl fází obou vln v bodě $\boldsymbol{r}$ a ten na prostorové souřadnici závisí. Výsledná hustota energie v tomto bodě tedy závisí kromě hustot energií obou vln vstupujících do interference i na fázovém posunu obou vln. V případě $I_1 = I_2 = I_0$ pro celkovou hustotu energie v bodě $\boldsymbol{r}$ platí

$$I(\boldsymbol{r}) = 2I_0 + 2I_0\cos\delta_{12}(\boldsymbol{r}) = 2\,I_0\,[1 + \cos\delta_{12}(\boldsymbol{r})] = 4I_0\cos^2\tfrac{\delta_{12}(\boldsymbol{r})}{2}\,. \tag{4.10}$$

V závislosti na fázovém rozdílu $\delta_{12}(\boldsymbol{r})$ se výsledná intenzita v bodě $\boldsymbol{r}$ mění mezi 0 a $4I_0$ (obr. 4.4). V případě, že intenzity obou vln vstupujících do interference jsou různé, osciluje výsledná intenzita mezi minimální hodnotou $I_{min}$ a maximální hodnotou $I_{max}$. S narůstajícím rozdílem mezi $I_1$ a $I_2$ (při zachování $I_1 + I_2 = 2I_0$) se rozdíl mezi $I_{max}$ a $I_{min}$ zmenšuje.

K maximu intenzity v důsledku interference dochází, pokud je

$$\cos\delta_{12}(\boldsymbol{r}) = 1, \qquad \delta_{12}(\boldsymbol{r}) = 2m\pi,$$
$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,. \tag{4.11}$$

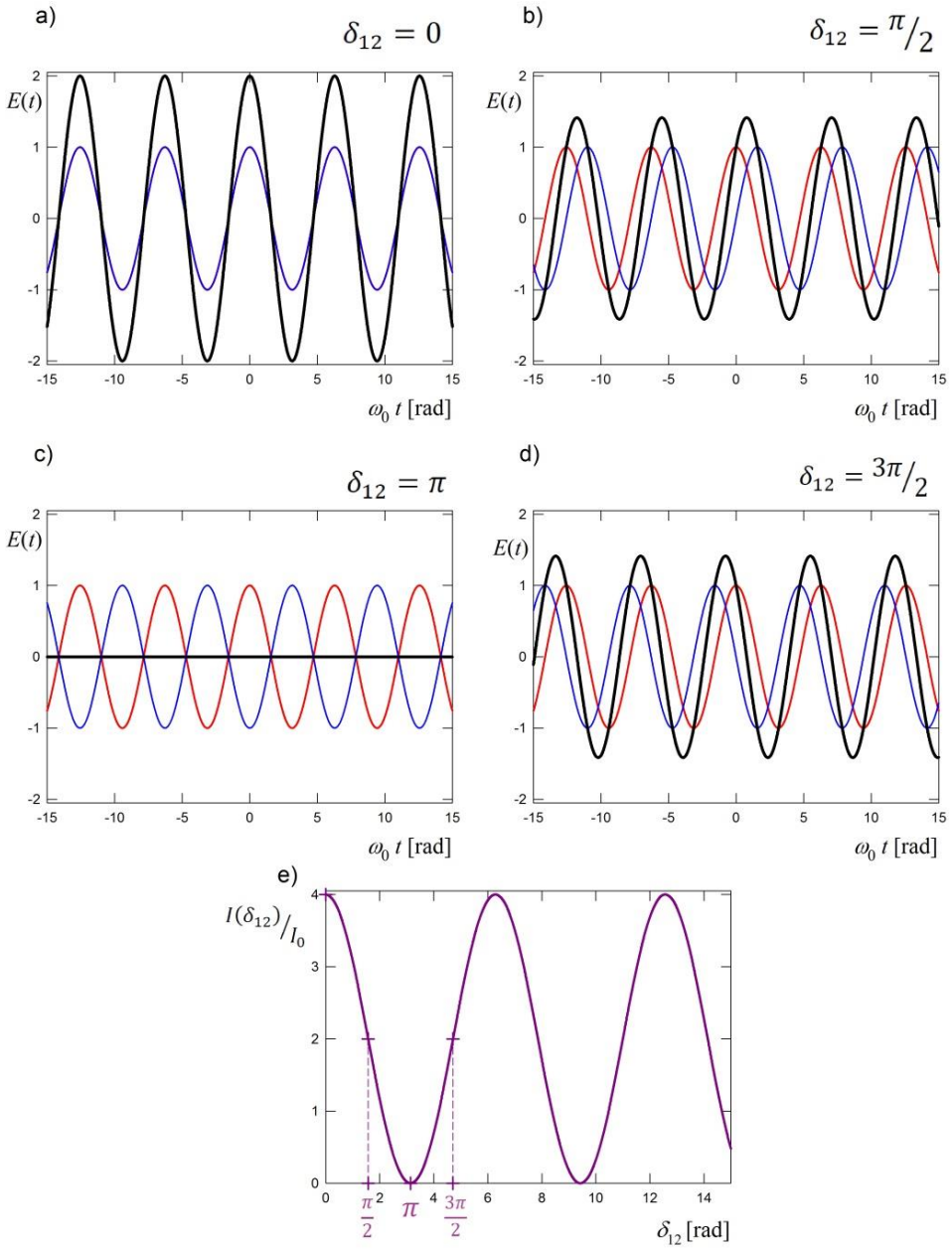
Podobně pro minimální intenzitu v interferenčním obrazci

$$\cos\delta_{12}(\boldsymbol{r}) = -1, \qquad \delta_{12}(\boldsymbol{r}) = (2m-1)\pi, \tag{4.12}$$
$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}\,.$$

V závislosti na průběhu fázového rozdílu $\delta_{12}$ na $\boldsymbol{r}$ se v prostoru v důsledku interference střídají oblasti s větší a menší intenzitou, která se např. při pozorování matnice umístěné v interferenčním prostoru okem jeví jako světlejší a tmavší proužky. K popisu kontrastu interferenčních proužků zavádíme viditelnost

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \,. \tag{4.13}$$

Viditelnost se nachází v intervalu $V \in \langle 0{,}1 \rangle$: $V = 1$ (pokud $I_{min} = 0$, tedy pokud $I_1 = I_2$ a $\delta_{12} = 2m\pi$), $V = 0$ (pokud $I_{max} = I_{min}$).




Obr. 4.4 Závislost intenzity na fázovém rozdílu interferujících vln pro případ $I_1 = I_2 = I_0$. a) až d) časové průběhy vln 1 (červeně) a 2 (modře) a jejich součtu (černě) v pevném místě prostoru pro vyznačené hodnoty fázových posunů $\delta_{12}$; e) závislost intenzity výsledného pole na fázovém posunu $\delta_{12}$.

Pro charakterizaci interference je podstatný fázový rozdíl $\delta_{12}(\boldsymbol{r})$. K rozdílu fází může dojít jak pro rovnoběžné vlnové vektory $\boldsymbol{k}_1 \parallel \boldsymbol{k}_2$, tak i z důvodu rozdílných směrů vektorů $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$.

### 4.1.1 Dvousvazková interference vln $\boldsymbol{k_1} \parallel \boldsymbol{k_2}$

V následující části se budeme zabývat případem, kdy jsou vektory $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$ obou interferujících vln rovnoběžné a k fázovému rozdílu dochází v důsledku rozdílu náběhu fáze (fázového rozdílu) šířením po různých optických drahách před tím, než je necháme interferovat. Rovněž budeme předpokládat rovnoběžnost vektorů elektrického pole $\boldsymbol{E}_1 \parallel \boldsymbol{E}_2$.

Interferenční jevy můžeme popisovat pomocí rozdílu drah interferujících vlnoploch od místa jejich rozdělení z původní vlnoplochy emitované zdrojem vlnění

$$\delta_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = k\,\Delta_0 = k_0 n\,\Delta_0 = k_0 \Delta\,,$$

kde $\Delta$ představuje rozdíl **optických drah** a $\Delta_0$ rozdíl geometrických drah, které urazí vlnoplochy. $\delta_{12}$ nezávisí na $\boldsymbol{r}$, protože $\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{0}$, rovnice (4.6).

Alternativně můžeme fázový rozdíl vyjádřit pomocí času $\tau$, který je potřeba k překonání dráhového rozdílu $\Delta_0$ (rozdílu optických drah $\Delta$)

$$\delta_{12} = \omega\frac{\Delta_0}{\mathrm{v}} = \omega\frac{\Delta_0}{c}n = \omega\frac{\Delta}{c} = \omega\tau\,.$$

Rovněž intenzita $I$ na poloze nezávisí

$$I = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2\,(E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos\,\delta_{12}).$$

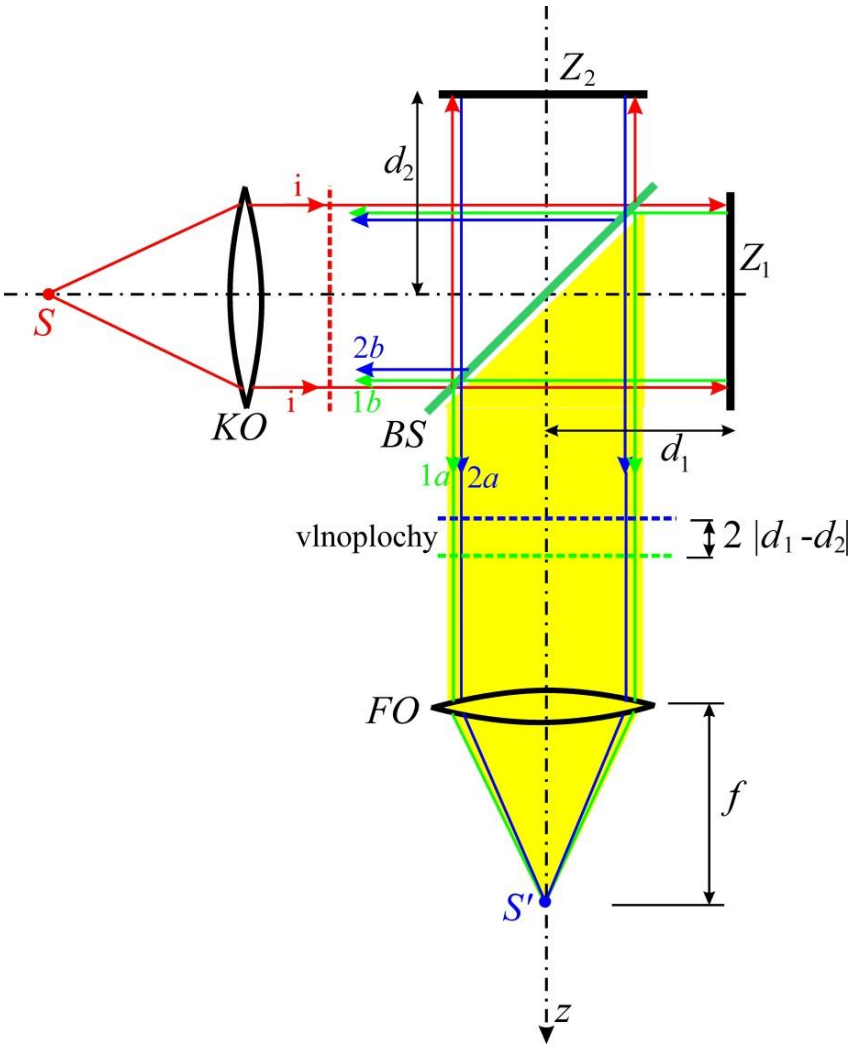
Pokud by se podařilo takový případ realizovat, v interferenčním prostoru by se neobjevilo žádné střídání světlých a tmavých míst, ale celý interferenční prostor by se v závislosti na $\delta_{12}$ „rozsvěcel“ a „zhášel“. Nutno zdůraznit, že v reálném světě nastavit takové podmínky nelze, např. nelze realizovat jednu homogenní rovinnou vlnu, ani není možné se zbavit jevů difrakce, které vnášejí příspěvky vln o různých směrech vlnových vektorů. Přesto je takový model užitečný např. k objasnění principu přístrojů nazývaných dvojsvazkové interferometry.

Jako **interferometry** zpravidla označujeme zařízení, u nichž můžeme definovaným způsobem měnit fázové posuvy mezi vlnovými komponentami, na které se rozdělí vstupující záření. Interferometry můžeme rozdělit do několika skupin. Základním hlediskem je počet interferujících svazků. Mezi dvousvazkové interferometry řadíme např. Michelsonův, Jaminův, několik typů podle Fizeaua, Machův–Zehnderův a řadu dalších. Z vícesvazkových interferometrických zařízení bývají jmenovány Fabryův–Pérotův interferometr a Lummerova–Gehrckova deska. Dalším kritériem může být způsob získávání interferujících vln: v principu buď **dělením vlnoplochy** nebo **dělením amplitudy**. Zejména ve starších konstrukcích se používalo technologicky méně náročné dělení vlnoplochy (Fizeauovo měření rychlosti světla v proudící kapalině 1851). Dělení vlnoplochy je principiálně důležité v Michelsonově stelárním interferometru (původní návrh od Fizeau 1868). Dělení amplitud se objevuje v Jaminově původním interferometru (1856) na měření indexu lomu plynů, když funkci děliče a současně

zrcadla zastávala skleněná deska pokovená na zadní straně. S technologickým pokrokem (jemná mechanika, nanášení tenkých vrstev apod.) se objevovaly interferometry s oddělenými funkcemi zrcadel a děličů svazků (Machův–Zehnderův 1891).

### 4.1.1.1 Michelsonův interferometr, $k_1 \parallel k_2$

Velmi známým interferometrem je **Michelsonův interferometr (**Albert Abraham Michelson, 1852 – 1931). Základní princip interferometru je naznačen na obr. 4.5. Předpokládejme, že obě zrcadla $Z_1, Z_2$ jsou natočena kolmo na směr dopadající vlny a celý interferometr je umístěn v prostředí s indexem lomu $n$.




Obr. 4.5 Model Michelsonova interferometru s jedinou rovinnou vlnou na vstupu. $S$ „bodový“ zdroj kulové vlny, $KO$ kolimační optika (z rozbíhavé kulové vlny dělá rovinnou vlnu; v obr. je naznačena čočkou), i vstupující rovinná vlna s vlnovým vektorem rovnoběžným s osou interferometru, $BS$ dělič svazku, $Z_1$ a $Z_2$ zrcadla, $d_1$ a $d_2$ vzdálenosti zrcadel od os interferometru, $1a$ a $2a$ vlny vstupující do „interferenčního“ (detekčního) prostoru, $FO$ fokusační optika s ohniskovou vzdáleností $f$, $S'$ obraz bodového zdroje $S$, $1b$ a $2b$ vlny vracející se zpět do prostoru zdroje. Vzdálenost vlnoploch 1a (červená) a $2a$ (modrá) ukazuje prostorový posuv vlnoploch vzniklých rozštěpením jedné dopadající vlnoplochy.

Jedna rovinná vlna dopadá na dělič svazku, který je natočený o úhel 45° vůči osám interferometru. Dělič svazku rozdělí amplitudově vstupující vlnu na dvě vlny. Vlna 1 postupuje dále ve směru dopadajícího svazku a dopadá na zrcadlo $Z_1$ vzdálené o délku $d_1$ od děliče svazku. Od zrcadla se tato vlna odráží a opět dopadá na dělič svazku. Od něj se odráží směrem do detektorového prostoru. Vlna 2 se nejprve odráží na děliči svazku směrem k zrcadlu $Z_2$. Od zrcadla se odráží a postupuje přímo přes dělič svazku do detektorového prostoru, kde interferuje s vlnou 1. Na obr. 4.5 jsou čárkovaně vyznačeny 3 vlnoplochy: vlnoplocha vstupující vlny a v interferenčním prostoru červeně a modře vlnoplochy, které jsou odvozeny od jedné vlnoplochy vstupující vlny. Intenzita vlny v detektorovém prostoru, intenzita v místě obrazu $S'$ zdroje (velikost signálu na detektoru), závisí na fázovém rozdílu vln 1 a 2, který vzniká v důsledku rozdílné vzdálenosti zrcadel $Z_1$ a $Z_2$ od děliče svazku.

Rozdíl geometrických drah a odpovídající fázový rozdíl mezi vlnami 1 a 2 jsou

$$\Delta l = 2(d_1 - d_2),$$

$$\delta_{12} = k\Delta l = \frac{4\pi n}{\lambda_0}(d_1 - d_2) = 2n\frac{\omega}{c}(d_1 - d_2), \tag{4.14}$$

přičemž fázový rozdíl $\delta_{12}$ je nezávislý na $\boldsymbol{r}$. Dvě vlny vstupující do „detektorové“ části můžeme charakterizovat v případě ideálního interferometru stejnými amplitudami za pomoci koeficientů odrazu $\tilde{r}_{BS}$ a průchodu $\tilde{t}_{BS}$ děliče svazku a odrazivost zrcadel $\tilde{r}_M$ (případné fázové posuvy lze popsat komplexními koeficienty). Obě vlny jsou odrazy na zrcadlech a průchodem ovlivněny stejným způsobem. Vlna 1 prochází nejprve děličem svazku, poté se odráží na zrcadle $Z_1$ a následně se odráží na děliči svazku. Její amplituda při vstupu do detektorového prostoru je

$$\tilde{E}_{01} = \tilde{t}_{BS}\tilde{r}_M\,\tilde{r}_{BS}\,E_{0\mathrm{i}}.$$

Druhá vlna se nejprve odráží na děliči svazku, poté na zrcadle $Z_2$ a následně prochází děličem svazku do detektorového prostoru s amplitudou

$$\tilde{E}_{02} = \tilde{r}_{BS}\tilde{r}_M\,\tilde{t}_{BS}\,E_{0\mathrm{i}}.$$

Za předpokladu, že obě zrcadla mají stejnou odrazivost charakterizovanou koeficientem odrazu $\tilde{r}_M$, jsou amplitudy obou vln stejné ($\tilde{E}_{01} = \tilde{E}_{02}$) a stejné jsou i jejich intenzity

$$I_1 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2|\tilde{r}_{BS}|^2\,|\,\tilde{t}_{BS}|^2\,|\tilde{r}_M|^2E_{01}^2 = I_2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2|\tilde{r}_{BS}|^2\,|\,\tilde{t}_{BS}|^2\,|\tilde{r}_M|^2E_{02}^2 = I_0.$$

Můžeme tedy pro celkovou intenzitu vlny v detektorovém prostoru mezi děličem a fokusační optikou (po interferenci) použít (4.10).

$$I_d \;= 4I_0\cos^2\frac{\delta_{12}}{2}, \tag{4.15}$$

kde $I_0$ je intenzita pro případ, že je otevřeno pouze jedno rameno interferometru. Výsledná intenzita podle (4.15) taktéž nezávisí na poloze $\boldsymbol{r}$ a je v celém detektorovém prostoru pro dané nastavení zrcadel konstantní. Kdybychom uměli realizovat situaci odpovídající předpokladu interference pouhých 2 rovinných vln se shodnými směry $\boldsymbol{k}$, nepozorovali bychom žádné

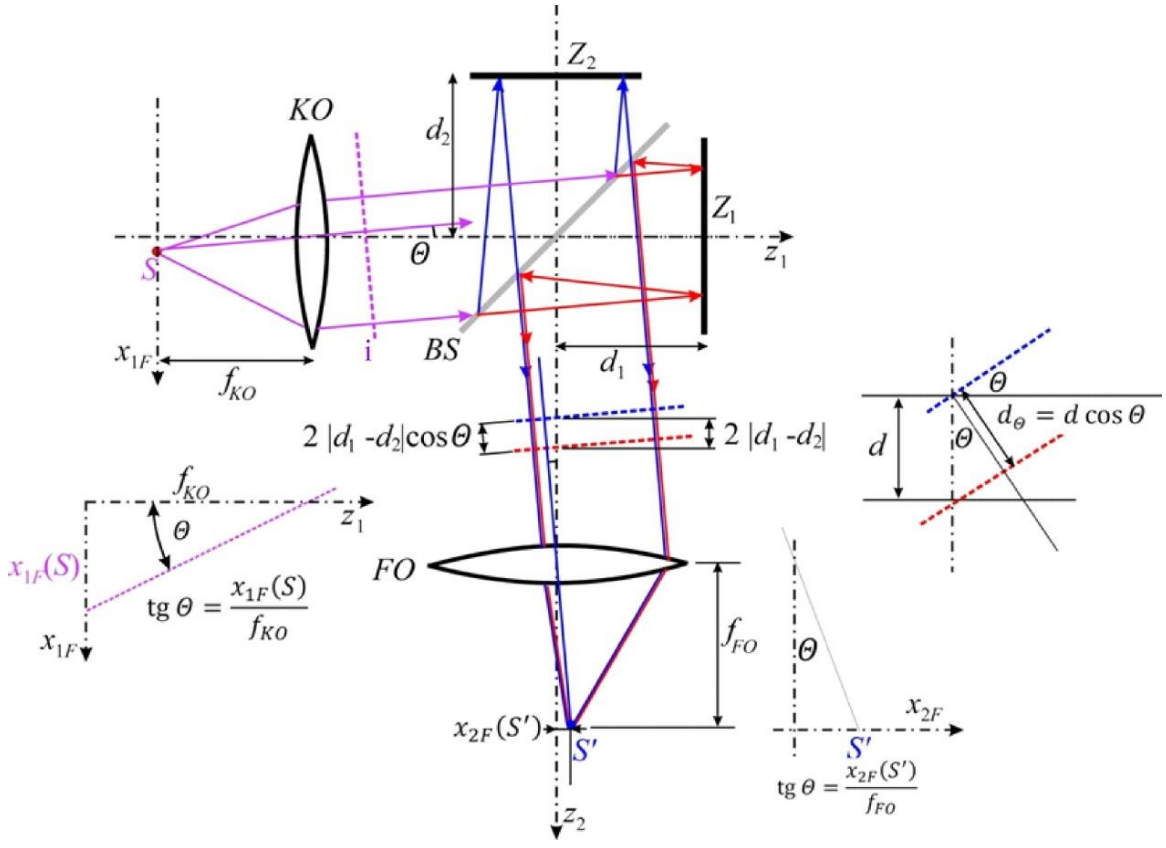
interferenční obrazce (proužky různé intenzity). Se změnou rozdílu $d_1 - d_2$ bychom viděli jen zatmívání a rozsvěcení v tomto prostoru. Úplná modulace intenzity mezi 0 a $4I_0$ souvisí s tím, že v uvedeném modelu jsou amplitudy z obou ramen stejné.

Podívejme se nyní na modelový případ, kdy do interferometru vstupuje šikmo jediná rovinná vlna (obr. 4.6). Úhel $\Theta$ souvisí s polohou bodu $S$ v ohniskové rovině kolimátoru vztahem

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\sqrt{x_{2F}^2(S) + y_{2F}^2(S)}}{f_{KO}}.$$

V obrázku 4.6 pro zjednodušení zobrazujeme jen průmět v rovině $xz$. V tomto případě platí $\operatorname{tg}\Theta = \frac{x_{2F}}{f_{KO}}$. Po průchodu interferometrem jsou vlnoplochy z jednotlivých ramen (odvozené od jedné vlnoplochy na vstupu) posunuty navzájem ve směru osy $z$ o $2(d_1 - d_2)$. Pro interferenci je důležitá vzdálenost vlnoploch „měřená“ na kolmici k nim. Proto je dráhový rozdíl mezi dvěma vlnami získaný průchodem interferometrem $2(d_1 - d_2)\cos\Theta$ a fázový rozdíl je

$$\delta_{12} = \frac{4\pi n}{\lambda_0}(d_1 - d_2)\ \cos\Theta = 2n\frac{\omega}{c}(d_1 - d_2)\cos\Theta. \qquad (4.\ 16)$$




Obr. 4.6 Model Michelsonova interferometru s jedinou rovinnou vlnou, jejíž vlnový vektor svírá s osou interferometru úhel $\Theta$.

V ohniskové rovině fokusační optiky dostaneme „bodový“ obraz $S'$, jehož vzdálenost od osy interferometru je

$$\Delta x(S') = f \,\mathrm{tg}\Theta \cong f\Theta$$

pro malé úhly.

Podmínka pro maximální intenzitu v tomto místě (podmínka konstruktivní interference) je

$$\delta_{MAX}(S') = \frac{4\pi n}{\lambda_0}(d_1 - d_2)\ \cos\Theta = 2n\frac{\omega}{c}(d_1 - d_2)\cos\Theta = 2m\pi\,, \tag{4.17}$$

kde $m$ je celé číslo. Pro minimální (nulovou) intenzitu platí podmínka destruktivní interference

$$\delta_{MIN}(S') = \frac{4\pi n}{\lambda_0}(d_1 - d_2)\ \cos\Theta = 2n\frac{\omega}{c}(d_1 - d_2)\cos\Theta = (2m+1)\pi. \tag{4.18}$$

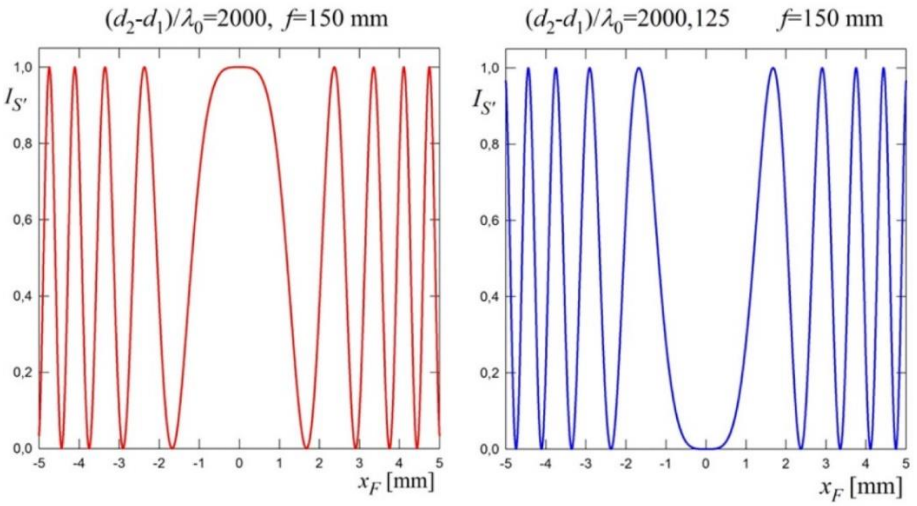
***Kroužky stejného sklonu v Michelsonově interferometru***

Představme si, že oblast zdroje $S$ (ohnisková rovina kolimační optiky) je vyplněna svítícími „body“, které vysílají kulové vlny. Ty se po průchodu kolimátorem mění na rovinné vlny a jejich úhel $\Theta$ je určen vzdáleností svítícího „bodu“ v rovině $S$ od osy interferometru. Pro některé z těchto svítících bodů bude splněna podmínka konstruktivní interference a obrazy těchto bodů budou v ohniskové rovině $S'$ fokusační optiky mít maximální intenzitu. Naopak pro jiné body bude splněna podmínka destruktivní interference a jejich obrazy budou mít nulovou intenzitu. Pro malé úhly

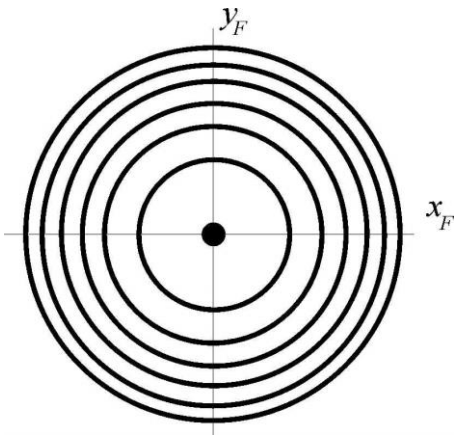
$$I_{S'}(x_F, y_F) \sim \cos^2\left[\frac{2\pi n}{\lambda_0}(d_1 - d_2)\cos\Theta\right],$$

$$\mathrm{tg}\,\Theta = \frac{\sqrt{x_F^2 + y_F^2}}{f}.$$

Z osové symetrie uspořádání plyne, že množiny bodů, pro které je $\delta = konstanta$, jsou v ohniskové rovině kružnice. V ohniskové rovině tak můžeme detekovat (přímo uvidět např. při použití čočky okuláru či dalekohledu) soustředné kroužky maximálních a minimálních intenzit. Tento interferenční obrazec je reálný a lokalizovaný právě jen v ohniskové rovině. Bez fokusační optiky též můžeme říci, že máme co do činění s **virtuálním interferenčním obrazcem lokalizovaným** v $z \to -\infty$**.** Je zvykem tyto kroužky nazývat **kroužky stejného sklonu** (každý poloměr je charakterizován určitým úhlem $\Theta$), též pojmenované jako **Haidingerovy kroužky**.




Obr. 4.7 Průběh intenzity záření v ohniskové rovině spočtený podle vztahu (4.16) pro uvedené parametry ukazující intenzitu kroužků stejného sklonu

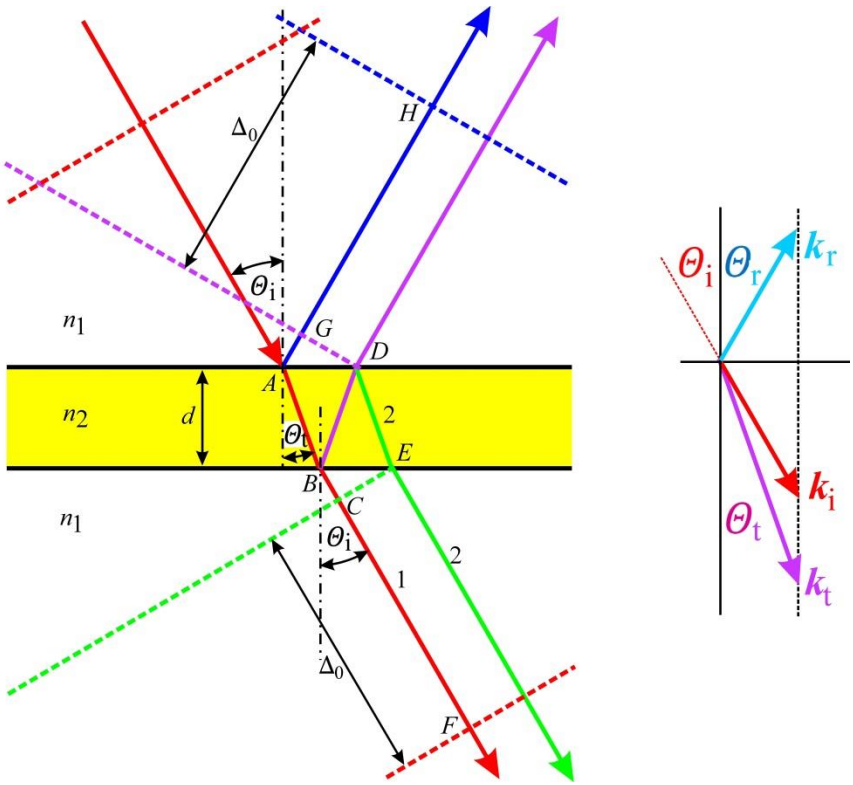



Obr. 4.8 Maxima kroužků stejného sklonu pozorovatelné v ohniskové rovině fokusační optiky. Radiální rozložení intenzit v těchto kroužcích odpovídá vztahu (4.16) a obr. 4.7.

#### 4.1.1.2 Dvousvazková interference na planparalelní dielektrické desce

V této části se budeme zabývat základním modelem popisu interference pro dopad jedné rovinné vlny na planparalelní dielektrickou desku s indexem lomu $n_2$ umístěné v prostředí s indexem lomu $n_1$, obr. 4.9. V souladu se zákony odrazu a lomu se částečně odráží a částečně láme na horním rozhraní obou prostředí (pro vybraný paprsek v daný okamžik nechť k tomu dochází v bodě $A$ horní plochy rozhraní). Dále budeme sledovat dráhu tohoto bodu na vlnoplochách. V lomené vlně tento bod postupuje dielektrikem s indexem lomu $n_2$ a na spodním rozhraní obou prostředí (paprsek v bodě $B$) se opět částečně odráží zpět do desky a částečně se po lomu šíří dále za deskou. Vlna odražená od spodního rozhraní se šíří směrem k hornímu rozhraní, kde opět dochází k odrazu a lomu (bod $D$). Vlna odražená od horního rozhraní se šíří opět k spodnímu rozhraní a sledovaný bod vlnoplochy dospěje do bodu $E$, kde dochází k lomu. Za stejnou dobu dospěje sledovaný bod vlnoplochy, která podstoupí pouze lomy v bodech $A$ a $B$, do místa $F$. V tomto modelu se omezíme na dva odrazy vlny (v bodech $B$ a $D$), další odraz do desky v bodě $E$ tedy zatím nebudeme uvažovat. Lomené vlny (paprsky

z bodů $B$ a $E$) se dále šíří za deskou a interferují spolu s fázovým posuvem daným **optickou vzdáleností vlnoploch** procházejících body $E$ a $F$. Podobně vlny odražené od horního rozhraní v bodě $A$ a vlny procházející bodem $D$ spolu interferují v oblasti nad deskou, kde pozorujeme interferenci na odraz.




Obr. 4.9 Model dvojsvazkové interference rovinné vlny na planparalelní dielektrické desce. Vpravo je znázorněn zákon odrazu a lomu na prvním rozhraní. Vlnoplocha procházející bodem $A$ potřebuje na proběhnutí dráhy $ABC$ kratší čas než na proběhnutí dráhy $ABDE$. Totéž vyjádřeno jinak: vlnoplocha procházející body $E$ a $C$ a vlnoplocha procházející bodem $F$ potřebují na dráhu z bodu $A$ stejný čas.

Zaměřme se nyní podrobněji na popis interference na průchod za deskou. Interferující vlny mají paralelní vlnové vektory $\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$. Pro stanovení velikosti interferenčního členu potřebujeme určit fázový rozdíl mezi vlnoplochami, které projdou deskou „přímo“, takže zvolený bod na vlnoploše 1 vykoná dráhu $ABCF$ a vlnoplochou 2, která prodělá navíc 2 vnitřní odrazy a tento bod proběhne za stejný čas dráhu $ABDE$. Výpočet fázového rozdílu je ukázán v Poznámce P4.1 s výsledkem

$$\delta_{12} = \varphi_1(F) - \varphi_2(C) = 2\frac{\omega}{c} n_2 d \cos\Theta_\mathrm{t} = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 d \cos\Theta_\mathrm{t} = \frac{4\pi}{\lambda_2} d \cos\Theta_\mathrm{t}\,. \tag{4.19}$$

Maximum intenzity v prostoru za deskou nastává při splnění podmínky $\delta_{12} = 2m\pi$, minimum v případě $\delta_{12} = (2m+1)\pi$, kde $m$ je celé číslo.

Tento fázový rozdíl se již v prostoru za deskou nemění. Geometrickou vzdálenost $\Delta_0 = 2\frac{n_2}{n_1} d \cos\Theta_\mathrm{t}$ naznačenou v obr. 4.9 můžeme interpretovat jako rozdíl poloh vlnoploch odvozených od jedné dopadající vlnoplochy v jednom časovém okamžiku.

Podobným postupem lze popsat interferenci v odraženém světle, kde lze očekávat v běžných situacích interferenční obrazec s vyšším kontrastem, protože interferují vlny srovnatelných amplitud. V tomto případě je však třeba vzít v úvahu, že při odrazu na neabsorbujícím, opticky hustším prostředí dochází k dodatečné změně fáze vlny o $\pi$ (pro polarizaci $s$ vždy, pro polarizaci $p$ pro úhel dopadu menší než Brewsterův úhel). V případě, že $n_1 < n_2$ dochází k dodatečné změně fáze o $\pi$ při odrazu vlny na horním rozhraní, v opačném případě na spodním rozhraní. V obou případech můžeme pro celkovou změnu fáze psát

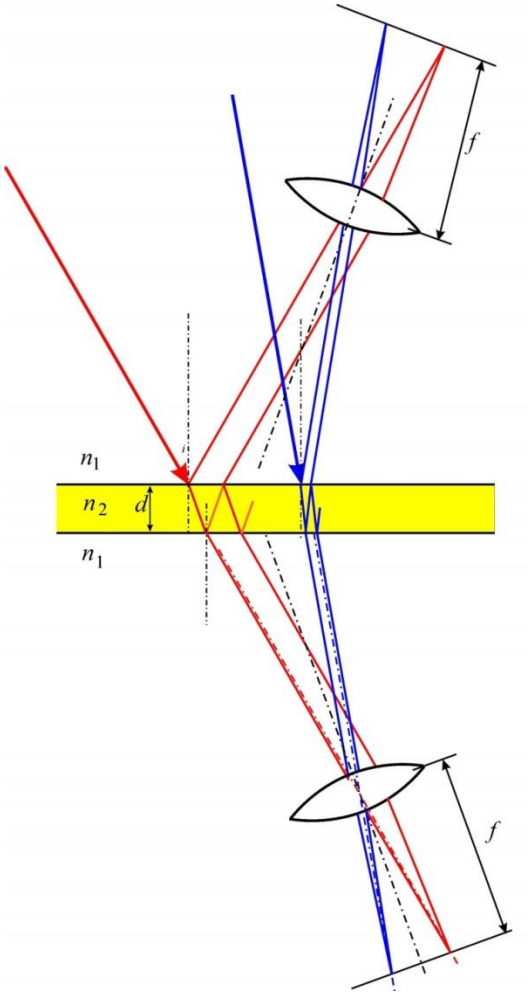
$$\delta_{tot} = \delta_{12} + \varphi_{odr} = 2\frac{\omega}{c}\, n_2 d \cos\Theta_t + \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 d \cos\Theta_t + \pi. \tag{4.20}$$

Maximální intenzita v odraženém světle nastává při splnění podmínky $\delta_{tot} = 2m\pi$, minimum v případě $\delta_{tot} = (2m+1)\pi$, kde $m$ je celé číslo.

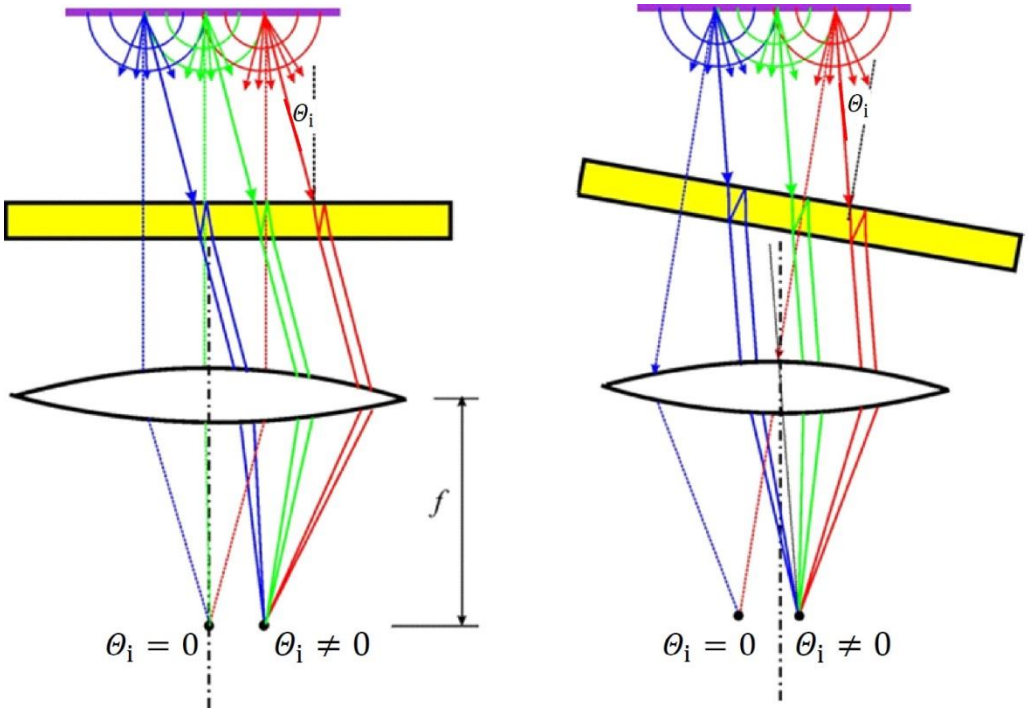
Změna fáze o $\pi$ je velmi důležitá z hlediska rozdělení odraženého a prošlého výkonu (zachování energie v neabsorbujícím prostředí). Zajišťuje, že při maximálním odrazu je minimální průchod a naopak.

Interferující záření na vstupu můžeme, ale nemusíme kolimovat (obr. 4.11). V obou případech se v ohniskové rovině fokusační optiky zobrazí pro daný úhel dopadu $\Theta_\mathrm{i}$ bod o intenzitě odpovídající danému fázovému rozdílu $\delta_{tot}$. Protože v „interferenčních“ prostorech před a za deskou nepozorujeme žádný zřetelný interferenční obrazec, ale při současném dopadu vln o různých úhlech $\Theta_\mathrm{i}$ jsou světlé a tmavé proužky / kroužky dobře patrné až v ohniskové rovině fokusační optiky (resp. na sítnici oka), mluvíme o virtuálních **proužcích lokalizovaných v nekonečnu**. Pro dokonale planparalelní desku dostáváme při vhodném uspořádání **kroužky stejného sklonu**.

Zopakujme, že i když jednotlivé „body“ zdroje vyzařují záření navzájem nezávisle, tedy třeba i bez vzájemných fázových vztahů příslušných vln, můžeme lokalizovaný interferenční obrazec pozorovat, protože podmínky pro maxima /minima intenzity jsou splněny pro každou dvojici vln vycházejících z desky. Důležité jsou úhly dopadu na desku $\Theta_\mathrm{i}$ a planparalelnost desky. Pro takto nekoherentní zdroj se v bodě ohniskové roviny sčítají intenzity záření přicházející z jednotlivých „bodů“ zdroje.




Obr. 4.10 Paprskový model zobrazení 2 rovinných vln (červená a modrá) s různým úhlem dopadu na planparalelní desku do ohniska fokusační optiky



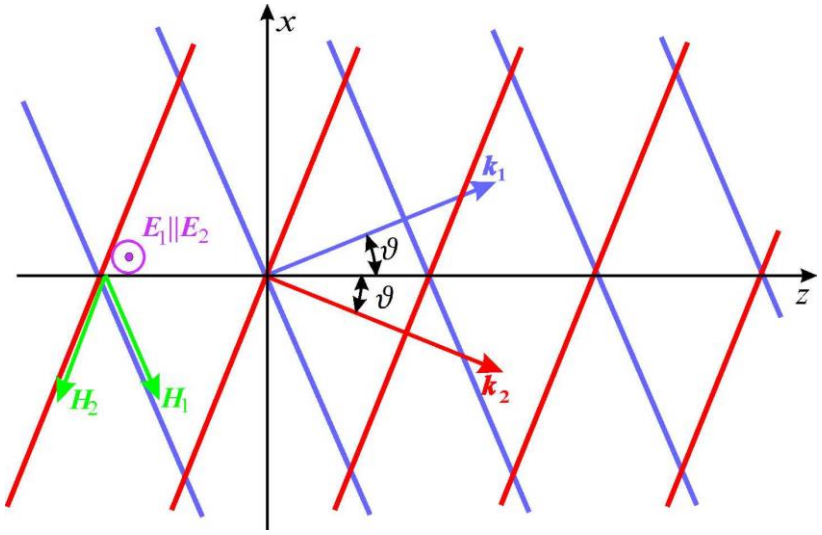

Obr. 4.11 Planparalelní deska osvětlená plošným zdrojem tvořeným mnoha „elementárními“ zdroji kulových vln bez kolimační optiky. Pokud optická osa fokusační optiky není totožná s kolmicí k desce (obrázek vpravo), proužky stejného sklonu nejsou přesně soustředné kružnice, ale interferenční obrazec je deformovaný.

***Vliv vlastností interferujícího záření***

Je zřejmé, že v každém bodě interferenčního prostoru se sčítají pole odvozená od různých vlnoploch dopadající vlny a navíc od různých paprsků, které protínají vlnoplochu v různých místech. Aby platily dosud uvedené vztahy, nesmí se za dobu $t_2 - t_1 = \frac{\Delta_{OD}}{c}$ ($\Delta_{OD}$ je rozdíl optických drah) charakter pole dopadající vlny změnit [jinak řečeno stupeň časové (podélné) koherence musí být „vysoký“] a totéž musí platit pro směr příčný charakterizovaný v obr. 4.9 vzdáleností $CE$ (stupeň prostorové (příčné) koherence též vysoký). Blíže bude pojednáno v kapitole 7 „Koherence“. Modelová monochromatická rovinná vlna tyto podmínky výborně splňuje, v reálných situacích tomu tak být nemusí. Zde je základ toho, že někdy jsou interferenční jevy dobře pozorovatelné (tenké vrstvy, malá prostorová divergence širokého dopadajícího svazku a/nebo malá divergence svazku vedoucího k detektoru, např. oku). Za jiných podmínek jsou interferenční jevy v časové a prostorové škále pozorování rozmazány a nepozorujeme je.

## 4.1.2 Dvousvazková interference vln $k_1 \nparallel k_2$

V další části rozvedeme případ, kdy fázový rozdíl interferujících vln stejné amplitudy i frekvence primárně vzniká v důsledku různého směru vlnových vektorů $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$, které spolu svírají úhel $2\vartheta$. Obě vlny mohou vůči sobě být navíc fázově posunuty o fázový posun $\delta_0 = \delta_{12}(\boldsymbol{r} = 0)$. Soustavu souřadnou zvolíme tak, že oba vektory svírají s osou $z$ úhel $\vartheta$ (obr. 4.12).




Obr. 4.12 Interference 2 rovinných vln, jejichž vlnové vektory svírají úhel $2\vartheta$, stejně jako jejich vektory magnetického pole, zatímco vektory elektrického pole obou vln jsou rovnoběžné s osou $y$ a kolmé na rovinu určenou vektory $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$

Pro vektory $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$ zřejmě platí

$$|\boldsymbol{k}_1| = |\boldsymbol{k}_2|,$$

$$\boldsymbol{k}_1 = (k \sin\vartheta, 0, k\cos\vartheta) = (k_{1x}, 0, k_{1z}),$$

$$\boldsymbol{k}_2 = (-k \sin\vartheta, 0, k\cos\vartheta) = (k_{2x}, 0, k_{2z}),$$

$$k_x = k_{1x} = -k_{2x}, \quad k_z = k_{1z} = k_{2z}.$$

Z možných orientací elektrického a magnetického pole vyberme tu, ve které vektory elektrického pole obou interferujících vln jsou rovnoběžné a orientované ve směru osy y

$$\tilde{E}_{1y}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \; e^{i(\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \frac{\delta_0}{2})},$$

$$\tilde{E}_{2y}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \; e^{i(\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} - \omega t - \frac{\delta_0}{2}),}$$

kde jsme případný rozdíl fází $\delta_0$ v místě $\boldsymbol{r} = 0$ a čase $t = 0$ symetricky rozdělili mezi obě vlny.

Pro intenzitu elektrického pole výsledné vlny pak platí

$$\begin{aligned} \tilde{E}_y(\boldsymbol{r}, t) &= \tilde{E}_{1y}(\boldsymbol{r}, t) + \tilde{E}_{2y}(\boldsymbol{r}, t) = \\ &= E_0 \, e^{i(k_z z - \omega t)} \left( e^{i(k_x x + \frac{\delta_0}{2})} + e^{-i(k_x x + \frac{\delta_0}{2})} \right) = \\ &= 2E_0 \cos\left( k_x x + \frac{\delta_0}{2} \right) e^{i(k_z z - \omega t)}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Pro hustotu elektrické energie pak můžeme psát

$$\langle u_E \rangle_T = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \varepsilon_r \widetilde{\boldsymbol{E}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{E}}^* = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 \, 4E_0^2 \cos^2\left(k_x x + \frac{\delta_0}{2}\right) =$$
$$= 4I_0 \cos^2\left(k_x x + \frac{\delta_0}{2}\right) = 2I_0 \, [1 + \cos(2k_x x + \delta_0)]. \tag{4.22}$$

Hustota elektrické energie tedy osciluje ve směru $x$ v celém prostoru. Rozložení intenzity závisí jen na souřadnici $x$ a nezávisí na souřadnicích $y$ a $z$. Maximum (4.22) nastává pro

$$\cos\,(2k_x x_{max} + \delta_0) = \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}\, x_{max} \sin\vartheta + \delta_0\right) = 1, \tag{4.23}$$

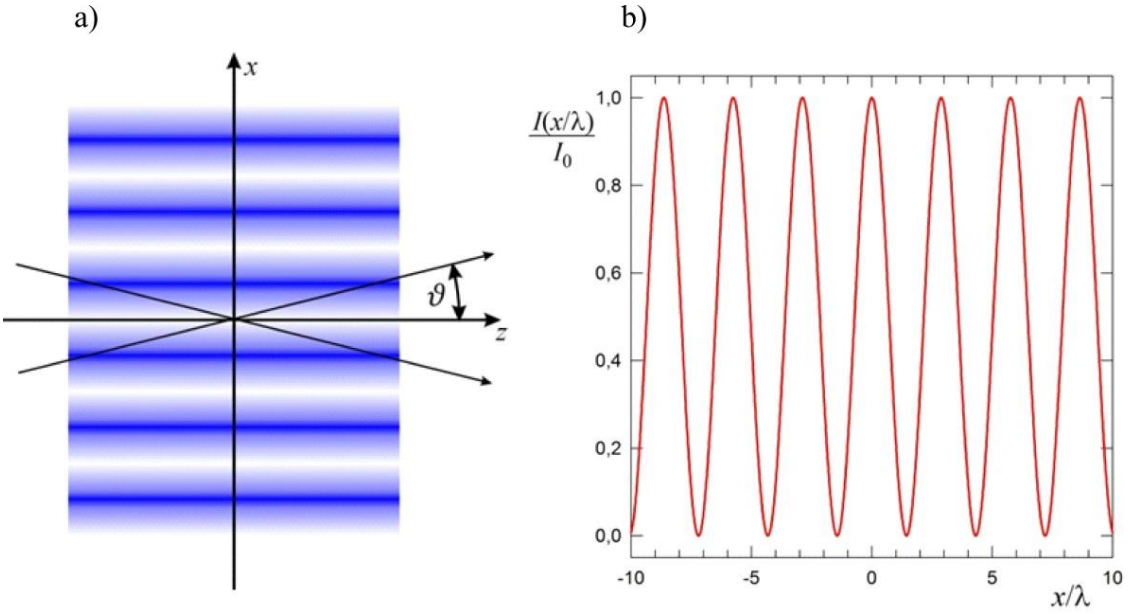
$$\frac{4\pi}{\lambda} x_{max} \sin\vartheta + \delta_0 = 2\pi m, \tag{4.24}$$

kde $m$ je celé číslo. V případě $\delta_0 = 0$ nastává nulté maximum ($m = 0$) v rovině $x = 0$. Pokud je $\delta_0$ rovno lichému násobku $\pi$, nastává v rovině $x = 0$ minimum intenzity interferenčního obrazce. Sousední maxima jsou vzdálena o

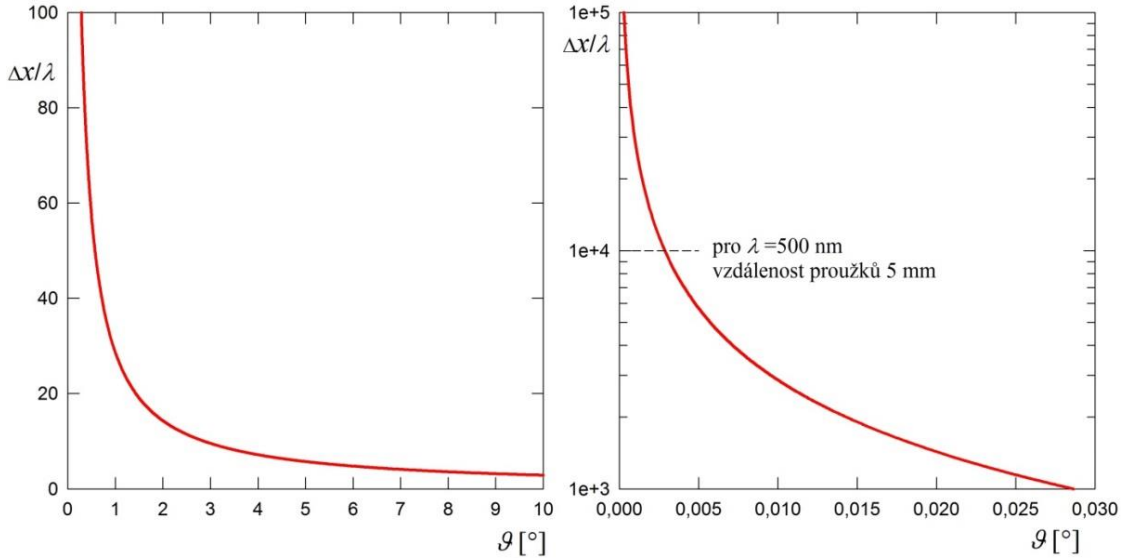
$$\frac{4\pi}{\lambda}\Delta x \,\sin\vartheta = 2\pi, \tag{4.25}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\vartheta}. \tag{4.26}$$

Z obr. 4.13 je zřejmé, že interferenční obrazec je možné detekovat (např. vidět při vložení matnice do daného prostoru) kdekoli. Takový obrazec nazýváme **delokalizovaný** a je **reálný**. S klesajícím úhlem $\vartheta$ narůstá vzdálenost sousedních maxim (i minim). Maxima i minima se rozšiřují a v limitě $\vartheta = 0$, $\Delta x \to \infty$ dostáváme popis shodný s modelem interference dvou rovinných vln s rovnoběžnými vlnovými vektory.




Obr. 4.13 Interference dvou rovinných vln s nekolineárními vlnovými vektory. a) Naznačení rozložení intenzity interferenčního obrazce v řezu v rovině $xz$. b) Rozložení hustoty elektrické energie ve směru $x$ pro úhel $\vartheta = 10°$.




Obr. 4.14 Závislost vzdálenosti sousedních maxim intenzity interference ve směru $x$ v závislosti na úhlu mezi vlnovými vektory obou rovinných vln vstupujících do interference. Aby vzdálenost proužků ve viditelném oboru byla „makroskopická“, úhly mezi $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$ musí být velmi malé.

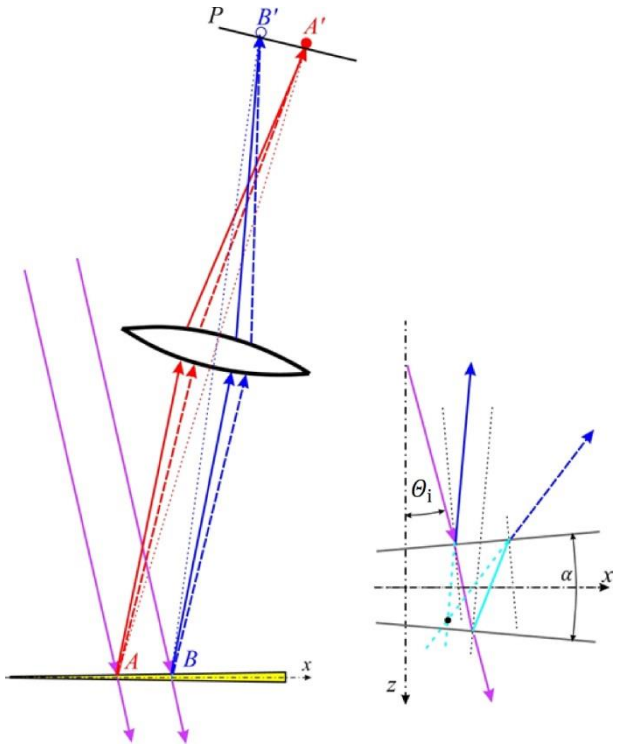
Pro pole magnetické je situace trochu složitější s ohledem na to, že příspěvky $\boldsymbol{H}_1$ a $\boldsymbol{H}_2$ svírají úhel $2\vartheta$. Blíže o rozložení magnetického pole a důsledku pro Poyntingův vektor pojednáme v Poznámce 4.2

### 4.1.3 Interferenční proužky stejné tloušťky

V případě, že řídícím parametrem splnění interferenční podmínky je tloušťka (např. klínu), lze pozorovat interferenční obrazce nazývané proužky stejné tloušťky. Název proužky stejné tloušťky vyplývá z toho, že parametrem měnícím fázový rozdíl interferujících vln je **tloušťka vrstvy v daném místě,** na rozdíl od proužků (kroužků) stejného sklonu, kde určujícím parametrem byl úhel dopadu vlny na planparalelní desku. Proužky stejné tloušťky jsou též nazývány Fizeauovy proužky.

V případě, že vrcholový úhel klínu $\alpha$ je malý, platí

$$\tan\alpha \sim \alpha = \frac{d}{x}\,, \qquad d = x\alpha\,.$$




Obr. 4.15 Paprskový model interference na tenkém klínu. O tom, zda se v místě pozorování $A'$, $B'$ objeví interferenční proužky maximální intenzity nebo intenzity minimální, rozhoduje splnění podmínek v místech $A$ a $B$ pro fázový rozdíl mezi přímo odraženou vlnou (plné čáry) a vlnou odraženou na spodní straně klínu (čárkované čáry). Právě v místech $A'$, $B'$ dojde k interferenci částí vlnoploch vln vycházejících z oblastí kolem bodů $A$ a $B$ a odvozených od původního paprsku dopadajícího do oblasti $A$ nebo $B$.

K maximu intenzity dochází při splnění podmínky fázového rozdílu, kterou v aproximaci malých úhlů $\alpha$ [rad] můžeme napsat

$$\delta_{12}\,(x_{MAX}) \cong \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 d \cos\Theta_\mathrm{t} + \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 \alpha\, x_{MAX} \cos\Theta_\mathrm{t} + \pi = 2m\pi,$$

kde $\lambda_0$ je vlnová délka ve vakuu a $\lambda = {}^{\lambda_0}/_{n_2}$ je vlnová délka v materiálu klínu. Maxima jsou lokalizována v místech

$$x_{MAX} \cong \frac{\lambda_0}{2n_2\alpha\,\cos\Theta_\mathrm{t}}\left(m-\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\alpha\,\cos\Theta_\mathrm{t}}\left(m-\frac{1}{2}\right),$$

$$d_{MAX} \cong \alpha\, x_{MAX} \cong \frac{\lambda_0}{2n_2\,\cos\Theta_\mathrm{t}}\left(m-\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\cos\Theta_\mathrm{t}}\left(m-\frac{1}{2}\right).$$

Nejvhodnější podmínky pro pozorování interferenčního obrazce na klínu bývají pro kolmý dopad záření, kdy je $\cos\Theta_\mathrm{t} \cong 1$ a

$$x_{MAX} \cong \frac{\lambda_0}{2n_2\alpha}\left(m-\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\alpha}\left(m-\frac{1}{2}\right).$$

Tloušťka klínu v místě $m$-tého interferenčního maxima při kolmém dopadu je

$$d_{MAX} = \frac{\lambda}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)$$

a tloušťka klínu v místech sousedních interferenčních maxim se liší o $\frac{\lambda}{2}$.

Připomeňme, že k tomu, aby interferenční proužky byly „makroskopické," úhly $\alpha$ musí být malé. Např. pro $\lambda_0 = 500$ nm a index lomu 1,5 a chceme-li získat vzdálenost sousedních proužků 1 mm, potřebujeme klín s úhlem zhruba 0,01°. V našem schématickém obrázku je z důvodu názornosti úhel $\alpha$ výrazně větší.

# 4.2 Interference mnoha vln s rovnoběžnými vlnovými vektory

Dosud jsme se zabývali řadou případů, kdy spolu interferovaly dvě vlny. V další části se budeme věnovat popisu dvou speciálních situací, kdy dochází k interferenci mnoha vln s rovnoběžnými vlnovými vektory.

## 4.2.1 Interference mnoha vln s rovnoběžnými vlnovými vektory, stejnými amplitudami a stejnými fázovými rozdíly

Pro tuto úlohu je důležitý fázový posuv mezi vlnami, např. fázový posuv mezi vlnami $m$ a $m + 1$ označme $\delta \equiv \delta_{m+1,m}$.

V našem popisu se omezíme jen na rovinné vlny s vlnovým vektorem $\boldsymbol{k} = (k \sin\vartheta, 0, k\cos\vartheta)$ ležícím v rovině $xz$ a nezávislým na $m$ Pro $m$-tou vlnu $m \in \langle 0; N-1\rangle$ můžeme napsat

$$E_m(x, z, \vartheta, t) = E_0 e^{ikx\sin\vartheta} e^{ikz\cos\vartheta} e^{im\delta} e^{-i\omega t} = E_{m=0} e^{im\delta}. \tag{4.27}$$

Složení $N$ takových vln spočteme jako součet konečné geometrické řady

$$E_{tot} = E_{m=0} \sum_{m=0}^{N-1} e^{im\delta} = E_{m=0}\, \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}. \tag{4.28}$$

Relativní výkonovou intenzitu spočteme jako

$$\begin{aligned} E_{tot}E_{tot}^* &= E_{m=0}E_{m=0}^* \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} \frac{1 - e^{-iN\delta}}{1 - e^{-i\delta}} = \\ &= |E_0|^2 \frac{1 - \left(e^{iN\delta} + e^{-iN\delta}\right) + 1}{1 - (e^{i\delta} + e^{-i\delta}) + 1} = |E_0|^2 \frac{1 - \cos N\delta}{1 - \cos\delta} = \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$= |E_0|^2 \frac{\sin^2\left(N\frac{\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \propto I_0\, N^2 \frac{\sin^2\left(N\frac{\delta}{2}\right)}{N^2\,\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)},$$

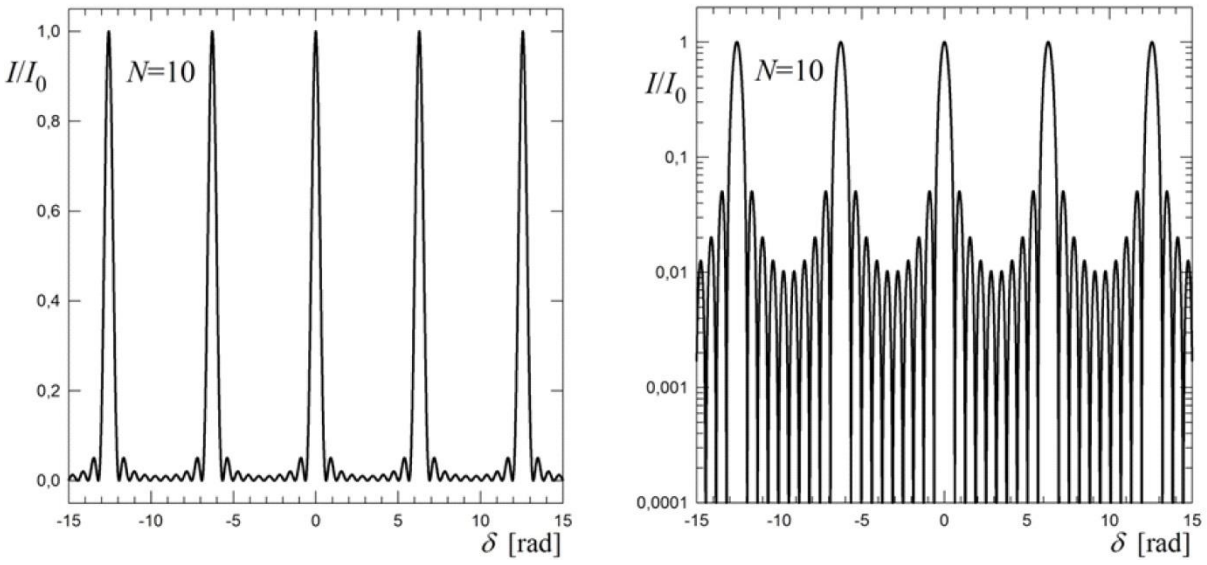
což je periodická funkce $\delta$ s periodou $\Delta\delta = 2\pi$. Její hlavní maxima nastávají při nulovém jmenovateli a s použitím l'Hospitalova derivačního pravidla je

$$\lim_{\delta\to 2m\pi} \frac{\sin^2\left(N\frac{\delta}{2}\right)}{N^2\,\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = 1. \tag{4.30}$$

Nulové body této funkce jsou

$$\sin N\frac{\delta}{2} = 0, \qquad \text{přičemž} \;\; \sin\frac{\delta}{2} \neq 0,$$
$$\delta = 2\pi\, {}^{p}/_{N}, \qquad \delta \neq 2m\pi, \quad p, m \text{ celá čísla}, \;\; {}^{p}/_{N} \text{ číslo necelé}. \tag{4.31}$$

Výsledkem tohoto modelu interference rovinných vln s rovnoběžnými vlnovými vektory v závislosti na fázovém rozdílu $\delta$ by byla modulace intenzity homogenní v **celém interferenčním prostoru**, protože fázový rozdíl $\delta$ na prostorové souřadnici nezávisí. Tedy v tomto modelu nastává rozsvěcení a zhášení v celém prostoru. Tento model je využíván při popisu funkce optické mřížky, který uvedeme v kapitole 6 „Difrakce."




Obr. 4.16 Graf funkce $\frac{\sin^2\left(N\frac{\delta}{2}\right)}{N^2\,\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$ pro $N = 10$. Funkce je periodická s periodou $2\pi$.

## 4.2.2 Interference nekonečně mnoha vln s rovnoběžnými vlnovými vektory, různými amplitudami a stejnými fázovými rozdíly – interference na planparalelní desce

Následuje model obdobný tomu, který jsme uvedli v části 4.1.1 s reálnými Fresnelovými koeficienty reflexe a transmise v aproximaci interference 2 vln na planparalelní desce. Uspořádání je totožné s případem interference 2 vln na obr. 4.9. Rozdíl je pouze v tom, že započítáme nikoli jen vlnu vzniklou při 2 vnitřních odrazech, ale z **početních důvodů** vezmeme do úvahy zidealizovanou možnost nekonečně mnoha vnitřních odrazů. Vlnu dopadající na horní rozhraní můžeme zapsat jako

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{E}_{0\mathrm{i}}\, e^{i(\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = \boldsymbol{E}_{0\mathrm{i}}\, e^{ik_1 x \sin\Theta_{\mathrm{i}}}\, e^{ik_1 z\cos\Theta_{\mathrm{i}}}\, e^{-i\omega t}, \qquad z<0. \tag{4.32}$$

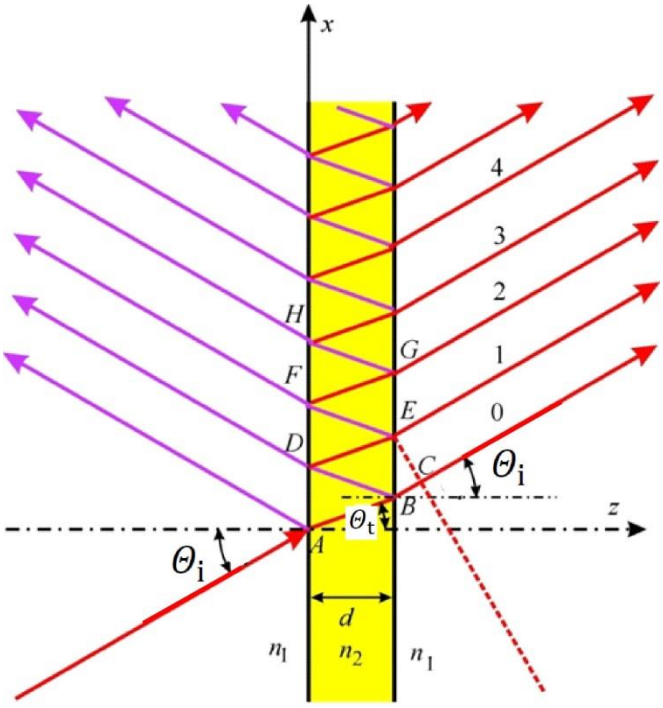
Vlna, jejíž paprsek je lomen v bodě $B$ do prostředí za deskou (index lomu $n_1$, vlna 0), je pak

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{t0}} = t_{12}\, t_{21}\, e^{i\frac{\delta}{2}}\boldsymbol{E}_{0\mathrm{i}}\, e^{ik_1 x \sin\Theta_{\mathrm{i}}}\, e^{ik_1 z\cos\Theta_{\mathrm{i}}}\, e^{-i\omega t} = t_{12}\, t_{21}\, e^{i\frac{\delta}{2}}\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}}, \quad z>d, \tag{4.33}$$

kde $t_{12}$ a $t_{21}$ jsou amplitudové koeficienty transmise z prostředí 1 (např. vzduch) do prostředí 2 (dielektrická deska) a z prostředí 2 do prostředí 1 pro odpovídající polarizaci $s$ nebo $p$. Fázový posuv $\frac{\delta}{2}$ je získaný při jednom průchodu deskou od rozhraní 1 k rozhraní 2. Paprsek lomený v bodě $E$ (vlna 1) je

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{t1}} = t_{12}\, e^{i\frac{\delta}{2}} r_{21}\, e^{i\frac{\delta}{2}} r_{21} e^{i\frac{\delta}{2}} t_{21}\, \widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}} = t_{12}\, r_{21}\, r_{21} t_{21}\, e^{i\frac{\delta}{2}} e^{i\delta}\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}}, \tag{4.34}$$

kde $r_{21}$ je amplitudový koeficient odrazu na rozhraní z prostředí 2 do prostředí 1. Pro jednoduchost zápisu výpočtu předpokládáme, že všechny koeficienty $r_{12}$, $r_{21}$, $t_{12}$, $t_{21}$ jsou reálné, tedy že struktury určující odrazivost rozhraní ani materiál desky vůbec neabsorbují. Označujeme fázový posuv získaný na dráze dvojitého průchodu $\delta(ABD) = \delta(BDE) = \cdots = \delta = 2\frac{\omega}{c} n_2 d\cos\Theta_{\mathrm{t}}$. Fázový úhel $\frac{\delta}{2}$ bývá nazýván jako fázová tloušťka vrstvy.




Obr. 4.17 Paprskový model mnohonásobných odrazů v planparalelní dielektrické desce

Vlna lomená v bodě $G$ (vlna 2)

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{t2} = t_{12}\,(r_{21}\,r_{21})^2 t_{21}\,e^{i\frac{\delta}{2}} e^{2i\delta}\widetilde{\boldsymbol{E}}_i$$

a další je

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{t3} = t_{12}\,r_{21}^6 t_{21}\,e^{i\frac{\delta}{2}} e^{3i\delta}\widetilde{\boldsymbol{E}}_i\,.$$

Podle Fresnelových vztahů pro obě složky polarizace je $r_{12} = -r_{21} = r$ a pro $l$-tou vlnu prošlou dielektrickou deskou platí

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{tl} = t_{12}\,t_{21}\,e^{i\frac{\delta}{2}}\,r^{2l} e^{il\delta}\;\widetilde{\boldsymbol{E}}_i.$$

Celkové pole za deskou získáme jako součet

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_t = t_{12}\,t_{21}\,e^{i\frac{\delta}{2}}\widetilde{\boldsymbol{E}}_i(1 + r^2 e^{i\delta} + r^4 e^{2i\delta} + \cdots..). \tag{4.35}$$

Výraz v závorce je geometrická řada s kvocientem $q = r^2 e^{i\delta}$. Budeme předpokládat, že počet odrazů je velký, použijeme vztahu pro součet nekonečné geometrické řady (Airyho metoda sčítání odrazů) a dostaneme

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_t = \frac{t_{12}\,t_{21}\,e^{i\frac{\delta}{2}}}{1 - r^2 e^{i\delta}}\widetilde{\boldsymbol{E}}_i = t_{12}\,t_{21}\,e^{i\frac{\delta}{2}}\,\frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}}\boldsymbol{E}_{0i}\,e^{i(\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}\,. \tag{4.36}$$

Pro intenzitu v prostředí za deskou platí

$$I_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n^2\, \widetilde{\boldsymbol{E}}_\mathrm{t} \cdot \widetilde{\boldsymbol{E}}_\mathrm{t}^{*} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 \frac{(t_{12}\, t_{21})^2}{1 + r^4 - r^2(e^{i\delta} + e^{-i\delta})} E_{0\mathrm{i}}^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 \frac{(t_{12}\, t_{21})^2}{1 + r^4 - 2r^2\cos\delta} E_{0\mathrm{i}}^2 = \frac{(t_{12}\, t_{21})^2}{1 + r^4 - 2r^2\cos\delta}\, I_0. \tag{4.37}$$

S využitím vztahů mezi Fresnelovými koeficienty

$$r_{p12} = -\, r_{p21}, \quad r_{s12} = -r_{s21},$$
$$t_{p12}\, t_{p21} = 1 - r_{p12}^2, \quad t_{s12}\, t_{s21} = 1 - r_{s12}^2$$

dostaneme

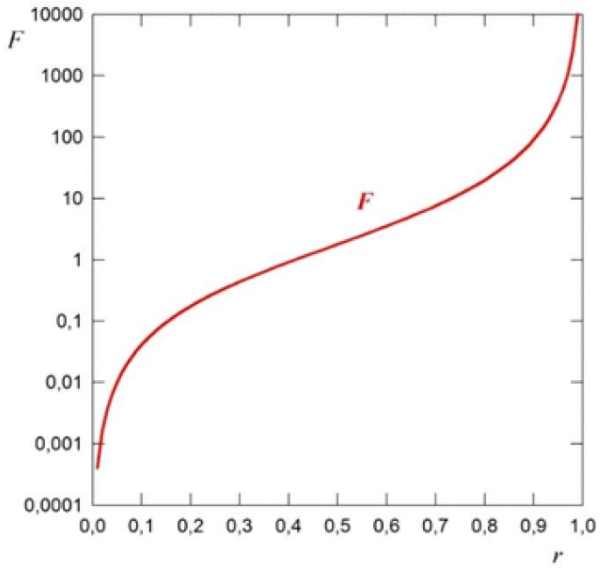
$$I_\mathrm{t} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 \frac{(1-r^2)^2 E_{0\mathrm{i}}^2}{1 + r^4 - 2r^2\cos\delta} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 \frac{(1-r^2)^2 E_{0\mathrm{i}}^2}{(1-r^2)^2 + 2r^2(1-\cos\delta)} =$$
$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 \frac{(1-r^2)^2 E_{0\mathrm{i}}^2}{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{I_0}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{I_0}{1 + F\sin^2\frac{\delta}{2}}. \tag{4.38}$$

Funkce $I_\mathrm{t}(R)$ je nazývána Airyova funkce. Veličina

$$F = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} = \frac{4R}{(1-R)^2} \tag{4.39}$$

se nazývá jemností, $R = |r|^2$ je intenzitní (výkonový) koeficient odrazu. Závislost jemnosti na koeficientu odrazu $F(r)$ je znázorněna na obr. 4.18. Je zřejmé, že s rostoucím koeficientem odrazu jemnost silně narůstá, zvláště v oboru $r > 0{,}8$.

Započítání vícenásobných vnitřních odrazů je důležité pro koeficienty odrazu větší než poskytují Fresnelovy koeficienty pro jednoduché rozhraní. Z hlediska praktických využití obdobných uspořádání jsou zajímavé právě případy s **vysokým koeficientem odrazu** na rozhraních. To je případ, kdy mnohonásobné odrazy v desce vedou k zajímavým vlastnostem, které nacházejí mnohé aplikace v moderní optice. Vysoký koeficient odrazu se projevuje výrazným zúžením interferenčních maxim $I_\mathrm{t}$ (obr. 4.19).



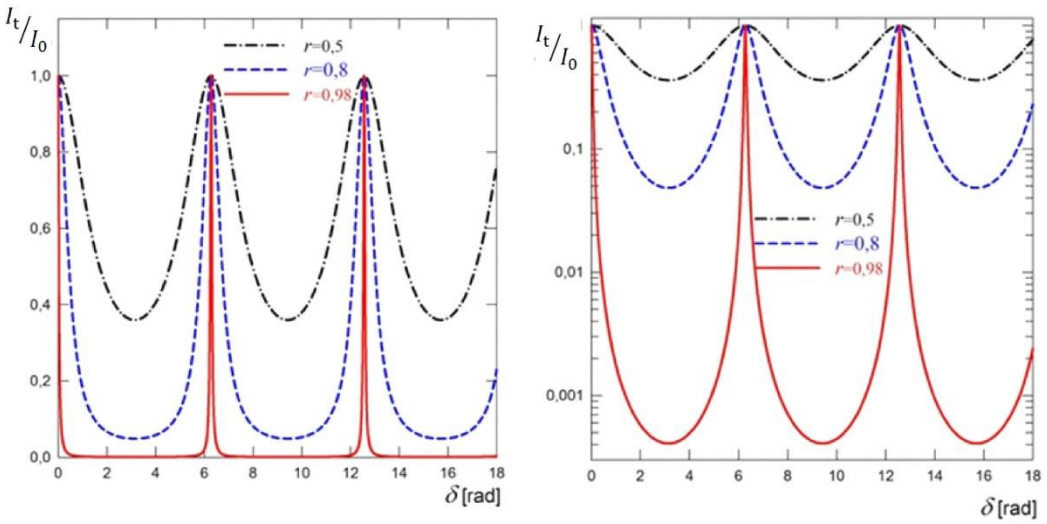

Obr. 4.18 Závislost parametru jemnosti $F$ na amplitudovém koeficientu odrazu.

Diskusi o výsledcích modelu lze vést stejně jako v případě dvousvazkové interference na planparalelní desce. V modelu, kdy na desku necháme dopadat jedinou rovinnou vlnu, nezávisí intenzita pole na prostorové souřadnici a interferenční prostory se rozjasňují či zatemňují. Rozdíl mezi dvou - a mnohasvazkovým případem je pouze v závislostech $I_\mathrm{t}(r,t,\delta)$ a $I_\mathrm{r}(r,t,\delta)$. Zatímco započtení dvousvazkové interference vedlo ke kosinové závislosti, mnohasvazková interference má poněkud odlišný výsledek, viz obr. 4.19 a 4.20. V obou případech je však realističtější dopad vln z nějakého intervalu úhlů dopadu a v obou případech to vede ke kroužkům stejného sklonu.

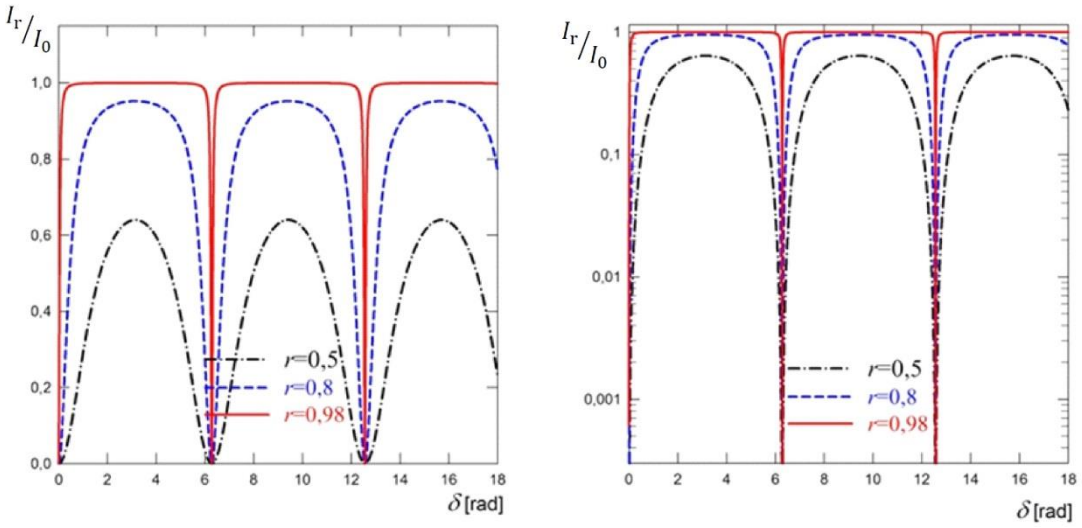
Intenzitu vlny složené z jednotlivých vln před deskou lze vypočítat analogickým postupem a dostaneme

$$I_\mathrm{r} = I_0 \frac{F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1+F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = I_0\left[1-\frac{1}{1+F\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right] = I_0 - I_\mathrm{t}. \qquad (4.40)$$

Výsledek splňuje zákon zachování výkonů nesených vlnami, což je v souladu s idealizovaným předpokladem, že v žádné uvažované struktuře ani na rozhraní nedochází k absorpci, rozptylu ani k úniku výkonu do stran v důsledku vinětace (omezení sběru způsobenému konečnými rozměry systému, včetně optické soustavy a detektoru).




Obr. 4.19 Intenzity procházejícího záření při mnohonásobných odrazech v dielektrické desce v závislosti na fázovém posuvu $\delta$. Vlevo lineární škála, vpravo logaritmická stupnice.




Obr. 4.20 Intenzity odraženého záření při mnohonásobném odrazu v dielektrické desce v závislosti na fázovém posuvu $\delta$.

Zavedeme-li výkonovou propustnost

$$T = \frac{I_t}{I_0} \tag{4.41}$$

a výkonovou odrazivost

$$R = \frac{I_r}{I_0}, \tag{4.42}$$

zřejmě platí v našem bezeztrátovém modelu

$$T + R = 1. \tag{4.43}$$

Z toho vyplývá, že maximální hodnota propustnosti je rovna jedné. To nastává vždy, když

$$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0,$$

tedy pro $\delta = 2m\pi$. Minimum propustnosti $T = \frac{1}{1+F}$ je pozorováno v případě, že $\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1$. Kontrast interferenčních kroužků můžeme popsat vztahem

$$\frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max} + T_{min}} = \frac{F}{F+2}$$

nebo

$$\frac{T_{max} - T_{min}}{T_{min}} = \frac{1 - \frac{1}{1+F}}{\frac{1}{1+F}} = F.$$

Parametr jemnosti $F$ tedy souvisí nejen s šířkou, ale i s kontrastem interferenčních proužků.

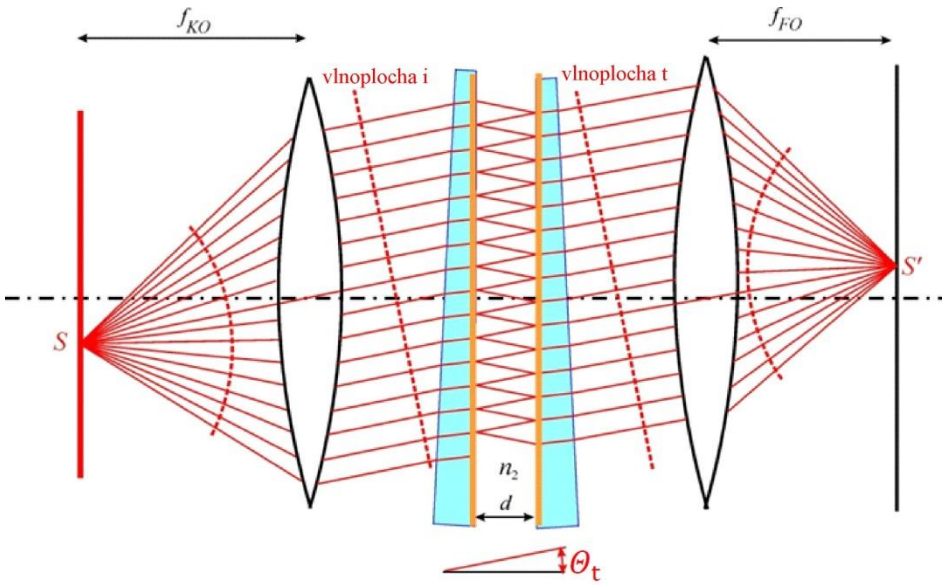
Prakticky se vysoká odrazivost dříve realizovala nanesením tenké kovové vrstvy na rozhraní, což je spojeno s nežádoucí velkou absorpcí i ve velmi tenké vrstvě, která silně omezovala dosažitelné hodnoty odrazivosti. Jiná možnost dosažení vysokých odrazivostí je pracovat s velikými úhly $\Theta_{\mathrm{i}}, \Theta_{\mathrm{t}}$, což je realizováno v interferometru zvaném Lummerova–Gehrckova deska. Teprve moderní technologie depozice mnoha tenkých vrstev umožnily realizaci opravdu vysokých hodnot odrazivosti i při kolmém dopadu. Použití mnohonásobných dielektrických vrstev vede až k hodnotám výkonové odrazivosti $R = 0{,}9999$ a hlavním důvodem tohoto omezení je rozptyl záření. V těchto případech (na rozdíl od jednoduchých rozhraní) jsou celkové amplitudové koeficienty odrazu a průchodu komplexní i při použití neabsorbujících materiálů.

### 4.2.3 Fabryův-Pérotův interferometr

Interference mnoha svazků se využívá ve **Fabryově-Pérotově interferometru** (obr. 4.21). Ten je tvořen dvojicí paralelních zrcadel s vysokým koeficientem odrazu, na která dopadá světlo ze zdroje. Lze použít stejné způsoby vstupu světla, jaké jsme zmiňovali u Michelsonova interferometru i planparalelní desky: rovinné vlny připravené jako kolimovaný svazek z malinkého zdroje, kterým může být např. kulová vlna z malinké dírky (laser osvětlující „pin hole“) nebo difúzní zdroj světla umístěný volně před vstupem do interferometru či v předmětové ohniskové rovině spojné čočky.

Po mnohonásobném odrazu je světlo po výstupu z interferometru fokusováno pro vizuální pozorování na matnici, kde se vytvářejí interferenční kroužky. Pro spektroskopické účely je pak fokusováno na detektor (zejména pokud nás zajímá intenzita ve středu interferenčního obrazce) či soustavu detektorů pro zachycení rozložení intenzit v obrazci. Maxima vznikají při splnění podmínky $\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0$. Základní aplikací Fabryova-Pérotova interferometru je přesné

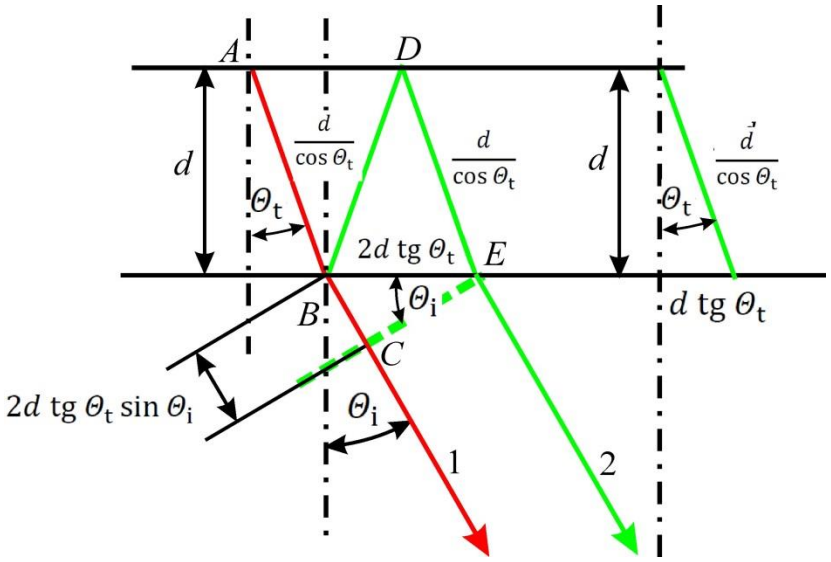
stanovení spektrálního rozštěpení vlnové délky dopadajícího záření, pokud obsahuje několik složek o velmi blízkých vlnových délkách. To je umožněno úzkým profilem závislosti $I_t(\delta_{21})$, což je výhoda pro tento účel oproti dvousvazkovým interferometrům typu Michelsonova interferometru. Jistou komplikací je úzký spektrální obor, což souvisí s periodicitou funkce $I_t(\delta_{21})$, takže toto zařízení se nehodí pro běžné spektroskopické úlohy stanovení spektrální závislosti hustoty zářivého toku v širším spektrálním intervalu.




Obr. 4.21 Fabryův-Pérotův interferometr se vstupující jednou rovinnou vlnou. Intenzita obrazu $S'$ bodového zdroje $S$ je modulována funkcí danou vztahem (4.38). O tom, zda bude obraz intenzivní nebo naopak temný, rozhoduje při pevném nastavení $d, n_2$ úhel $\Theta_t$, tedy poloha bodu $S$. Interferometr lze ladit právě mechanickou změnou $d$ (např. piezoelektricky) nebo indexu lomu $n_2$ (např. tlakem plynu v prostoru mezi deskami). Vzhledem k osové symetrii jsou při „rozsvícení" mnoha bodů ve fokální rovině kolimátoru pozorovány kroužky stejného sklonu. Poloha intenzitních maxim je podobná jako u jiných interferometrů, ale velmi podstatný rozdíl je v jejich vysoké ostrosti pro kvazimonochromatické záření s velmi úzkou spektrální čarou.

## Poznámka P4.1 Výpočet fázového rozdílu pro interferenci 2 vln na planparalelní desce (paprskový model)

V této poznámce vypočteme fázový rozdíl při průchodu rovinné vlny planparalelní dielektrickou deskou v modelu zahrnujícím dva vnitřní odrazy (obr. 4.9)




Obr. P.4.1.1 Paprskový model dvojsvazkové interference rovinné vlny na planparalelní dielektrické desce. Vpravo znázorněny geometrické vzdálenosti pro určení rozdílů optických drah.

Optická dráha pro vlny 1 a 2 z $A$ do $B$ je stejná. Sledujme optické dráhy paprsků procházejících společným bodem $B$ a charakterizujících interferující vlny na průchod od místa rozdělení vlnoplochy v bodě $B$ do roviny $CEy$. Osu $y$ volíme kolmou na nákres, tj. na rovinu dopadu. Od roviny $CEy$ postupují dále obě vlny se stejnou geometrickou i optickou drahou. Pro geometrické úseky podle obr. P4.1.1 platí

$$\overline{AD} = \overline{BE} = 2d\ \mathrm{tg}\,\Theta_t,$$

$$\overline{BC} = \overline{BE}\ \sin\Theta_i,$$

$$\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DE} = \frac{d}{\cos\Theta_t}.$$

Optická dráha paprsku 1 od bodu $B$ do bodu $C$ je

$$(BC)_{OD} = 2n_1 d\ \mathrm{tg}\Theta_t\ \sin\Theta_i,$$

optická dráha paprsku 2 od bodu $B$ do bodu $E$ je

$$(BDE)_{OD} = n_2(\overline{BD} + \overline{DE}) = \frac{2n_2 d}{\cos\Theta_t}.$$

Rozdíl optických drah paprsků 1 a 2 než dosáhnou vlnoploch procházejících body $C$ a $E$ je

$$(BDE)_{OD} - (BC)_{OD} = \frac{2n_2 d}{\cos\Theta_t} - 2n_1 d\ \mathrm{tg}\Theta_t\ \sin\Theta_i =$$

$$= \frac{2n_2 d}{\cos\Theta_\mathrm{t}} \left(1 - \frac{n_1 \sin\Theta_\mathrm{t} \sin\Theta_\mathrm{i}}{n_2}\right) =$$

$$= \frac{2n_2 d}{\cos\Theta_\mathrm{t}} (1 - \sin^2\Theta_\mathrm{t}) = 2n_2 d \cos\Theta_\mathrm{t},$$

kde jsme při úpravách využili zákon lomu. Odpovídající fázový rozdíl lze psát

$$\delta_{12} = 2\delta_1 = 2\frac{\omega}{c} n_2 d \cos\Theta_\mathrm{t} = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 d \cos\Theta_\mathrm{t} = \frac{4\pi}{\lambda_2} d \cos\Theta_\mathrm{t}\,.$$

Maximum intenzity v prostoru za deskou nastává při splnění podmínky $\delta_{12} = 2m\pi$, minimum v případě $\delta_{12} = (2m+1)\pi$, kde $m$ je celé číslo. $\delta_1$ je fázový rozdíl pro dráhu od rozhraní 1 k rozhraní 2.

## Poznámka P4.2 Interference dvou monochromatických rovinných vln stejných amplitud s různoběžnými vlnovými vektory $k_1 \nparallel k_2$

Zůstaňme u polarizace, kdy jsou vektory elektrického pole obou složek kolmé na rovinu určenou vlnovými vektory $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$, obr.4.12. Zopakujme, že pro výsledné elektrické pole v této konfiguraci jsme obdrželi (4.21) nenulovou složku

$$\tilde{E}_y(\boldsymbol{r}, t) = 2E_0 \cos\left(k_x x + \frac{\delta_0}{2}\right) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

a pro hustotu elektrické energie (4.22)

$$\langle u_E \rangle_T = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \varepsilon_r \tilde{\boldsymbol{E}} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}}^* = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n^2 E_0^2 \,[1 + \cos(2k_x x + \delta_0)].$$

Elektrické pole v této konfiguraci je transverzální. Pro pole magnetické je situace trochu složitější než pro pole elektrické s ohledem na to, že příspěvky $\boldsymbol{H}_1$ a $\boldsymbol{H}_2$ svírají úhel $2\vartheta$. Použijeme-li princip superpozice na magnetické pole, pro složky magnetického pole spočteme pro polarizaci na obr. 4 12

$$H_x = -2\varepsilon_0 cnE_0 \cos\vartheta \cos\left(k_x x + \frac{\delta_0}{2}\right) e^{i(k_z z - \omega t)},$$

$$H_y = 0,$$

$$H_z = 2i\,\varepsilon_0 cnE_0 \sin\vartheta \sin\left(k_x x + \frac{\delta_0}{2}\right) e^{i(k_z z - \omega t)}\,.$$

Vidíme, že magnetické pole má nejen transverzální komponentu $H_x$, ale i longitudinální $H_z$ rovnoběžnou s vlnovým vektorem výsledné vlny $\boldsymbol{k}_\Sigma = (0, 0, k\cos\vartheta)$. Magnetické pole je nehomogenní, nemá stejnou amplitudu podél vlnoplochy $z = konst$. Fázová rychlost složené výsledné vlny

$$\mathrm{v}_{f\Sigma} = \frac{\omega}{k_\Sigma} = \frac{\omega}{k\cos\vartheta} = \frac{\mathrm{v}_f}{\cos\vartheta}$$

je tedy větší než fázová rychlost homogenní rovinné vlny $\mathrm{v}_f$. Navíc jsou transverzální a longitudinální složky fázově posunuty o $\pi$, viz faktor $i$ ve výrazu pro $H_z$. Takže koncové body vektoru H opisují v pevném místě v čase elipsu s jednou osou orientovanou **podél směru šíření**, tj. osy $z$. Jedná se však o zcela jiný případ než jsme uvažovali v kapitole „Polarizace," kde jsme předpokládali čistě transverzální rovinnou vlnu a polarizační elipsa ležela v rovině kolmé na směr šíření.

Z uvedených výrazů vyplývá pro střední hodnotu hustoty energie magnetického pole

$$\langle u_M \rangle_T = \frac{1}{4}\,\varepsilon_0 n^2 E_0^2 \left[\cos^2\vartheta\,\cos^2\left(k_x x + \frac{\delta_0}{2}\right) + \sin^2\vartheta\,\sin^2\left(k_x x + \frac{\delta_0}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 n^2 E_0^2\,[1 + \cos 2\vartheta\,\cos(2k_x x + \delta_0)]\,.$$

Magnetické pole v tomto uspořádání není plně modulované, i když amplitudy složek jsou stejné. Např. pro $\vartheta = {}^{\pi}/_{4}$ modulace $\langle u_M \rangle_T$ vymizí. To má důsledek i pro Poyntingův vektor. Pro jeho časové střední hodnoty spočteme

$$\langle S_x \rangle_T = 0\,, \qquad \langle S_y \rangle_T = 0\,,$$

$$\langle S_z \rangle_T = 2\varepsilon_0 c n E_0^2 \cos\vartheta\,\cos^2\left(k_x x + \frac{\delta_0}{2}\right).$$

Elektromagnetická energie teče v pruzích ve směru osy $z$ a její tok je neúplně modulovám ve směru osy $x$.

V polarizaci, kdy vektory magnetického pole jsou kolmé na rovinu xz, která je určena vektory $\boldsymbol{k}_1$ a $\boldsymbol{k}_2$, se vztahy pro elektrické a magnetické pole prohodí. Nyní je modulace hustoty magnetického pole úplná (stále při rovnosti amplitud obou složek) a modulace hustoty energie elektrického pole je neúplná

$$\langle u_E \rangle_T = \frac{1}{4}\,\varepsilon_0 n^2 E_0^2 \left[\cos^2\vartheta\,\cos^2\left(k_x x + \frac{\delta_0}{2}\right) + \sin^2\vartheta\,\sin^2\left(k_x x + \frac{\delta_0}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 n^2 E_0^2\,[1 + \cos 2\vartheta\,\cos(2k_x x + \delta_0)]\,.$$

Vzhledem k symetrické roli vektorů $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ ve výrazu pro Poyntingův vektor, je výsledek v obou vybraných polarizacích stejný (částečná modulace ve směru $x$).

# 5. Interference (část 2) - skládání vln různých frekvencí

V předchozích kapitolách jsme se zabývali monochromatickými rovinnými vlnami, které mají stejnou intenzitu v celém prostoru. V kapitole 4 „Interference monochromatických vln stejné frekvence“ jsme se omezili na skládání vln se stejnou frekvencí a diskutovali jsme i vlny s různými směry vlnových vektorů, což vedlo k nehomogennímu rozložení intenzity v prostoru, ale nikoli k časové závislosti. Výsledkem byly v prostoru stacionární interferenční obrazce. V této kapitole si všimneme skládání vln různých frekvencí, ale omezíme se pouze na **skládání rovinných vln se stejným směrem vlnových vektorů**. Budeme se zabývat homogenními, rovinnými, postupnými a nemonochromatickými vlnami. Uvažované časové průběhy můžeme rozdělit na stacionární, kdy časová střední hodnota přes dostatečně dlouhou dobu je stálá (nezávisí na volbě počátku času měření) a průběhy „jednorázové“ např. osamocené pulzy. Stacionární děje můžeme rozdělit na deterministické (s pevně danými amplitudami a fázemi jednotlivých frekvenčních složek) a děje s náhodnými změnami těchto parametrů. Stacionární děje mohou být periodické nebo neperiodické.

## 5.1 Skládání dvou vln různých frekvencí

Nejprve se budeme zabývat složením dvou postupných, rovinných, lineárně polarizovaných, monochromatických, rovinných vln s mírně odlišnými frekvencemi, stejnými amplitudami, stejnými směry vlnových vektorů a stejné lineární polarizace

$$\begin{gathered}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E_1}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{E_2}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega_1 t) + \boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t),\\ \boldsymbol{E_0} = (E_0,0,0), \qquad \boldsymbol{k}_1 = (0,0,k_1), \qquad \boldsymbol{k}_2 = (0,0,k_2).\end{gathered} \tag{5.1}$$

Pro toto uspořádání napišme

$$\begin{gathered}E(z,t) = E_0\cos(k_1 z-\omega_1 t) + E_0\cos(k_2 z-\omega_2 t) =\\ = 2E_0\cos\frac{(k_1+k_2)z-(\omega_1+\omega_2)t}{2}\cos\frac{(k_1-k_2)z-(\omega_1-\omega_2)t}{2}.\end{gathered} \tag{5.2}$$

Zavedeme střední hodnoty a odchylky od nich

$$\begin{gathered}\bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \qquad \bar{k} = \frac{k_1+k_2}{2},\\ \delta\omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2} = \frac{\Delta\omega}{2}, \qquad \delta k = \frac{k_1-k_2}{2} = \frac{\Delta k}{2},\end{gathered} \tag{5.3}$$

což vede ke vztahu

$$E(z,t) = E_0\cos\left(\bar{k}z-\bar{\omega}t\right)\cos(\delta k\, z-\delta\omega\, t). \tag{5.4}$$

Pro dvě blízké frekvence je $\delta\omega \ll \bar{\omega}$, $\delta k \ll \bar{k}$ a perioda funkce $\cos(\delta k\, z - \delta\omega\, t)$ je výrazně delší než perioda funkce $\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)$.

Časově závislou amplitudu součtové vlny

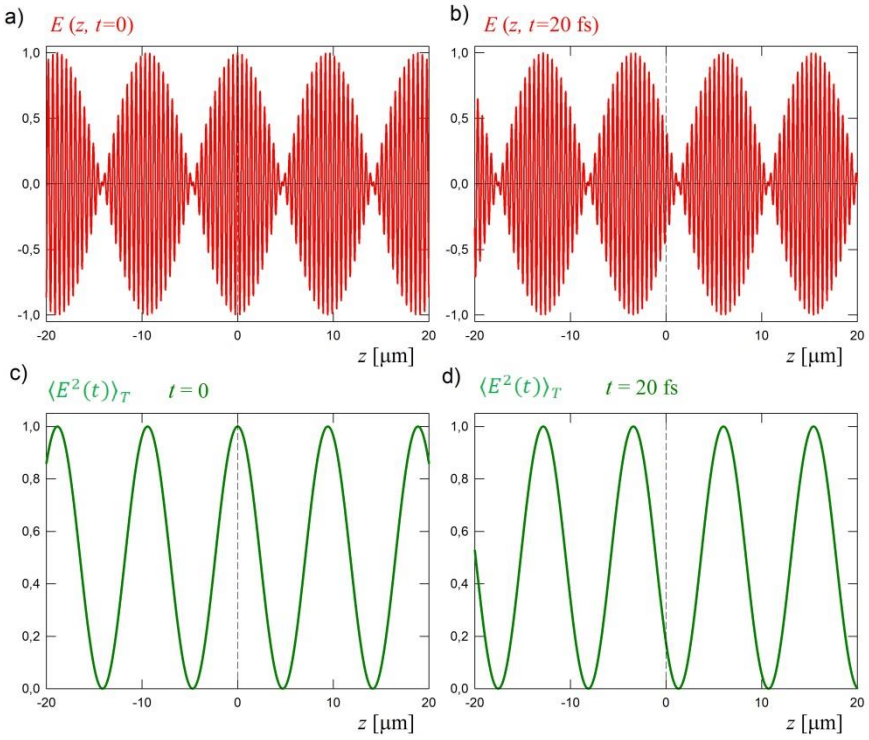
$$E_0'(z,t) = E_0 \cos(\delta k\, z - \delta\omega\, t) \tag{5.5}$$

si můžeme představit jako obálku šířící se **grupovou rychlostí**

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \to \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\bar{k}} \tag{5.6}$$

s diferenciální limitou pro velmi malé rozdíly $\delta k$ a $\delta\omega$.

Složení elektrických polí a výsledná funkce $E(z,t)$ jsou zobrazeny na obr. 5.1.




Obr. 5.1. Složení 2 vln rozdílných kruhových frekvencí, $\omega_1 = 4{,}1 \times 10^{15}$ rad s$^{-1}$ a $\omega_2 = 3{,}9 \times 10^{15}$ rad s$^{-1}$. V levé části obrázku a) a c) je zakreslen stav v čase $t = 0$, v pravé části stav o 20 fs později.

Výsledné pole $E(z,t)$ je charakterizováno rychle oscilující složkou $\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)$ a pomaleji oscilujícím členem $\cos(\delta k\, z - \delta\omega\, t)$. **Ve vakuu** se obě monochromatické vlny šíří stejnou fázovou rychlostí

$$c = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} \tag{5.7}$$

a stejnou rychlostí se šíří i maxima amplitudy součtové vlny

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = \frac{c(k_1 + k_2)}{k_1 + k_2} = c.$$

Pro grupovou rychlost (šíření obálky) rovněž dostáváme

$$\frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{c(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} = c. \tag{5.8}$$

Ve vakuu je tedy fázová i grupová rychlost stejná a je rovná rychlosti světla $c$.

Podobná situace nastává i v bezdisperzním prostředí s konstantním indexem lomu $n$, pouze rychlost $c$ nahradíme rychlostí $^{c}/_{n}$ . V látkách takový případ nastává nanejvýš ve spektrálně omezené oblasti.

### 5.1.1 Fázová a grupová rychlost v disperzním prostředí

Poněkud odlišně vypadá šíření vln v prostředí s frekvenční závislostí indexu lomu. V látkách obecně závisí index lomu na frekvenci $n(\omega)$ a mluvíme o disperzním prostředí. Konkrétní tvar $n(\omega)$ závisí na charakteru interakce elektromagnetické vlny s materiálovým prostředím, viz kapitola 12 „Absorpce a index lomu – interakce světla s látkou“.. Velikost vlnového vektoru je

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}\, n(\omega). \tag{5.9}$$

V řadě oblastí fyziky se setkáváme s pojmem **disperzní vztah (disperzní relace)**, který je definován naopak jako závislost frekvence na vlnovém vektoru

$$\omega(k)\,,$$

tedy jako **funkce inverzní** ke $k(\omega)$. Jak uvidíme, tato funkce je vhodná i pro určení grupové rychlosti.

V disperzním prostředí se rychle měnící složka pohybuje **fázovou rychlostí**

$$\mathrm{v}_p = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = c\,\frac{\omega_1 + \omega_2}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}\,. \tag{5.10}$$

Grupová rychlost v disperzním prostředí obecně není stejná jako fázová. Když výsledné elektrické pole postupuje, šíří se rychlé oscilace fázovou rychlostí $\mathrm{v}_p$ a jejich obálka se šíří grupovou rychlostí $\mathrm{v}_g$.

Obecněji lze disperzní vztah rozložit do řady kolem vlnového vektoru $\bar{k}$ a druhý člen rozvoje obsahuje grupovou rychlost

$$\begin{aligned}\omega(k) &= \bar{\omega}(\bar{k}) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\bar{k}} (k - \bar{k}) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{\bar{k}} (k - \bar{k})^2 + \cdots = \\ &= \bar{\omega} + \mathrm{v}_g(k - \bar{k}) + \frac{\beta}{2}(k - \bar{k})^2 + \cdots\end{aligned} \tag{5.11}$$

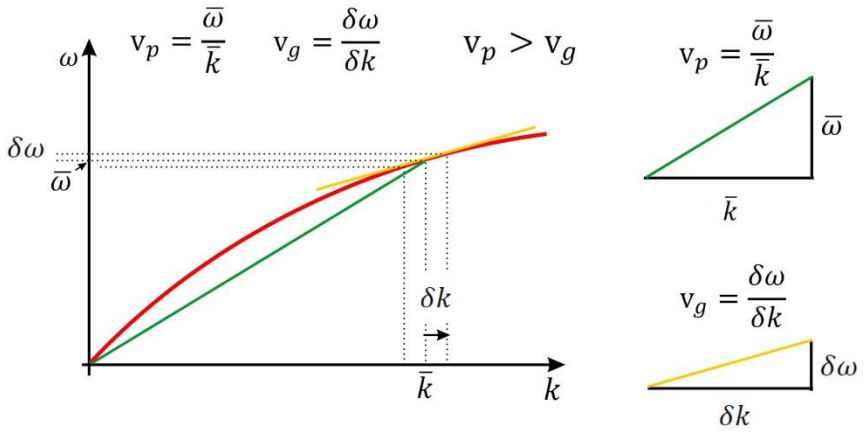
Podle charakteru této funkční závislosti může být grupová rychlost (rychlost šíření obálky) menší, stejná nebo větší než fázová rychlost nosné vlny. Další členy rozvoje souvisejí se změnou tvaru obálkové křivky při šíření složené vlny. Pro závislost grupové rychlosti na indexu lomu (druhý člen rozvoje (5.11)) můžeme napsat

$$\mathrm{v}_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left[\frac{kc}{n(k)}\right] = \frac{c}{n} + ck\frac{d}{dk}\left[\frac{1}{n(k)}\right] = \frac{c}{n} + ck\left(-\frac{1}{n^2}\frac{dn}{dk}\right). \qquad (5.12)$$

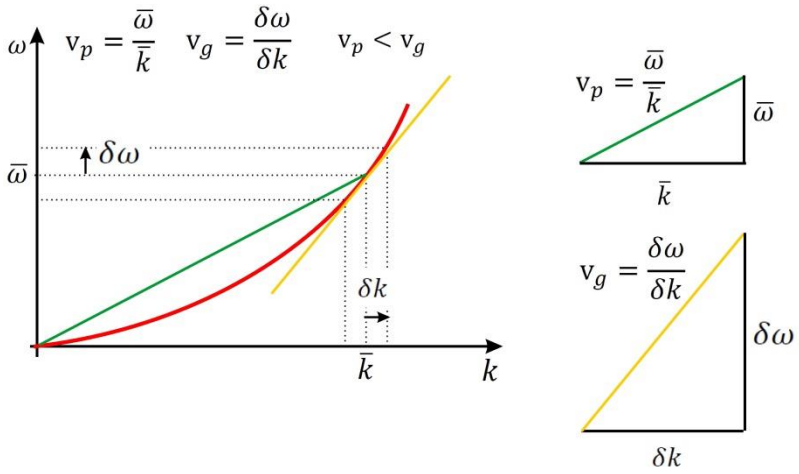
K explicitnějšímu tvaru funkce $\mathrm{v}_g(\omega)$ můžeme použít pravidla pro derivaci inverzní funkce $k(\omega)$ k disperzní relaci $\omega(k)$

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_g &= \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1}, \\ \frac{dk}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega}\left[\frac{\omega}{c}n(\omega)\right] = \frac{1}{c}\left[n(\omega) + \omega\,\frac{dn}{d\omega}\right], \\ \mathrm{v}_g &= \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{c}{n(\omega) + \omega\,\frac{dn}{d\omega}} = \frac{\mathrm{v}_p}{1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}}. \end{aligned} \qquad (5.13)$$

Ve spektrální oblasti normální disperze je $\frac{dn}{d\omega} > 0$ a dostáváme $\mathrm{v}_g < \mathrm{v}_p$ a naopak ve spektrální oblasti anomální disperze $\frac{dn}{d\omega} < 0$ a $\mathrm{v}_g > \mathrm{v}_p$.




Obr. 5.2 Modelový příklad disperzní relace pro normální disperzi, kdy index lomu $n(\omega)$ s rostoucí frekvencí roste, tj. $n(\lambda)$ s rostoucí vlnovou délkou klesá. Grupová rychlost je v tomto modelovém případě menší než fázová.



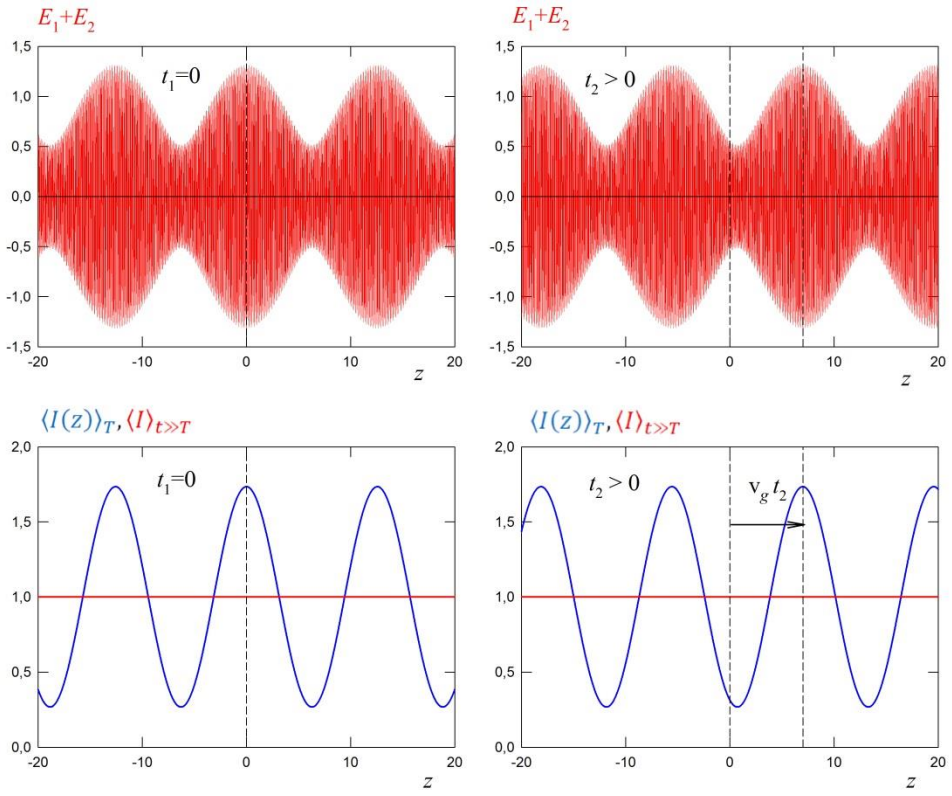

Obr. 5.3 Modelový příklad disperzní relace pro anomální disperzi, kdy index lomu $n(\omega)$ s rostoucí frekvencí klesá. Grupová rychlost je v tomto modelovém případě větší než fázová.

## 5.1.2 Intenzita

Podívejme se, jakým způsobem je energie ve složeném optickém poli rozložena v prostoru a jak se šíří. Pro „okamžitou“ hodnotu intenzity vlny vezměme středování hustoty elektrické energie přes periodu $\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$ (vztah 1.47) a pro $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$ napišme pro lineární polarizaci souhlasnou pro obě komponenty

$$I(z,t) = \langle u_E \rangle_{\bar{T}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r(E_0')^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2(E_0')^2 = \\ = \frac{1}{4}\varepsilon_0 n^2 E_0^2 \cos^2(z\,\delta k - t\,\delta\omega), \tag{5.14}$$

kde vezmeme pro index lomu v tomto přiblížení $n \cong n(\bar{\omega})$ a $E_0'$ je „okamžitá“ amplituda (5.5). Intenzita vlny (v tomto případě vyjádřená jako objemová hustota elektrické energie) je modulována jako $\cos^2(\delta k\, z - \delta\omega\, t)$. Ve zvoleném čase (např. $t = 0$), je „interferenční“ obrazec v prostoru úměrný $\cos^2(\delta k\, z)$. Maxima intenzity se šíří grupovou rychlostí $v_g$ ve směru $z$. V případě, že skládáme dvě vlny různých amplitud, má obálka vlnění s menšími rozdíly mezi maximem a minimem, tj. má menší míru modulace, jak je zakresleno na obr. 5.4.




Obr. 5.4 Znázornění posuvu pole složeného ze dvou monochromatických vln různých amplitud. V horním řádku je okamžitá hodnota pole v čase $t_1 = 0$ a v čase $t_2 > 0$. V dolním řádku je modře vyznačena „intenzita“ získaná středováním přes periodu $\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$ a červeně intenzita zprůměrovaná přes delší časový interval $t \gg \bar{T}$ jako prostorově nezávislá veličina. Možná změna tvaru obálky při šíření v disperzním prostředí není zahrnuta.

Pro pole ve vakuu

$$\tilde{E}(z,t) = E_{01} e^{i\,(k_1 z - \omega_1 t)} + E_{02} e^{i\,(k_2 z - \omega_2 t)} \tag{5.15}$$

je intenzita získaná **středováním přes periodu** $T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$

$$\begin{aligned} \langle I(z,t)\rangle_T &\propto \tilde{E}(z,t)\tilde{E}^*(z,t) = \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(k_2 z - \omega_2 t - k_1 z + \omega_1 t) = \\ &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\Delta k\, z - \Delta\omega\, t)\,, \end{aligned} \tag{5.16}$$

kde jsme použili značení ze vztahu (5.4) $\Delta\omega = 2\,\delta\omega$ a $\Delta k = 2\,\delta k$ jsou rozdíly týkající se kruhových frekvencí a velikostí vlnových vektorů frekvenčních složek tvořících dané vlnění. Tento „interferenční obrazec“ ovšem není v prostoru stálý, ale běží, takže v jednom místě se rychle střídají velké a malé intenzity. Při **středování přes delší čas** $t_D$ tak dostaneme

$$I(z) = \langle I(z,t)\rangle_{t_D \gg T} \propto$$

$$\propto E_{01}^2 + E_{02}^1 + 2E_{01}E_{02}\langle\cos(k_2 z - \omega_2 t - k_1 z + \omega_1 t)\rangle_{t_D} = E_{01}^2 + E_{02}^2, \qquad (5.17)$$

což na $z$ nezávisí. Takže pomalý detektor žádné časové změny (rázy) nezaznamená. K jejich registraci je potřeba dostatečně rychlý detektor, který je schopen reagovat na změny pole v časech $t \leq \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

# 5.2 Skládání mnoha rovinných vln s různými frekvencemi a stejným směrem vlnových vektorů

V předchozím textu jsme zkonstruovali nemonochromatickou vlnu součtem dvou monochromatických vln. To můžeme zobecnit a obecné časové průběhy elektromagnetického pole získat složením „mnoha“ monochromatických průběhů. Přitom „mnoho“ může znamenat, že počet monochromatických průběhů je konečný nebo nekonečný spočetný či nejobecněji i nespočetný. Právě poslední případ je ten nejběžnější, kdy dostáváme spojité rozložení zúčastněných frekvencí, jejichž **spektrum tvoří kontinuum**. Pak musíme sčítání nahradit integrací. V následujícím textu budeme používat pro časovou závislost frekvenci $\nu$, jejíž jednotkou je Hz = $s^{-1}$. Z početních důvodů je vhodné používat komplexní symboliku a rozšířit obor frekvencí i do záporných hodnot. Rovinnou vlnu šířící se ve směru osy $z$ zapíšeme jako složení monochromatických rovinných vln

$$\tilde{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_\nu^{(\mathrm{Re})}(\nu)\, e^{i\,(k_\nu z - 2\pi\nu t + \varphi_\nu)}\, d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{E}_\nu(\nu)\, e^{i\,(k_\nu z - 2\pi\nu t)}\, d\nu\,, \qquad (5.18)$$

kde $E_\nu^{(\mathrm{Re})}$ považujeme za reálnou amplitudu a fázové posuvy $\varphi_\nu$ zahrneme do komplexní amplitudy $\tilde{E}_\nu(\nu)$. Aby výsledné elektrické pole $\tilde{E}$ mělo obvyklé jednotky V $m^{-1}$, má veličina $E_\nu(\nu)$ fyzikální rozměr V $m^{-1}s$ = V $m^{-1}Hz^{-1}$. Vztah (5.18) je příkladem Fourierovy transformace mezi funkcí závislou na čase a funkcí závislou na frekvenci. Obě funkce jsou použitelné k popisu téhož jevu z hlediska časového vývoje nebo z hlediska úlohy zúčastněných frekvencí.

V praxi je ovšem zpravidla úloha obrácená: zajímá nás, ze kterých monochromatických složek se dané (zkoumané) záření skládá. Slouží k tomu experimentální metody optické spektroskopie. Ve všech metodách optické spektroskopie pracujeme se signály, které jsou úměrné **energii** nebo **výkonu** záření absorbovanému v detektoru. V oboru frekvencí $\nu > 10^{12}$ Hz neumíme ani elektrické pole $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$, ani „amplitudy“ monochromatických komponent $\boldsymbol{E}_\nu(\boldsymbol{r},\nu)$ přímo určovat a při detekci se musíme spokojit s veličinami energetickými.

Analogicky vztahu (1.49) pro hustotu energie elektrické složky monochromatické vlny se osvědčila charakteristika spektrálních vlastností energií/výkonů kvazimonochromatických záření pomocí součinů $\tilde{E}_\nu(\nu)\tilde{E}_\nu^*(\nu)$. Tak pro příspěvek vln o frekvencích z úzkého intervalu $\nu_A, \nu_A + d\nu$ k objemové hustotě elektrické energie v daném místě $\boldsymbol{r}$ můžeme pro **stacionární** případ napsat

$$\left.\frac{du_E(\nu,\boldsymbol{r})}{d\nu}\right|_{\nu_A} d\nu = u_\nu(\nu,\boldsymbol{r})\, d\nu = \frac{1}{4}\varepsilon_0\, \tilde{E}_\nu(\nu_A,\boldsymbol{r})\, \tilde{E}_\nu^*(\nu_A,\boldsymbol{r})\, d\nu. \tag{5.19}$$

Rozměrová zkouška potvrdí, že rozměr $\varepsilon_0\, E_\nu(\nu_A)\, E_\nu^*(\nu_A)$ je J m$^{-3}$ s = J m$^{-3}$ Hz$^{-1}$, tedy se jedná o objemovou hustotu energie vztaženou na jednotkový frekvenční interval. Příspěvek vln o frekvencích ze širšího intervalu $(\nu_A, \nu_B)$ k objemové hustotě elektrické energie je

$$\Delta u_E(\boldsymbol{r})|_{\nu_A,\nu_B} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \int_{\nu_A}^{\nu_B} \tilde{E}_\nu(\nu,\boldsymbol{r})\, \tilde{E}_\nu^*(\nu,\boldsymbol{r})\, d\nu \tag{5.20}$$

a pro všechny frekvence

$$u_E(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_\nu(\nu,\boldsymbol{r})\, \tilde{E}_\nu^*(\nu,\boldsymbol{r})\, d\nu\,. \tag{5.21}$$

Uvedené pojmy (spektrální hustota energie) lze poměrně názorně ilustrovat na nestacionárním modelu jednoho pulzu, což uděláme v následující části.

## 5.2.1 Spojité spektrální hustoty - jeden pulz

Na rozdíl od stacionárního jevu není pohyb jednoho pulzu prostorem stacionární. Přesto jsou součiny typu $\tilde{E}_\nu(\nu)\tilde{E}_\nu^*(\nu)$ pro charakterizaci energetického spektra pulzu užitečné. Z důvodu názornosti budeme ilustrovat na konkrétním modelu gaussovského pulzu.

***Gaussovský pulz***

Jako příklad sestrojme rovinnou vlnu s časově prostorovou závislostí ve tvaru jednoho gaussovského pulzu z frekvenčních složek pole např. v rovině $z = 0$. Předpokládejme pro elektrické pole

$$E_{\nu 1}(\nu) = E_0 \frac{a}{\sqrt{\pi}} \exp[-a^2\,(\nu-\nu_0)^2]\,, \qquad \varphi_\nu = 0$$

kde parametr $a$ ukazuje, jak rychle klesají frekvenční příspěvky k celkovému poli s rostoucím rozdílem frekvencí $\nu - \nu_0$. Pro všechna fázová posunutí předpokládáme $\varphi_\nu = 0$, což je pro časový průběh pulzu důležitý předpoklad, který znamená, že v čase $t = 0$ a v rovině $z = 0$ se všechny monochromatické komponenty sčítají konstruktivně. Tedy tam lze očekávat maximální intenzitu pole $E_1(z = 0, t = 0)$. V tomto speciálním případě dostaneme integrací

$$\tilde{E}_1(z=0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{\nu 1}\,(\nu)\, e^{-2\pi i\nu t}\, d\nu = E_0 \exp\left(-\frac{\pi^2}{a^2}t^2\right) e^{-2\pi i\nu_0 t},$$

$$\mathrm{Re}\{\tilde{E}_1(z=0,t)\} = E_0 \exp\left(-\frac{\pi^2}{a^2}t^2\right)\cos 2\pi\nu_0 t\,,$$

kde parametr $a$ má rozměr času a má vztah k „době trvání“ pulzu. Časové a spektrální závislosti jsou na obr. 5.5.

**Spektrální hustota energie** celého pulzu na frekvenci $\nu$ je úměrná $|E_\nu(\nu)|^2$,

$$E_\nu(\nu)\, E_\nu^*(\nu) = E_0^2 \frac{a^2}{\pi} \exp[-2a^2\,(\nu-\nu_0)^2]\,.$$

***Šířky gaussovského pulzu***

Rychlost nabíhání a slábnutí pulzu a jeho trvání můžeme charakterizovat pomocí FWHM (plná šířka v polovině výšky) závislosti časového vývoje výkonu $|E(t)|^2$ v místě $z = 0$ (obr. 5.5)

$$\exp\left[-\frac{2\pi^2\,\Delta t^2}{a^2}\right] = \frac{1}{2},$$

$$\Delta t_{FWHM} = 2(t'-t_0) = 2\Delta t\ = \frac{a}{\pi}\sqrt{2\ln 2}\ .$$

Plná šířka $\Delta\nu_{pulz}$ v půlce výšky (FWHM) této závislosti plyne z

$$\exp[-2a^2(\Delta\nu)^2] = \frac{1}{2}$$

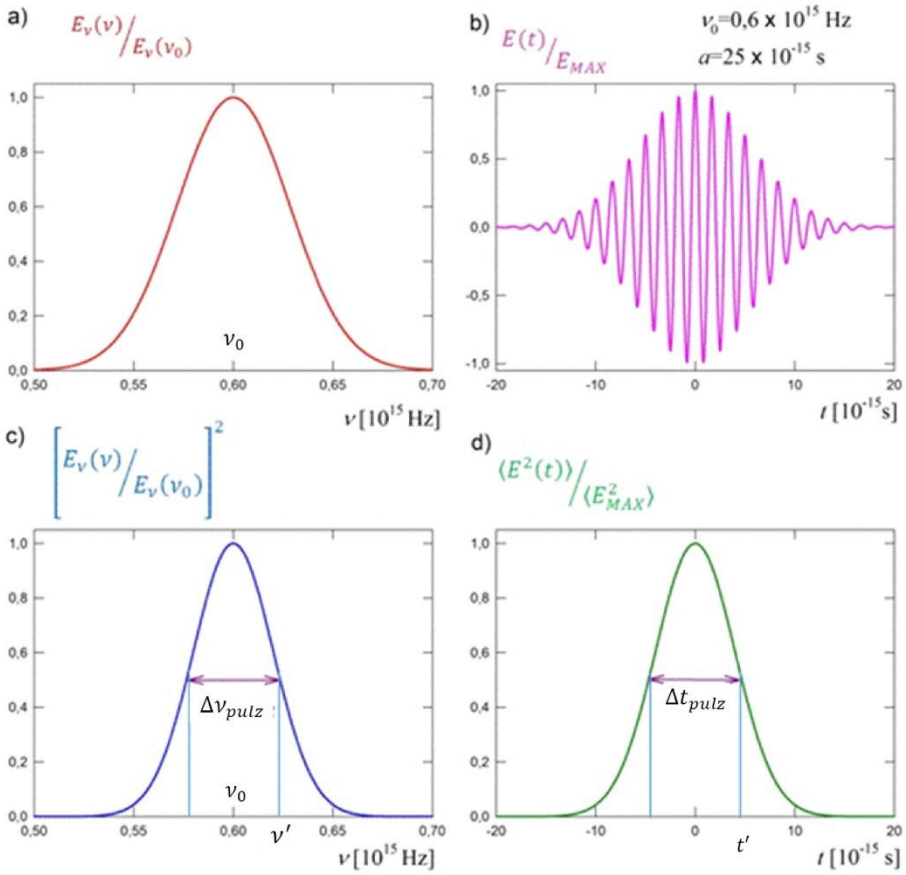
a je

$$\Delta\nu_{FWHM} = 2(\nu'-\nu_0) = \frac{1}{a}\,\sqrt{2\ln 2}\,.$$

Součin $\Delta\nu_{FWHM}\,\Delta t_{FWHM}$ není závislý na parametru $a$. Časové a spektrální šířky pulzů jsou speciálně pro gaussovské pulzy spojeny vztahem

$$\Delta t_{FWHM}\,\Delta\nu_{FWHM} = \frac{2\ln 2}{\pi}.$$

Nepřímá úměra mezi časovou a spektrální šířkou není výsada jen gaussovských pulzů, ale pro „jednoduché“ pulzy platí obecněji, byť příslušné součiny pro různé tvary pulzů jsou různé a též závisí na domluvě, jak jsou tyto šířky definovány.




Obr. 5.5 Gaussovský pulz zkonstruovaný integrací závislosti $E_\nu(\nu)$. a) Amplitudy frekvenčních složek elektrického pole $E_\nu(\nu)$. b) Časový průběh pole v jedné rovině (např. $z = 0$). c) Spektrální hustota energie pulzu. d) Časový vývoj výkonu procházejícího plochou v rovině $z = 0$ zprůměrovaný za dobu srovnatelnou s dobou kmitu $\frac{1}{\bar{\nu}}$.

# 6. Difrakce (skalární popis)

Difrakcí se nazývá odchýlení světla od přímočarého šíření (ohyb) způsobené fyzickou překážkou. V řadě kapitol tohoto kurzu respektujeme vektorový charakter elektromagnetického pole a za základní východisko bereme Maxwellovy rovnice, (James Clerk **Maxwell**, 1831 – 1879). . S ohledem na obrovskou složitost popisu ohybových jevů (difrakce) je obvyklé v učebnicích postupovat spíše v souladu s historickým vývojem a uvádět skalární popis ohybových jevů v několika aproximacích. Prezentovaná témata, úlohy a příklady pak zpravidla odrážejí úspěchy teorie difrakce z první čtvrtiny 19. století spočívající především v pracích Fresnelových (Augustin Jean **Fresnel**, 1788 – 1827) a Fraunhoferových (Joseph Ritter von **Fraunhofer**, 1787 – 1826), tj. z doby před vznikem elektromagnetické teorie (Maxwellovy rovnice 1865). Naše pojednání tedy **nebude** vycházet z elektromagnetické teorie, ale z Fresnelových myšlenek inspirovaných Christiaanem Huygensem (1629 – 1695). O složitosti problematiky teorie difrakce svědčí zájem fyziků o základní použitelné principy hlavně v 2. polovině 19. století, ale vývoj pokračoval i ve století 20. Vedle toho se rozvíjely i praktické aplikace a technologie přípravy vhodných difrakčních objektů pro tyto aplikace. Difrakční jevy mají důsledky pro systémy pracující s vlněním obecně, v optice pak s vlastnostmi zobrazovacích soustav, s optickým zpracováním dat, optickou spektrometrií, holografií, mikroskopií apod.

V tomto textu se nebudeme zabývat difrakcí na (plnohodnotně) trojrozměrných objektech, ale spokojíme se s dvojrozměrným zjednodušením, jako je difrakce na tenké rovinné překážce. Vyjdeme ze skalárního popisu difrakce ve tvaru difrakčního integrálu. Zde uvedené aproximace pro popis difrakčních jevů vychází z předpokladů, že:

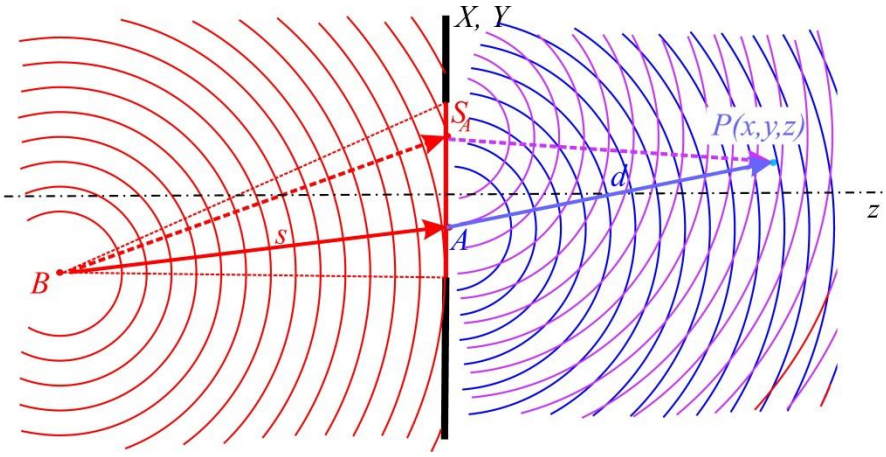
1. skalární teorie ignoruje vektorový charakter elektromagnetického pole;
2. pole je monochromatické s časovou závislostí $e^{-i\omega t}$; pro pole platí skalární Helmholtzova rovnice;
3. difraktující objekty (překážky přímočarého šíření vln, nepropustné stínítko s otvorem – aperturou, či naopak překážka vyplňující jen část volného prostoru) jsou rovinné, dvoudimenzionální;
4. je uvažována difrakce na objektech (překážkách nebo otvorech v překážkách) podstatně větších než vlnová délka záření;
5. pole v rovině apertury je stejné, jako kdyby v této rovině stínítko nebylo; pole v otvoru je totožné s polem nabíhající vlny;
6. místo pozorování je od difraktujícího objektu v podstatně větší vzdálenosti než vlnová délka záření;
7. materiál překážky je dokonale „černý“, tzn. překážka záření úplně absorbuje, nic neodráží, ani neovlivňuje pole ve své rovině; z hlediska elektromagnetické teorie je to problematický předpoklad.

Zaveďme následující značení veličin.

- $E(x, y, z)$ **skalární komplexní** veličina jako funkce polohy reprezentuje jakousi skalární obdobu komplexní amplitudy elektrického pole; časová závislost je

$E(x,y,z,t) = E(x,y,z)\exp(-i\omega t)$. V difrakčních vztazích je zvykem nevypisovat časové závislosti polí (členy $\exp(-i\omega t)$), protože předpokládáme **monochromatické vlny stejné frekvence**.

- Skalární kulová (tj. s kulovými vlnoplochami[5]) a navíc kulově symetrická vlna vybíhající z obecného bodu $Z$ je $E(x,y,z) = \frac{E_0 z}{r}\exp(ikr)$.
- Slovem „paprsek“ označujeme obecně křivku, jejíž tečna je normála k vlnoploše. V opticky homogenním prostředí (které v této kapitole předpokládáme) je paprsek přímka.
- Jako relativní intenzitu světla budeme brát $I(x,y,z) = E(x,y,z)E^*(x,y,z)$. $I_0$ bude zpravidla (pokud nebude řečeno jinak) označovat maximální hodnotu $I$ v daném **difrakčním obrazci** (angl. pattern). Intenzitu světla zaznamenáme detektorem záření nebo subjektivně pozorujeme rozptyl záření na matném povrchu (zeď, papír, zdrsněné matné sklo), který dále budeme nazývat **matnice.**




Obr. 6.1 Uspořádání, ve kterém integrace (rovnice 6.1) probíhá přes rovinnou plochu apertury $S_A$. Zakresleny jsou pouze dvě sady difraktovaných vln z nekonečně mnoha. Bod apertury $A$ má souřadnice $(X,Y,0)$. V tomto případě bodový zdroj vlnění $Z$ vytváří v obecném místě apertury $A$ pole $E(X,Y,0) = E_{0Z}\frac{e^{iks}}{s}$. Vzdálenost $s$ závisí na poloze bodu apertury $A$.

Budeme tedy nejčastěji vycházet z nejjednoduššího tvaru difrakčního integrálu

$$E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda}\iint_{S_A} dE(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda}\iint_{S_A} E(X,Y,0)\frac{e^{ikd}}{d}K(\vartheta)\,dS_A, \qquad (6.1)$$

který popisuje skládání elementárních kulových vln vycházejících z otvoru určeného aperturou $S_A$ v rovině $z = 0$. Faktor $K(\vartheta)$ se nazývá směrový. Úhel $\vartheta$ je úhel mezi normálou k rovině apertury (osa $z$) a přímkou $\overline{AP}$. K intuitivnímu zavedení faktoru $\frac{-i}{\lambda}$ a k zavedení

[5] Vlnoplochou rozumíme plochu konstantní fáze. Jako kulovou vlnu označujeme vlnu s kulovou vlnoplochou. Kulově symetrická vlna má kulové navíc i plochy konstantní amplitudy. Nejjednodušší kulová (co do tvaru vlnoploch) vektorová elektromagnetická vlna je vyzařována Hertzovým dipólem a není kulově symetrická.

směrového faktoru přivedla Fresnela úloha popsat pomocí difrakce šíření rovinné vlny volným prostorem. V paraxiální aproximaci je $K(\vartheta) \cong 1$, a proto jej dále nebude uvažovat.

## 6.1 Aproximace difrakčního integrálu

Výpočty difrakčních integrálů jsou obtížné. Zde si všimneme dvou aproximací – **Fresnelovy** a **Fraunhoferovy** . Obě jsou paraxiální se základním předpokladem, že zdroj se nachází blízko normály k rovině apertury (osa $z$) a též bod pozorování $x, y, z$ je blízko osy $z$ a dostatečně daleko od apertury. V obou případech studujeme difrakci záření jen v úzkém intervalu úhlů od optické osy.

Ve **Fresnelově aproximaci** difrakčního integrálu ve jmenovateli integrandu položíme $d = z$. V exponentu v čitateli nelze provést jednoduchou záměnu $z$ za $d$, protože člen $e^{ikd}$ se mění (osciluje) velmi rychle. Fresnelova aproximace spočívá v aplikaci Taylorova rozvoje pro vzdálenost

$$d = z\sqrt{1 + \frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{z^2}} \cong z\left(1 + \frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{2z^2}\right) \qquad (6.2)$$

a v nahrazení kulové vlny přiblížením vlnou parabolickou

$$\frac{e^{ikd}}{d} \cong \frac{1}{z} e^{ikz}\, e^{\frac{ik}{2z}[(x-X)^2+(y-Y)^2]} = \frac{1}{z} e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}}\, e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}}\, e^{-ik\frac{(xX+yY)}{z}}. \qquad (6.3)$$

Pro rozruch v místě $x, y, z$ dostaneme

$$E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \int_{S_A} E(X,Y,0) e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}}\, e^{-ik\frac{(xX+yY)}{z}}\, dXdY. \qquad (6.4)$$

Fresnelova aproximace 6.4 difrakčního integrálu 6.1 platí za podmínky

$$\frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{z^2} \ll 1\,. \qquad (6.5)$$

Takže sledujeme difrakci na malých otvorech v nepropustné překážce v dostatečně velké vzdálenosti $z \gg \lambda$, blízko osy a rozměry otvorů by měly být podstatně větší než vlnová délka.

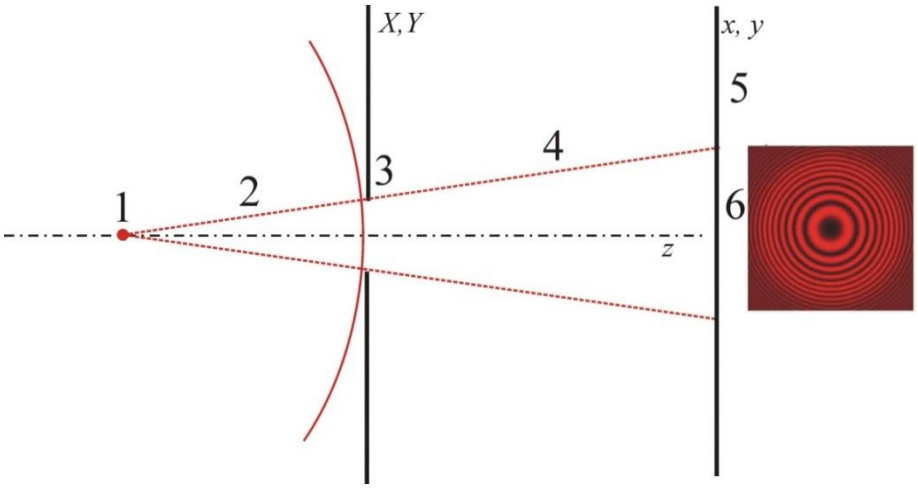
$$E(X,Y,0) \neq 0 \text{ pro } \lambda \ll |X|, |Y| < X_{max}, Y_{max} \ll z.$$

Tato aproximace se též používá v modelech difrakce na dlouhých, úzkých otvorech (štěrbina), kdy se zajímáme právě o řez difrakčním obrazcem ve směru malého rozměru otvoru a neuvažujeme „nezajímavou“ difrakci ve směru velkého rozměru otvoru. Podmínka 6.5 se pak redukuje v tomto „jednodimenzionálním“ modelu na

$$x - X \ll z\,.$$

Další aproximaci pro difrakci na malých otvorech provedl Fraunhofer zanedbáním členu $e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}}$.

$$E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \iint_{aper} E(X,Y,0)\, e^{-ik\frac{(xX+yY)}{z}}\, dXdY\,. \tag{6.6}$$




Obr. 6.2 Základní geometrické uspořádání pro Fresnelovu difrakci na kruhovém otvoru.

1 malý, „bodový“ zdroj záření
2 oblast šíření kulové vlny ze zdroje 1
3 pro světlo nepropustná překážka s otvorem (apertura)
4 oblast šíření a interference sekundárních vlnek
5 matnice pro pozorování rovinného řezu rozložení intenzit světla
6 oblast osvětlení matnice podle pravidel přímočarého šíření světla.
Obrázek vpravo ukazuje Fresnelovu difrakci na kruhovém otvoru pro určitou polohu $z$. Se změnou $z$ intenzita ve středu obrazce osciluje a při přibližování matnice k apertuře ze středu vybíhají další difrakční kroužky.

Použitelnost této aproximace záleží na vzájemném poměru velikosti apertury a vzdálenosti, ve které je pozorován difrakční obraz. Tato aproximace se rovněž nazývá aproximací vzdáleného pole. **Fraunhoferova aproximace** je použitelná pro vzdálenosti místa pozorování $z$ splňující podmínku

$$e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}} \cong 1, \quad z \gg z_{MEZ} = \frac{k}{8}(\text{max. rozměr otvoru})^2\,. \tag{6.7}$$

Např. v případě kruhového otvoru je $X^2 + Y^2 = R^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2$, kde $R$ je poloměr a $D$ je průměr otvoru, dostaneme

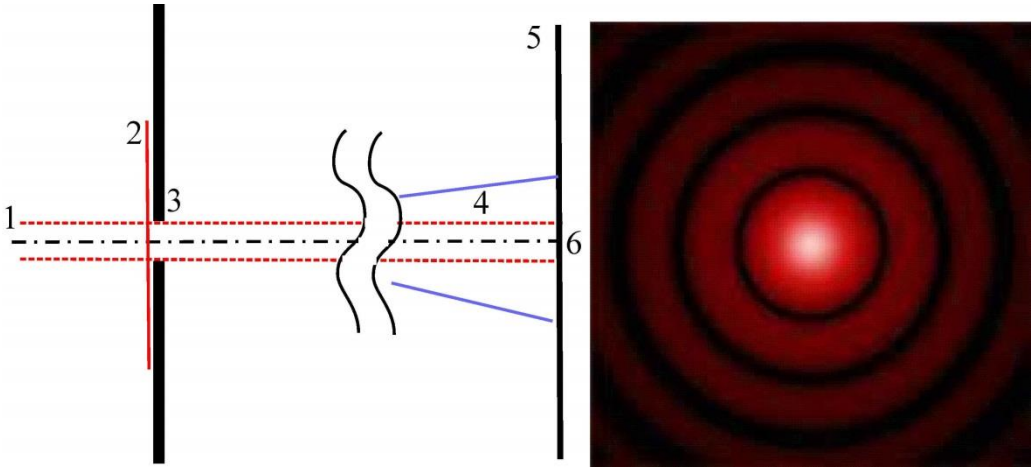
$$\begin{aligned} 2z &\gg k\left(\frac{D}{2}\right)^2, \\ z \gg z_{MEZ} &\cong \frac{2\pi D^2}{\lambda 8} \cong 0{,}8\,\frac{D^2}{\lambda}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Kvadratická závislost minimální vzdálenosti místa pozorování od difraktujícího otvoru na rozměrech otvoru má praktickou důležitost pro použitelnost Fraunhoferovy aproximace. Pro představu uveďme hodnoty $z_{MEZ}$ pro kruhové otvory při vlnové délce 500 nm:

| průměr apertury | $z_{MEZ}$ |
|---|---|
| 1 mm | 160 cm |
| 1 cm | 160 m |
| 1 dm | 16 km |
| 1 m | 1600 km |

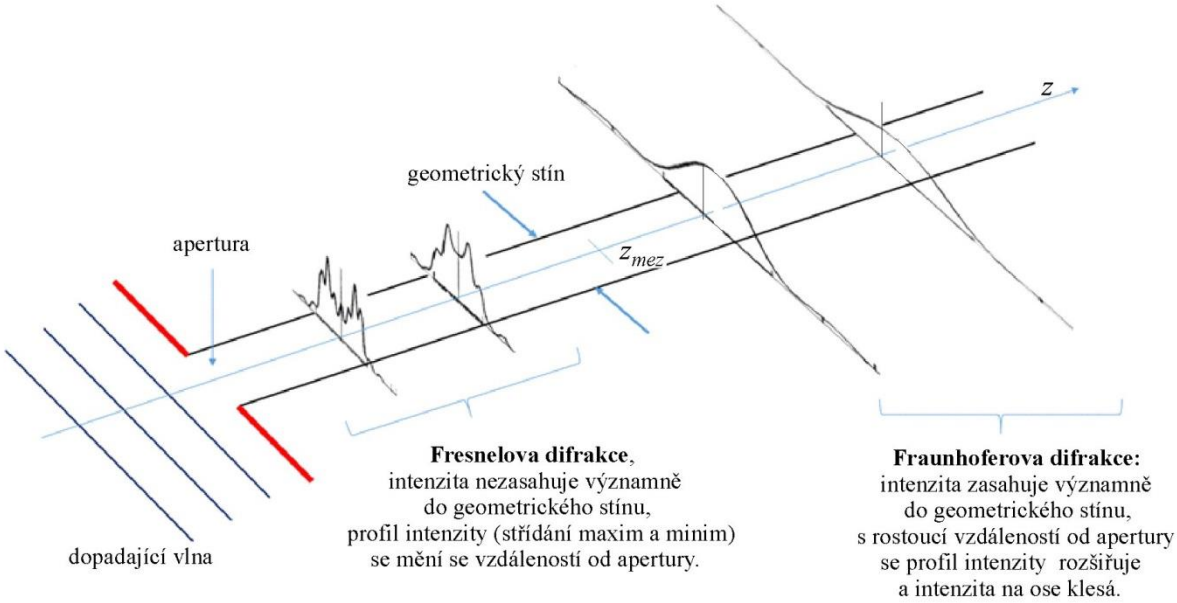
Jak uvidíme, lze přesto Fraunhoferovu aproximaci použít pro řadu praktických aplikací, např. pro odhad mezní rozlišovací schopnosti zobrazovacích optických přístrojů difrakčními jevy. Je to umožněno využitím optických prvků (čočky, zrcadla) k „přitažení“ vzdálených „míst pozorování“ do ohniskové roviny ($z \approx \infty \ \rightarrow z = f$).

V užším slova smyslu bývají jako „Fresnelova difrakce“ označovány případy $\lambda \ll z < z_{MEZ}$ a jako „Fraunhoferova difrakce“ případy $z_{MEZ} < z$ při dopadu rovinné vlny. V mnoha běžných situacích jsou mezi výsledky obou aproximací výrazné kvalitativní odlišnosti. Zatímco Fresnelovy difrakční obrazce mají významnou intenzitu hlavně v oblasti osvětlené dle pravidel geometrické optiky a na ose může docházet k oscilacím intenzit se změnou souřadnice $z$, pro Fraunhoferovy obrazce je typické úhlové rozbíhání s rostoucím $z$ za hranice geometrického stínu, přičemž maximální intenzita se nachází ve směru vlnového vektoru dopadající vlny a závislost intenzit na této ose při změně $z$ je monotónní (obr. 6.4).




Obr. 6.3 Základní geometrické uspořádání pro Fraunhoferovu difrakci na otvoru. V pravé části Fraunhoferův obrazec difrakce na kruhovém otvoru:

1 dopadající rovinná vlna,
2 rovinná vlnoplocha dopadající na překážku
3 pro světlo nepropustná překážka s otvorem (apertura)
4 oblast šíření a interference huygensovských elementárních vlnek
5 velmi vzdálená matnice pro pozorování rovinného řezu rozložení intenzit světla
6 oblast osvětlení matnice podle pravidel přímočarého šíření světla




Obr. 6.4 Schématické zobrazení vývoje profilu difrakčního obrazce se vzdáleností od difrakční apertury ve Fresnelově a Fraunhoferově aproximaci

# 6.2 Výpočet difrakčního integrálu

## 6.2.1 Analytický výpočet

Analytický výpočet difrakčního integrálu (6.1) i jeho Fresnelovy aproximace (6.4) je jednoduchý jen pro některé případy. Mezi ně patří průběh intenzity elektrického pole na přímce procházející kolmo středem kruhového otvoru o průměru $D$ (osa apertury), na který dopadá kolmo rovinná vlna.

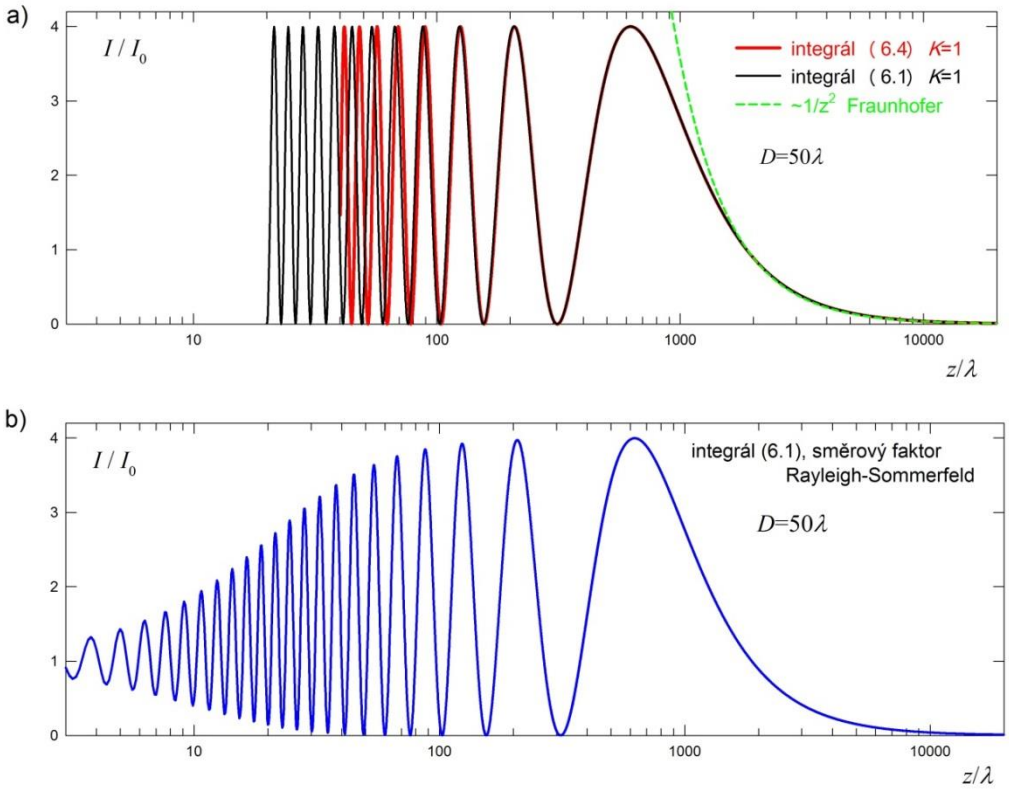
Výpočtem integrálu (6.1), který je uveden v poznámce P6.1, dostaneme pro průběh elektrického pole na ose kruhového otvoru

$$E_{KR}(0,0,z) = E_0\left(e^{ikz} - e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2}}\right) \tag{6.9}$$

Tomu odpovídá intenzita

$$I(0,0,z) = E(0,0,z)E^*(0,0,z) = 2\,E_0^2\left[1 - \cos\left(k\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2} - kz\right)\right].$$

V oblasti Fresnelovy aproximace difrakce na kruhovém otvoru osciluje tedy intenzita na ose otvoru mezi nulou a maximem $4I_0$, kde $I_0$ je intenzita dopadající vlny. V oblasti Fraunhoferovy aproximace (výpočet poznámka P6.2) je na ose maximum, které slábne $\propto {}^{1}/_{z^2}$.




Obr. 6.8 a) Spočtená intenzita difrakčního obrazu na ose kruhové apertury (modely bez započtení směrového faktoru). V oblasti Fresnelovy difrakce střídají s rostoucí vzdáleností od apertury maxima a minima intenzity (světlé a tmavé body). Při menší vzdálenost od apertury jsou patrné velké odchylky ve výsledcích výpočtu integrálů podle Fresnelovy aproximace (6.4) a výpočtu integrálu (6.1). V oblasti Fraunhoferovy aproximace (větší vzdálenost od apertury, zelená křivka) je na ose apertury světlé místo, jehož intenzita postupně klesá jako $\propto {}^{1}/_{z^2}$. b) V oblasti blízko apertury se významně projevuje vliv směrového faktoru $K(\vartheta)$. Na obrázku je znázorněn výsledek aproximativního výpočtu integrálu (6.1) se směrovým faktorem $\cos\vartheta$. Spočteno s použitím přibližného vztahu v J.E. Harvey, A. Krywonos, Applied Optics 41 (19), 3790-3795 (2002).

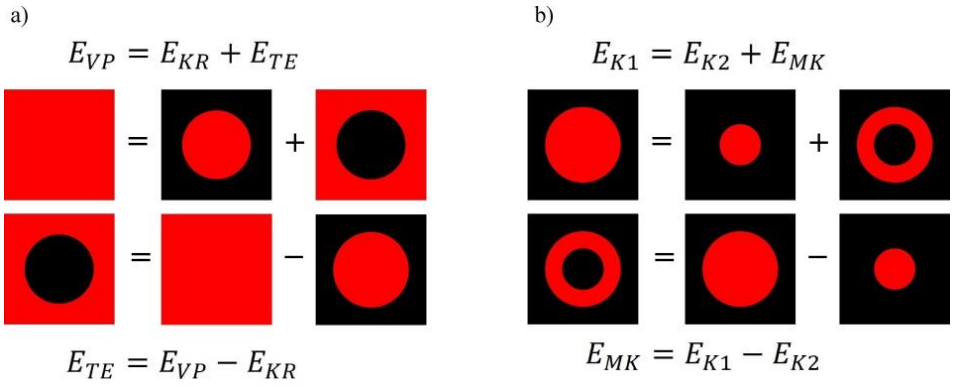
## 6.2.3 Babinetův princip

Babinetův princip (1837) (Jacques Babinet 1794-1872) se týká vztahu polí za komplementárními překážkami, tj. za aperturou (otvorem) $A$ a nepropustnou částí stínítka (terč) $T$, které mají stejný tvar i velikost. Příslušná difrakční pole označme jako $E_A(x,y,z)$ a $E_{TE}(x,y,z)$. Přitom $E_{TE}$ je difrakční pole pro případ, že nepropustná část stínítka je naopak propustná a vše ostatní nepropustné. Babinetův princip praví

$$E_A(x,y,z) + E_{TE}(x,y,z) = E_\Sigma\,(x,y,z),$$

kde $E_\Sigma\,(x,y,z)$ je pole dopadající vlny, tedy pole, které by v místě pozorování bylo bez přítomnosti překážky. Pro dopadající rovinnou vlnu kolmo na rovinu překážky je $E_\Sigma\,(x,y,z) = E_0\,e^{ikz}$. Je nutno zdůraznit, že tyto vztahy se týkají polí $E$ a nikoli intenzit.

Pomocí Babinetova principu lze objasnit historicky velmi důležitý jev zvaný Poissonova světlá skvrna. Siméon Poisson byl zastánce korpuskulární teorie světla a snažil se oponovat Fresnelově vlnové teorii. Spočetl, že podle této teorie je za nepropustným kruhovým terčíkem na ose světlá skvrna, což pokládal za absurdní. Francois Arago experimentálně tuto skvrnu objevil (publ. 1819), což byla významná podpora Fresnelově teorii.




Obr. 6.9 a) Babinetův princip. Elektrické pole za nepropustným kruhovým terčíkem je **rozdíl** pole volného prostoru (žádná překážka) $E_{VP}$ a pole za kruhovou aperturou $E_{KR}$ téhož poloměru jako terčík.; b) Pole za aperturou tvořenou mezikružím $E_{MK}$ v nepropustném stínítku lze spočítat jako rozdíl příspěvků od odpovídajících kruhových apertur $E_{K1} - E_{K2}$.

S využitím Babinetova principu můžeme vypočítat průběh $E_{TE}(0,0,z)$ za **kruhovou překážkou** (terčem) o průměru $D$. Uvážíme, že elektrické pole odpovídající volnému šíření vlny bez překážky je součtem polí od kruhové apertury a kruhového stínítka

$$E_{TE} = E_{VP} - E_{KR}.$$

S využitím Babinetova principu tak dostaneme

$$E_{TE}(0,0,z) = E_0 e^{ikz} - E_0\left(e^{ikz} - e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2}}\right) = E_0 e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2}},$$

kde je pole spočtené z integrálu (6.1) bez směrového faktoru. Hustota elektrické energie za kruhovým stínítkem pak je

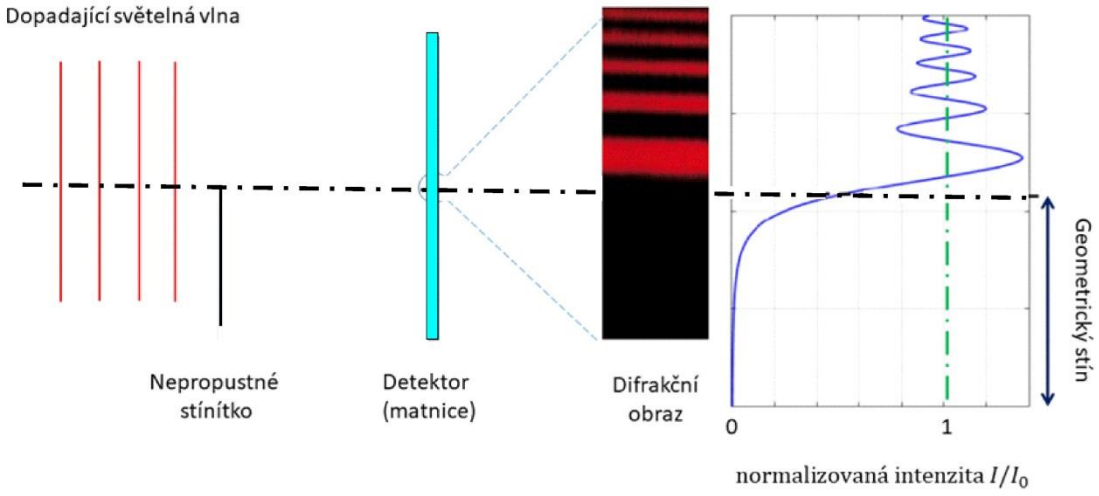
$$I_{TE}(0,0,z) = E(0,0,z)\;\; E^*(0,0,z) = |E_0|^2.$$

Intenzita vlny na ose za kruhovým stínítkem **je v této aproximaci konstantní.**

## 6.2.4 Difrakce na hraně (Fresnelova aproximace)

V případě difrakce na hraně je výsledkem výpočtu ve Fresnelově aproximaci oscilace intenzity difrakčního obrazce v rovině pozorování. První maximum s největší intenzitou se nachází

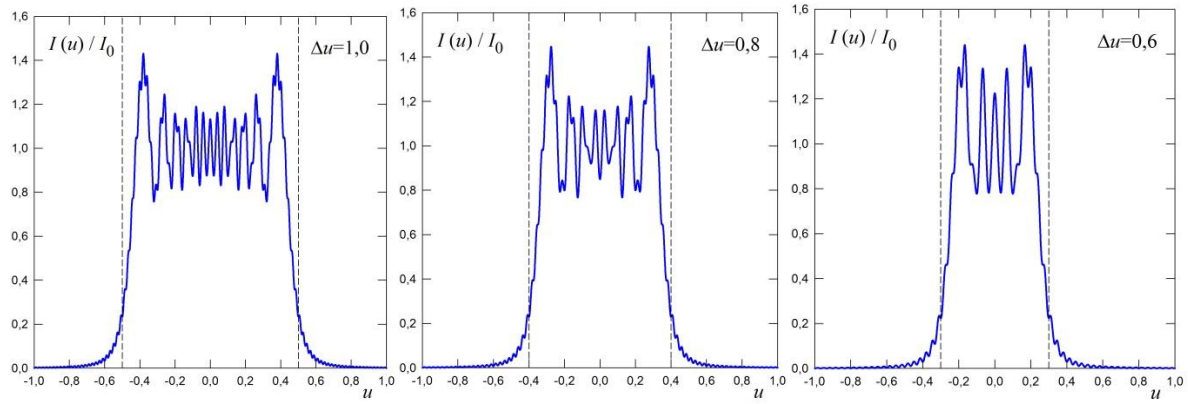
v osvětlené oblasti blízko nad hranou. Dále lze v osvětlené oblasti pozorovat střídání minim a maxim s postupně klesajícím kontrastem. Výpočet ve Fraunhoferově aproximaci nelze provést, protože nejsou splněny její předpoklady (aperturu tvoří polorovina s nekonečnou plochou).




Obr. 6.10 Fresnelova difrakce na hraně. $I_0$ je intenzita dopadající vlny.

## 6.2.5 Difrakce na štěrbině (Fresnelova aproximace)

Příklad rozložení intenzity světla na matnici pro případ štěrbiny ve Fresnelově aproximaci je uveden na obr. 6.11. Se změnou šířky štěrbiny (nebo vzdálenosti místa pozorování od štěrbiny) se na ose interferenčního obrazce střídají lokální maxima a minima intenzity.

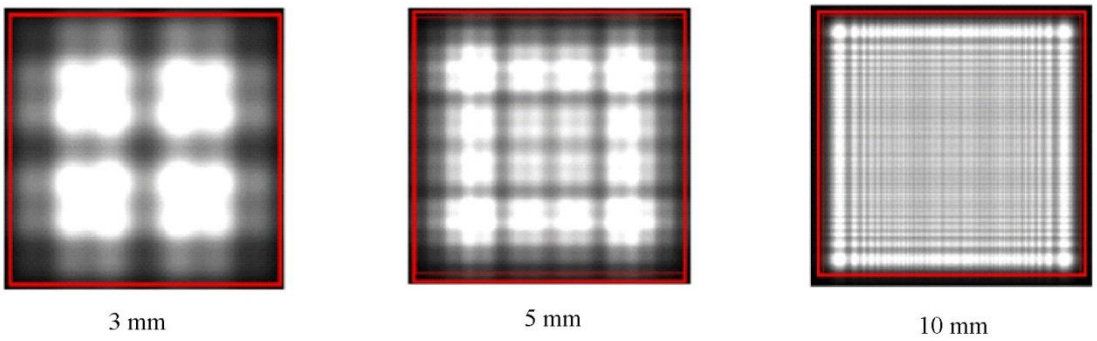



Obr. 6.11 Příklad výpočtu rozložení intenzity v obrazci Fresnelovy difrakce na štěrbině. Na rozdíl od Fresnelovy difrakce na jednoduché hraně jsou v případě difrakce na štěrbině (dvojici hran) malé oscilace intenzity i v oblasti geometrického stínu. Bezrozměrný parametr $u$ souvisí se vzájemnou polohou hran štěrbiny $X_1, X_2$ a místa pozorování $P(0,0,z)$. Šířka štěrbiny je $X_2 - X_1 = \Delta u \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}$ v případě kolmého dopadu rovinné vlny.

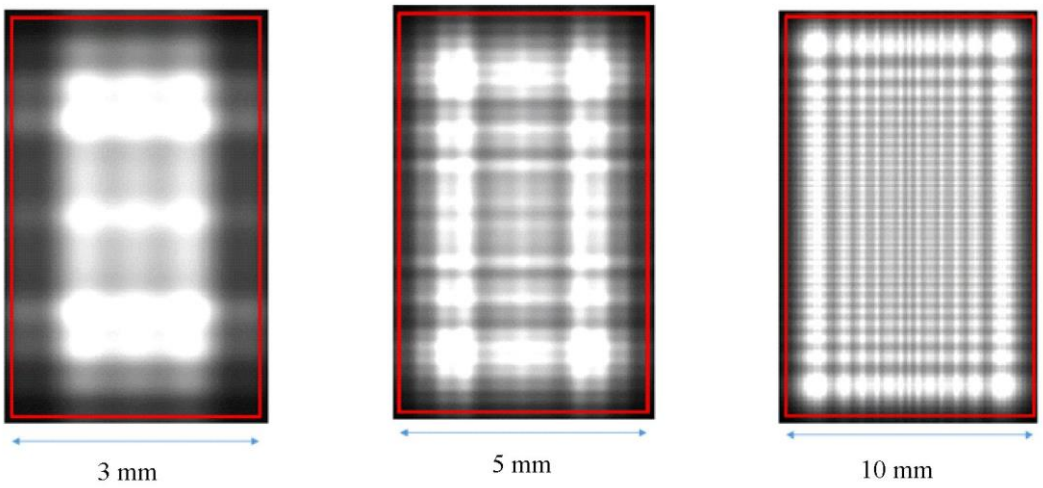
## 6.2.6 Difrakce na obdélníkové apertuře

### 6.2.6.1 Difrakce na obdélníkové apertuře ve Fresnelově aproximaci

Difrakce na obdélníkové apertuře ve Fresnelově aproximaci je charakterizována střídáním maxim a minim intenzity na matnici. Počet pozorovatelných maxim a minim v oblasti vysoké intenzity (mimo oblast geometrického stínu) narůstá s rozměrem apertury. Příklady difrakčních obrazců pro čtvercovou a obdélníkovou apertury jsou zobrazeny na obr. 6.12 a 6.13 pro případ světla o vlnové délce 510nm a vzdálenost matnice od difrakční apertury 4 metry.



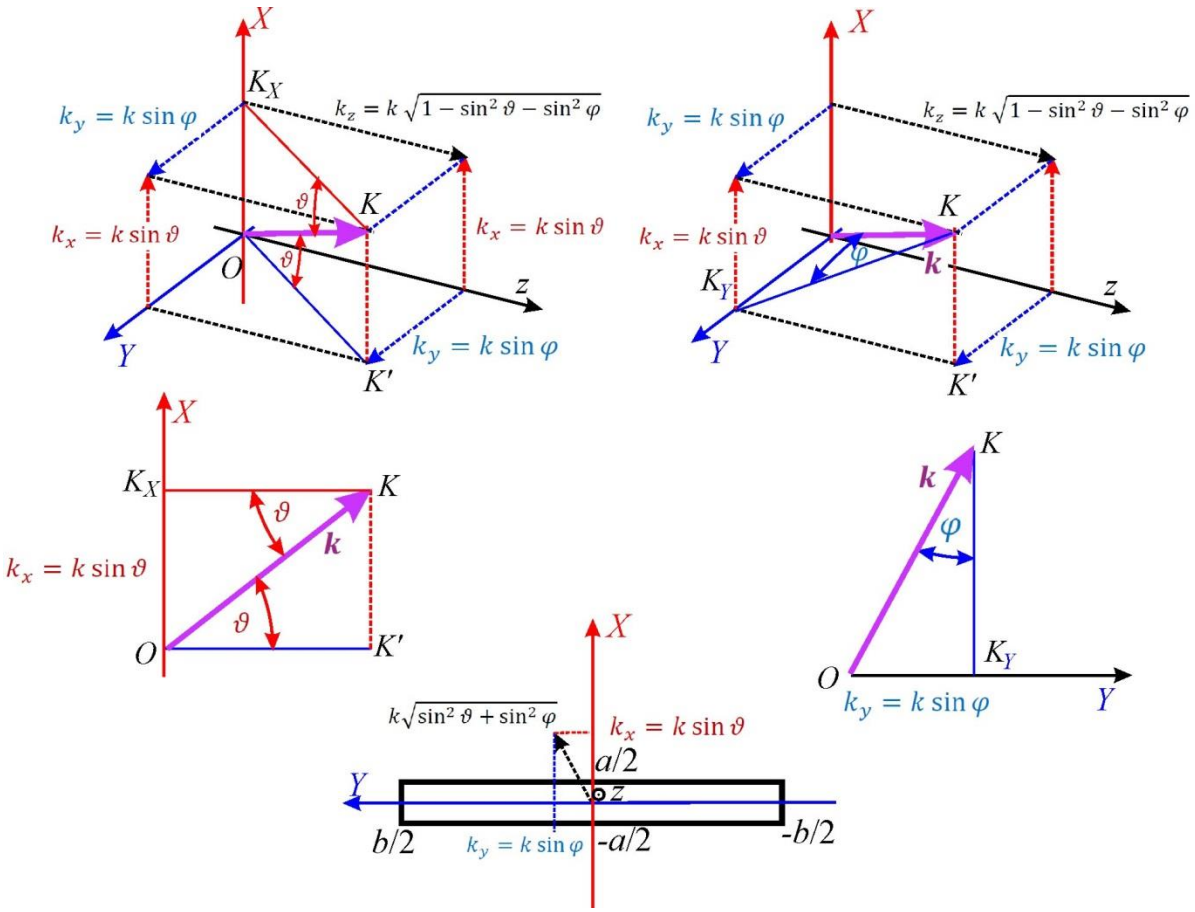

Obr. 6.12 Fresnelova difrakce na čtvercových aperturách rozměrů 3 mm, 5 mm a 10 mm. Vlnová délka světla 510 nm, vzdálenost matnice od difrakční apertury 4 metry. Vně čtverce s červeným obvodem je oblast geometrického stínu, ve které je intenzita interferenčního obrazce sice nenulová, ale relativně velmi slabá. Zobrazeno černobíle. https://www.falstad.com/diffraction/




Obr. 6.13 Fresnelova difrakce na obdélníkových aperturách. Vlnová délka světla 510 nm, vzdálenost matnice od difrakční apertury 4 m. Zobrazeno černobíle. https://www.falstad.com/diffraction

### 6.2.6.2 Difrakce na obdélníkové apertuře ve Fraunhoferově aproximaci

Popíšeme nyní difrakci na obdélníkové apertuře o stranách $a, b$ ve Fraunhoferově aproximaci. Geometrie difrakce a rozklad vlnového vektoru difraktované vlny jsou zobrazeny na obr. 6.14.




Obr. 6.14 Obdélníková apertura s vyznačenými průměty vlnového vektoru jedné rovinné komponenty difraktovaného pole. $k_x = k \sin\vartheta$ je průmět do osy $X$ a $k_y = k \sin\varphi$ průmět do osy $Y$. $z$-ová složka vlnového vektoru je $k_z = k\sqrt{1-\sin^2\vartheta-\sin^2\varphi}$. Pohled proti směru šíření $z$. Pozor, tato definice úhlů je **odlišná** od obvyklé definice ve sférické souřadné soustavě.

Dále pro jednoduchost nejprve předpokládejme, že na aperturu dopadá **rovinná vlna kolmo.** V tomto případě jsou amplituda i fáze elektrického pole v apertuře konstantní $E(X, Y, 0) = E_0$ (jak dříve poznamenáno, časové závislosti nejsou vypisovány).

Za těchto předpokladů dostáváme difrakční integrál ve Fraunhoferově paraxiální aproximaci ve tvaru

$$E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} E_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikX\frac{x}{z}}\, dX \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikY\frac{y}{z}}\, dY. \tag{6.10}$$

Z výpočtu integrálů dostaneme

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikX\frac{x}{z}}\, dX = -\frac{z}{ikx}\left(e^{-i\frac{ka}{2z}x} - e^{i\frac{ka}{2z}x}\right) = \frac{2iz}{ikx}\sin\frac{akx}{2z} = \frac{2za}{akx}\sin\frac{akx}{2z} = \tag{6.11}$$

$$= a\frac{\sin\frac{akx}{2z}}{\frac{akx}{2z}} = a\frac{\sin u_{pa}}{u_{pa}},$$

kde jsme zavedli hodnotu parametru $u$ pro paraxiální aproximaci jako $u_{pa}$

$$u_{pa} = \frac{ak}{2}\frac{x}{z} = \frac{a\pi}{\lambda}\frac{x}{z}. \tag{6.12}$$

Funkce $\frac{\sin u}{u}$ má hlavní maximum $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$ pro $u = 0$ a první nulový bod v bodě $u = \pi$, kterému odpovídá v paraxiální aproximaci souřadnice $x_{01} \cong \frac{2z\pi}{ka} = \frac{\lambda z}{a}$. Difrakční úhel $\vartheta$ je v paraxiální aproximaci $\vartheta \approx \tan\vartheta = \frac{x}{z}$.

Integrál ve směru *y* vypočteme stejným způsobem a dostaneme

$$\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikY\frac{y}{z}}\, dY = b\frac{\sin v_{pa}}{v_{pa}}, \qquad v_{pa} = \frac{b\pi y}{\lambda z}. \tag{6.13}$$

První nulový bod pro $y_{01} \cong \frac{\lambda z}{b}$. Difrakční úhel $\varphi$ je v paraxiální aproximaci $\varphi \approx \tan\varphi = \frac{y}{z}$.

V případě Fraunhoferovy difrakce na obdélníkové apertuře dostaneme pro intenzitu světla ve směru $\vartheta, \varphi$ ve vzdálenosti $z$ od difrakční apertury v paraxiální aproximaci na kolmé matnici

$$I = E(x,y,z)\, E^*(x,y,z) = E_0^2 a^2 b^2 \left(-\frac{i}{\lambda}\right)\left(\frac{i}{\lambda}\right)\frac{1}{z^2}\left(\frac{\sin u_{pa}}{u_{pa}}\right)^2\left(\frac{\sin v_{pa}}{v_{pa}}\right)^2 \propto \tag{6.14}$$

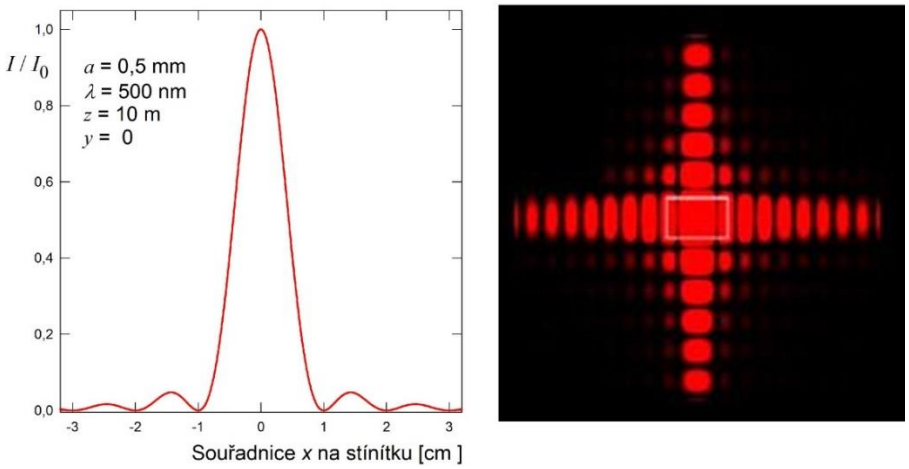
$$\propto I_0(a,b,z)\left(\frac{\sin u_{pa}}{u_{pa}}\right)^2\left(\frac{\sin v_{pa}}{v_{pa}}\right)^2,$$

$$u_{pa} \cong \frac{a\pi}{\lambda}\frac{x}{z}, \qquad v_{pa} \cong \frac{b\pi}{\lambda}\frac{y}{z},$$

kde $I_0(a,b,z)$ je maximální intenzita v tomto difrakčním obrazci pro $u = v = 0$.

Pro průběh intenzity světla **podél os** $x$ a $y$ po difrakci na obdélníkové apertuře o stranách $a, b$ při kolmém dopadu pak dostaneme

$$I(x,0,z) \propto \frac{1}{z^2}\frac{\sin^2 u}{u^2}, \qquad x = z\tan\vartheta,$$
$$I(0,y,z) \propto \frac{1}{z^2}\frac{\sin^2 v}{v^2}, \qquad y = z\tan\varphi. \tag{6.15}$$

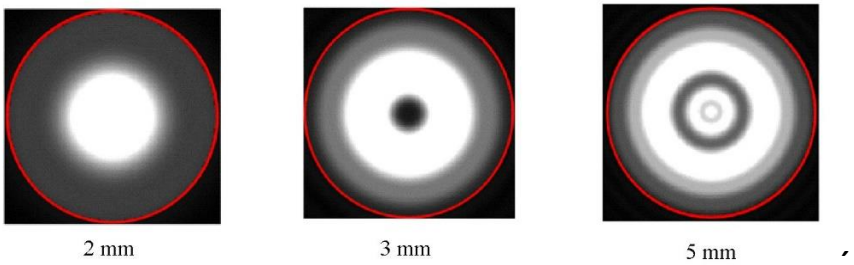



Obr 6.15 Příklad rozložení intenzity světla na matnici při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru. Vlevo rozložení intenzity pro $y = 0$. Vpravo difrakční obrazec. Hodnoty v levé části obrázku odpovídají apertuře o straně $a = 0{,}5$ mm a vzdálenosti matnice od apertury 10 m při vlnové délce 500 nm. Použití Fraunhoferovy aproximace je oprávněné. Bílý obdélník v difrakčním obrazci vyznačuje studovanou obdélníkovou aperturu.

## 6.2.7 Difrakce na kruhové apertuře

### 6.2.7.1 Difrakce na kruhové apertuře ve Fresnelově aproximaci

Difrakční obrazce v rovině pozorování kolmo na směr šíření rovinné vlny dopadající na kruhovou difrakční aperturu ve Fresnelově aproximaci jsou zobrazeny na obr. 6.2 a 6.16. Uvnitř válce vymezujícího geometrický stín apertury se střídají maxima a minima difrakčních kroužků. Intenzita difrakčních oscilací v oblasti geometrického stínu je při Fresnelově difrakci sice nenulová, ale velmi malá.



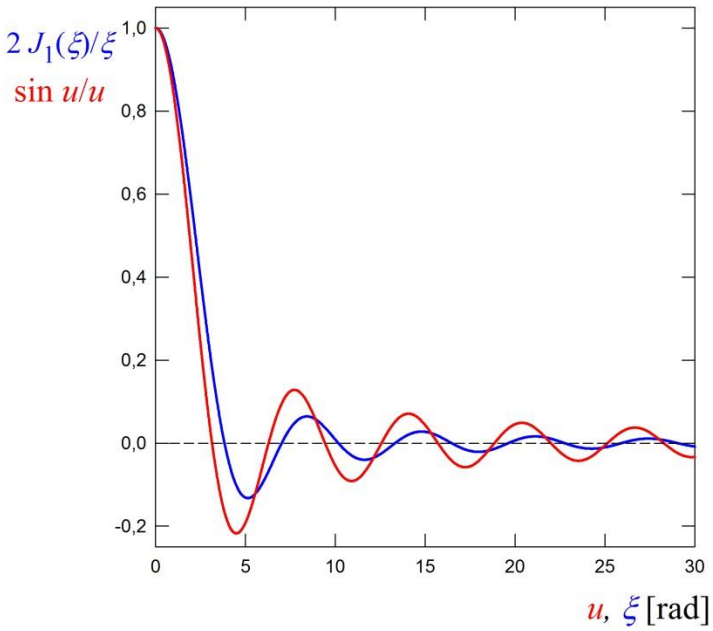

Obr 6.16 Spočtený difrakční obrazec Fresnelovy difrakce na kruhových otvorech uvedených průměrů od 2 mm do 5 mm na matnici vzdálené 4 m od stínítka, vlnová délka světla 515 nm (zobrazeno černobíle). Vně červeného kruhu se nachází oblast geometrického stínu, kde je intenzita oscilací difrakčního obrazce sice nenulová, ale mnohem menší než ve znázorněné oblasti. https://www.falstad.com/diffraction

### 6.2.7.2 Difrakce na kruhové apertuře ve Fraunhoferově aproximaci

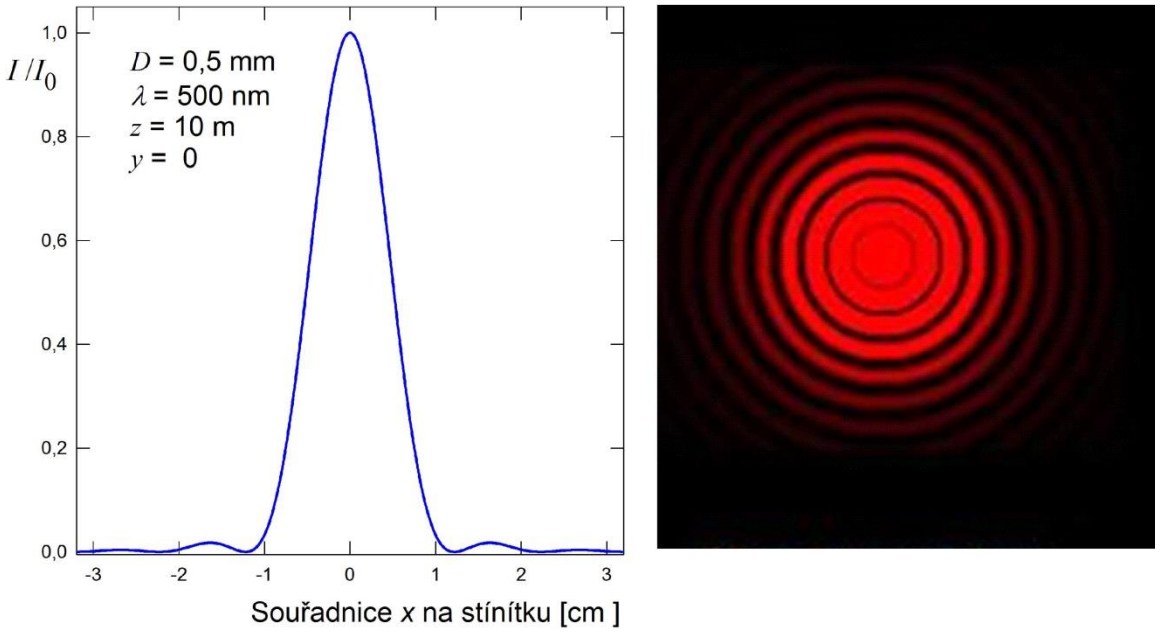
Podobným postupem jako při výpočtu Frauenhoferovy difrakce na obdélníkové apertuře lze dospět k rozložení hustoty elektrické energie (intenzity světla) difrakce na kruhové apertuře. Matematicky je postup komplikovanější, protože výpočet integrálu vede na vztah obsahující Besselovu funkci [2]. Ve Fraunhoferově aproximaci dostaneme pro kolmý dopad rovinné vlny na kruhovou aperturu v paraxiální aproximaci

$$I(\rho,z) = I_0\left(\frac{2\,J_1(\xi)}{\xi}\right)^2 \propto E_0^2\left(\frac{\pi D^2}{4\lambda z}\right)^2\left(\frac{2\,J_1(\xi)}{\xi}\right)^2,$$
$$\xi \cong \frac{kD}{2}\,\frac{\rho}{z} = \frac{kD}{2}\tan\vartheta = \frac{\pi D\rho}{\lambda z} = \frac{\pi D}{\lambda}\tan\vartheta \qquad (6.16)$$

kde $J_1(\xi)$ je Besselova funkce prvního druhu řádu 1, $D$ je průměr apertury a $\rho$ je polární souřadnice reprezentující vzdálenost od osy $z$ v rovině $xy$. $I_0(z)$ je maximální intenzita v difrakčním obrazci na ose ve vzdálenosti $z$ od apertury. Prvního nulového bodu funkce intenzity dosahuje při $\xi = 1{,}22\pi$.




Obr. 6.17 Grafy funkcí $\frac{2\,J_1(\xi)}{\xi}$ a $\frac{\sin u}{u}$ v závislosti na fázi $\xi$, resp. $u$. Obě funkce jsou symetrické $f(-u) = f(u)$.

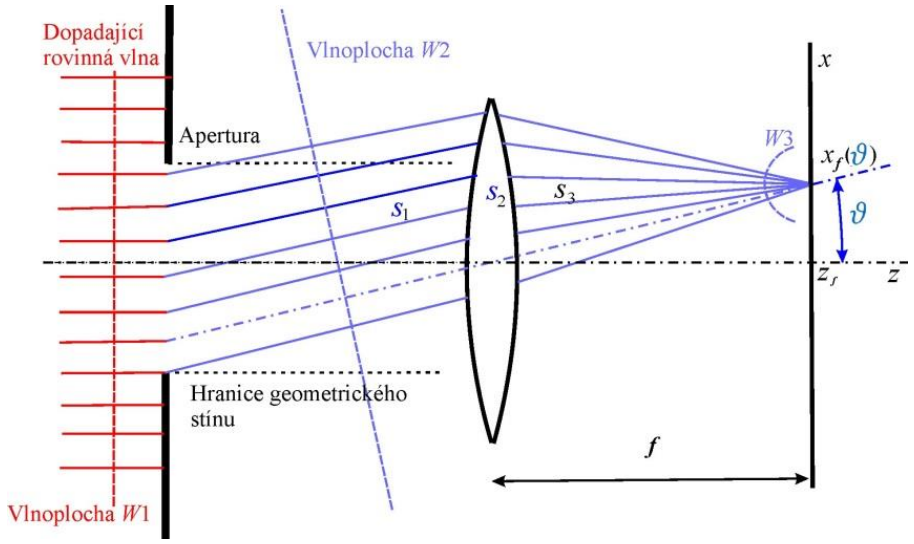



Obr. 6.18 Normované rozložení intenzity difraktovaného světla při Fraunhoferově difrakci na kruhovém otvoru průměru $D = 0{,}5$ mm a s dalšími uvedenými parametry.

## 6.3 Zobrazení Fraunhoferova difrakčního obrazce

Jak bylo dříve uvedeno, v případě Fraunhoferovy difrakce na obdélníkové apertuře dostaneme pro intenzitu světla na matnici ve směrech $x, y$ (úhly $\vartheta, \varphi$) ve vzdálenosti $z$ od difrakční apertury v paraxiální aproximaci vztahy (6.14) a (6.15).

Pro konstantní $u \propto \frac{x}{z}$ se s rostoucím $z$ rozměr difrakčního obrazce zvětšuje, ale zároveň rychle klesá intenzita $I \propto \frac{1}{z^2}$. V realistických rozměrech (v rámci velké místnosti) lze Fraunhoferovu difrakci předvádět na otvorech o maximálních rozměrech několika málo mm. Slábnutí intenzity interferenčního obrazce se vzdáleností lze zabránit použitím zobrazovací soustavy (např. spojné čočky), čímž zároveň přiblížíme Fraunhoferův difrakční obrazec z velkých vzdáleností do přijatelných měřítek. Při použití spojné čočky se struktura velmi vzdáleného obrazce vyhovujícího podmínce Fraunhoferovy difrakce objeví v ohniskové rovině. Podíl $\frac{x}{z} = \tan\vartheta$ se ve výrazu (6.14) nahradí podílem $\frac{x_f}{f}$ (obr. 6.19). Při kolmém dopadu $(\theta_\mathrm{i} = \varphi_\mathrm{i} = 0)$ leží absolutní maximum intenzity v $x_f = y_f = 0$.




Obr. 6.19 Základní geometrické uspořádání pro Fraunhoferovu difrakci při kolmém dopadu rovinné vlny s použitím zobrazovacího prvku (spojné čočky). $W1$ znázorňuje vlnoplochu dopadající vlny, vlnoplocha $W2$ se vztahuje k jedné z ∞ mnoha komponent difraktovaného pole. Optická dráha mezi $W2$ a $W3$ je $s_1 + n_{\check{c}o\check{c}ka} s_2 + s_3$ je pro všechny paprsky této komponenty stejná (podmínka zobrazení).

Z hlediska použití uvedených vztahů pro větší úhly difrakce $\vartheta, \varphi$ je nutno použít jinou, obecnější aproximaci než (6.4), totiž provést **Taylorův rozvoj** podle malých rozměrů apertury **kolem jiného směru** než je normála k rovině apertury. To vede k úpravě popisu směrů

$$\frac{x}{z} \to \sin\vartheta, \qquad \frac{y}{z} \to \sin\varphi, \tag{6.17}$$

$$u \cong \frac{ak}{2}\sin\vartheta = \frac{a\pi}{\lambda}\sin\vartheta, \qquad v \cong \frac{bk}{2}\sin\varphi = \frac{b\pi}{\lambda}\sin\varphi.$$

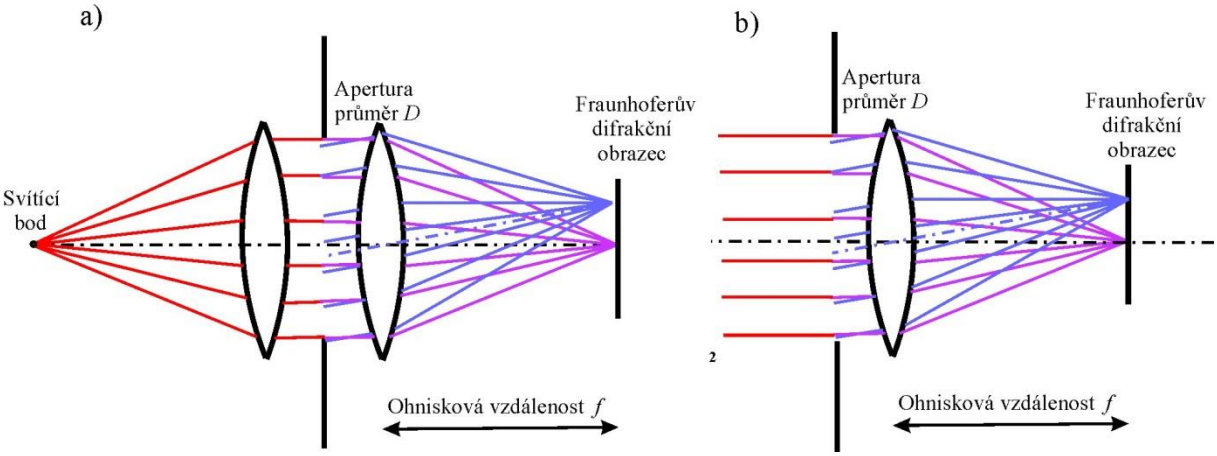
V paraxiální aproximaci malých úhlů tedy užíváme $\frac{x}{z} = \tan\vartheta \cong \sin\vartheta \cong \vartheta$ a $\frac{y}{z} = \tan\varphi \cong \sin\varphi \cong \varphi$, zatímco v případě větších úhlů difrakce, např. při difrakci na optických mřížkách užíváme rovnici (6.17).

## 6.4 Rayleighovo kritérium

Vzhledem k tomu, že každý bod předmětu při zobrazení přes difrakční aperturu vytváří na matnici difrakční obraz, vzniká otázka, jaké jsou limitující podmínky pro to, aby obraz dvou bodů předmětu bylo možné odlišit. Zde se věnujme jednoduchému modelu, který zohledňuje difrakční jevy vyvolané konečnými rozměry zobrazovací soustavy, a to s použitím vztahů pro Fraunhoferovu difrakci. Jak je z tabulky ukazující potřebné vzdálenosti pro aplikaci Fraunhoferovy aproximace zřejmé, jsou vzdálenosti pozorovacího místa při průměrech obvyklých zobrazovacích soustav veliké. Přesto je tato aproximace pro tento účel použitelná, což ukazuje následný modelový obrázek 6.20 a): kulové vlny z malého („bodového“) zdroje vstupují do zobrazovacího systému, v jehož části postupují jako rovinné (první požadavek na Fraunhoferovu aproximaci, jak jsme ji uvedli dříve). V této části jsou prostorově omezeny kruhovou aperturní clonou průměru $D$. Další část zobrazovací soustavy provede fokusaci do příslušné ohniskové roviny, kde můžeme pozorovat difrakční obrazec. V případě velmi vzdáleného zdroje, kterým může být např. hvězda, dopadá na aperturu rovinná vlna. Dochází k difrakci a difraktované vlny jsou zobrazeny spojnou čočkou, v jejíž ohniskové rovině vzniká Fraunhoferův difrakční obrazec.

Podmínka dobré rozlišitelnosti samozřejmě závisí na naší volbě, tedy na tom, jak velkou míru překryvu difrakčních obrazů dvou bodů předmětu považujeme za přijatelnou. Velmi často používaným kritériem rozlišitelnosti je Rayleighovo kritérium, které definuje rozlišitelnost pomocí minimálního rozlišitelného úhlu difraktovaných paprsků. Obrazy dvou bodových zdrojů monochromatického světla $A$ a $B$ při zobrazení přes difrakční aperturu jsou prostorově rozlišitelné tehdy, jestliže hlavní maximum difrakčního obrazu bodu $A$ je shodné s prvním minimem difrakčního obrazu bodu $B$.

Pro důležitý případ teleskopu, kdy jsou zobrazované objekty velmi daleko ($z_{A,B} \to \infty$), a pro kruhové apertury nastává první nulový bod v difrakčním obrazci pro $\Delta\xi = 1{,}22\,\pi$. V tomto případě obraz vzniká v ohniskové rovině $z_{OBRAZ} \cong f$. V paraxiální aproximaci můžeme vlny dopadající na zobrazovací systém považovat za rovinné a můžeme použít výsledku pro difrakci rovinné vlny na kruhovém otvoru.




Obr. 6.20 Model zobrazení monochromaticky svítícího bodu ideální optickou soustavou při aperturní cloně průměru $D$; a) blízký bod, kulová vlna je před dopadem na aperturu kolimována čočkou na rovinnou vlnu (rovnoběžné paprsky). $f_2$ je ohnisková vzdálenost 2. části zobrazovací soustavy; b) velmi vzdálený bod, na aperturu dopadá rovinná vlna

Ze vztahu

$$\Delta\xi = 1{,}22\,\pi = \frac{\pi D \rho_1}{\lambda f} \tag{6.18}$$

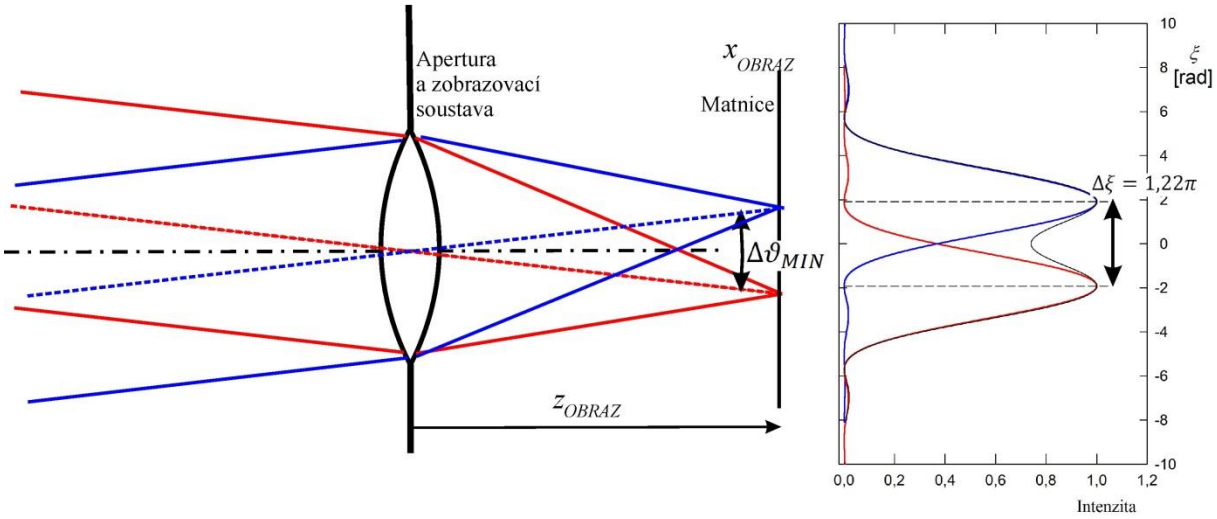
plyne pro poloměr první kružnice o nulové intenzitě světla

$$\rho_1 = \frac{1.22\lambda f}{D} \tag{6.19}$$

a příslušný úhel

$$\Delta\vartheta_{MIN} = \frac{\rho_1}{f} = \frac{\Delta x_{OBRAZ}}{z_{OBRAZ}} = \frac{\Delta x_{OBRAZ}}{f} \cong 1{,}22\,\frac{\lambda}{D}. \tag{6.20}$$

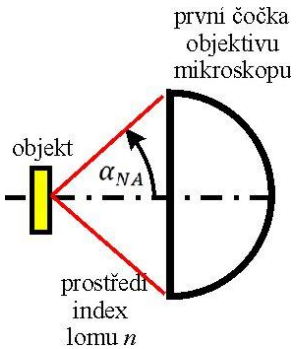
Ve většině praktických případů představuje průměr apertury dalekohledu zároveň průměr vstupní čočky (nebo primárního zrcadla) zobrazovací soustavy dalekohledu. Ze vztahu (6.20) plyne, že minimální rozlišitelný úhel je tím menší, čím větší je typický rozměr apertury. To platí nejen pro dalekohled s kruhovou symetrií, ale obecněji, např. i pro hranatou čtvercovou aperturu apod. Minimální rozlišitelný úhel je také tím menší, čím menší je vlnová délka záření. Nejlepšího prostorového rozlišení (nejmenšího difrakčního rozmazání) dosáhneme, použijeme-li optiku s velkým průměrem objektivu. Extrémní hodnoty průměrů apertur zobrazovacích soustav se užívají v astronomii. Např. Hubbleův teleskop má průměr 2,4 m. Velké pozemní astronomické dalekohledy mají objektivy o průměrech kolem 10 m a plánují se složené objektivy o podstatně větší efektivní ploše.




Obr. 6.21 Rozlišení obrazů 2 vzdálených svítících objektů (hvězd) podle Rayleighova kritéria rozlišitelnosti dvou difrakčních obrazců pro osově symetrickou zobrazovací soustavu. V pravé části obrázku jsou červeně a modře zakresleny příspěvky k intenzitě světla od jednotlivých svítících bodů a černá křivka představuje jejich součet. Pro prosté sčítání intenzit světla je předpokladem vzájemná nekoherence záření obou bodů.

Při mikroskopickém zobrazení je nutno pracovat s optickými soustavami malých ohniskových vzdáleností při malých $z_{A,B}$. V těchto případech je pro dobré rozlišení důležitý parametr zvaný numerická apertura $n \sin \alpha_{NA}$, kde $n$ je index lomu prostředí mezi preparátem (pozorovaným objektem) a objektivem, $\alpha_{NA}$ je úhel mezi středním a krajním paprskem vycházejícím z bodu na pozorovaném objektu a vstupujícím do objektivu. Opět platí, že lepší prostorové rozlišení dosáhneme s větším průměrem svazku (větší úhel $\alpha_{NA}$) v optickém systému, tedy s větší numerickou aperturou. Navíc může být výhodné použít světlo co nejkratších vlnových délek, protože teoretická minimální vzdálenost 2 bodů objektu, které lze rozlišit je

$$\Delta x_{min} = \frac{\lambda}{2n \sin \alpha_{NA}}.$$



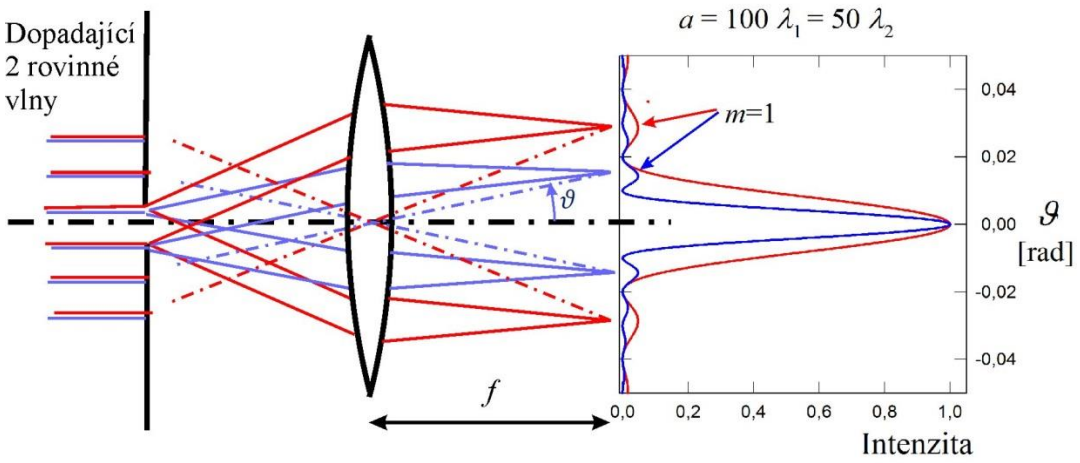

Obr. 6.22 Numerická apertura objektivu mikroskopu $n \sin \alpha_{NA}$

Difrakční jevy ovšem nejsou jediným mechanismem omezujícím prostorové rozlišení. Naše úvahy platí pro soustavy s patřičně omezenými jinými vadami zobrazení. Vztahu (6.20)

využívá i elektronová mikroskopie, kdy je kvantově mechanická vlnová délka elektronu $\lambda = \frac{h}{p}$, kde $h$ je Planckova konstanta a $p$ je hybnost elektronu. Např. elektronům s energií 1 keV odpovídá vlnová délka $\lambda = 3{,}6 \times 10^{-10}\text{m}$. Proto je minimální rozlišitelný úhel o 3 řády menší než v případě použití viditelného optického záření.

## 6.5 Spektrální rozklad světla při difrakci

Rozložení intenzity světla v rovině pozorování dané pro obdélníkovou a kruhovou aperturu vztahy (6.14) a (6.16) je funkcí vlnové délky difraktovaného záření. Dopadá-li na difrakční aperturu světlo z určitého intervalu vlnových délek, je výsledný difrakční obrazec složen z difrakčních obrazců pro jednotlivé vlnové délky a lze proto pozorovat různé barevné efekty. Příklad pro dvě různé vlnové délky při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru je zobrazen na obr. 6.23.




Obr. 6.23 Schématické znázornění Fraunhoferovy difrakce na obdélníkové apertuře (štěrbině) šířky $a$ v řezu $y = 0$ s fokusační čočkou. Vlnové délky kolmo dopadajících rovinných vln jsou $\lambda_1 = {}^{a}/_{100}$ a $\lambda_2 = {}^{a}/_{50}$. Úhel $\vartheta$ je v obrázku zveličen. Pro první vedlejší maximum difrakce na 1 štěrbině je pro uvedené hodnoty $\vartheta_{\lambda 1, m_{1st}=1} \cong 0{,}0143$ rad $\cong 0{,}82°$ a $\vartheta_{\lambda 2, m_{1st}=1} \cong 0{,}0286$ rad $\cong 1{,}64°$. Červená ($\lambda_2$) a modrá ($\lambda_1$) barva v tomto obrázku (na rozdíl od předchozích obrázků) reprezentuji různé vlnové délky světla.

## 6.6 Amplitudová difrakční mřížka ve Fraunhoferově aproximaci

Jako modelového zástupce různých typů difrakčních mřížek uveďme model **rovinné amplitudové** mřížky. Budeme se zajímat o rozložení intenzity světla na matnici či v rovině detektorů po průchodu rovinné vlny difrakční mřížkou ve Fraunhoferově aproximaci, kdy dochází k optimálnímu oddělení vln s různými vlnovými délkami. Vzhledem k rozměrům běžných spektroskopických mřížek (cm až dm) je při jejich funkční aplikaci s použitím Fraunhoferovy aproximace nutné použít fokusační optiku.

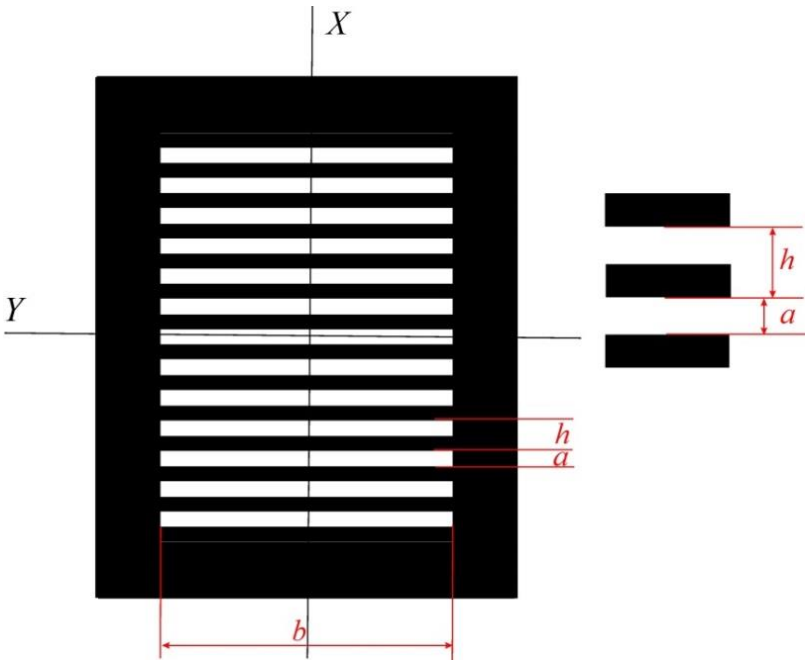
Štěrbiny jsou charakterizovány svými rozměry a propustností pro záření, právě tak příčky mezi štěrbinami. V našem modelu amplitudové mřížky je základní opakující se motiv propustnosti štěrbiny $T_G$

$$T_G = 1 \text{ pro } X \in \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \qquad T_G = 0 \text{ pro } X \in \left(\frac{a}{2}, h - \frac{a}{2}\right).$$

Pro popis difrakční mřížky v uspořádání na průchod předpokládáme, že se skládá z řady identických obdélníkových otvorů s velikostí hran $a$ a $b$, přičemž obvykle $a \ll b$. Nechť jsou obdélníkové štěrbiny umístěny v polohách symetricky kolem $X = 0$

$$X_n = \left(n - \frac{N+1}{2}\right) h, \qquad Y_n = 0, \qquad n = 1 \text{ až } N,$$

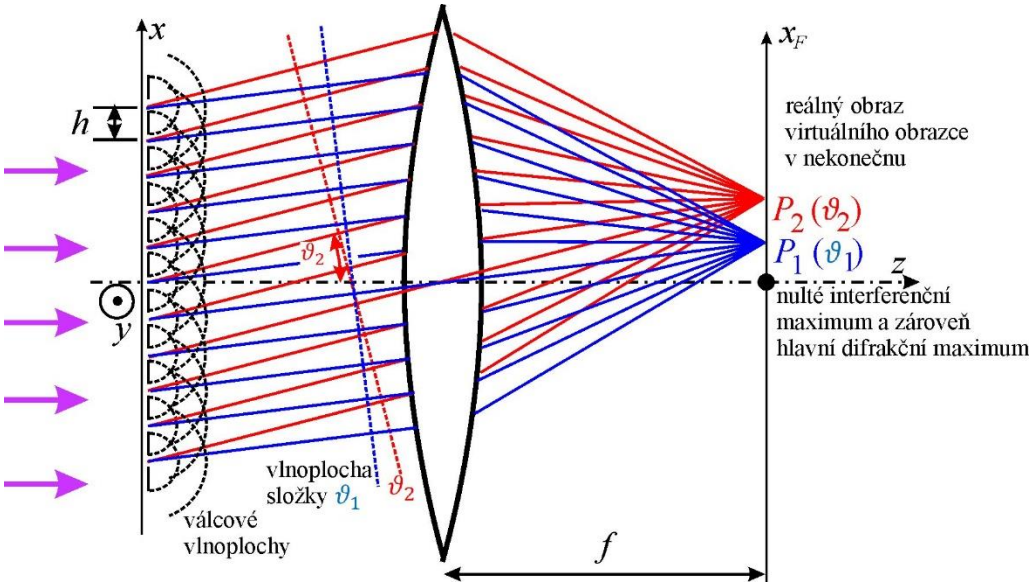
kde $N$ je celkový (lichý) počet štěrbin a $h$ vzdálenost sousedních štěrbin ve směru $X$. První štěrbina má souřadnici $X_1 = \frac{1-N}{2} h < 0$, prostřední $X_{\frac{N+1}{2}} = 0$ a poslední $X_N = \frac{N-1}{2} h > 0$ .




Obr. 6.24 Amplitudová mřížka na průchod tvořená periodicky umístěnými obdélníkovými štěrbinami v neprůhledném stínítku

***Případ kolmého dopadu na rovinu mřížky***

Vzhledem k typickým rozměrům štěrbin šířka $a \ll$ délka $b$ je výsledkem difrakce na jedné štěrbině válcová vlna. Budeme dále používat pouze výsledek difrakce v rámci dvourozměrného modelu v rovině $y = 0$.




Obr. 6.25 Virtuální interferenční obrazec $N$ rovinných vln v nekonečnu je složen z rovinných komponent charakterizovaných úhlem $\vartheta$. Tento obrazec si můžeme „přitáhnout" do ohniskové roviny fokusační optiky. Předpokládáme, že na mřížku dopadá rovinná vlna s vlnovým vektorem rovnoběžným s osou $z$ (úhel dopadu $\Theta_i = 0$), takže pole ve všech štěrbinách kmitají ve fázi. Intenzita v ohniskové rovině je určena úhlem $\vartheta$. Nulté interferenční maximum je na ose $z$, $x_F = 0$ pro všechny vlnové délky. Je možná např. situace, že pro některou vlnovou délku je v $P_1$ interferenční minimum a v $P_2$ první hlavní interferenční maximum.

Difraktované pole ve Fraunhoferově aproximaci vzniklé superpozicí difrakčních příspěvků od $N$ totožných apertur umístěných v aperturní rovině v místech $(X_n, Y_n, 0)$ lze popsat jako součin (Poznámka P.6.3)

$$E(x,y,z) \cong E_0 \sum_{n=1}^{N} e^{-ik\frac{xX_n+yY_n}{z}} \times$$
$$\times \left\{ \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY\, E(X,Y,0) e^{-ik\frac{xX+yY}{z}} \right\} = \tag{6.21}$$
$$= E_0 N F_N\, f_1\,,$$

kde pro dlouhé úzké štěrbiny bez periodicity ve směru $y$ ($Y_n = 0$) je

$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{-ik\left(X_n\frac{x}{z}+0\right)} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{-ikX_n\frac{x}{z}}\,.$$

Při výpočtu difrakce na souboru identických difrakčních apertur tedy stačí vypočítat difrakční obrazec jedné apertury $f_1$ (výraz ve složené závorce) a tento výsledek vynásobit sumou polí přes všechny apertury $F_N$ (výraz pro interferenci $N$ rovinných vln před složenou závorkou). To je prakticky velmi důležitý výsledek rozdělující úlohu na dvě poměrně nezávislé části:

- na určení difrakce od 1 štěrbiny $f_1$ (tedy složitý integrační úkol s mnohými aproximacemi)
- na poměrně jednoduchou úlohu součtu konečného počtu rovinných vln (členů v součtu $NF_N$, interferenční část úlohy).

Právě z tohoto interferenčního součtu rovinných vln $F_N$ lze odvodit zákonitosti, které nejsou vázány na konkrétní funkci $f_1$. Patří sem velmi důležitá mřížková rovnice pro difrakční mřížky a z ní plynoucí některé vlastnosti těchto mřížek.

Pro „interferenční" součet příspěvků polí rovinných vln v paraxiální aproximaci s použitím $X_n = \left(n - \frac{N+1}{2}\right) h$ platí

$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{-ikX_n\frac{x}{z}} = \frac{1}{N} e^{ikh\frac{N+1}{2}\frac{x}{z}} \times \sum_{n=1}^{N} e^{-ikhn\frac{x}{z}} =$$

$$= \frac{1}{N} e^{i\eta\,(N+1)} \times \sum_{n=1}^{N} e^{-2i\eta\, n}, \qquad \eta = \frac{hk}{2}\,\frac{x}{z}.$$

Reálné mřížky nepracují v podmínkách paraxiální aproximace. V exponenciálních funkcích můžeme zavést obecnější $\eta = \frac{hk}{2}\sin\vartheta$ podle vztahu (6.17). S použitím vzorce pro součet geometrické řady $s_N = a_1\frac{q^N-1}{q-1}$, kam dosadíme $a_1 = e^{-2i\eta}$ a $q = e^{-2i\eta}$, dostaneme pro součet polí

$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{-2i\eta X_n} = \frac{1}{N} e^{i\eta(N+1)}\, e^{-2i\eta}\ \frac{e^{-2i\eta N}-1}{e^{-2i\eta}-1} =$$

$$= \frac{1}{N} e^{-i\eta} e^{iN\eta}\frac{e^{-2i\eta N}-1}{e^{-2i\eta}-1} = \frac{1}{N}\frac{e^{-iN\eta}-e^{iN\eta}}{e^{-i\eta}-e^{i\eta}} = \frac{\sin(N\eta)}{N\sin(\eta)}$$

S využitím vztahu pro difrakci na jedné obdélníkové apertuře (vztah 6.17) dostáváme pro intenzitu Fraunhoferovy difrakce na difrakční mřížce

$$I(x,0,z) \cong I_0\left(\frac{\sin N\eta}{N\,\sin\eta}\right)^2\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 = I_0\ F_N^2\, f_1^2, \tag{6.22}$$

$$\eta = \frac{hk}{2}\sin\vartheta, \quad u = \frac{ak}{2}\sin\vartheta, \quad v = \frac{bk}{2}\sin\varphi$$

s tím, že v našem modelu nyní uvažujeme pouze případ $\Theta_\mathrm{i} = 0,\ \varphi_\mathrm{i} = \varphi = 0$, tj. kolmý dopad rovinné vlny na rovinu mřížky a sledování difrakčního obrazce pouze v rovině $xz$, kde $y = 0$. Znovu připomeňme, že $h$ je vzdálenost mezi štěrbinami, $a$ je šířka štěrbiny a $I_0$ je maximální intenzita v daném difrakčním obrazci, tedy nikoli intenzita dopadající vlny. $I_0$ závisí na intenzitě dopadající vlny, na rozměrech štěrbin $a, b$, počtu štěrbin $N$, vzdálenosti $z$, resp. v případě potřebné fokusace na vlastnostech optické soustavy.

Tento výraz představuje intenzitu světla v bodě prostoru $(x, 0, z)$ po difrakci rovinné monochromatické vlny na difrakční mřížce skládající se z $N$ identických obdélníkových štěrbin o rozměrech $a \times b$ vzdálených o $h$ vypočtený ve Fraunhoferově aproximaci, tedy pro hodně veliká $z$. Pro náš výklad je podstatný difrakční obrazec ve směru $x$ a pro $y \approx 0$, což je spojeno s podmínkou $b \gg a$. Pak poslední člen $\to 1$ a rozložení intenzity i do směrů, které nesplňují paraxiální aproximaci, můžeme v tomto modelu popsat

$$I(x, 0, z) \cong I_0 \left(\frac{\sin N\eta}{N \sin \eta}\right)^2 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 . \tag{6.23}$$

Výsledná intenzita je tedy pro dosud uvažovaný případ kolmého dopadu rovinné vlny na mřížku součinem funkce popisující efekt **interference konečného počtu svazků** směřujících od mřížky do daného směru $F_N(N, k, h, \vartheta)$ ($N$ periodicky umístěných identických apertur) a funkce **difrakce od jednotlivé apertury** $f_1(k, a, \vartheta)$. Zde uveďme některé hlavní vlastnosti funkcí $F_N^2$:

Funkce $\frac{\sin^2(N\eta)}{N^2 \sin^2(\eta)}$ je periodická funkce fázového rozdílu „sousedních“ rovinných vln $2\eta$ s periodou $\Delta\eta = \pi$. Funkce má nulový jmenovatel v případě $\sin\eta = 0$, $\eta = m\pi$, kde $m$ je celé číslo**.** Je-li nulový jmenovatel ($\eta = m\pi$), platí pro i čitatel $N\eta = Nm\pi = p\pi$. Je-li $m$ celé číslo, je $p = Nm$ vždy také celé číslo.

S použitím l’Hospitalova derivačního pravidla dostaneme

$$\lim_{\eta \to m\pi} \frac{\sin^2(N\eta)}{N^2 \sin^2(\eta)} = 1.$$

**Hlavní maxima funkce** nastávají tedy při nulovém jmenovateli. V prostoru za difrakční mřížkou se maxima ínterference nacházejí pod úhly $\vartheta_{MAX\,m}$ ($m$ je celé číslo)

$$\eta = \frac{hk}{2} \sin\vartheta_{MAX\,m} = \frac{h\pi}{\lambda} \sin\vartheta_{MAX\,m} = m\pi ,$$

$$h \sin\vartheta_{MAX\,m} = m\lambda ,$$

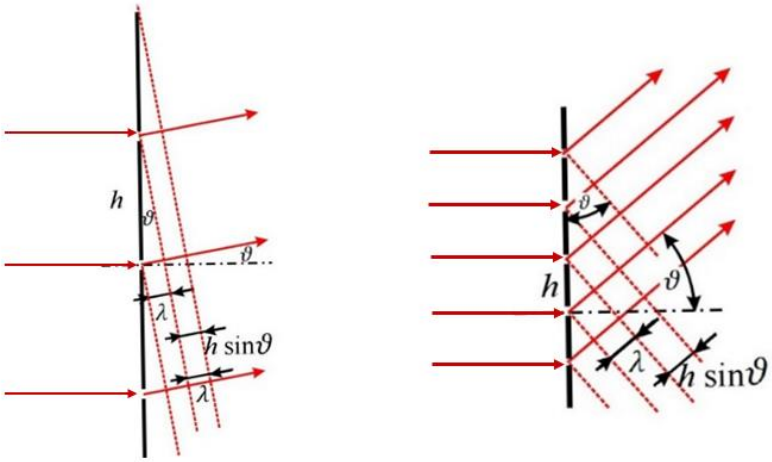
$$\vartheta_{MAX\,m} = \arcsin\frac{m\lambda}{h}.$$

Vztah $h \sin\vartheta_{MAX\,m} = m\lambda$ se nazývá **mřížková rovnice** pro případ kolmého dopadu světla na difrakční mřížku.

**Nulové body** funkce $F_N^2$ nastávají, je-li nulový čitatel a zároveň nenulový jmenovatel

$$\sin N\eta = 0, \qquad \text{přičemž} \quad \sin\eta \neq 0,$$

$$\eta = \pi\, {}^{p}/_{N}, \qquad \eta \neq m\pi, \quad p, m \text{ celá čísla}, \quad {}^{p}/_{N} \text{ číslo necelé.}$$




Obr 6.25 Souvislost mezi úhlem $\vartheta_{MAX\,1}$ a vzdáleností štěrbin. Pro velká $h$ je dosaženo podmínky maxima $h \sin \vartheta_{MAX\,1} = \lambda$ pro $m = 1$ při menších úhlech $\vartheta$ než pro malá $h$.

***Případ šikmého dopadu na rovinu mřížky***

V případě šikmého dopadu pod úhlem $\Theta_\mathrm{i}$ v rovině $xz$ je pole dopadající vlny

$$E(x, y, z < 0) = E_0 \exp[ik(x \sin \Theta_\mathrm{i} + z \cos \Theta_\mathrm{i})]$$

a v rovině apertury

$$E(X, Y, 0) = E_0 \exp(ikX \sin \Theta_\mathrm{i}) \ .$$

Toto pole dosadíme v rovnici (6.21) místo pole $E_0$ a po provedení analogického výpočtu jako v případě kolmého dopadu na mřížku s periodou $h$ dostaneme mřížkovou rovnici pro šikmý dopad

$$h\,(\sin\vartheta_{MAX\,m} - \sin \Theta_\mathrm{i}) = m\lambda\,. \tag{6.24}$$

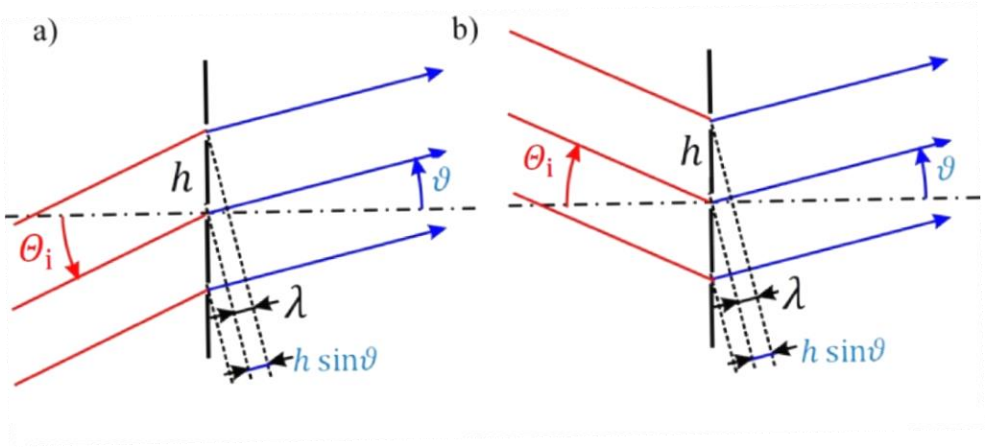
Při dosazování do rovnice je třeba respektovat znaménka orientovaných úhlů (obr. 6.26). Zvolíme znaménkovou konvenci tak, že kladné jsou úhly měřené od optické osy proti směru hodinových ručiček (v souladu s kapitolou 8 „Geometrická optika“).

Hlavní maxima funkce $F_N^2(\eta)$ nastávají pro $\eta = m\pi$, tj. $\eta_m = \frac{h\pi}{\lambda_m}\,(\sin \vartheta_m - \sin \Theta_\mathrm{i})$, tedy

$$\sin \vartheta_m - \sin \Theta_\mathrm{i} = \frac{\lambda}{h}\, m, \tag{6.25}$$

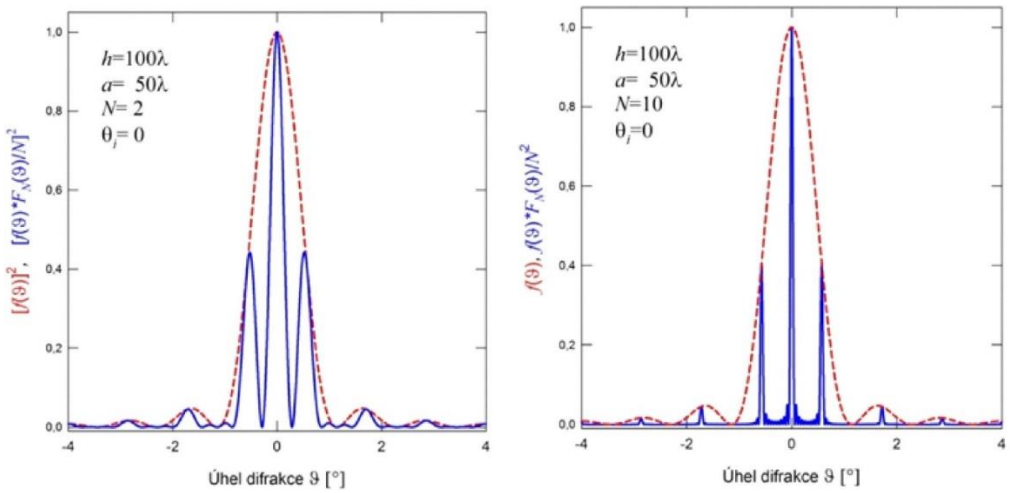
což je **mřížková rovnice** pro případ šikmého dopadu rovinné vlny na mřížku. Při dopadu rovinné vlny vlnové délky $\lambda$ pod úhlem $\Theta_\mathrm{i}$ nastane ve směru difrakce $\vartheta_m$ interferenční maximum intenzity řádu $m$. Speciálně pro nultý řád je $\vartheta_m = \Theta_\mathrm{i}$. Vlna řádu 0 pokračuje za mřížkou v původním směru. Modelový průběh intenzit světla při difrakci na difrakční mřížce vychází ze vztahů (6.23) použitých pro normovanou intenzitu pro kolmý dopad:

$$I(\vartheta) = I_0\, f_1^2(\vartheta)\, F_N^2(\vartheta).$$




Obr. 6.26 Šikmý dopad rovinné vlny na mřížku. V případě a) jsou úhel dopadu $\Theta_\mathrm{i}$ i difrakční úhel $\vartheta$ kladné. V případě b) je úhel $\Theta_\mathrm{i}$ záporný.

Průběh intenzity pro difrakci na jednotlivé štěrbině představuje obálku výsledné difrakční intenzity. Maxima funkce $F_N^2$ budeme nazývat **interferenční maxima** na rozdíl od **difrakčních maxim** funkce $f_1^2(\vartheta)$. S rostoucím $N$ se hlavní interferenční maxima funkce $F_N^2$ zužují a vedlejší interferenční maxima se zmenšují (obr. 6.27). Při použití velkého $N$ dochází k významnému zúžení hlavních interferenčních maxim, čehož lze využít při spektrálním rozkladu světla, protože **poloha hlavních interferenčních maxim** $F_N^2$ $(m \neq 0)$ **závisí na vlnové délce světla**. Při současném ozáření difrakční mřížky světlem s několika vlnovými délkami pak tato interferenční maxima vznikají v různých místech. Ze spektroskopického hlediska je důležité, jak malý rozdíl vlnových délek lze danou difrakční mřížkou rozlišit.




Obr. 6.27. Modelový průběh intenzity světla po difrakci na difrakční mřížce v závislosti na počtu štěrbin $N = 2$ a $10$ a pro šířku štěrbiny $a = \frac{h}{2}$. Červená přerušovaná křivka reprezentuje úhlovou závislost difrakční intenzity (s difrakčními maximy) pro 1 štěrbinu $f_1^2(\vartheta) = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ která představuje obálku pro interferenci souboru identických štěrbin $\sim F_N^2$ (s inteferenčními maximy). Intenzita ve výsledném obrazci je úměrná součinu obou funkcí.

S vlastnostmi funkcí $F_N^2$ je spojeno několik veličin. Pro spektroskopickou aplikaci je velmi důležitým parametrem **spektrální rozlišení,** jako minimální rozdíl vlnových délek $\Delta\lambda$, které je možno rozlišit. Je to veličina určená nejen vlastnostmi mřížky, ale též kritériem, na kterém se pro tento rozdíl domluvíme. Pro difrakční mřížky je vhodné Rayleighovo kritérium. S jeho pomocí lze odvodit, že dvě vlnové délky jsou rozlišitelné, pokud

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{mN}.$$

Teoretická limita **rozlišovací schopnosti** je pro mřížky častěji udávaný parametr (čím vyšší hodnota, tím kvalitnější mřížka)

$$R_{Dm} = \left|\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda}\right| = Nm\,. \tag{6.27}$$

V tomto modelu je **rozlišovací schopnost úměrná součinu celkového počtu ozářených štěrbin a řádu maxima $m$ interferenční funkce $F_N^2$.**

K popisu míry odklonu difrakčním prvkem v závislosti na vlnové délce dopadajícího záření se zavádí veličina nazývaná **úhlová disperze** $D_\vartheta$. Derivací mřížkové rovnice 6.24 dostaneme

$$D_\vartheta = \left.\frac{d\vartheta}{d\lambda}\right|_{\Theta_i=konst} = \frac{m}{h\cos\vartheta}\,. \tag{6.28}$$

Podobně pro **lineární disperzi** $\frac{dx_f}{d\lambda}$ ve spojení mřížky a fokusační optiky s ohniskovou vzdáleností $f_{FO}$ dostaneme z mřížkové rovnice s využitím vztahu $\tan\vartheta = \frac{x_f}{f_{FO}}$ (obr. 6.19)

$$\begin{aligned} h\sin\vartheta = h\cos\vartheta\frac{x_f}{f_{FO}} &= m\lambda\,, \\ x_f &= \frac{m\lambda f_{FO}}{h\cos\vartheta}, \\ \frac{dx_f}{d\lambda} = f_{FO}\frac{d\vartheta_m}{d\lambda} &= f_{FO}D_{\vartheta m}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Spektrální rozlišovací schopnost difrakční mřížky je tím větší, čím je větší celkový počet vrypů v difrakční mřížce a čím vyšší je difrakční řád. Zdálo by se tedy, že je výhodnější v spektrálních přístrojích využívat vysokých difrakčních řádů. Ve skutečnosti je tato volba omezena dalším parametrem charakterizujícím difrakční mřížku, kterou je tzv. volný spektrální interval.

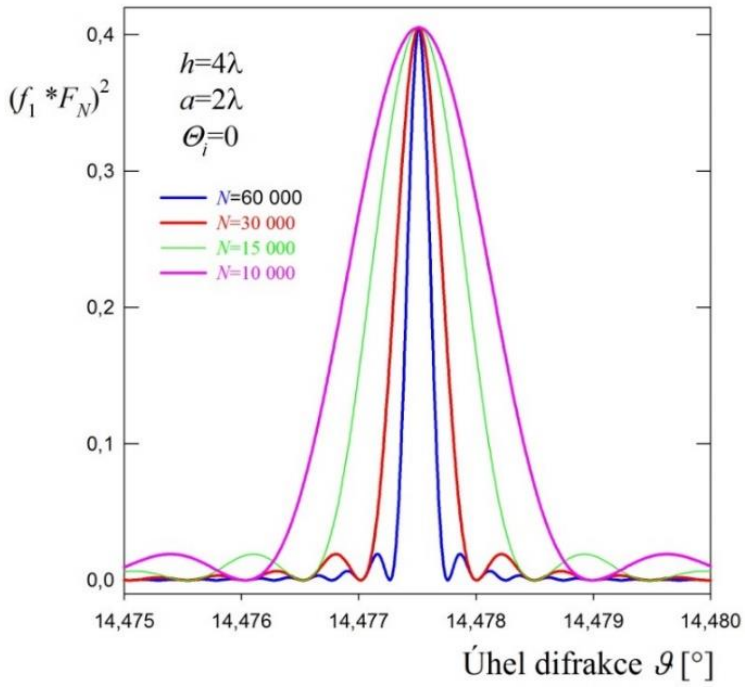
**Volný spektrální interval** je definován jako interval vlnových délek, pro které se difrakční obraz předmětu (např. vstupní štěrbina ve spektrometru) na výstupní štěrbině spektrometru nebo na detektoru pro daný řád $m$ nepřekrývá s obrazem předmětu ve vedlejším maximu ($m \pm 1$). Pozorujeme-li spektrum záření, ve kterém jsou vlnové délky z intervalu $\langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ můžeme spektrum dobře zaznamenat, pokud difrakční úhel paprsku s vlnovou délkou $\lambda_2$ difraktovaného v $m$-tém řádu nepřesáhne difrakční úhel paprsku s vlnovou délkou $\lambda_1$ difraktovaného v řádu $m + 1$ (obr. 6.29). Pro hraniční difrakční úhel $\vartheta_{Fsm}$ pak z mřížkové rovnice platí

$$h\,(\sin\vartheta_{Fsm} - \sin\Theta_i) = m\,\lambda_2 = (m+1)\lambda_1. \tag{6.30}$$

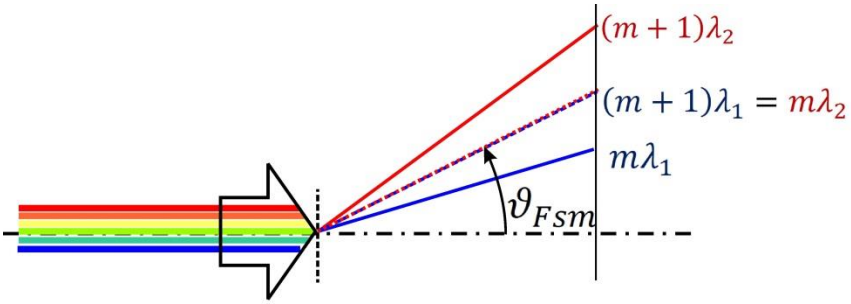
Volný interval vlnových délek definujeme pro $m$-tý řád jako

$$F_{sm} = \lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{m+1}{m} - 1\right)\lambda_1 = \frac{\lambda_1}{m}. \tag{6.31}$$

S rostoucím řádem difrakce $m$ se volný spektrální interval zmenšuje.




Obr. 6.28 Modelová závislost normované intenzity difraktované vlny $(f_1 F_N)^2$ v okolí 1. hlavního maxima $m = 1$ pro mřížky s počtem štěrbin $N = 60\,000, 30\,000, 15\,000$ a $10\,000$.




Obr. 6.29 Volný spektrální interval. Na difrakční mřížku dopadá světlo v intervalu vlnových délek $(\lambda_1, \lambda_2)$. Podmínkou dobrého zobrazení je, že difrakční úhel paprsku s vlnovou délkou $\lambda_2$ difraktovaného v $m$-tém řádu nepřesáhne difrakční úhel paprsku s vlnovou délkou $\lambda_1$ difraktovaného v $m + 1$ řádu.

# 6.7 Holografie

Velmi zajímavou a široce používanou aplikací spojení interference a difrakce je **holografie**. Teoretické základy holografie vypracoval Dennis Gabor (1900–1979) v roce 1947 při práci na zlepšení rozlišovací schopnosti elektronových mikroskopů (Nobelova cena 1971). K rozvoji holografie však došlo v optickém oboru, a to po objevení laserů. Za počátek lze považovat rok 1962, kdy byl úspěšně proveden záznam i rekonstrukce obrazu předmětu (transmisní hologram Emmett Leith, Juris Upatnieks), i realizace reflexního hologramu čitelného v bílém světle (Jurij Nikolajevič Denisjuk). V holografickém médiu je zaznamenána informace o světelném poli (tedy kromě záznamu intenzity záření úměrné amplitudě elektrického pole) je zapsána i fáze vlny. Dochází k tomu díky interferenci registrovaného světelného pole reprezentujícího trojrozměrnou scénu s koherentní referenční vlnou. Při tom se převádí informace o fázi na modulaci amplitudy. Interferenční obrazec obsahuje informaci o relativní fázi zaznamenaného světelného pole vůči referenční vlně. Záznam lze později rekonstruovat pomocí osvícení hologramu původní referenční vlnou ve stejném směru, ve kterém byl záznam vytvořen. Pozorovatel pak vidí obraz, který si zachovává hloubku, paralaxu a další vlastnosti původní scény, které lidské oči používají k odhadu vzdálenosti a tím k vytvoření trojdimenzionálního vjemu.

Předpokládejme, že referenční vlna $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{REF}$ vycházející z koherentního zdroje (laser) dopadá na dělič svazku, kde dochází k rozdělení amplitudy (obr. 6.30). Část vlny pak postupuje optickou soustavou na holografický film ležící v rovině $xy$.

Základní princip vyložíme v dvoudimenzionálním modelu, kde souřadnice $x$ bude ležet v rovině filmu. Pro další zjednodušení budeme užívat skalární aproximaci. Elektrické pole referenční rovinné vlny v rovině filmu $z = 0$ pak můžeme psát

$$E_{REF}(x) = A_{REF} e^{-i\,x\,k_{REF,x}} e^{-i\omega t} = A_{REF}\, e^{-i\,x\,k_{REF}\sin\alpha}\, e^{-i\omega t} =$$

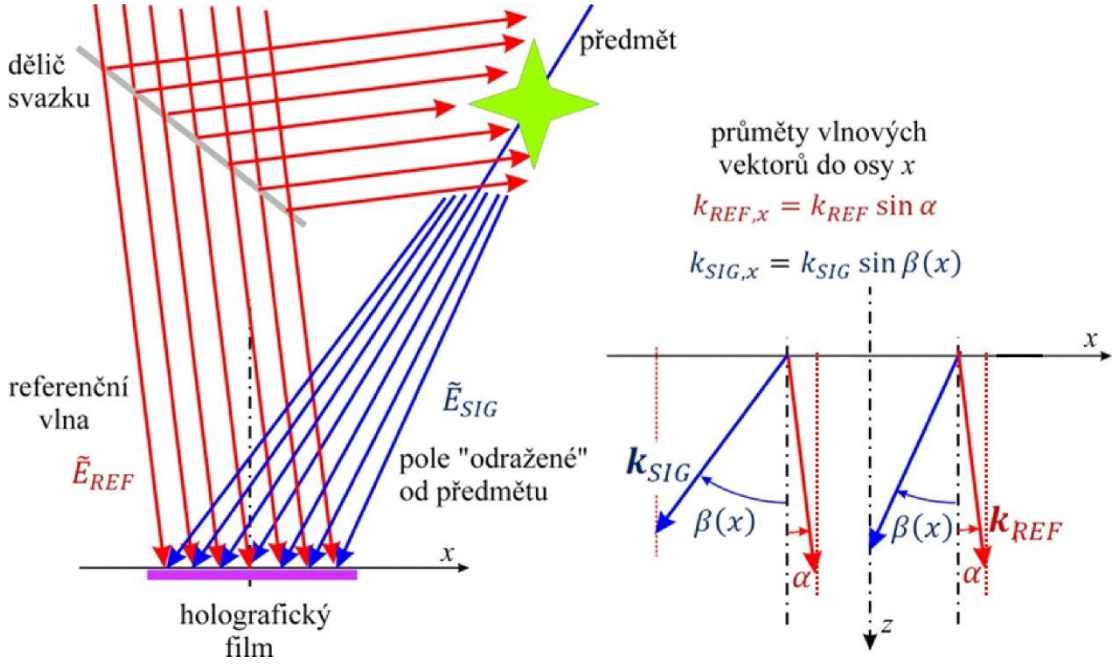
$$= A_{REF} e^{-i\varphi(x)}\, e^{-i\omega t},$$

kde jsme označili fázi referenční vlny $\varphi(x) = x k_{REF} \sin\alpha$. Rovinná referenční vlna má konstantní amplitudu.

Část referenční vlny se šíří k zobrazovanému objektu a odráží se od něj jako signální vlna. Odražené světelné pole je obecně složité. V našem modelu elektrické pole v rovině filmu popíšeme jako

$$E_{SIG}(x) = A_{SIG}(x) e^{-i\theta\,(x)}\, e^{-i\omega t}\,, \tag{6.32}$$

kde amplituda $A_{SIG}(x)$ i fáze $\theta(x) = x\, k_{SIG} \sin\beta(x)$ jsou funkcí $x$. Pro nejjednodušší „předmět“ – bod, pro který by odražená/rozptýlená vlna byla kulová vlna, by hologram vznikl jako interference rovinné a kulové vlny. V obecném případě je $E_{SIG}(x)$ výsledkem složení mnoha příspěvků od jednotlivých částí předmětu.




Obr. 6.35 Schéma pro holografický záznam a vlnové vektory referenční vlny a signálních vln

Intenzita světla v rovině filmu je úměrná

$$I_F(x) \propto \left(\tilde{E}_{REF} + \tilde{E}_{SIG}\right)\left(\tilde{E}^*_{REF} + \tilde{E}^*_{SIG}\right) =$$

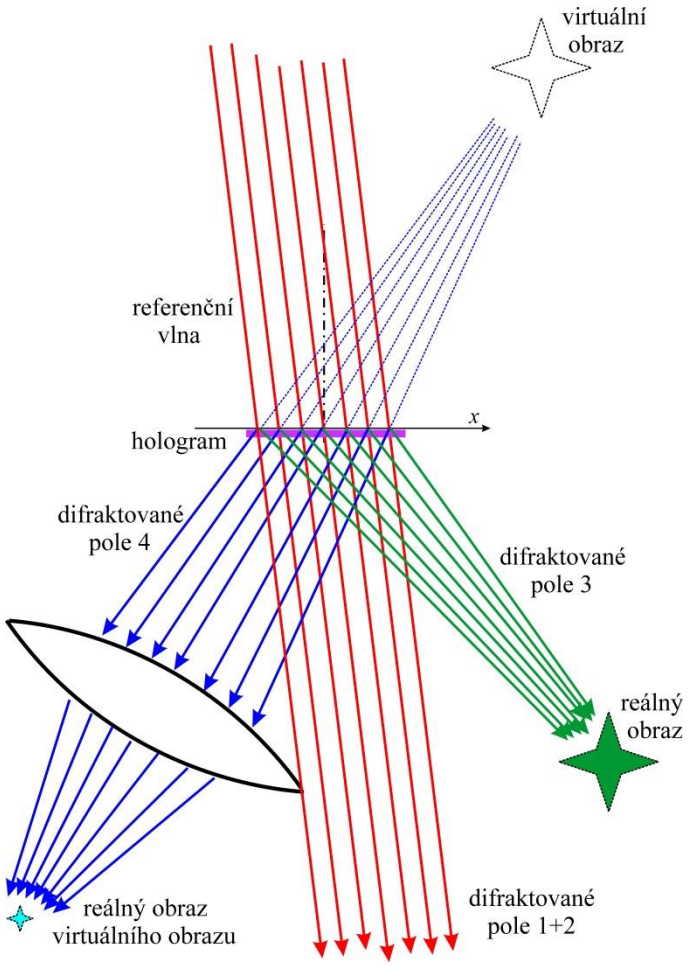
$$= A^2_{REF} + A^2_{SIG} + A_{REF}A_{SIG}e^{-i\varphi}e^{i\theta} + A_{REF}A_{SIG}e^{i\varphi}e^{-i\theta}.$$

Touto intenzitou je exponován holografický film. Zde poznamenejme, že při obvyklé expozici ve fotografii se pracuje v režimu, že zčernání je přímo úměrné absorbované energii během expozice (intenzita světla krát čas působení). V případě holografie je tomu jinak, protože potřebujeme exponovat v režimu nízkých expozic a zčernání je nelineární funkcí expozice. Holografické filmy jsou velmi jemnozrnné (rozlišení tisíce čar $mm^{-1}$), což sebou nese i poměrně nižší citlivost.

Pro **amplitudovou** propustnost předpokládejme, že ve vhodném režimu expozice a zpracování filmu je

$$t(x) = t_0 - aI_F(x),$$

kde $t_0$ je amplitudová propustnost neexponovaného filmu a $a$ je koeficient vyjadřující míru snížení amplitudové propustnosti filmu v režimu nízkých expozic.




Obr. 6.36 Zobrazení holografického záznamu. Exponovaný hologram je osvětlen referenční vlnou o stejné frekvenci a směru, jaká byla použita pří expozici. Nejdůležitější je difraktované pole 4, které vytváří virtuální obraz v místě původního předmětu. Za použití spojné optiky lze tento virtuální obraz převést na reálný. V případě vizuálního pozorování je tímto optickým systémem rohovka a čočka oka a reálný obraz vzniká na sítnici. Pozorovatel vidí obraz zaznamenané scény ve směru, ve kterém dopadala na film signální vlna při expozici.

Osvětlíme-li film (hologram) původní referenční vlnou, vznikne těsně za filmem elektrické pole

$$\tilde{E}_H(x) = t(x)\tilde{E}_{REF}(x)$$

$$= t_0\tilde{E}_{REF}(x) - a\left[(A_{REF}^2 + A_{SIG}^2)\tilde{E}_{REF}(x) + A_{REF}^2 A_{SIG} e^{-i(\varphi-\theta)} e^{-i\varphi} e^{-i\omega t} + \right.$$

$$\left. + A_{REF}^2 A_{SIG} e^{-i(\theta-\varphi)} e^{-i\varphi} e^{-i\omega t}\right] =$$

$$= t_0\tilde{E}_{REF}(x) - a\left[(A_{REF}^2 + A_{SIG}^2)\tilde{E}_{REF}(x) + A_{REF}^2 A_{SIG} e^{-i(2\varphi-\theta)} e^{-i\omega t} + \right.$$

$$\left. + A_{REF}^2 A_{SIG} e^{-i\theta} e^{-i\omega t}\right].$$

Vidíme, že se pole skládá ze 4 složek (viz obr. 6.36):

1) $t_0\tilde{E}_{REF}(x)$ vlna procházející referenční hologramem.

2) Vlna $a(A_{REF}^2 + A_{SIG}^2)\tilde{E}_{REF}(x)$ směřuje stejným směrem jako dopadající referenční vlna, ale je ovlivněna zčernáním filmu způsobené signální vlnou při expozici.

3) Vlna $aA_{REF}^2 A_{SIG} e^{-i(2\varphi-\theta)}\, e^{-i\omega t}$ je difraktovaná do směru, který se liší od původního směru signální vlny o úhel $2\alpha$ a navíc znaménko u $\theta$ je opačné. Jestliže byla signální vlna rozbíhavá, je vlna 3 sbíhavá. Takto difraktovaná vlna vytváří reálný obraz, ovšem v místě, kde původně zobrazovaný předmět nebyl.

4) Vlna $aA_{REF}^2 A_{SIG} e^{-i\theta}\, e^{-i\omega t}$ přichází ze směru signální vlny a vytváří virtuální obraz v místě, kde byl předmět umístěn. Při vizuálním pozorování tedy v tomto směru vidí pozorovatel původní předmět.

Přehledně můžeme tyto 4 vlny napsat jako

$$\tilde{E}_H(x) = \{t_0 - a(A_{REF}^2 + A_{SIG}^2)A_{REF}e^{-i\varphi} + \\ + aA_{REF}^2 A_{SIG} e^{-i(2\varphi-\theta)} + aA_{REF}^2 A_{SIG} e^{-i\theta}\}\, e^{-i\omega t} =$$

$$= A_1(x,y,z)e^{i\varphi} + A_2(x,y,z)e^{i\varphi} + \; + A_3(x,y,z)e^{i(2\varphi-\theta)} + A_4(x,y,z)e^{i\theta}.$$

Princip techniky holografie jsme uvedli na příkladu tzv. transmisního hologramu, kdy pozorujeme obraz ve světle, které prošlo hologramem. Jak jsme viděli (obr. 6.36) dopadají při záznamu v tomto případě referenční a signální vlna na stejnou stranu filmu. Často se používají i reflexní hologramy, kdy referenční i signální vlna při záznamu dopadají z opačných stran filmu a hologram lze pak zrekonstruovat v odraženém světle.

## Poznámka 6.1 – výpočet difrakčního integrálu na ose kruhové apertury a na ose kruhového stínítka ve Fresnelově aproximaci

Analytický výpočet difrakčního integrálu je možný jen pro některé jednoduché případy. Mezi ně patří průběh intenzity elektrického pole na přímce procházející kolmo středem kruhového otvoru o průměru $D$ (osa apertury), na který dopadá kolmo rovinná vlna. Budeme proto předpokládat, že elektrické pole uvnitř apertury je konstantní ($E(X,Y,0) = E_0$.). Pro zjednodušení výpočtu budeme předpokládat směrový faktor $K(\vartheta) = 1$)

Rovnici (6.4) pro osu otvoru ($x = y = 0,\ z > 0$) umístěného v poloze $z = 0$ můžeme psát

$$E(0,0,z) \cong \frac{-i}{\lambda}\int_S E_0 \frac{e^{ikr}}{r}\, dS,$$

$$E(0,0,z) \cong \frac{-i}{\lambda}\int_S E_0 \frac{e^{ik\sqrt{X^2+Y^2+z^2}}}{\sqrt{X^2+Y^2+z^2}}\, dXdY,$$

kdy jsme uvážili, že v našem případě (průběh $E$ na ose x = y= $Z = 0$) platí

$$(x-X)^2+(y-X)^2+(z-Z)^2 = X^2+Y^2+z^2.$$

Zavedeme polární souřadnice

$$X=\rho\cos\varphi,\ \ Y=\rho\sin\varphi,$$

$$E(0,0,z)\ =\frac{-i}{\lambda}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{D}{2}}E_0\frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

a s použitím substituce $\xi=\sqrt{\rho^2+z^2}, d\xi=\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ dostaneme

$$E(0,0,z)=\frac{-iE_0 2\pi}{\lambda}\int_{\xi_1}^{\xi_2}e^{ik\xi}d\xi\ ,\quad \xi_1=z,\quad \xi_2=\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+z^2},$$

$$E(0,0,z)=\frac{iE_0 2\pi}{\lambda}\,\frac{(e^{ikz}-e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+z^2}})}{ik}=E_0(e^{ikz}-e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+z^2}}.$$

Hustota elektrické energie je úměrná součinu $E(0,0,z)\ E^*(0,0,z)$, z čehož plyne pro intenzitu

$$I(0,0,z)\sim E(0,0,z)\times\ E^*(0,0,z)=|E_0|^2\left(e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+z^2}}-e^{ikz}\right)\left(e^{-ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+z^2}}-e^{-ikz}\right)=$$

$$=2|E_0|^2(1-\cos\left[k\left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+z^2}-z\right)\right].$$

## Poznámka 6.2 – výpočet difrakčního integrálu na ose kruhové apertury a na ose kruhového stínítka ve Frauenhoferově aproximaci

Výpočet na ose kruhové apertury o průměru $D$ můžeme provést podobně, jako jsme postupovali v případě Fresnelovy aproximace. Vyjdeme z rovnice (6.6) a dostaneme (na ose apertury je $x,y=0$)

$$E(0,0,z)\cong\frac{-i}{\lambda z}e^{ikz}\iint_{aper}E_0\ \ dXdY=\frac{-i}{\lambda z}e^{ikz}E_0\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{D}{2}}\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\frac{-i}{\lambda z}e^{ikz}E_0 2\pi\int_0^{\frac{D}{2}}\rho\,d\rho=\frac{-i}{\lambda z}e^{ikz}E_0 2\pi.\frac{D^2}{8}=\frac{-i}{\lambda z}e^{ikz}E_0\pi\frac{D^2}{4}$$

a příslušná hustota elektrické energie je

$$I\sim E(0,0,z)\times E^*(0,0,z)=\frac{1}{\lambda^2 z^2}E_0^2\pi^2\frac{D^4}{16}.$$

## Poznámka 6.3 – Difrakce na N-identických aperturách

Předpokládejme, že máme $N$ identických apertur se stejným rozložením elektrického pole. Každá individuální apertura má určitou polohu v difrakční masce. Nechť je poloha $n$-té apertury určena souřadnicemi $(X_n, Y_n, 0)$. Elektrické pole uvnitř $n$-té apertury můžeme psát jako

$$E(X - X_n, Y - Y_n, 0).$$

Rozložení elektrického pole ve všech aperturách je

$$E(X, Y, 0) = \sum_{n=1}^{N} E(X - X_n, Y - Y_n, 0).$$

Vypočteme Fraunhoferův difrakční obraz pro uvedený soubor apertur v paraxiální aproximaci

$$E(x, y, z) \cong \frac{-i}{\lambda z}\, e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(X - X_n, Y - Y_n, 0) e^{-ik\frac{xX+yY}{z}} dX dY.$$

Zavedeme nové proměnné $X' = X - X_n$, $Y' = Y - Y_n$ a dostaneme

$$E(x, y, z) \cong \qquad \cong \frac{-i}{\lambda z}\, e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(X', Y', 0) e^{-ik\frac{x(X'+X_n)+y(Y'+Y_n)}{z}} dX' dY'$$

Vytkneme faktor $e^{-ik\frac{xX_n+yY_n}{z}}$ před integrál, což vede ke vztahu

$$E(x, y, z) \cong \sum_{n=1}^{N} e^{-ik\frac{xX_n+yY_n}{z}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{-1}{\lambda z} e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(X, Y, 0) e^{-ik\frac{xX+yY}{z}} dX dY \right\} = F_N\, f_1$$

kde jsme pro zjednodušení zaměnili symboly $X'$ a $Y'$ za $X$ a $Y$. Výraz ve složené závorce představuje difrakční obrazec jedné apertury umístěné v poloze $X = 0$ a $Y = 0$.

# 7. Koherence

V předchozích kapitolách jsme se většinou zabývali modely, ve kterých vystupovaly monochromatické vlny (kromě kapitoly 5, kde jsme skládali monochromatické vlny různých frekvencí). Jednalo se o vlny deterministické, což není právě realistický popis skutečných polí, pro která je důležitý statistický (částečně náhodný) průběh. Proto v dalším textu této kapitoly budeme pracovat s **kvazimonochromatickým** zářením, které je superpozicí monochromatických vln s nezanedbatelnou amplitudou pouze pro frekvence z úzkého intervalu $\omega \in (\bar{\omega} - \Delta\omega,\ \bar{\omega} + \Delta\omega)$, přičemž $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$. Toto záření budeme popisovat funkcí

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(t) = \boldsymbol{A}(t) e^{i[\varphi(t) - \bar{\omega}\, t]},$$

kde $\boldsymbol{A}(t)$ je amplituda, která se v čase mění podstatně pomaleji než $e^{-i\bar{\omega}\, t}$. $\varphi(t)$ je rovněž pomalu se měnící fáze, $\bar{\omega}$ je střední kruhová frekvence. Tuto funkci budeme používat k výpočtům stejným způsobem, jako jsme to dělali s monochromatickou rovinnou vlnou.

Statistický charakter záření je možno popisovat korelačními funkcemi, které určují vztahy mezi hodnotami světelného pole v různých místech a časech. Zde se omezíme na korelační funkce 2. řádu, které souvisí s pojmem koherence záření.

**Korelační funkce** 2. řádu pro intenzity elektrického pole pro **stacionární případ** je střední hodnotou součinu typu

$$\tilde{\Gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) = \langle \widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{r}_1, t+\tau)\, \widetilde{\boldsymbol{E}}_2^*(\boldsymbol{r}_2, t) \rangle_{t_D} =$$

$$= \frac{1}{t_D} \int_{-t_D/2}^{t_D/2} \widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{r}_1, t+\tau)\, \widetilde{\boldsymbol{E}}_2^*(\boldsymbol{r}_2, t)\, dt, \tag{7.1}$$

kde teoreticky je třeba brát limitu $t_D \to \infty$. Prakticky se jedná o dobu odezvy detektoru záření, která je mnohem delší než doba kmitu vln $T$, což je pro monochromatickou vlnu $T = \frac{2\pi}{\omega}$. To je běžně v optickém oboru dobře splněno, protože obvykle je rozdíl mnoho řádů. [6]

[6] Alternativně se používá též výraz

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{r}_1, t)\, \widetilde{\boldsymbol{E}}_2^*(\boldsymbol{r}_2, t+\tau) \rangle_{t_D} = \frac{1}{t_D} \int_{-t_D/2}^{t_D/2} \widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{r}_1, t) \widetilde{\boldsymbol{E}}_2^*(\boldsymbol{r}_2, t+\tau)\, dt.$$

Rozdíl mezi oběma výrazy má za následek opačná znaménka ve výrazech typu $e^{\pm i\omega\tau}$, jak lze snadno ukázat pro monochromatickou vlnu $E_0 e^{-i\omega t}$.

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{r}_1, t+\tau)\, \widetilde{\boldsymbol{E}}_2^*(\boldsymbol{r}_1, t) = E_0^2 e^{-i\omega(t+\tau)}\, e^{i\omega t} = E_0^2 e^{-i\omega\tau} \quad \text{pro první výraz,}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{r}_1, t)\, \widetilde{\boldsymbol{E}}_2^*(\boldsymbol{r}_1, t+\tau) = E_0^2 e^{-i\omega t}\, e^{i\omega(t+\tau)} = E_0^2 e^{i\omega\tau} \quad \text{pro druhý výraz.}$$

Pod pojmem stacionárnost budeme rozumět nezávislost na době počátku průměrování

$$\langle f(t)\rangle_{(t_1,t_1+t_D)} = \langle f(t)\rangle_{(t_2,t_2+t_D)}.$$

Zde $t_1$ a $t_2$ jsou dva konkrétní časy, pro které platí $t_2 - t_1 = \tau$.

**Interferenční měření** slouží k experimentálnímu stanovení korelační funkce 2. řádu. Pro tyto experimenty je potřeba pole $\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{r}_1, t + \tau)$ z místa $\boldsymbol{r}_1$ a v čase $t + \tau$ dovést nějakým způsobem do vhodného místa $\boldsymbol{r}_3$ (umístění detektoru), kde bude interferovat s polem $\widetilde{\boldsymbol{E}}_2(\boldsymbol{r}_2, t)$ přivedeným tamtéž. Dvě základní uspořádání (interference provedená za pomoci Michelsonova interferometru a interference v Youngově uspořádání) budou námětem následujících odstavců.

Protože v obvyklých geometrických paraxiálních uspořádáních jsou vektory elektrického pole rovnoběžné nebo téměř rovnoběžné, budeme v dalším používat **skalární popis**. V optickém oboru jsme schopni detekovat pouze časově vystředovanou (integrovanou přes čas $t_D$) výkonovou intenzitu. V místě $\boldsymbol{r}_3$, kam přivedeme oba svazky k interferenci, dostaneme

$$\begin{aligned}
I(\boldsymbol{r}_3) &= \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\left\langle[\tilde{E}_1(\boldsymbol{r}_1, t\ +\ \tau) + \tilde{E}_2(\boldsymbol{r}_2, t)][\tilde{E}_1^*(\boldsymbol{r}_1, t\ +\ \tau) + \tilde{E}_2^*(\boldsymbol{r}_2, t)]\right\rangle_{t_D} = \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon_0\frac{1}{t_D}\int_{-t_D/2}^{t_D/2}\left(\tilde{E}_1\tilde{E}_1^* + \tilde{E}_1\tilde{E}_2^* + \tilde{E}_1^*\tilde{E}_2 + \tilde{E}_2\tilde{E}_2^*\right)dt = \\
&= I_1 + I_2 + \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{1}{t_D}\int_{-t_D/2}^{t_D/2}(\tilde{E}_1\,\tilde{E}_2^* + \tilde{E}_2\tilde{E}_1^*)\,dt = \\
&= I_1 + I_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathrm{Re}\{\tilde{\Gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)\},
\end{aligned} \tag{7.2}$$

kde jsme zavedli označení

$$I_1 = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\langle\tilde{E}_1\tilde{E}_1^*\rangle_{t_D}, \qquad I_2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\langle\tilde{E}_2\tilde{E}_2^*\rangle_{t_D}.$$

Intenzity $I_1$ a $I_2$ můžeme zapsat pomocí korelační funkce jako

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\langle\tilde{E}_1(\boldsymbol{r}_1, t\ +\tau)\,\tilde{E}_1^*(\boldsymbol{r}_1, t\ +\tau)\rangle_{t_D} = \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\langle\tilde{E}_1(\boldsymbol{r}_1)\,\tilde{E}_1^*(\boldsymbol{r}_1)\rangle_{t_D} = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\Gamma_{11}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1, 0), \\
I_2 &= \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\langle\tilde{E}_2(\boldsymbol{r}_2, t\,)\,\tilde{E}_2^*(\boldsymbol{r}_2)\rangle_{t_D} = \frac{1}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r\Gamma_{22}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2, 0).
\end{aligned}$$

Zavedeme komplexní stupeň koherence

$$\tilde{\gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) = \frac{\tilde{\Gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1, 0)\Gamma_{22}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2, 0)}}$$

a rovnici (7.2) přepíšeme do tvaru

$$I(\boldsymbol{r}_3) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\{\tilde{\gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)\}. \tag{7.3}$$

Funkce $\Gamma_{11}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1, 0)$ a $\Gamma_{22}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2, 0)$ jsou reálné, protože se při středování podle rovnice (7.1) v jednom bodě ($\boldsymbol{r}_1$ nebo $\boldsymbol{r}_2$) a jednom čase ($\tau = 0$) násobí členy

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_1(\boldsymbol{r}_1, t)\, \widetilde{\boldsymbol{E}}_1^*(\boldsymbol{r}_1, t) = E_0^2 e^{i\varphi(t)}.\, e^{-i\varphi(t)} = E_0^2,$$

takže výsledek středování je reálný.

V tomto modelu jsme nezohlednili možné rozdíly v propustnosti jednotlivých drah (např. různé propustnosti ramen interferometru). Ve třetím členu v (7.3) je vidět význam korelačních funkcí $\tilde{\gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)$ pro výsledek interference: udává rozdíl oproti prostému sčítání intenzit $I_1 + I_2$. Pokud do rovnice dosadíme jako limitní případ elektrické pole rovinné monochromatické vlny pro $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$, dostaneme vztah (4.10).[7]

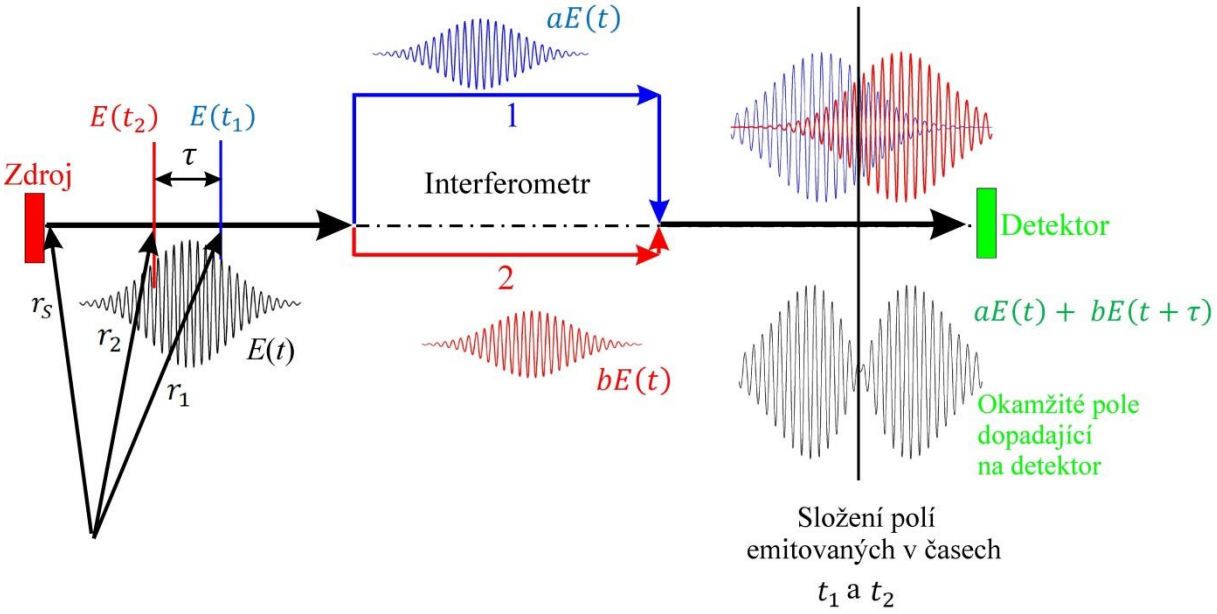
Obr. 7.1 ukazuje uspořádání vhodné pro určování koherence ve **směru šíření** rovnoběžného (kolimovaného) svazku záření, kdy polohy bodů $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ se liší v souřadnicích podél směru šíření $z$. Odtud název **podélná koherence.** Můžeme ji popsat korelační funkcí

$$\tilde{\Gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, 0) = \langle \tilde{E}_1(\boldsymbol{r}_1, t)\, \tilde{E}_2^*(\boldsymbol{r}_2, t) \rangle_{t_D},$$

kdy porovnáváme pole v různých místech („za sebou“) a ve stejném čase. Podle obrázku k tomu potřebujeme podmínku, aby optické dráhy z míst $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ k místu interference (k detektoru) byly stejné, k čemuž můžeme využít různě dlouhých drah v interferometru.

Častou úlohou je stanovení korelační funkce zdroje záření, kdy nás zajímá, jak spolu souvisejí pole vysílaná zdrojem v různých časech vzdálených od sebe o časový interval $\tau$.

[7] $\frac{1}{4}\varepsilon_0 \frac{1}{t_D} \int_{-t_D/2}^{t_D/2} (\tilde{E}_1\, \tilde{E}_2^* + \tilde{E}_1^* \tilde{E}_2)\, dt = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \frac{1}{t_D} \int_{-t_D/2}^{t_D/2} \left(E_0^2 e^{-i\omega(t+\tau)} e^{i\omega t} + E_0^2 e^{i\omega(t+\tau)} e^{-i\omega t}\right) dt =$
$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos\omega\tau . \frac{1}{t_D} \int_{-t_D/2}^{t_D/2} dt = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos\omega\tau = 2I_0 \cos\delta_{12}$




Obr. 7.1 Schéma použitelné pro stanovení časové i podélné koherence. Okamžitá elektrická intenzita $E(t)$ je ze zdroje vyzářena dříve než $E(t+\tau)$ a též dříve dospěje ke vstupu do interferometru, kde se $E(t)$ rozdělí do obou ramen. Pokud chceme zjišťovat časovou korelaci vyzařování zdroje, nastavíme rozdíly optických drah zdroj-detektor na časový rozdíl $\tau$. Pak z výsledků interference v místě detektoru určujeme časovou korelaci pro zdroj s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_S$, $\tilde{\Gamma}_{11}(\boldsymbol{r}_S, \boldsymbol{r}_S, \tau) \equiv \tilde{\Gamma}(\tau)$, tj. korelaci pole v jednom místě (v místě zdroje) ve dvou časech. Stejné schéma můžeme použít ke stanovení korelace mezi dvěma body prostoru např. ve stejném čase. Je naznačeno uspořádání míst $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ a místa pozorování interference pro stanovení **podélné koherence** Doba potřebná k překonání optických drah $\boldsymbol{r}_1$ – detektor a $\boldsymbol{r}_2$ – detektor jsou **stejné**. Proto určujeme korelaci $\tilde{\Gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, 0)$, tj korelaci polí ve dvou místech v jednom čase. Parametry $a$ a $b$ určují propustnost ramen interferometru.

Interference nás pak informuje o statistických vztazích dvou polí emitovaných zdrojem v okamžicích s časovým rozdílem $\tau = t_1 - t_2$. Takové uspořádání můžeme popsat funkcí $\Gamma_{11}(\boldsymbol{r}_S, \boldsymbol{r}_S, \tau)$ a mluvíme o časové koherenci. **Časová koherence** vyjadřuje korelaci pole v jednom místě prostoru ve dvou časech vzdálených o časový interval $\tau$

$$\tilde{\Gamma}_{11}(\boldsymbol{r}_S, \boldsymbol{r}_S, \tau) = \langle \tilde{E}_1(\boldsymbol{r}_S, t+\tau)\, \tilde{E}_2^*(\boldsymbol{r}_S, t) \rangle_{t_D} \equiv \tilde{\Gamma}(\tau).$$

V dalším textu budeme tuto funkci zjednodušeně zapisovat jako $\tilde{\Gamma}(\tau)$. Vztah mezi podélnou a časovou koherencí je velmi těsný. Dostáváme ekvivalenci korelačních funkcí pro (prostorovou) podélnou koherenci a pro časovou koherenci, v našem příkladu

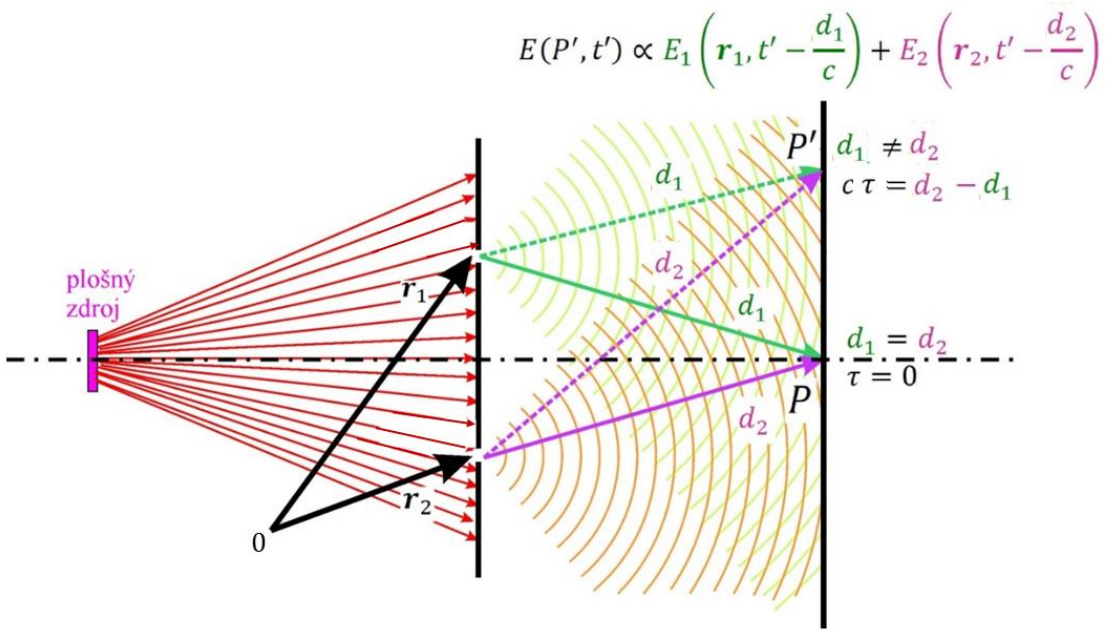
$$\tilde{\Gamma}(\tau) = \tilde{\Gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, 0).$$

Uvedený model je použitelný např. v případě, že koncové body polohových vektorů $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ leží na ose, podél které se šíří rovinné vlny.

Prostorová koherence popisuje obecně korelaci mezi světelnými poli ve dvou různých místech prostoru, např.

$$\tilde{\Gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) = \langle \tilde{E}_1(\boldsymbol{r}_1, t+\tau)\, \tilde{E}_2^*(\boldsymbol{r}_2, t) \rangle_{t_D} .$$

Pro studium prostorové koherence je vhodné uspořádání využívající difrakci na malých otvorech, které se nacházejí v místech, kde nás korelační funkce zajímají. Na obr. 7.2 je naznačeno záření vycházející z plošného zdroje a dopadající na stínítko s dvěma otvory, na nichž dochází k difrakci a v prostoru za stínítkem k interferenci vln vycházejících z otvorů. Místa, pro která nás korelace zajímá, jsou označena polohovými vektory $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$. Uvedené uspořádání umožňuje zjišťování i závislosti na časovém rozdílu $\tau$, se kterým difraktované vlny z otvorů vycházejí. Jak je naznačeno na obrázku, na ose otvorů můžeme sledovat korelaci pro $\tau = 0$, kdy doba potřebná k proběhnutí drah $d_1 = d_2$ je stejná a interferenční obrazec je vhodný k určení korelační funkce $\tilde{\Gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, 0)$. V tomto případě geometrie mluvíme o **příčné koherenci**. Intenzitou budeme nadále rozumět časovou střední hodnotu hustoty elektrické energie (vztah (1.49) aplikovaný na kvazimonochromatické záření).




Obr. 7.2 Schéma pro zjišťování „čistě“ příčné ($\tau = 0$) a „obecné“ ($\tau \neq 0$) koherence polí $E_1(\boldsymbol{r}_1, t)$ a $E_2(\boldsymbol{r}_2, t)$ pomocí interference v Youngově uspořádání. Zdroj záření vyvolá ve štěrbině v místě $\boldsymbol{r}_1$ pole $E_1(\boldsymbol{r}_1, t)$ a v místě $\boldsymbol{r}_2$ pole $E_2(\boldsymbol{r}_2, t)$. Výsledek interferenčního experimentu v bodě $P'$ ukazuje korelaci polí v místech $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ a v časech $t$ a $t + \tau$, tj. ve stacionárním případě souvisí s korelační funkcí $\tilde{\Gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)$, kde $\tau = \frac{1}{c}(d_2 - d_1)$. Speciálně pro $d_2 = d_1$ (tj. v bodě $P$) je $\tau = 0$ a výsledek interference souvisí s korelační funkcí $\tilde{\Gamma}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, 0)$. Obrázek je nakreslen pro častý případ záření jednoho plošného zdroje složeného z navzájem nekoherentních bodových zdrojů, kdy každý jednotlivý zdroj je časově zcela koherentní. Postup pro stanovení příčné a obecné koherence je však obecný, tj. lze jej využít i pro libovolné složené pole vznikající v důsledku působení mnoha různých zdrojů záření v prostoru před štěrbinami.

Pojmy prostorové (příčné) a časové (podélné) koherence nejsou pro popis koherence fundamentální, spíše jsou vhodné pro intuitivní pochopení částečně koherentního záření. Obecně nelze časovou a prostorovou koherenci od sebe oddělovat. Zde bez zdůvodnění uveďme, že časová koherence je spojena se spektrální hustotou záření. V jednoduchých

modelových případech kvazimonochromatického záření můžeme vyjádřit vztah mezi spektrální šířkou záření a časovou - podélnou koherencí jako nepřímou úměru.

Příčná koherence souvisí s rozměry zdroje záření, přesněji s úhlovými rozměry zdroje, pod kterými je např. plošný zdroj vidět z míst otvorů 1 a 2 a samozřejmě s vlastnostmi zdroje samého. V dalším textu se pokusíme uvedené poznatky podrobněji objasnit. Budeme se zabývat zejména stacionárním, kvazimonochromatickým zářením v paraxiální geometrii.

## 7.1 Podélná (časová) koherence

Základní model popisu časové koherence vysvětlíme pomocí dvojsvazkového experimentu, kdy spolu interferují dva svazky rovinných vln (vzniklé např. kolimací kulové vlny z bodového zdroje) z jedné vlny dělením amplitudy a postupující po dvou různých optických drahách. Lze použít např. Michelsonův interferometr. V případě dvojsvazkové interference **monochromatické** vlny je intenzita v detektorovém prostoru dána vztahem (4.8) pro rovinné vlny s vlnovými vektory **rovnoběžnými** s osou interferometru.

Předpokládejme nyní, že od zdroje k interferometru prochází **kvazimonochromatický** signál $E(t)$ skládající se z mnoha monochromatických vln mírně odlišné frekvence. Všechny komponenty se šíří rychlostí světla $c$, takže během doby potřebné k proběhnutí dráhy od zdroje k interferometru nedochází k časovým rozdílům mezi spektrálními komponentami signálu.

Rozdíl drah v ramenech interferometru definuje časový rozdíl $\tau = \frac{d_2 - d_1}{c}$. Označme podle obr. 7.1 okamžitou hodnotu pole vyzářenou ze zdroje v okamžiku $t$, tedy $E(t)$. Později, po časovém intervalu $\tau$, je z téhož zdroje emitováno pole $E(t+\tau)$. Pole $E(t)$ tedy dorazí ke vstupu do interferometru dříve o časový rozdíl $\tau$.

Tento proces probíhá kontinuálně. Na vstupu do interferometru dochází k rozdělení signálu do dvou větví $aE$ a $bE$ a dále k dráhovému posuvu mezi $aE(t)$ a $bE(t+\tau)$ a to tak, aby byl úplně vyrovnán časový rozdíl $\tau$, tj. větev 2, kterou prochází později emitované pole, je kratší. Pole $a\,E(t)$ a pole $b\,E(t+\tau)$ pak spolu v detektorovém prostoru interferují. Koeficienty $a$ a $b$ vyjadřují různé propustnosti drah interferometru. Případy $a = 0$ nebo $b = 0$ znamenají, že jedno z ramen interferometru je zavřené.

Výsledný signál na detektoru pak můžeme psát s využitím rovnice (7.3)

$$I_D(\tau) = I_D^{(1)} + I_D^{(2)} + 2\sqrt{I_D^{(1)} I_D^{(2)}}\,\mathrm{Re}\{\tilde{\gamma}(\tau)\}\,, \tag{7.4}$$

kde

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \frac{\tilde{\Gamma}(\tau)}{\sqrt{\Gamma(0)\Gamma(0)}}$$

a

$$\tilde{\Gamma}(\tau) \equiv \tilde{\Gamma}_{11}(\boldsymbol{r}_S, \boldsymbol{r}_S, \tau)\tilde{\Gamma}(\tau) = \frac{1}{t_D} \int_{\frac{-t_D}{2}}^{\frac{t_D}{2}} \tilde{E}(t+\tau)\, \tilde{E}^*(t)\, dt,$$

$$\Gamma(0) \equiv \Gamma_{11}(\boldsymbol{r}_S, \boldsymbol{r}_S, 0) = \frac{1}{t_D} \int_{\frac{-t_D}{2}}^{\frac{t_D}{2}} \tilde{E}(t)\, \tilde{E}^*(t)\, dt.$$

Označili jsme

$$I_D^{(1)} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 a^2 \Gamma(0), \qquad I_D^{(2)} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 b^2 \Gamma(0)$$

jako intenzity záření dopadající na detektor při zavřeném opačném rameni. Pro případ **stacionárního** záření (např. tvořeného proudem pulzů, které jsou zdrojem emitovány v náhodných časech) nezávisí uvedené integrály na mezích v integrálech a důležité je pouze dostatečně dlouhé průměrování $t_D$.

Ze závislosti intenzity záření na detektoru $I_D(\tau)$ změřené za interferometrem můžeme určit stupeň koherence $\tilde{\gamma}(\tau)$ záření vstupujícího do interferometru. Interferenční (oscilující) složka je úměrná $\mathrm{Re}\{\tilde{\gamma}(\tau)\}$. Dosazením vztahu pro monochromatickou vlnu je

$$\tilde{\gamma}(\tau) = e^{-i\omega\tau}.$$

Dostáváme tedy stejný výsledek jako porovnáním rovnic (7.3) a (7.4), protože $\mathrm{Re}\{\tilde{\gamma}(\tau)\} = \mathrm{Re}\{e^{-i\omega\tau}\} = \cos(\omega\tau)$. V případě, že $\mathrm{Re}\{\tilde{\gamma}(\tau)\} = 0$ (záření je nekoherentní) je výsledná intenzita na detektoru prostým součtem intenzit vln vstupujících do interference.

### 7.1.1 Model fázových skoků

Význam korelační funkce a komplexního stupně koherence si vysvětlíme na jednoduchém modelu statistického chování světla. Budeme postupovat stejně jako v učebnici [1], kap. 6. V tomto modelu je vlnění složeno z časových úseků délky $t_0$. V každém z nich je průběh harmonický s kruhovou frekvencí $\omega_0$ a ve všech úsecích má stejnou amplitudu. Fáze vlny se náhodně skokově mění po konstantním čase $t_0$. Vlnění se tedy skládá z pulzů délky $t_0$, které se nepřekrývají. Překryv těchto pulzů v signálu na detektoru nastane až v důsledku působení interferometru. Takto definované vlnění postupuje interferometrem s různě dlouhými rameny způsobujícími dodatečné příspěvky k optickým drahám. Stejně jako v předchozím, obecnějším pojednání dochází po průchodu interferometrem v prostoru detektoru k interferenci dvou svazků, jejichž časový rozdíl způsobený interferometrem je

$$\tau = \frac{d_2 - d_1}{c}.$$

Pro jednoduchost zápisu nebudeme dále uvažovat rozdílné propustnosti ramen interferometru. Nechť pro $\tau > 0$ dorazí pole $E(t+\tau)$ na vstup interferometru později (je emitováno později)

a v interferometru projde kratším ramenem. Oba interferující svazky tedy můžeme v **místě detektoru** v čase měření $t'$ popsat jako

$$E_1(t') \propto E_0 e^{i[\varphi(t+\tau)-\omega_0(t+\tau)]},$$

$$E_2(t') \propto E_0 e^{i[\varphi(t)-\omega_0 t]}.$$

Časový průběh polí dopadajících na detektor ze dvou větví interferometru $E_1(t')$, $E_2(t')$, a jejich součtu je pro uvažovaný model zobrazen na obr. 7.4, kde jsou rovněž znázorněny skoky fáze a časová závislost rozdílů fází. Vypočteme komplexní stupeň koherence vlnění $E(t)$

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \frac{\tilde{\Gamma}(\tau)}{\sqrt{\Gamma(0)\Gamma(0)}} = \frac{E_0^2 e^{-i\omega_0\tau}\langle e^{i[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]}\rangle_{t_D}}{\sqrt{E_0^2 E_0^2}} =$$

$$= e^{-i\omega_0\tau}\langle e^{i[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]}\rangle_{t_D}.$$

Zvolíme časový interval pro středování $Nt_0$ , kde $N$ je veliké číslo.

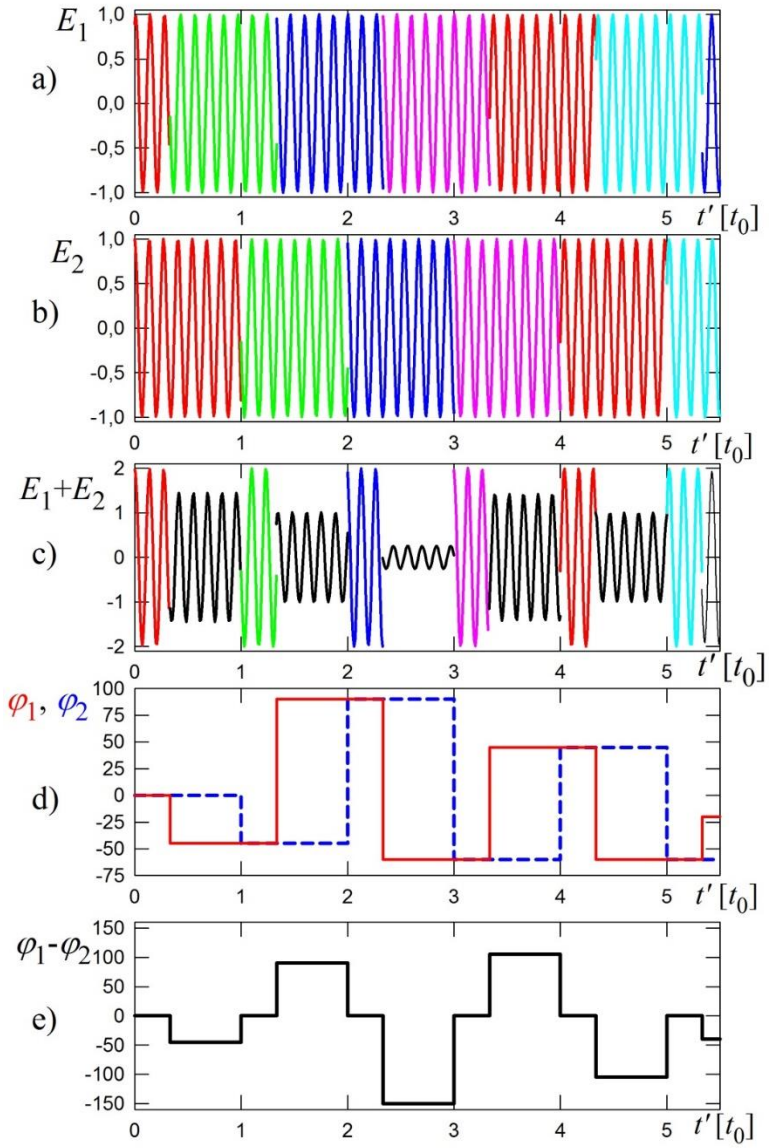
Uvážíme-li rozdíly fází podle obr. 7.4, dostaneme pro $0 < \tau < t_0$

$$\langle e^{i[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]}\rangle_{t_D} =$$

$$= \frac{1}{N.t_0}\left(\int_0^{t_0-\tau} e^{i0}dt + \int_{t_0-\tau}^{t_0} e^{iH_1}dt + \int_{t_0}^{2t_0-\tau} e^{i0}dt + \int_{2t_0-\tau}^{2t_0} e^{iH_2}dt + \ldots..\right)dt =$$

$$= \frac{1}{N\tau_0}\left[N.(t_0-\tau) + \tau\sum_{n=1}^{N} e^{iH_n}\right],$$

kde rozdíly fází v intervalech, ve kterých dochází k součtu polí sousedních pulzů, jsou pojmenovány $H_n$.




Obr. 7.3 Model fázových skoků.
a) Časový průběh elektrického pole $E_1(t')$ dopadajícího na detektor z delší větve interferometru.
b) Časový průběh elektrického pole $E_2(t')$ dopadajícího na detektor z kratší větve interferometru.
c) Časová závislost celkového pole $E_1(t') + E_2(t')$ dopadajícího na detektor.
d) Časové závislosti fáze vlny 1 (červeně) a fáze vlny 2 (modře).
e) Časová závislost rozdílu fází.

Protože $H_n$ nabývají na velkém množství intervalů se stejnou pravděpodobností různých kladných a záporných hodnot, jsou součty

$$\sum_{n=1}^{N} \cos H_n = \sum_{n=1}^{N} \sin H_n = \sum_{n=1}^{N} e^{iH_n} = 0, \tag{7.6}$$

z čehož plyne komplexní stupeň koherence pro $0 \leq \tau \leq t_0$

$$\langle e^{i[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]}\rangle_{t_D} = 1 - \frac{\tau}{t_0}$$

a podobně pro $0 \geq \tau \geq -t_0$ lze odvodit

$$\langle e^{i[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]}\rangle_{t_D} = 1 - \frac{|\tau|}{t_0}.$$

Pro $|\tau| > t_0$ již takové pulzy se vůbec nepřekrývají a díky náhodnosti fází je stupeň jejich koherence nulový. Souhrnem je komplexní stupeň koherence

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\tau) &= e^{-i\omega_0\tau}\left(1 - \frac{|\tau|}{t_0}\right) \quad \text{pro} \quad -t_0 \leq \tau \leq t_0\,, \\ \tilde{\gamma}(\tau) &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{pro} \quad |\tau| > t_0\,, \\ |\tilde{\gamma}(\tau)| &= 1 - \frac{|\tau|}{t_0} \qquad\quad \text{pro} \quad -t_0 \leq \tau \leq t_0, \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\gamma}(\tau)\} = \left(1 - \frac{|\tau|}{t_0}\right)\cos\omega_0\tau, \qquad \mathrm{Im}\{\tilde{\gamma}(\tau)\} = -\left(1 - \frac{|\tau|}{t_0}\right)\sin\omega_0\tau$$

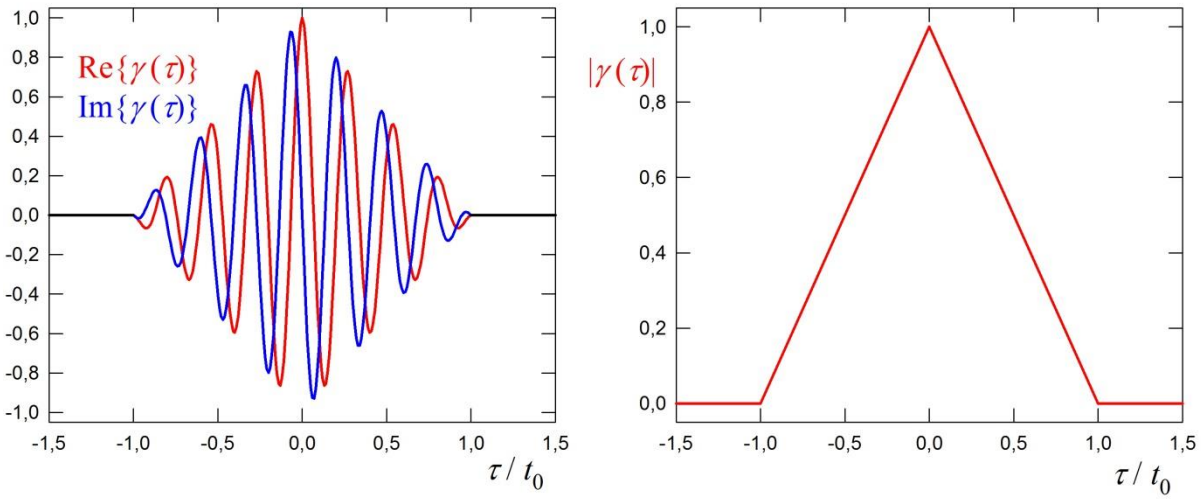
Vypočtěme viditelnost (kontrast) interferenčního obrazce. Použijeme rovnici (7.3) za předpokladu úplné propustnosti obou ramen interferometru ($a = b = 1$), tedy kdy platí $I_D^{(1)}$=$I_D^{(2)} = I_0$ a dostaneme pro $|\tau| \leq t_0$

$$\begin{aligned} I_{max}(\tau) &= 2I_0 + 2I_0\left(1 - \frac{|\tau|}{t_0}\right), \\ I_{min}(\tau) &= 2I_0 - 2I_0\left(1 - \frac{|\tau|}{t_0}\right), \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{4I_0\left(1 - \frac{|\tau|}{t_0}\right)}{4I_0} = 1 - \frac{|\tau|}{t_0} = |\tilde{\gamma}(\tau)|.$$

Dospěli jsme k důležitému závěru, že **absolutní hodnota komplexního stupně koherence je rovna viditelnosti interferenčního obrazce,** která je zde vyhodnocená z maxima a minima intenzity na detektoru interferometru. Ačkoliv jsme výpočet provedli jen pro jednoduchý model statistického chování světla, platí tento závěr obecně. Je třeba poznamenat, že v případě ideálně kolmého nastavení zrcadel v Michelsonově interferometru se jedná o viditelnost popisující modulaci intenzity záření v celém detektorovém prostoru v závislosti na posunu zrcadel. Reálně jsou interferenční proužky pozorovatelné v detektorovém prostoru v případě mírného natočení jednoho nebo obou zrcadel interferometru. Výsledek výpočtu je zobrazen na obr. 7.4. Je zřejmé, že viditelnost interferenčního obrazce je maximální $V = |\tilde{\gamma}(\tau)| = 1,$ pokud $\tau = 0$, tedy pokud obě části signálu probíhající oběma rameny interferometru nejsou navzájem posunuté (obě ramena jsou stejně dlouhá a mají stejnou propustnost). S rostoucím rozdílem délek obou drah $\tau$

roste a viditelnost interferenčního obrazce klesá. Dosáhne-li $\tau$ hodnoty $t_0$, klesne viditelnost na nulu.




Obr. 7.4 Reálná část, imaginární část a absolutní hodnota komplexního stupně koherence pro model fázových skoků. Levá část obrázku zobrazuje vypočtené průběhy reálné a imaginární části komplexního stupně koherence. Pravá část obrázku ukazuje absolutní hodnotu stupně koherence, jejíž fyzikální význam je viditelnost (kontrast) interferenčního obrazce.

## 7.1.2 Koherenční čas a koherenční délka

Ze závislosti $|\tilde{\gamma}(\tau)|$ je možno definovat čas, za který absolutní hodnota komplexního stupně koherence poklesne nějakým smluveným způsobem. Pro speciální případ našeho modelu fázových skoků dostáváme nulové hodnoty $\gamma$ pro $t = t_0$, obr. 7.4) takže pro tento model dává smysl domluva, že **koherenční čas** bude $\tau_C = t_0$ a (podélná) **koherenční délka** $l_C = c\,\tau_C$.

V modelu fázových skoků za dobu $t_0$, kdy bodový zdroj vyzařuje záření bez skoku fáze, vlna proběhne vzdálenost $l_C$. Pokud časový rozdíl $\tau$ mezi poli $\tilde{E}_1$ a $\tilde{E}_2$ je delší než trvání úseku s konstantním fázovým posuvem $t_0$, nelze ze znalosti $\tilde{E}_1$ vůbec „předpovědět“ hodnotu $\tilde{E}_2$; tato časově vzdálená pole nejsou zkorelovaná, tedy jsou nekoherentní.

Aplikačně důležitý je vztah mezi podélným komplexním stupněm koherence $\tilde{\gamma}(\tau)$ a spektrální hustotou záření $I_\omega(\omega)$. Příklad spektrální závislosti pro gaussovský pulz je zobrazen na obr. 5.5c. Vztah je základem spektroskopické metody fourierovské spektrometrie (spektrometrie s Fourierovou transformací). Ta je založena na skutečnosti, že spektrální hustota záření je spojena se stupněm koherence přes Fourierovu transformaci.

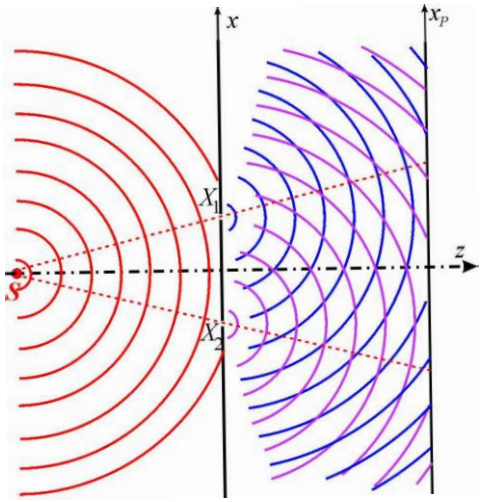
Pro řádový odhad koherenční délky $l_C$ můžeme použít nepřímé úměrnosti mezi šířkou spektrální hustoty $\Delta\nu$ (např. plná šířka v půlce výšky FWHM) $l_C \cong \frac{c}{\Delta\nu}$. Pro širokospektrální záření (slunce) vnímané přes citlivost oka jakožto spektrální filtr, tedy $\Delta\nu \cong 0{,}15 \times 10^{15}$ Hz, velmi zhruba dostaneme $l_C \cong 2$ μm. Pokud totéž sluneční světlo projde spektrálním filtrem o spektrální šířce $10^{12}$Hz (ve viditelné oblasti zhruba šířka intervalu vlnových délek 1 nm), bude

koherenční délka desetiny milimetru. Spektrální šířky laserového záření se pohybují ve velmi širokých mezích, např. stovky Hz až po GHz, čemuž odpovídají koherenční délky stovky km až desetiny m.

## 7.2 Prostorová koherence

Prostorová (příčná) koherence popisuje vzájemnou korelaci záření ve dvou různých bodech prostoru, které obecně nemusí ležet „po směru šíření." Naopak se budeme zpravidla zajímat o konfigurace, kdy spojnice těchto bodů bude zhruba kolmá na směr šíření, viz obr. 7.2. Koherenci popisujeme opět normovanou korelační funkcí nazývanou komplexní stupeň koherence. Stejně jako v případě časové koherence se absolutní hodnota stupně koherence rovná viditelnosti interferenčního obrazce v místě, kde dochází k interferenci. Interference tedy slouží jako metoda měření prostorové koherence záření mezi body prostoru.

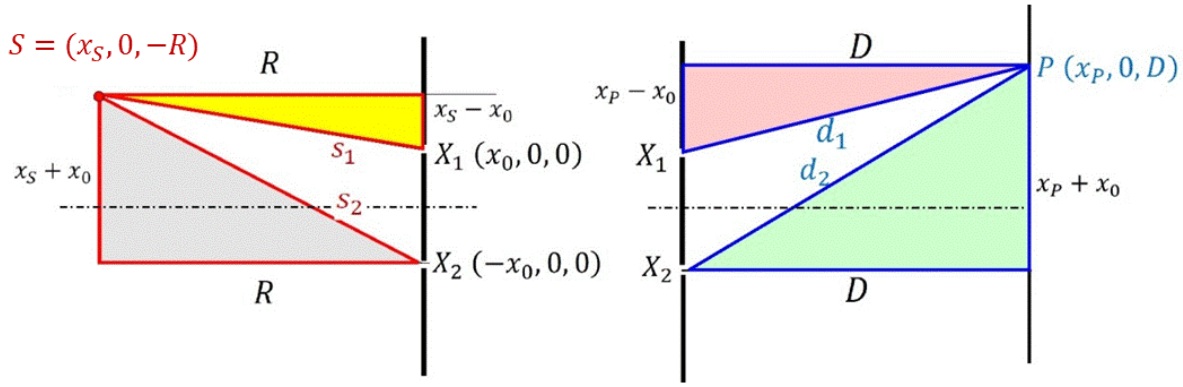
V prostoru se šíří světelné záření s elektrickou a magnetickou intenzitou $E(\boldsymbol{r},t), H(\boldsymbol{r},t)$. V souvislosti s koherencí nás zajímá, jak souvisí pole v bodě $X_1$ (s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_1$) s polem v bodě $X_2$ (s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_2$). Míra prostorové koherence je dána vlastnostmi zdroje záření a vzdálenostmi bodů $X_1, X_2$ od zdroje i mezi sebou. **Stupeň koherence je prostorově závislý.** Jak uvidíme z dalšího výkladu, i zcela „nekoherentní" zdroj (ve smyslu, že jeho jednotlivé „body" kmitají zcela nezávisle) vytváří ve velké vzdálenosti pole s vysokým stupněm koherence.




Obr. 7.5 Základní uspořádání interferenčního experimentu podle Younga. Kulové vlny se šíří ze zdroje $S$ a dopadají na malé otvory $X_1$ a $X_2$. Na těchto otvorech dochází k difrakci, tj stávají se zdroji dalších kulových vln, jejichž amplitudy i fáze závisí na amplitudě a fázi dopadající vlny. Čárkovaně je naznačeno přímočaré šíření vlny a je zřejmé, že bez difrakce by se paprsky vycházející ze zdroje a procházející otvory $X_1$ a $X_2$ neprotnuly a k žádné interferenci by nedošlo.

V následujících modelech speciálních uspořádání (bodový zdroj, zdroj ve tvaru úsečky a plošný kruhový zdroj) se budeme zabývat kvazimonochromatickým vlněním s centrálním vlnovým vektorem velikosti $\bar{k} = \bar{\omega}/c$ a malou spektrální šířkou $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$ emitovaným z uvedených nekoherentních zdrojů. V případě, že pole v místech otvorů tvoří **monochromatická** vlna

dopadající na tyto otvory, dostaneme v rovině pozorování za stínítkem interferenční obrazec určený interferencí dvou stacionárních (deterministických) kulových vln (resp. pro úzké, dlouhé štěrbiny interferencí válcových vln) vzniklých difrakcí dopadající vlny na tyto otvory. V případě dostatečné vzdálenosti místa pozorování od otvorů můžeme kulové vlny zaměnit za rovinné. Toto uspořádání s užitím kvazimonochromatického je analogické tomu použitému v **Youngově pokusu** (obr. 7.5). Z časového pohledu výsledek interference závisí na rozdílech časů, které vlnění potřebuje k překonání vzdálenosti zdroj – difrakční otvory – místo sledování interferenčního obrazce. Můžeme zavést časové rozdíly $\tau_R = \frac{s_2 - s_1}{c}$ pro rozdíl drah zdroj – difrakční otvory a $\tau_D = \frac{d_2 - d_1}{c}$ pro rozdíl drah difrakční otvory – místo pozorování interferenčního obrazce.




Obr. 7.6 Pravoúhlé trojúhelníky k určení $s_2 - s_1$ a $d_2 - d_1$

Pro rozdíl vzdáleností $d_2 - d_1$ lze použít v paraxiální aproximaci (obr. 7.6)

$$d_1 = \sqrt{D^2 + (x_P - x_0)^2} \cong D\left(1 + \frac{x_0^2 - 2x_0x_P + x_P^2}{2D}\right),$$

$$d_2 = \sqrt{D^2 + (x_P + x_0)^2} \cong D\left(1 + \frac{x_0^2 + 2x_0x_P + x_P^2}{2D}\right),$$

$$d_2 - d_1 \cong \frac{2x_0x_P}{D} = \frac{hx_P}{D},$$

kde $h = 2x_0$ je vzdálenost mezi otvory $X_1, X_2$. Podobně dostaneme pro polohu zdroje $S \equiv (x_S, 0, -R)$ aproximaci pro rozdíl vzdáleností

$$s_2 - s_1 \cong \frac{2x_0x_S}{R} = \frac{hx_S}{R}.$$

Uvedené vztahy a obrázek 7.5 se vztahuje k bodovému zdroji. V obecném případě je zpravidla zdroj kvazimonochromatického záření **plošný**. Skládá se z **navzájem nekoherentně zářících** bodových zdrojů. Každý bod $S_n$ zdroje vyzařuje záření s náhodnou fází

$$\Phi_n(t) = \varphi_n(t) - \bar{\omega}t,$$

kde $\varphi_n(t)$ je funkce reprezentující náhodné změny fáze $n$-tého bodu. Budeme dále předpokládat, že změna fáze jednotlivého bodového zdroje je pomalá, takže pro krátká $\tau_R$ a pro krátká $\tau_D$ je

$$\varphi_n(t + \tau_R) - \varphi_n(t) \cong 0, \qquad \varphi_n(t + \tau_D) - \varphi_n(t) \cong 0.$$

Záření **jednotlivého** $n$-tého bodového zdroje je tedy z hlediska časových rozdílů vznikajícího při šíření před otvory i za otvory zcela koherentní ($\tau_R, \tau_D \ll \tau_C$), kde $\tau_C$ je koherenční doba. Jinými slovy: rozměry uspořádání (zejména $R$ a $D$) jsou kratší než koherenční délka vlnění. V rámci jednoduchého modelu fázových skoků, který jsme použili při výkladu časové koherence, to znamená, že všechny popisované děje se odehrávají v mezích jednoho časového intervalu $t_0$ (obr. 7.3).

Z hlediska polí **dvou různých** bodových zdrojů (reprezentujících obecně dva libovolné bodové zdroje $A$ a $B$) z plošného zdroje budeme pro časové střední hodnoty fázových rozdílů předpokládat, že

$$\langle \varphi_A(t + \tau_R + \tau_D) - \varphi_B(t) \rangle_{t_D} = 0.$$

To platí, je-li doba integrace signálu detektorem $t_D$ dostatečně dlouhá na to, aby se interferenční příspěvky elektrických polí přicházejících ze zdrojů $A$ a $B$ navzájem při časovém středování vykompenzovaly (viz výklad časové koherence, model fázových skoků). Splnění obou modelových předpokladů má za následek, že výsledný interferenční obraz (intenzita jako hustota elektrické energie) na matnici vzniká jako **jednoduchý součet interferenčních obrazů** jednotlivých **vzájemně zcela nekoherentních bodových zdrojů,** kdy každý **jednotlivý** zdroj je časově sám o sobě zcela koherentní**.** V dalším textu postupně probereme prostorovou koherenci pro několik významných případů zdrojů světla. Postup výpočtu nebudeme uvádět a zaměříme se na popis výsledků.

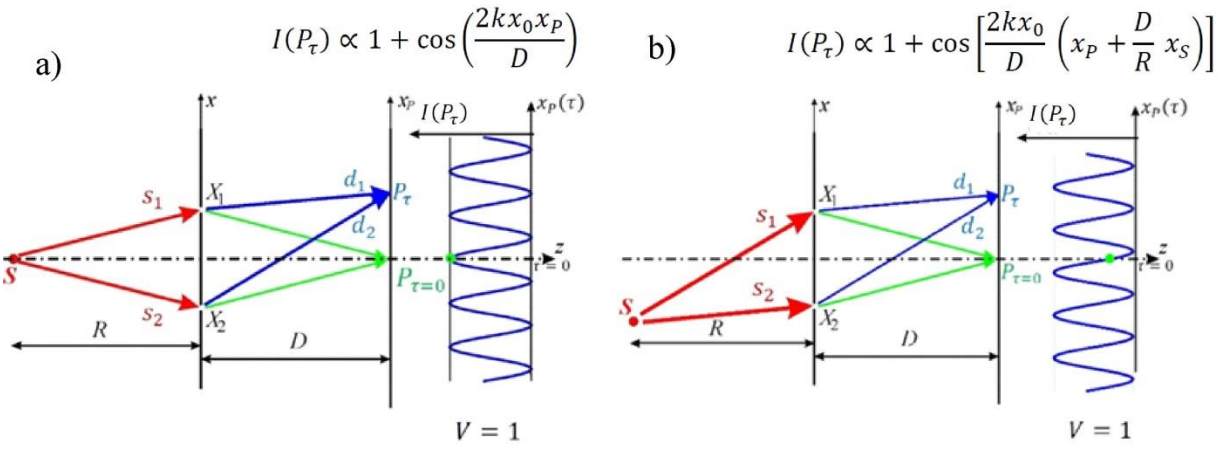
## 7.2.1 Jeden bodový zdroj světla

Před tím, než přistoupíme k výkladu prostorové koherence spojené se zdroji záření skládajícími se z více navzájem časově nekoherentních bodových zdrojů, popíšeme jednoduchý bodový zdroj z pohledu koherence. V symetrickém uspořádání podle obr. 7.7a) je zdroj na ose a otvory $X_1, X_2$ leží symetricky kolem osy. Tedy je $s_1 - s_2 = 0$ (tj. $\tau_R = 0$). Za proměnnou $\tau$ tedy vezmeme $\tau_D = \frac{d_2 - d_1}{c}$ a výsledek interference můžeme zapsat

$$I(x_P) \propto E_0^2 \{1 + \cos[k(d_1 - d_2)]\} = E_0^2 \{1 + \cos \omega \tau_D\}.$$

Výpočet komplexního stupně koherence, jeho reálné části a absolutní hodnoty vede k výsledku

$$\tilde{\gamma}_{12}(X_1, X_2, \tau) = e^{-i\omega\tau}, \mathrm{Re}\{\tilde{\gamma}_{12}(X_1, X_2, \tau)\} = \cos \omega\tau, \ |\tilde{\gamma}_{12}(X_1, X_2, \tau)| = 1.$$




Obr. 7.7 a) Uspořádání, kdy zdroj $S$ je umístěn na ose otvorů, tj. $\tau_R = 0$. Zeleně je naznačena volba $\tau_D = 0$. b) Při asymetrické poloze zdroje $x_S \neq 0$ dojde k posuvu interferenčního obrazce v rovině matnice $z_P$, což je způsobeno fázovým posuvem polí v místech $X_1, X_2$. Zelené kolečko opět vyznačuje intenzitu interferenčního obrazce, který odpovídá stupni koherence pro $\tau_D = 0$.

Případ na obr. 7.7a) se týká monochromatického zdroje ležícího na ose soustavy. Když tento zdroj umístíme mimo osu (obr. 7.7b), dojde k posuvu interferenčního obrazce v rovině detekce. Viditelnost (kontrast) interferenčního obrazce je v obou situacích 1, záření je dokonale koherentní.

## 7.2.2 Prostorová závislost stupně koherence záření z navzájem nekoherentních bodových zdrojů

Zajímavější je zkoumání koherence záření, které vychází z „obvyklejších“ nekoherentních zdrojů. Zde se omezíme na popis záření o velmi úzké spektrální šířce, tj. na popis kvazimonochromatického záření. Jako kvazimonochromatický zdroj může sloužit např. vhodná nízkotlaká výbojka. Pokud je zdroj širokospektrální (např. tepelný - žárovka, LED atd.), v odpovídajícím experimentu bychom mohli spektrum zúžit vhodným spektrálním filtrem, který podstatně vylepší časovou koherenci. Čím užší je spektrální hustota, tím lepší je časová koherence a větší koherenční délka. Zde se omezíme na tři velmi jednoduché modely záření ze zdroje tvořeného navzájem fázově nesvázanými (nekorelovanými) bodovými, kvazimonochromatickými zdroji. Budeme opět pracovat s uspořádáním podle Youngova pokusu. Rozměry a vzdálenost zdroje záření od bodů $X_1, X_2$ ovlivňují prostorovou koherenci záření mezi těmito body prostoru. To má za následek změnu viditelnosti interferenčních obrazců.

### 7.2.2.1 Model koherence záření ze dvou bodových zdrojů

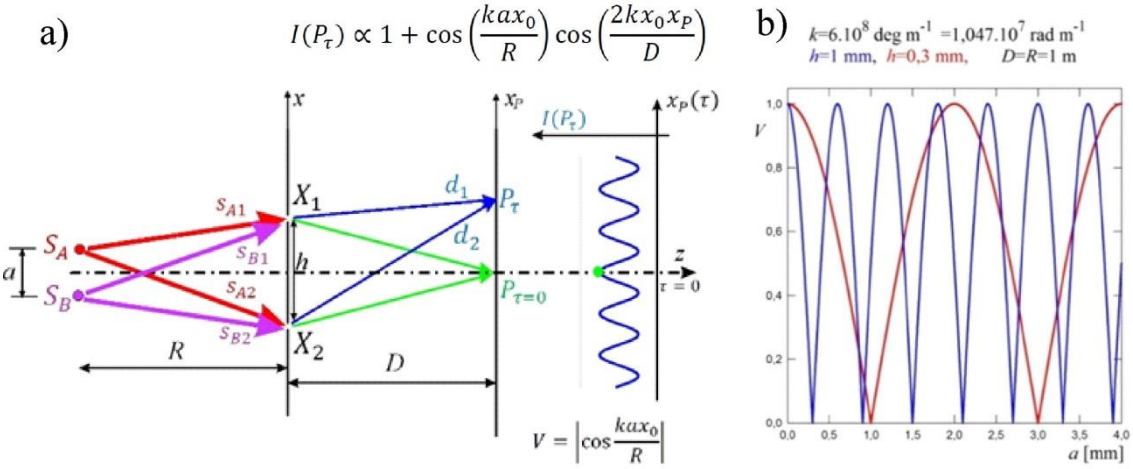
Nechť kvazimonochromatické záření o stejné centrální kruhové frekvenci $\bar{\omega}$, stejné amplitudě a velmi malé spektrální šířce $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$ šířící se ze dvou symetricky umístěných bodových zdrojů vzdálených o $a$, dopadá na dva malé otvory (body $X_1, X_2$) (obr. 7.8a). Oba zdroje vyzařují záření s náhodnou fází a na sobě zcela nezávisle. V tom případě (stejně jako v modelu fázových

skoků) a za předpokladu dostatečně dlouhé doby středování $t_D$ jsou potlačeny jevy interference mezi těmito vlněními a výsledná (výkonová) intenzita zjištěná pomalým detektorem je prostý součet výkonových intenzit každého vlnění. Dlouhodobým středováním se totiž vyruší členy popisující vzájemnou interferenci mezi příspěvky od různých, navzájem nekoherentních zdrojů.

Pro zjištění prostorové koherence v bodech $X_1, X_2$ použijeme předpokladů a postupu jako v minulých příkladech. Výsledkem modelu je interferenční obrazec, jehož viditelnost je rovna

$$V = \left|\cos\frac{kah}{2R}\right| = \left|\cos\frac{kax_0}{R}\right| = |\cos u|.$$

Při změně vzdálenosti obou zdrojů $a$ se tedy viditelnost interferenčních proužků mění periodicky (obr. 7.8b).



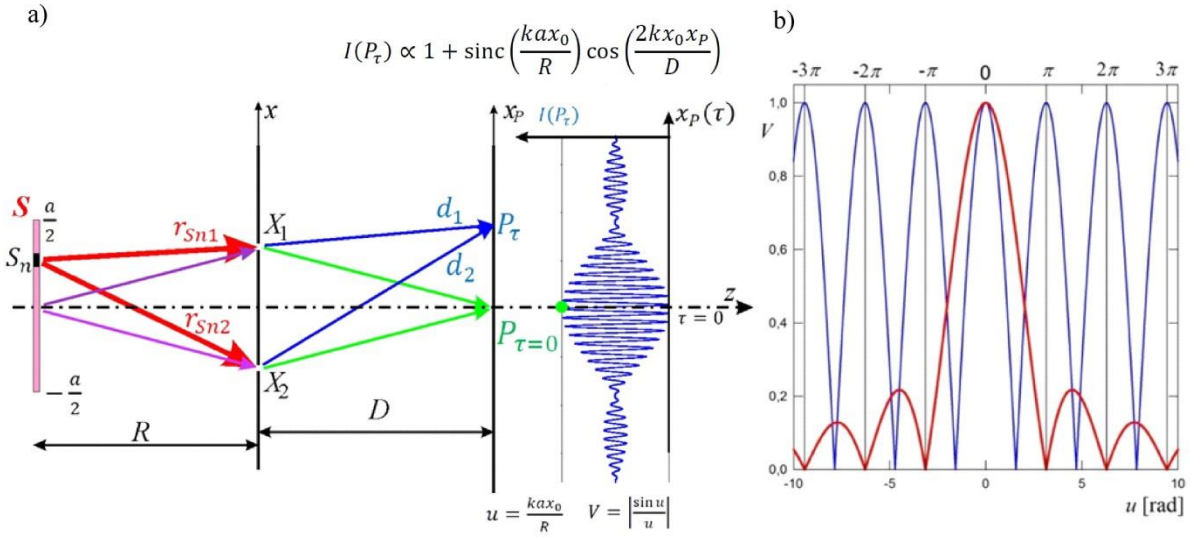

Obr. 7.8 a) Interference v Youngově uspořádání pro případ dvou nekoherentních bodových zdrojů. Vzdálenost zdrojů je $a$, vzdálenost bodů $X_1, X_2$ je $2x_0 = h$. b) Závislost viditelnosti interferenčních proužků na vzdálenosti $a$ dvou nekoherentních bodových zdrojů pro dvě hodnoty vzdálenosti otvorů $X_1, X_2$, pro $h = 1$ mm (modře) a $h = 0{,}3$ mm (červeně).

### 7.2.2.2 Model záření z úsečky bodových zdrojů

Jako další příklad uvažujme model, kdy je úsečka mezi body $\left(-\frac{a}{2}, 0, -R\right)$ a $\left(\frac{a}{2}, 0, -R\right)$ vyplněna nekoherentními bodovými zdroji s hustotou $N_0 = {}^{N}/_{a}$ na jednotku délky. O záření opět předpokládáme, že je kvazimonochromatické s velmi malou spektrální šířkou. Vzhledem k tomu, že zdroje jsou navzájem nekoherentní, je výsledný interferenční obrazec jednoduchým součtem interferenčních obrazců jednotlivých zdrojů. Pro viditelnost interferenčních proužků dostaneme

$$V = \frac{\sin\frac{kah}{2R}}{\frac{kah}{2R}} = \frac{\sin u}{u} = \operatorname{sinc} u.$$

Pokud je délka úsečky $a$ vyplněná bodovými monochromatickými nekoherentními zdroji malá, je pro dané experimentální uspořádání viditelnost interferenčních proužků $V$ velká (blízká jedné). Znamená to, že záření vyzařované z nekoherentního zdroje je v místech $X_1, X_2$ při dostatečně velké vzdálenosti od zdroje vysoce koherentní. S rostoucí délkou úsečky $a$ viditelnost $V$ (při konstantních $R, h$) klesá a pro $u = m\pi$ je rovna nule. Při této délce lineárního zdroje je záření, které dospěje do bodů prostoru $X_1, X_2$ zcela nekoherentní. Při dalším zvětšení dochází k opětnému růstu viditelnosti a dosažení prvního vedlejšího maxima viditelnosti a dále viditelnost opět klesá. Celý průběh se dále opakuje s tím, že dochází k dalšímu poklesu velikosti vedlejších maxim. Vzhledem k tomu, že první vedlejší maximum je výrazně nižší než hlavní maximum, je pro popis prostorové koherence a praktické postupy její aplikace podstatný průběh funkce $\operatorname{sinc} u$ mezi hlavním maximem a prvními nulovými body. Ze závislosti $V = V(u)$ (obr.7.9b, červená křivka) je zřejmé, že vysoké koherence zdroje lze dosáhnout, pokud $u \to 0$, tedy např. zvětšením vzdálenosti $R$ zdroje od bodů $X_1$ a $X_2$, v nichž koherenci záření studujeme. Vzdálenější lineární zdroj stejného rozměru $a$ tedy vytváří koherentnější záření v bodech $X_1$ a $X_2$, ale intenzita záření je nižší. Další možností, jak zvýšit koherenci záření je zmenšit rozměr zdroje $a$. V praxi se toho obvykle dosahuje umístěním clony mezi zdroj a body $X_1$ a $X_2$.



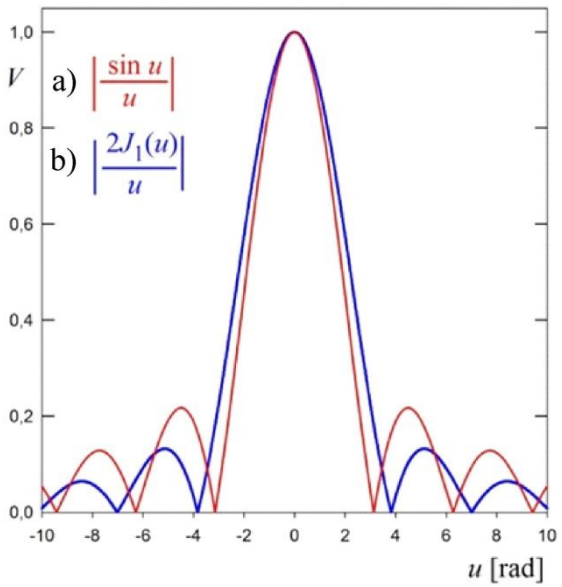

Obr. 7.9 a) Interference v Youngově pokusu pro případ úsečky vyplněné nekoherentními zdroji. Délka úsečky je $a$, vzdálenost bodů $X_1, X_2$ je $h = 2x_0$. b) Viditelnost interferenčních obrazců pro úsečku délky $a = \frac{2Ru}{kh}$ vyplněnou nekoherentními bodovými zdroji (červeně). Pro porovnání je uveden i výsledek pro 2 bodové zdroje (obr.7.8b) – modře.

### 7.2.2.3 Kruhový zdroj

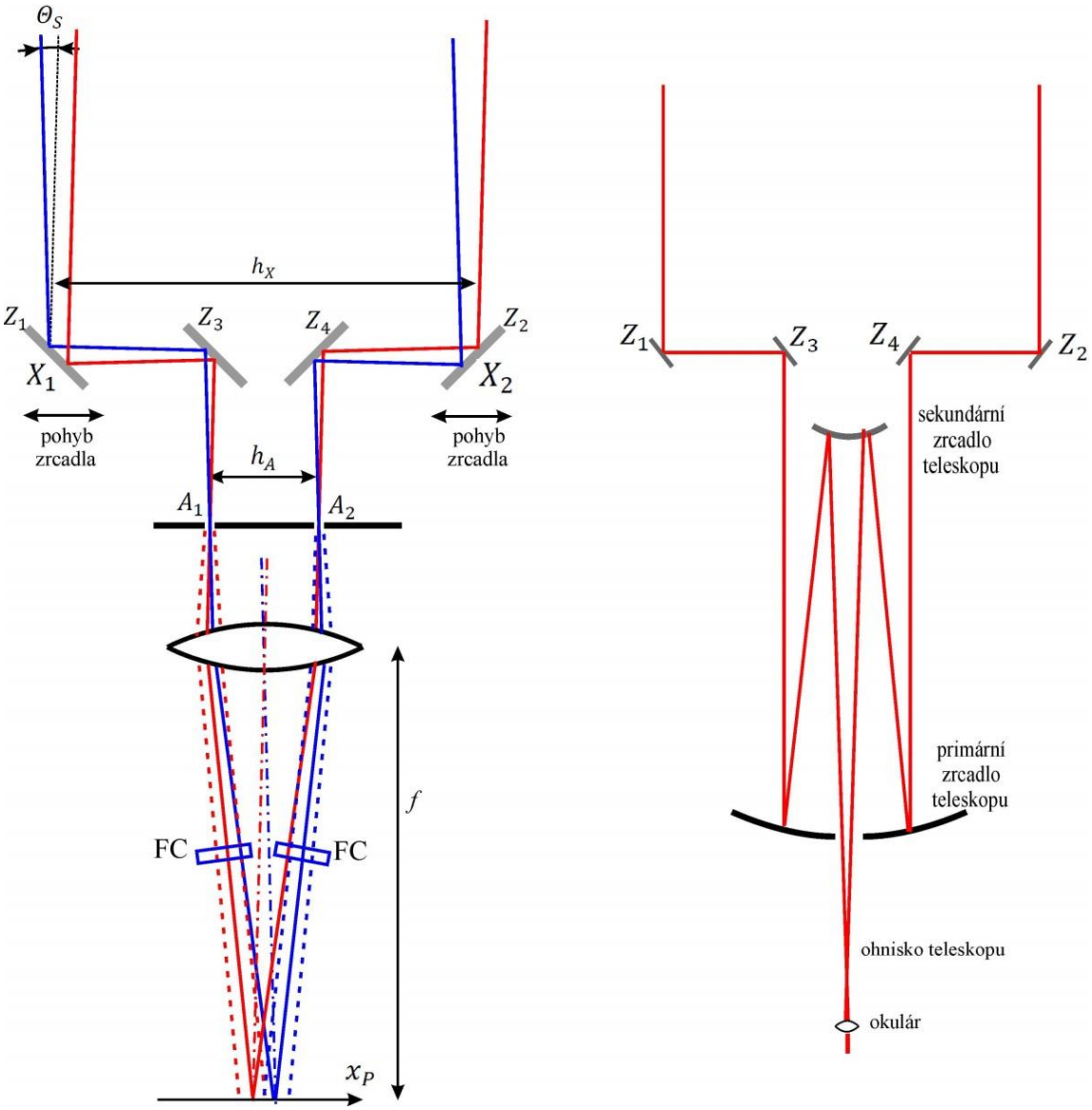
V případě, že záření vychází z kruhu o průměru $a$ vyplněném nekoherentními bodovými zdroji, dostaneme kvalitativně podobný průběh viditelnosti jako v případě úsečky s tím rozdílem, že první nulové body viditelnosti jsou pro $u \cong 1{,}22\pi \cong 3{,}83$ rad. Pro popis prostorové koherence v praktických případech se často omezujeme na oblast hlavního maxima. Pokud potřebujeme záření s dobrou koherencí a máme k dispozici např. tepelný zdroj záření, musíme provést spektrální filtraci k získání kvazimonochromatického záření a omezit rozměr zdroje např.

vhodnou clonou. Při zmenšení zdroje clonou parametr $a$ klesne, zároveň klesne $|u|$ v oblasti hlavního maxima a proto se $\left|\frac{2J_1(u)}{u}\right|$ zvýší a viditelnost $V$ vzroste – obr. 7.10.

S aplikací měření koherence záření emitovaného z nekoherentního kruhového zdroje se setkáváme v astronomické interferometrii. Na počátku její historie byl **Michelsonův stelární interferometr**. Schéma k vysvětlení principu stelárního interferometru je na obr. 7.11. Z velmi širokého svazku přicházejícího od hvězdy jsou vybrány vhodnými aperturami 2 části dopadající na „malé“ plochy pohyblivých zrcadel $Z_1$ a $Z_2$, ze kterých je záření svedeno do společného prostoru, kde tyto dva svazky (difrakčně rozšířené) mohou interferovat. Tuto manipulaci obstarají pevná vnitřní zrcadla $Z_3$ a $Z_4$ a teleskop. Právě koherence záření v místech $X_1$ a $X_2$ vzdálených o $h_X$ slouží k určení úhlového rozměru kruhového zdroje (hvězdy). Stupeň koherence v místech $X_1$ a $X_2$ v závislosti na jejich vzdálenosti $h_X$ je posuzován podle interferenčního obrazce na výstupu z teleskopu. Vzhledem ke kruhovosti zářícího objektu, je viditelnost proužků určena funkcí $\frac{2J_1(u)}{u}$. Provedeme tedy měření interferenčního obrazce, vyhodnotíme viditelnost $V$, z průběhu funkce $V(u)$ stanovíme $u = \frac{a}{R}\frac{kh_X}{2}$ a získáme hledaný úhlový rozměr hvězdy v paraxiální aproximaci $\Theta_S = \frac{a}{R} = \frac{2u}{kh_X}$.




Obr. 7.10 Viditelnost interferenčních obrazců v rovině jako funkce parametru $u$;
a) zdrojem záření je úsečka délky $a = \frac{2Ru}{kh}$ vyplněná nekoherentními bodovými zdroji a viditelnost interferenčního obrazce je $\left|\frac{\sin u}{u}\right|$ (červeně);
b) zdrojem záření je kruh o průměru $a = \frac{2Ru}{kh}$ vyplněný nekoherentními bodovými zdroji a viditelnost interferenčního obrazce je $\left|\frac{2J_1(u)}{u}\right|$, kde $J_1(u)$ je Besselova funkce prvního druhu řádu 1 (modře).




Obr. 7.11 Vlevo: Schéma k vysvětlení principu Michelsonova stelárního interferometru. Záření z hvězdy o průměru $a$ a vzdálenosti $R$ určuje úhlový rozměr hvězdy $\Theta_S$. Tento parametr je určován pomocí koherence v místech $X_1$ a $X_2$, ze kterých je potřeba dopravit záření do místa, kde může dojít k interferenci. Čárkované čáry naznačují, že na otvorech v masce dochází k difrakci. FC jsou destičky pro fázovou korekci pro optimalizace interferenčního obrazce. Vpravo: Zjednodušené schéma pro realizaci interferometru ve spojení se zrcadlovým teleskopem. Interferenční obrazec v ohnisku teleskopu je vizuálně pozorován přes okulár.

# 8. Geometrická (paprsková) optika

Jako geometrickou (paprskovou) optiku označujeme tu část zkoumání šíření světelného pole, která je založena na pojmu paprsek a je velmi důležitá nejen z teoretického, ale zejména z aplikačního pohledu. Paprsková optika popisuje zjednodušeným způsobem interakci zářivého pole s předměty řádově většími než je vlnová délka záření. Pracuje s pojmy, které jsou známy z „matematické geometrie," svítící bod je chápán jako matematický bod, světelný paprsek v homogenním prostředí (ve všech místech stejný index lomu) jako matematická přímka, v nehomogenním prostředí jako (nekonečně tenká) křivka v trojrozměrném prostoru.

Vycházíme z toho, že elektromagnetické pole je adekvátně popsáno Maxwellovými rovnicemi. Pak lze dospět k paprskovému popisu ne zcela triviálním způsobem, a to zavedením předpokladu o limitně velmi malé vlnové délky $\lambda \to 0$. To je základní aproximace, se kterou se setkáme při konstrukci myšleného pojmu paprsek způsobilému k praktickému řešení úloh o šíření světelného pole i ve složitých prostorových upořádáních předmětů, které toto šíření ovlivňují. Potlačením vlnového charakteru záření se snažíme o zjednodušení takového popisu.

Již v předchozích kapitolách jsme se setkali s intuitivním využitím pojmu paprsku při pojednání odrazu a lomu rovinné vlny na rovinném rozhraní (kapitola 3 „Odraz a lom"), ve schématech popisujících interferenci (kapitola 4) apod. S dalším využitím paprskové optiky se setkáváme při přibližném popisu šíření světla v prostředích, ve kterých index lomu závisí na prostorových souřadnicích (technicky velmi důležitý případ vlnovodů s gradientem indexu lomu, ale i vysvětlování optických jevů v atmosféře atd.). Široké uplatnění nachází přístup paprskové optiky při popisu a návrhu optických zobrazovacích soustav.

## 8.1 Pojem paprsek

### 8.1.1 Eikonál

Pojem eikonál (resp. plochy konstantního eikonálu) využijeme při zavedení pojmu paprsek, při odvození paprskové rovnice z Maxwellových rovnic, Lagrangeova integrálního invariantu a Fermatova principu.

Pole elektromagnetické vlny popisujeme ve vlnovém popisu hlavně jako časovou a prostorovou závislost elektrické intenzity $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$. V popisu rovinné vlny vystupuje skalární součin vlnového vektoru a polohového vektoru

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = k\, \boldsymbol{s}_0 \cdot \boldsymbol{r} = k_0\, n\, \boldsymbol{s}_0 \cdot \boldsymbol{r} = k_0 d, \tag{8.1}$$

kde $d = n\, \boldsymbol{s}_0 \cdot \boldsymbol{r}$ nazveme optickou dráhou. Pro popis šíření lineárně polarizované monochromatické vlny v izotropním, nemagnetickém a obecně nehomogenním prostředí, kde permitivita a index lomu závisí na prostorových souřadnicích

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}) \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r(\boldsymbol{r}), \qquad \mu = \mu_0, \qquad n \equiv n(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\varepsilon_r(\boldsymbol{r})}, \tag{8.2}$$

musíme hledat řešení obecnějšího prostorového charakteru než je rovinná nebo kulová vlna. Zapišme takové monochromatické pole jako

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\, e^{ik_0\mathcal{S}(\boldsymbol{r})}\, e^{-i\omega t}, \tag{8.3}$$

kde $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ je prostorově závislá amplituda, o které budeme předpokládat, že se na vzdálenosti vlnové délky $\lambda$ mění velmi málo. Tato amplituda na čase nezávisí. Prostorovou skalární funkci $\mathcal{S}(\boldsymbol{r})$ nazveme eikonál. Plochy konstantního eikonálu $\mathcal{S}(\boldsymbol{r}) = konst$ jsou v geometrické optice jakousi statickou obdobou vlnoploch při vlnovém popisu pole. Vztah (8.3) má dobrý smysl v oblastech prostoru vzdálených o mnoho vlnových délek od takových singularit jako jsou bodové zdroje, ohniska, obrazy bodových zdrojů apod. Pokud nenastává přenos energie mezi zářením a prostředím (ani absorpce, ani zesílení), je $\mathcal{S}(\boldsymbol{r})$ reálná funkce. Její gradient ukazuje v izotropním prostředí směr paprsku, obr. 8.1.

Příklad 1: v případě rovinné vlny v homogenním prostředí je $\mathcal{S}(\boldsymbol{r}) = n\, \boldsymbol{s}_0 \cdot \boldsymbol{r}$.

Příklad 2: rozbíhavá kulová vlna v homogenním prostředí se zdrojem v $\boldsymbol{r} = 0$ v dostatečné vzdálenosti (alespoň více vlnových délek $r \gg \lambda$) od počátku souřadné soustavy

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \cong\ e^{ikr}\, e^{-i\omega t}\ =\ e^{ik_0 nr}\, e^{-i\omega t} =\ e^{ik_0\mathcal{S}(\boldsymbol{r})}\, e^{-i\omega t}\,, \tag{8.4}$$

kde eikonál $\mathcal{S}(\boldsymbol{r}) = n\, r$. Eikonál roste se vzdáleností od zdroje.

Příklad 3: ve sbíhavé kulové vlně do středu souřadné soustavy je fázový člen $e^{-ikr}\, e^{-i\omega t}$ a eikonál $\mathcal{S}(\boldsymbol{r}) = -n\, r$, který roste s klesající vzdáleností $r$.

Nyní se vrátíme k obecnému popisu. Pole $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ a $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$ musí vyhovovat Maxwellovým rovnicím a materiálovým vztahům. Z divergenční rovnice pro elektrickou indukci v izotropním prostředí bez volných nábojů a s použitím časově nezávislých amplitud $\boldsymbol{E}_0\,(\boldsymbol{r})$ lze napsat (poznámka P8.1)

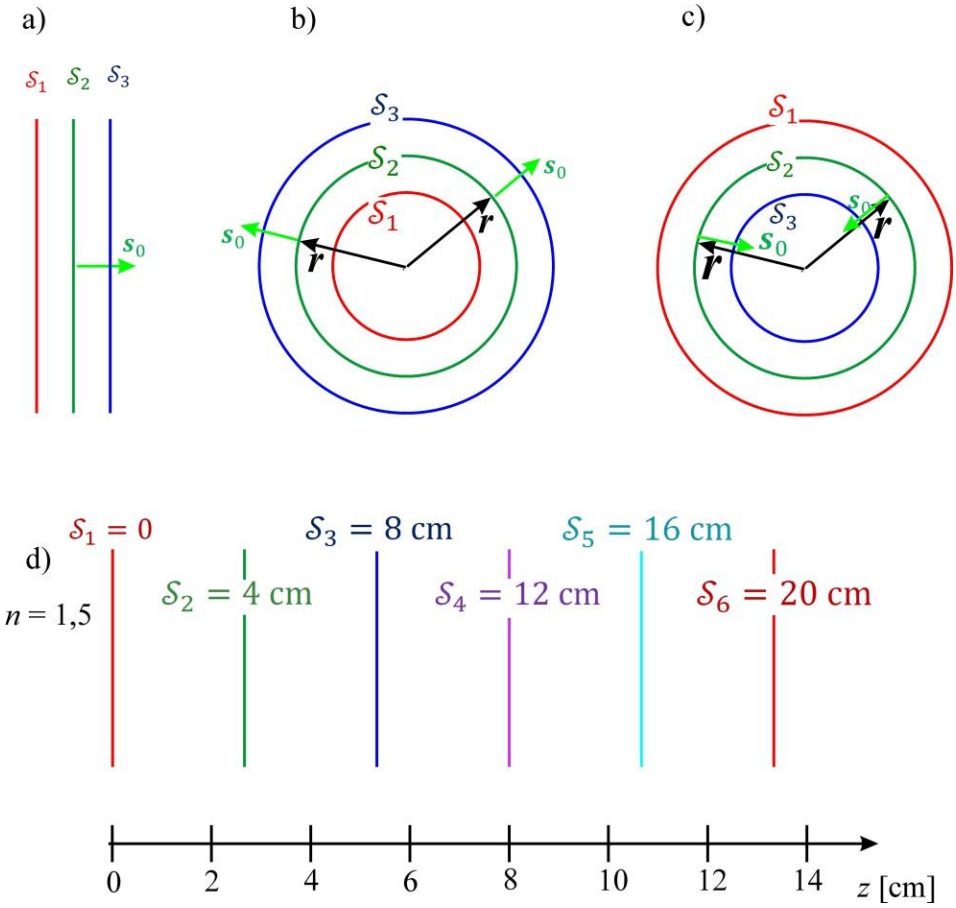
$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\varepsilon_r(\boldsymbol{r})&\operatorname{div} \boldsymbol{E}_0\,(\boldsymbol{r}) + ik_0\varepsilon_0\varepsilon_r(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{E}_0\,(\boldsymbol{r})\ \cdot \operatorname{grad} \mathcal{S}(\boldsymbol{r}) \\ &+ \\ &+\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0\,(\boldsymbol{r}) \cdot \operatorname{grad} \varepsilon_r(\boldsymbol{r}) = 0.\end{aligned} \tag{8.5}$$

Zcela podobně můžeme naložit s rovnicí pro magnetickou indukci, což je pro „nemagnetické“ prostředí $B_0(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$ jednodušší.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) + ik_0 \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) \cdot \operatorname{grad} \mathcal{S}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{8.6}$$

Z rotační Maxwellovy rovnice $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ vyplývá pro nemagnetické prostředí $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0\, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$

$$\operatorname{rot}\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + ik_0\, [\operatorname{grad} \mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) -\ i\omega\mu_0 \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{8.7}$$




Obr. 8.1 Znázornění ploch konstantních eikonálů a) pro rovinnou vlnu, b) pro rozbíhavou kulovou vlnu, c) pro sbíhavou kulovou vlnu. d) kvantitativně pro rovinnou vlnu v prostředí o indexu $n = 1{,}5$ , když $\mathcal{S}(z) = n\, z$ . V obrázku není dodržen předpoklad $r \gg \lambda$.

Opět jsme dostali **časově nezávislou** rovnici pro **amplitudy** $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ a $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$ a grad $\mathcal{S}(\boldsymbol{r})$**.** Pro prostředí bez volných proudů je rot $\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$, z čehož plyne

$$\text{rot}\, \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) + ik_0\, \text{grad}\, \mathcal{S}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) + i\omega\, \varepsilon_0 \varepsilon_r(\boldsymbol{r})\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{8.8}$$

## 8.1.2 Aproximace velmi malé vlnové délky

V této aproximaci předpokládáme, že prostorové změny **amplitudy** $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ elektrického pole i pole magnetického $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$ na škále vlnové délky $\lambda_0$ jsou velmi malé, alespoň v některých prostorových oblastech, neboli vlnová délka je malá ve srovnání s měřítkem prostorových změn amplitud $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$. Tam jsou malé prostorové derivace amplitud obsažené v div $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$, div $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$, rot $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ a rot $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$. Rovnice (8.5) – (8.8) můžeme podělit koeficientem $ik_0$ a pak u těchto „malých“ členů využít aproximace

$$\lambda_0 \to 0, \qquad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \to \infty\,. \tag{8.9}$$

Z divergenčních rovnic plyne

$$\varepsilon_r(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot \operatorname{grad}\mathcal{S}(\boldsymbol{r}) \cong 0\,, \tag{8.10}$$

$$\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\cdot \operatorname{grad}\mathcal{S}(\boldsymbol{r}) \cong 0 \tag{8.11}$$

a v této aproximaci jsou vektory $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ a $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$ přibližně kolmé na vektor $\operatorname{grad}\mathcal{S}(\boldsymbol{r})$. Permitivita $\varepsilon_r(\boldsymbol{r})$ je v izotropním materiálu číslo, které nemění směr vektoru $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$.

Tyto úpravy ponechaly index lomu pouze v členu $\operatorname{grad}\mathcal{S}(\boldsymbol{r})$**,** což se ukazuje jako velmi výhodné pro stanovení drah paprsků (formální zavedení pojmu paprsek je v části 8.1.4). Uvedenou aproximaci lze použít v jistých oblastech prostoru (v **regulárních** částech). Účelem aproximace je silné zjednodušení popisu interakce pole s materiálními objekty o velikostech podstatně větších než vlnová délka a v modelu geometrické optiky též potlačení vlnových jevů, např. difrakce.

Za regulární oblast bývá označována v paprskové optice ta část prostoru, kde každým bodem prochází právě jeden (jeden a jenom jeden) paprsek a nenastává jejich křížení. Uvedená **aproximace** pro formulaci obecných východisek paprskové optiky **neplatí** v oblasti, kde se v prostoru rychle mění amplitudy. Jedná se především o oblasti kolem „singularit“ jako jsou oblast ohniska (tam se kulové vlny sbíhají), obrazu bodu (oblast prostoru, kde se „protínají“ různé paprsky zúčastněné při zobrazení).

## 8.1.3 Eikonálová rovnice

V regulární oblasti člen $\frac{1}{k_0}\operatorname{rot}\,\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \to 0$ zanedbáme a z rovnice (8.8) tak vyplývá

$$\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) \cong \frac{k_0}{\omega\mu_0}[\operatorname{grad}\mathcal{S}(\boldsymbol{r})]\times\,\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}). \tag{8.12}$$

Podobně z druhé rotační Maxwellovy rovnice dostaneme

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \cong \frac{-k_0}{\varepsilon_0\omega n^2}[\operatorname{grad}\mathcal{S}(\boldsymbol{r})]\times\,\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}). \tag{8.13}$$

Z kombinací obou rovnic (Poznámka P8.2), při uvážení kolmosti některých vektorů a z rovnosti

$$\frac{k_0}{\varepsilon_0\omega n^2}\,\frac{k_0}{\omega\mu_0} = \frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 n^2} = \frac{1}{n^2} \tag{8.14}$$

plyne

$$n^2(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\,[\operatorname{grad}\mathcal{S}(\boldsymbol{r})]^2, \tag{8.15}$$

$$n^2(\boldsymbol{r}) = \,[\operatorname{grad}\mathcal{S}(\boldsymbol{r})]^2.$$

Označíme směr gradientu eikonálu jako jednotkový vektor $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})$

$$\frac{\operatorname{grad}\mathcal{S}(\boldsymbol{r})}{|\operatorname{grad}\mathcal{S}(\boldsymbol{r})|} = \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r}) \tag{8.16}$$

a dostáváme eikonálovou rovnici

$$\text{grad}\, \mathcal{S}(\boldsymbol{r}) = n(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})\,, \tag{8.17}$$

což je diferenciální rovnice, která spojuje změnu směru paprsku, prostorové rozložení indexu lomu a směr paprsku v daném místě. Okrajové podmínky pro řešení této diferenciální rovnice při daném rozložení indexu lomu $n(\boldsymbol{r})$ mohou být směry $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})$ zadané na nějaké určité ploše.

Jak již bylo řečeno, plochy konstantního eikonálu jsou v geometrické optice jakousi statickou obdobou vlnoploch při vlnovém popisu pole. Plochy konstantního eikonálu jsou též někdy nazývány „geometrické vlnoplochy." Na rozdíl od vlnoploch (ploch konstantní fáze ve vlnové optice), které se pohybují prostorem fázovou rychlostí, plochy konstantního eikonálu v námi uvažovaném stacionárním případě stojí na místě. V příslušných vztazích pro eikonál se proměnná čas nevyskytuje. Fyzikální rozměr eikonálu je délka.

Pokusme se význam názorně ukázat na triviálním případu rovnoběžného svazku ve směru osy $z$ (rovinné vlně) v homogenním prostředí

$$\frac{d\mathcal{S}(z)}{dz} = n\,, \qquad \mathcal{S}(z) = n\,z + \mathcal{S}(z=0)$$

a plochy konstantního eikonálu jsou stojící roviny kolmé na osu z. Porovnejme s vlnoplochami (plochami konstantní fáze) ve vlnovém popisu rovinné vlny

$$\varphi(z,t) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,(nz - ct)$$

a plochy $\varphi = KONST$ jsou roviny kolmé na osu z, které se pohybují fázovou rychlostí $c/n$ . Rozměr $\varphi(z,t)$ je radián.

## 8.1.4 Paprsková rovnice

Prostorová křivka, ke které je vektor $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})$ tečnou, je nazývána **paprsek.** Příslušné základní pojmy můžeme spojit podle obr. 8.3, jestliže použijeme limity $\Delta\boldsymbol{r} \to 0$ (tj. body $P_1$ a $P_2$ jsou nekonečně blízko). Paprsek je prostorová křivka, jejíž **parametrické** vyjádření může mít tvar funkce $\boldsymbol{r}(\mathrm{s})$, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor bodu na paprsku a s je **skalární** parametr, za který můžeme vzít délku oblouku na paprsku od zvoleného bodu $\mathrm{s} = 0$.

Nechť v bodě $P_1$ má parametr křivky hodnotu s (což je délka oblouku podél paprsku z výchozího bodu $\mathrm{s} = 0$) a v bodě $P_2$ hodnotu $\mathrm{s} + d\mathrm{s}$. Pro jednotkový vektor ve směru paprsku je s využitím vztahu pro tečný vektor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}_0(\mathrm{s} + d\mathrm{s}) &= \boldsymbol{s}_0(\mathrm{s}) + d\boldsymbol{s}_0, \\ \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r}) &= \frac{d\boldsymbol{r}(\mathrm{s})}{|d\boldsymbol{r}|} = \left.\frac{d\boldsymbol{r}(\mathrm{s})}{ds}\right|_r . \end{aligned} \tag{8.18}$$

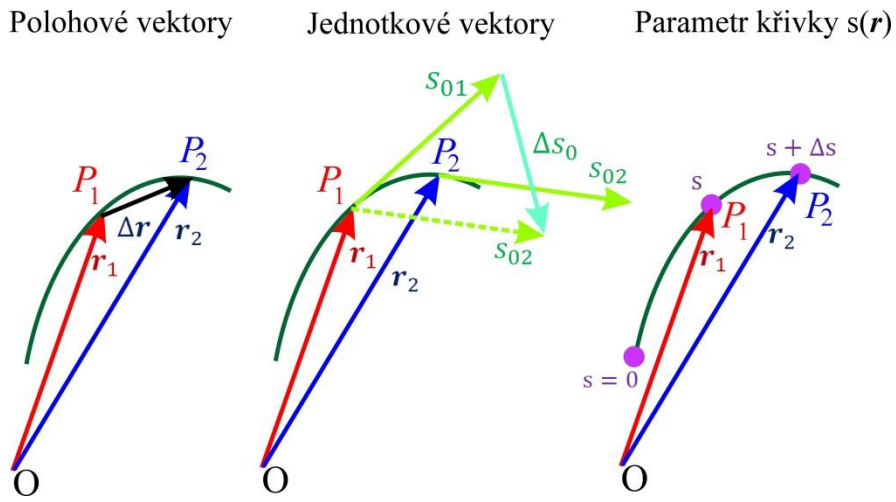
Tak můžeme rovnici eikonálu přepsat

$$\text{grad}\, \mathcal{S}[\boldsymbol{r}(\mathrm{s})] = n[\boldsymbol{r}(\mathrm{s})]\, \boldsymbol{s}_0[\boldsymbol{r}(\mathrm{s})] = n[\boldsymbol{r}(\mathrm{s})] \left.\frac{d\boldsymbol{r}(\mathrm{s})}{d\mathrm{s}}\right|_r . \tag{8.19}$$

Z této rovnice lze odvodit **paprskovou rovnici** (poznámka P8.3), ve které jako proměnná vystupuje parametr s, což je délka oblouku na paprsku. Dráha paprsku souvisí s prostorovým rozložením indexu lomu $n[\boldsymbol{r}(\mathrm{s})]$ a splňuje diferenciální **paprskovou rovnici**

$$\frac{d}{d\mathrm{s}} \{n[\boldsymbol{r}(\mathrm{s})]\, \boldsymbol{s}_0[\boldsymbol{r}(\mathrm{s})]\} = \text{grad}\, n[\boldsymbol{r}(\mathrm{s})]. \tag{8.20}$$

Tato diferenciální rovnice musí být doplněna podmínkami pro směr paprsku v některém bodě, např. je udána poloha místa $\boldsymbol{r}$ a směr $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})$ pro křivkový parametr $\mathrm{s} = 0$.




Obr. 8.3 Zobrazení základních pojmů spojených se zavedením paprsku jako prostorové křivky. Poloha bodů, kterými paprsek prochází, je určena polohovými vektory $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$. Jednotkové vektory ve směru tečen k paprsku jsou $\boldsymbol{s}_0$. Délka dráhy podél paprsku je určena skalární veličinou – parametrem s.

Vzdálenost mezi plochami konstantního eikonálu souvisí s délkami **optické dráhy** podél příslušných paprskových oblouků a to nepřímo úměrně: čím větší je index lomu, tím větší je gradient eikonálu, čili plochy konstantního eikonálu jsou bližší. V důsledku toho se paprsky zatáčejí ze svého původního směru do prostoru s vyšším indexem lomu, obr. 8.4.

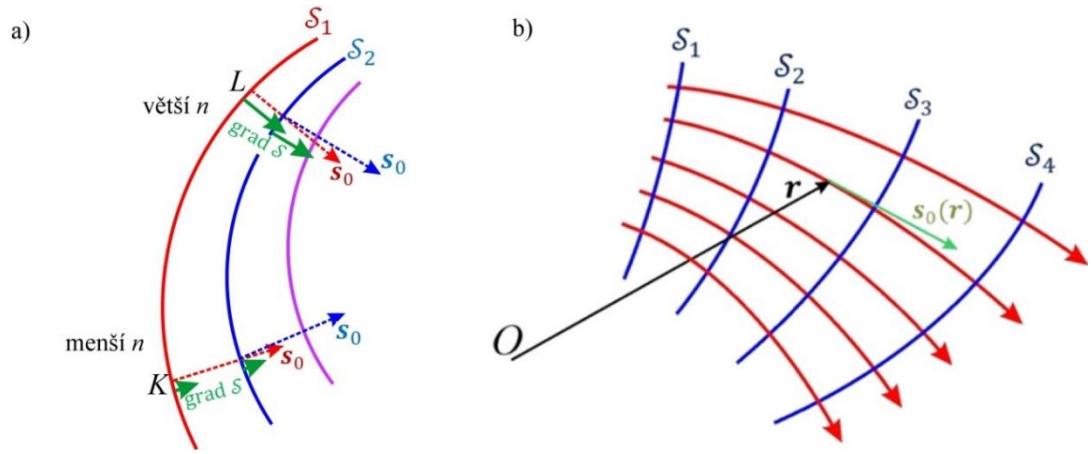
Jako příklad paprskové rovnice vezměme **homogenní prostředí**, kde index lomu nezávisí na poloze, je konstantní a $\text{grad}\, n(\boldsymbol{r}) = 0$. Z toho plyne

$$\frac{d}{d\mathrm{s}} \left[ n \frac{d\boldsymbol{r}}{d\mathrm{s}} \right] = n \frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\mathrm{s}^2} = 0. \tag{8.21}$$

Řešením této diferenciální rovnice je vektor

$$\boldsymbol{r}(\mathrm{s}) = \boldsymbol{a} + \mathrm{s}\boldsymbol{b},. \tag{8.22}$$

kde vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou dané okrajovými podmínkami pro daný paprsek. Uvedená závislost je parametrické vyjádření přímky, tj v homogenním prostředí jsou paprsky přímočaré. Toho budeme v následujícím textu hodně využívat.




Obr. 8.4 a) Znázornění řezů plochami eikonálů o hodnotách $\mathcal{S}_1$ (červeně) a $\mathcal{S}_2$ (modře). Zeleně jsou zakresleny gradienty eikonálu v místech $K$ a $L$. V místě $K$ jsou $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ od sebe vzdálenější než v místě $L$, takže gradient je v $K$ menší než v $L$. To je přímo určeno indexem lomu $n$, který je v oblasti $K$ menší než v oblasti $L$. Vlnoplochy v místě $K$ běží rychleji než v místě $L$. Směry paprsků $\boldsymbol{s}_0$ jsou rovnoběžné s $\operatorname{grad}\mathcal{S}$; v obrázku jsou z důvodu přehlednosti poněkud posunuty. Směry paprsků jsou stáčeny do oblasti prostoru s větším indexem lomu. b) Řezy plochami konstantních eikonálů (modře) a paprsky (červeně) pro jiné prostorové rozložení indexu lomu než v obr. a). Tečna $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})$ k paprsku v místě $\boldsymbol{r}$ je naznačena zeleně.

Znovu zdůrazněme, že základním předpokladem silně zjednodušeného modelu označovaného jako „geometrická (paprsková) optika“ je využití limity nulové vlnové délky. To mimo jiné znamená úplné zanedbání jevů difrakce, jejichž popisu jsme se seznámili v kapitole 6 „Difrakce (skalární popis)“. V některých úlohách při konstrukci optických přístrojů se lze s modelem geometrické optiky spokojit, ale např. při zkoumání teoretické limity rozlišení prostorových detailů obrazu při zobrazení se bez uvážení konečné vlnové délky a difrakčních jevů nelze obejít. Pak je nutno překročit rámec geometrické optiky a pojmu paprsek, jak byl v předchozím textu formulován, viz Poznámka P8.4.

## 8.1.5 Tok hustoty výkonu

I když jsme v dosavadním postupu vyloučili z našich úvah čas (a tedy i pojmy související s rychlostí), v praktické aplikaci optiky jsou důležité představy o přenosu výkonu pole mezi různými body prostoru. Je to spojeno s tím, že postupně ve zdroji pole vzniká, jeho energie je přenášena na nějakou vzdálenost a poté je někde energie absorbována (přinejmenším užitečně v detektoru). To sice ve výše uvedeném zavedení pojmu paprsek není obsaženo a poněkud vybočujeme z paprskové optiky, ale vypomůžeme si poznatkem z **vlnové optiky**: směr toku elektromagnetického výkonu je určen v izotropním prostředí směrem **Poyntingova vektoru** $\boldsymbol{S}_P$

$$\boldsymbol{S}_P(\boldsymbol{r}) \propto \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) \propto$$
$$\propto [\text{grad}\, \mathcal{S}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})] \times [\text{grad}\, \mathcal{S}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})] = \tag{8.23}$$
$$= \text{grad}\, \mathcal{S}\, [(\text{grad}\, \mathcal{S} \times \boldsymbol{H}_0) \cdot \boldsymbol{E}_0] - \boldsymbol{E}_0[(\text{grad}\, \mathcal{S} \times \boldsymbol{H}_0) \cdot \text{grad}\, \mathcal{S}]\,.$$

Pro druhý člen využijeme kolmost vektorů $\text{grad}\, \mathcal{S}$ a vektoru $(\text{grad}\, \mathcal{S} \times \boldsymbol{H}_0) \cdot \text{grad}\, \mathcal{S}$. Protože $(\text{grad}\, \mathcal{S} \times \boldsymbol{H}_0) \cdot \boldsymbol{E}_0$ je skalár, můžeme napsat úměru pro **směr** Poyntingova vektoru

$$\boldsymbol{S}_P(\boldsymbol{r}) \propto \text{grad}\, \mathcal{S}(\boldsymbol{r}) = n(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r}), \tag{8.24}$$

čili směr Poyntingova vektoru (směr šíření elektromagnetického výkonu) nastává v regulární oblasti podél směru paprsku $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})$**.** V této oblasti (stále podmínka $k_0 \to \infty$) jsou vektory $\boldsymbol{E}_0$ **a** $\boldsymbol{H}_0$ (přibližně) kolmé na směr paprsku $\boldsymbol{s}_0$**,** viz (8.10) a (8.11). Gradient eikonálu $\text{grad}\, \mathcal{S}(\boldsymbol{r})$ **nesouvisí** s velikostí Poyntingova vektoru $\boldsymbol{S}_P(\boldsymbol{r})$**,** ale jen s jeho směrem.

## 8.1.6 Lagrangeův integrální invariant

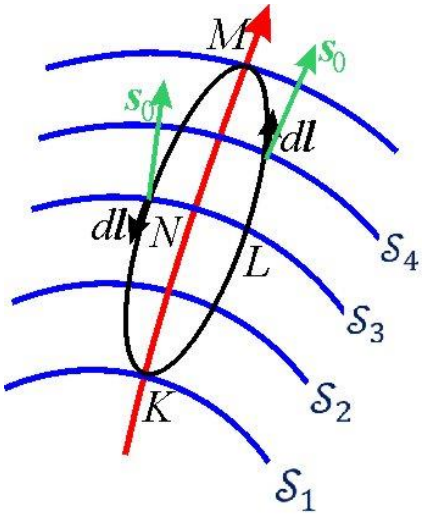
Aplikujme operátor rotace na eikonálovou rovnici a použijme Stokesovu větu.

$$\text{rot grad}\, \mathcal{S}(\boldsymbol{r}) = \text{rot}\, [n(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})],$$
$$\iint_{A(l)} \text{rot}\, [n(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})] \cdot\, d\boldsymbol{A} = \iint_{A(l)} \text{rot}\, [n(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})] \cdot \boldsymbol{\nu}_0\, dA = \tag{8.25}$$
$$= \oint_l n(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l},$$

kde plocha $A(l)$ je ohraničena uzavřenou křivkou $l$, která se skládá z vektorových elementů $d\boldsymbol{l}$ a její jednotková normála je označena $\boldsymbol{\nu}_0$. Protože obecně pro libovolnou („rozumnou“) funkci platí $\text{rot grad}\, f(\boldsymbol{r}) = 0$, je též

$$\oint_l n(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r}) \cdot\, d\boldsymbol{l} = 0, \tag{8.26}$$

což je nazýváno **Lagrangeův integrální invariant** - Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813).




Obr. 8.5 Ilustrace k Lagrangeovu integrálnímu invariantu: modře jsou znázorněny řezy plochami konstantních eikonálů, červeně paprsek kolmý k plochám konstantního eikonálu, zeleně jednotkové vektory $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})$ kolmé k plochám konstantního eikonálu, černě uzavřená integrační křivka $KLMNK$.

## 8.1.7 Fermatův princip

Integrály (8.26) po různých křivkách nezávisí na volbě dráhy, čili pro uzavřené křivky $KLMNK$ (jedna z nich černě na obr. 8.5)

$$\oint_{KLMNK} n(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{KLM} n(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{MNK} n(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = 0\,. \tag{8.27}$$

Vektory $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})$ a $d\boldsymbol{l}(r)$ ovšem nejsou obecně rovnoběžné, takže $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = \cos\alpha\, dl$ a pouze na červené křivce $KM$ v obr. 8.5 je $\alpha = 0$, protože tam je $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r}) \perp (\mathcal{S} = konst.)$. Právě tato podmínka činí integrál po červené dráze výjimečný: mezi všemi integrály typu $\int_K^M n\, dl$, které musí být větší, aby „kompenzovaly“ to, že na nich je $\cos\alpha < 1$. To lze zapsat

$$\int_{\substack{l(KM)\\ skutečný\\ paprsek}} n\, dl = \min\left\{ \int_{KL}^{M} n\, dl \right\}, \tag{8.28}$$

kde $\int_{KL}^{M} n\, dl$ jsou integrály po myšlených křivkách z těsného okolí skutečného paprsku. Tak jsme zapsali **Fermatův princip pro regulární část prostoru**, ve kterém nedochází k porušení předpokladů k zavedení geometrické optiky (regulární oblast bez „křížení“ paprsků); Pierre de Fermat (1601 nebo 1607 – 1665).

V případech, kdy paprsek vstupuje do singulární oblasti „křížení paprsků,“ je situace složitější.

Obecněji můžeme Fermatův princip formulovat: „Světlo se v prostoru šíří z jednoho pevného bodu do druhého pevného bodu po takové dráze, aby délka této optické dráhy nabývala extrémní nebo stacionární hodnotu.“ Vzhledem k délkám optických drah těsně sousedících myšlených křivek to může být podle okolností maximum, minimum, konstanta nebo i inflexe. Postačuje lokální splnění extrému nebo stacionárnosti. Vyjádřeno přes index lomu: „reálný“ světelný paprsek (tj. ten, který se realizuje) procházející pevně zvolenými body $P$ a $Q$ v prostředí s prostorovým rozložením indexu lomu $n\,(\boldsymbol{r})$ je křivka $\mathrm{s}_{PQ}(\boldsymbol{r})$ spojující tyto body, pro kterou křivkový integrál (optická dráha)

$$l_{PQ} = \int_{\mathrm{s}_{PQ}} n\,[\boldsymbol{r}(\mathrm{s})]\,d\mathrm{s} \tag{8.29}$$

nabývá **extrémní nebo stacionární** hodnotu vzhledem ke změnám dráhy $\mathrm{s}_{PXYQ}$ kolem reálného průběhu $\mathrm{s}_{PQ}$. Tedy optická dráha je delší nebo kratší nebo stejná v závislosti na okolnostech, za kterých zkoumáme délky optických drah pro **myšlené křivky** z blízkého okolí reálného paprsku a procházející body $P$ a $Q$.

V **původním znění** (stále často uváděném) je **čas** potřebný k překonání optické dráhy mezi dotyčnými body uváděn jako minimální**.** Myšlen je čas, který potřebuje vlnoplocha (ve smyslu vlnové optiky) k proběhnutí z bodu $P$ do $Q$ a to za předpokladu, že v tomto prostoru mezi body $P$ a $Q$ je regulární oblast, kde např. nedochází ke „křížení“ paprsků, jak je tomu např. při zobrazování apod. Pro zobrazování (tj. „protínání“ paprsků v bodě $Q$) je důležitá rovnost optických drah podél různých paprsků vedoucích z $P$ do $Q$, tj. **podmínka stacionarity** integrálu (8.29).

Matematicky je úloha nalezení podmínky extrému či stacionarity formulována jako **variace optické dráhy**

$$\delta l_{PQ} = \delta \int_{\mathrm{s}_{PXYQ}} n\,[\boldsymbol{r}(\mathrm{s})]\,d\mathrm{s} = 0\,, \tag{8.30}$$

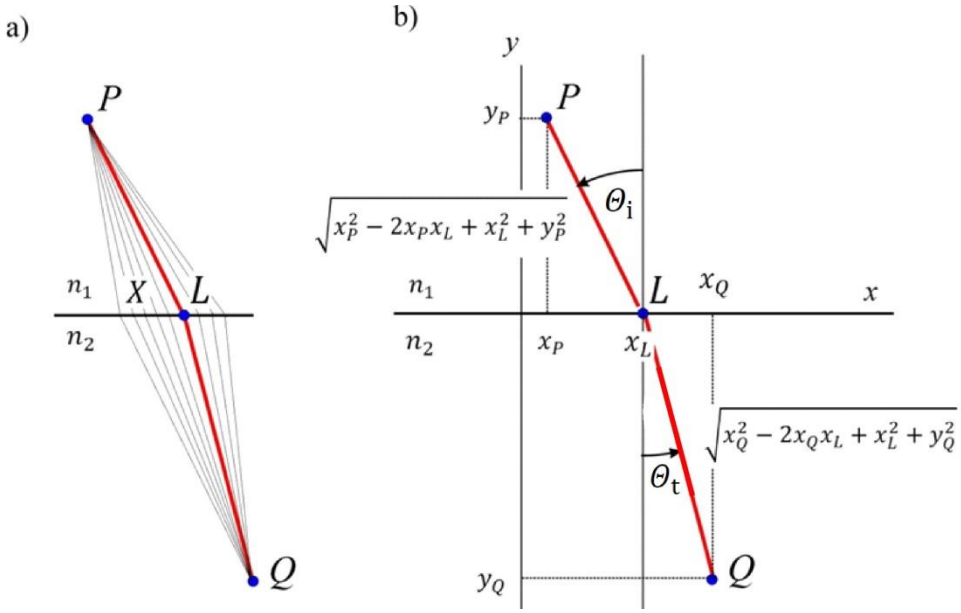
kde nyní $\mathrm{s}_{PXYQ}$ znamená dráhy pro množinu různých myšlených křivek $PXYQ$ z okolí paprsku $PQ$. Problematikou hledání extrémů integrálů závisejících na nějakých funkcích (funkcionálů) se zabývá matematická disciplína nazývaná variační počet. Prakticky hledáme **optické** dráhy, které jsou vzhledem k velmi blízkým drahám nejkratší, nejdelší nebo stejně dlouhé.

Náš postup při popisu paprsku lze shrnout takto: vyšli jsme z Maxwellových rovnic, provedli jsme na „vhodném místě“ aproximaci $\lambda \to 0$, odvodili jsme eikonálovou rovnici, paprskovou rovnici, Lagrangeův integrální invariant a Fermatův princip. Náš postup šel tedy zhruba proti historickému vývoji.

#### 8.1.7.1 Fermatův princip a zákon lomu na rovinném rozhraní

Ilustrujme Fermatův princip na lomu na rovinném rozhraní mezi homogenními prostředími o indexech lomu $n_1, n_2$. Úlohu si usnadníme předpokladem, že v homogenním prostředí jsou

paprsky přímkové a jako proměnný parametr je poloha bodu lomu na rozhraní. V obr. 8.6 jsou body $P$ a $Q$ pevně dány a hledáme polohu „pohyblivého“ bodu lomu $L$ na rozhraní takovou, aby paprsek z bodu $P$ do bodu $Q$ splňoval Fermatův princip.




Obr. 8.6 Ilustrace k souvislosti mezi Fermatovým principem a zákonem lomu. a) Testovací myšlené křivky (navazující úsečky) k určení optické vzdálenosti na možných drahách $PXQ$ (černě) a paprsek $PLQ$ (červeně), který odpovídá minimu optických vzdáleností. b) Geometrie paprsku $PLQ$ s vyznačením vzdáleností $PL$ a $LQ$.

Délka optické dráhy $PXQ$ je

$$l_{PXQ} = n_1\sqrt{(x_P - x_X)^2 + y_P^2} + n_2\sqrt{\left(x_Q - x_X\right)^2 + y_Q^2}\,.$$

Zderivujme

$$\frac{dl_{PXQ}}{dx_X} = \frac{n_1(x_P - x_X)}{\sqrt{(x_P - x_X)^2 + y_P^2}} + \frac{n_2\left(x_Q - x_X\right)}{\sqrt{\left(x_Q - x_X\right)^2 + y_Q^2}} = 0.$$

V tomto případě máme paprsek $PXQ$ ztotožněn s hledaným $PLQ$. Protože v zakresleném uspořádání je

$$\sin\Theta_i = \frac{x_L - x_P}{\sqrt{(x_P - x_L)^2 + y_P^2}} > 0\,, \qquad \sin\Theta_t = \frac{x_Q - x_L}{\sqrt{\left(x_Q - x_L\right)^2 + y_Q^2}} > 0\,,$$

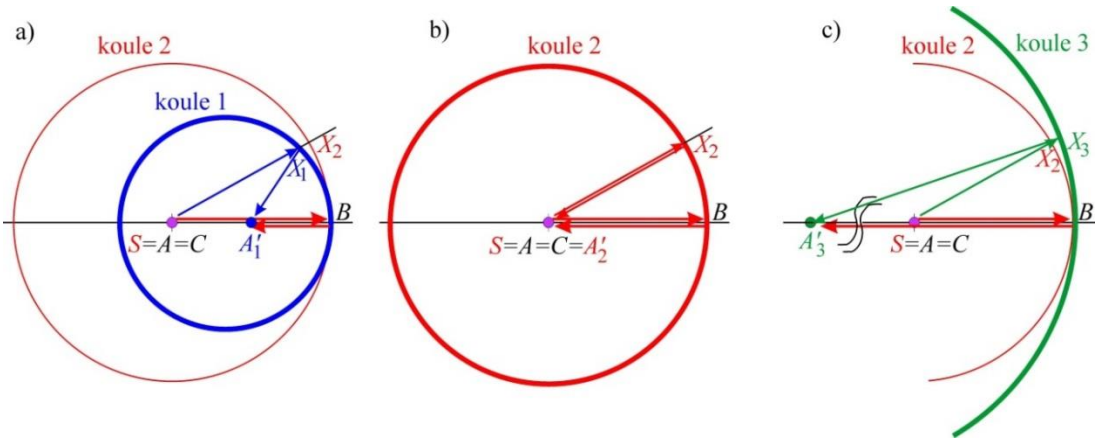
dostáváme z nulové derivace optické dráhy Snellův zákon lomu

$$-n_1\sin\Theta_i + n_2\sin\Theta_t = 0\,.$$

O tom, že se jedná o minimum, bychom se přesvědčili spočtením druhé derivace. Velmi podobným způsobem lze odvodit i zákon odrazu.

### 8.1.7.2 Minimum, stacionární hodnota a maximum optické dráhy

Sledujme na obr. 8.7 tři případy odrazu paprsku $ABC$ na kulových plochách různých poloměrů. Základním požadavkem na paprsek vycházející z bodu $A$ je návrat do téhož bodu $C \equiv A$ s podmínkou odrazu na kulové ploše. Je to analogie k předchozí úloze o zákonu lomu, kde jsme měli podmínku lomu na rovinném rozhraní.




Obr. 8.7 Ilustrace k Fermatovu principu pro případ odrazu na kulových plochách. V případě a) je optická dráha paprsku při odrazu $\overline{ABC}$ **maximální** vzhledem k testovacím drahám $\overline{AX_1C}$ z okolí. Zobrazení bodu $A$ odrazem na kulové ploše 1 nastane pro $\overline{AX_1A_1'} = \overline{ABA_1'}$. V případě b) je optická dráha paprsku $\overline{ABC}$ a všech testovacích paprsků $\overline{AX_2C}$ z okolí stejná, jedná o **stacionární** případ. Tedy bod $S = A = C = A'$ odpovídá obrazu bodu $A$. Na obrázku c) je znázorněn odraz na kulové ploše s větším poloměrem než v případě 2. Optická dráha $\overline{ABC}$ je **minimální** vzhledem k okolním testovacím drahám $\overline{AX_3C}$ a paraxiální obraz bodu $A$ leží **mimo** úsečku $AB$ (na jejím pokračování).

Tato uspořádání se liší požadavkem na okolí bodu odrazu $B$ v důsledku různých poloměrů odrazných ploch. Opět pro zjednodušení budeme předpokládat, že uvažované části paprsku i testovacích křivek jsou úsečky. Ve všech třech případech je realizován odraz paprsku $ABC$ zcela shodným způsobem, totiž odrazem na plošce $B$, která je společná všem třem zrcadlům, ale její okolí je různě zakřiveno. V důsledku různých poloměrů křivosti mají testovací myšlené úsečky $\overline{SX_1}, \overline{SX_2}, \overline{SX_3}$ rozdílné délky. V porovnání s $\overline{SX_2} = \overline{AB}$ jsou testovací délky $\overline{SX_1} < \overline{AB}$ a $\overline{SX_3} > \overline{AB}$. V případě zobrazeném na obr. 8.7 a) je realizována podmínka, že optická dráha $\overline{ABC}$ je nejdelší z okolních testovacích drah splňujících požadované podmínky. Při vysunutí testovacího bodu $X_1$ je optická dráha $\overline{AX_1C}$ kratší než $\overline{ABC}$. Případ 8.7 b) je charakterizován tím, že počáteční bod $A$ i koncový bod $C$ paprsku leží ve středu odrazové kulové plochy $S$. všechny paprsky se odrážejí zpět do středu kulové plochy a z hlediska integrálu (8.29) se jedná o jeho **stacionární** hodnotu, tj. je splněna podmínka zobrazení $A \to A'$. V případě 8.7 c) jsou realizovány odrazy na kulové ploše o poloměru větším než v případě 8b) a integrál (8.29) nabývá pro skutečný paprsek $ABC$ **minimální** hodnotu.

### 8.1.7.3 Descartovy (Cartesiovy) plochy

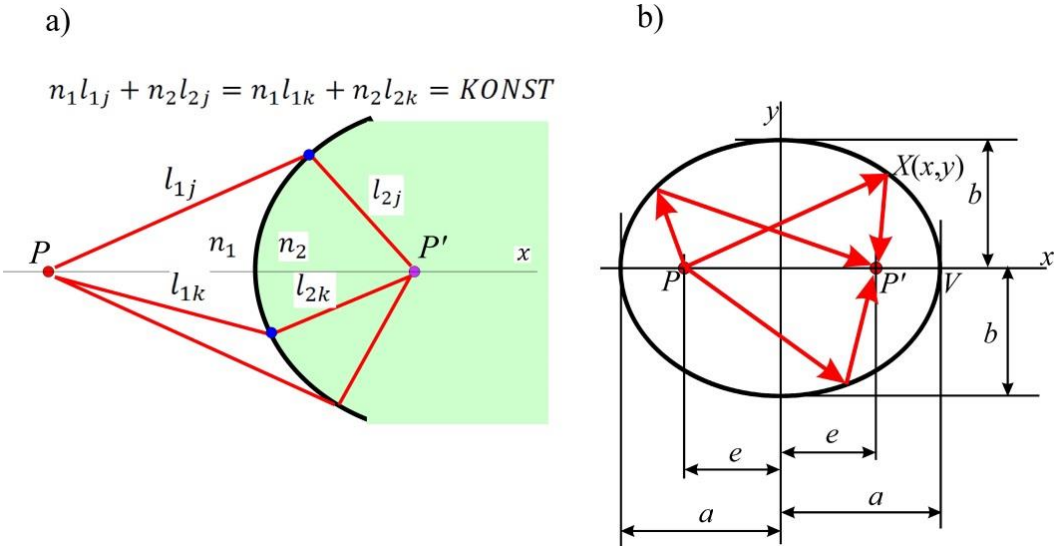
Jestliže zredukujeme požadavky na stigmatické (bodové) zobrazení pouze na jednu dvojici konjugovaných bodů, můžeme pro určení vhodného tvaru lomné (odrazné) plochy využít přímo

(8.29). K optickému zobrazení v rámci paprskové optiky vede požadavek **stacionární hodnoty** integrálu (8.29). Jako „předmět“ budeme brát bod $P$ a bod $P'$ je jeho obraz. Optické dráhy z bodu $P$ do bodu $P'$ jsou stejné pro mnoho různých paprsků procházejících těmito body. Ve vlnové terminologii z rovnosti délky různých optických drah vyplývá, že jednotlivé části emitované vlnoplochy z bodu $P$ se v $P'$ sejdou se stejnou fází a interferují konstruktivně. Pak řekneme, že bod $P'$ je stigmatickým (bodovým) obrazem bodu $P$. Otázkou, za jakých podmínek se paprsky vycházející ze svítícího bodu po lomu (případně odrazu) na jednoduchém rozhraní opět setkají v jednom bodě, se zabýval René Descartes (1596 – 1650).

Umístěme zobrazovaný bod i jeho obraz na osu $x$. Mezi ně umístěme lomnou plochu oddělující homogenní prostředí o indexech lomu $n_1$ a $n_2$. Optickou dráhu od předmětového bodu $P$ k lomné ploše, na které leží bod $X_j(x_j, y_j, z_j)$, označme $n_1 l_{1j}$. Dráhu od bodu na lomné ploše k bodu $P'$ označme $n_2 l_{2j}$ a podmínkou stigmatického zobrazení je, že součet těchto drah je pro všechny body $X_j$ (tj. pro všechny paprsky procházející body $P$ a $P'$ a lomnou plochou) konstantní

$$n_1 l_{1j} + n_2 l_{2j} = KONST\,,$$
$$n_1\sqrt{(x_j - x_P)^2 + y_j^2 + z_j^2} + n_2\sqrt{(x_j - x_P')^2 + y_j^2 + z_j^2} = KONST, \tag{8.31}$$

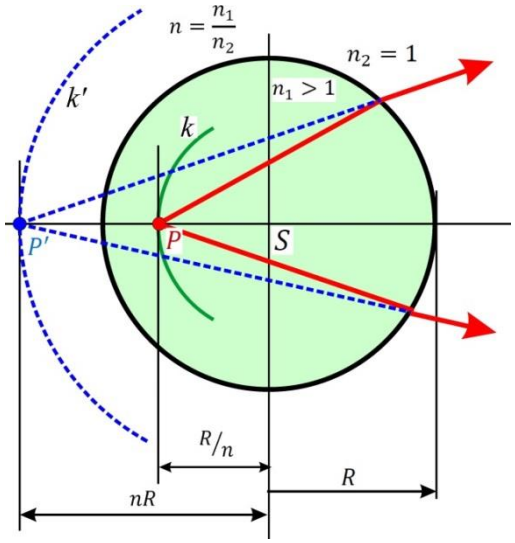
Souřadnice $x_j, y_j, z_j$ pak určují lomnou plochu, která splňuje stigmatické zobrazení jednoho bodu $P$ na zvolenou polohu jeho obrazu $P'$. Vzhledem k volbě umístění obou bodů na ose je úloha osově symetrická takže postačuje řešení v řezu $z_j = 0$. Takové ploše říkáme Cartesiova (Descartova) plocha nebo též **aplanatická plocha pro uvažovaný bodový pár** $P, P'$. Pojem aplanatická lámavá (odrazná) plocha, též aplanatický optický prvek (čočka, zrcadlo), označují, že zobrazení nastává **bez sférické aberace** (bez otvorové vady).




Obr. 8.8 Příklady stigmatického zobrazení bodu $P$ na $P'$; předmět i obraz se nacházejí v konečné vzdálenosti. a) Zobrazení pomocí lomné plochy oddělující homogenní prostředí o indexech lomu $n_1$ a $n_2$. Pro body $P$ a $P'$ v konečné vzdálenosti je takovým rozhraním plocha 4. stupně. b) Zobrazení odrazem od elipsoidální plochy když předmět $P$ a obraz $P'$ jsou umístěny v ohniskách elipsoidu

Aplikačně významná je kulová Descartova lomná plocha ukázaná na obr. 8.9. **Plocha** o poloměru $R$, uvnitř které je index lomu $n_1$, zobrazuje stigmaticky vnitřní body nacházející se na kulové ploše o poloměru $R/n_1$ na vnější kulovou plochu o poloměru $Rn_1$. Obraz je virtuální. Tato konfigurace je základním uspořádáním pro první čočku imerzního mikroskopického objektivu. Z důvodu středové symetrie stigmatické zobrazení nastává nejen pro dvojici konjugovaných bodů $P$ a $P'$, ale i pro konjugované kulové plochy $k$ a $k'$.

Několik příkladů Descartových ploch lomných i odrazných ve tvaru elipsoidu, paraboloidu a hyperboloidu je uvedeno v Poznámce P8.5. Pokud je jeden ze svazků rovnoběžný, považujeme bod $P$ (resp. $P'$) za nevlastní, umístěný v nekonečnu v příslušném směru. Je třeba zdůraznit, že ke stigmatickému zobrazení dojde jen pro určitou dvojici bodů $P$ a $P'$. Jiná dvojice bodů pro stigmatické zobrazení by vyžadovala jiný tvar. Omezení bodového zobrazení Descartovými plochami na dvojice konjugovaných bodů a též potíže s výrobou asférických ploch vedly v historickém vývoji k preferenci kulových lomných a odrazných ploch.

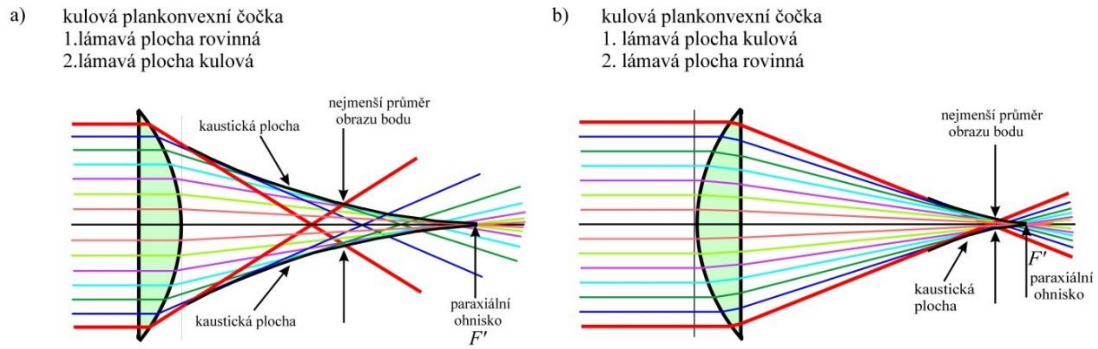



Obr. 8.9 Descartova kulová lomná plocha zobrazující stigmaticky vnitřní kulovou plochu $k$ na vnější plochu $k'$. V uvedeném případě je obraz virtuální.

Parabolická a eliptická zrcadla se běžně užívají a jsou komerčně dostupná. Asférické plochy též bývají součástí náročnějších a složitějších optických soustav z důvodů omezování optických vad.

Dnešní velké astronomické dalekohledy (včetně Hubbleova vesmírného dalekohledu) jsou založeny na konstrukci známé jako Ritcheyův-Chrétienův dalekohled, jehož základem je odraz na primárním dutém (konkávním) hyperboloidním zrcadle a sekundární zrcadlo je konvexní hyperboloid.

Jako kontrast ke stigmatickému zobrazení Descartovými plochami jsou na obr. 8.10 zakresleny dva případy fokusace rovnoběžného svazku paprsků plankonvexní čočkou s kulovou lomnou plochou.




Obr.8.10 a) Chod paprsků při použití plankonvexní čočky s první rovinnou lámavou plochou a druhou kulovou lámavou plochou Paprsky vstupující do čočky v různých výškách se protínají v různých bodech prostoru. Zobrazení není stigmatické a výsledkem zobrazení bodu je nehomogenně osvětlený kruh. b) Stejně jako v a) je pro fokusaci použita plankonvexní čočka, ale zde je první lámavou plochou kulová plocha. Z obrázku je zřejmé, že v tomto uspořádání je kulová vada mnohem menší než v a).

V případech použití jednoduchých kombinací kulových ploch nastává obvykle přibližně stigmatické zobrazení pro paprsky jdoucí podél optické osy v malé vzdálenosti (vzhledem k poloměrům ploch) a svírajících s osou malé úhly. Jedná se o model zobrazování pomocí paprsků v Gaussově nitkovém prostoru, tj. v těsné blízkosti optické osy. Sofistikovanějšími kombinacemi těchto ploch (včetně použití materiálů o různých indexech lomu) lze však docílit i značné kompenzace optických vad včetně kulové (otvorové) vady znázorněné na obr. 8.10. Z obr. 8.10 je patrné, že paprsky vstupující do čočky s kulovou lomnou plochou v různých vzdálenostech od osy se protínají v různých místech. Pro předmětový bod na ose, ze kterého paprsky vycházejí, se uvedený jev nazývá **otvorová vada** (sférická aberace). Paprsky, které vystupují z předmětového bodu jako k sobě velmi blízké, se po průchodu optickou soustavou protínají na **kaustické** ploše. Tato plocha tvoří obálku té části prostoru, ve které dochází ke křížení paprsků a její řez je na obr. 8.10 též zakreslen. Na obrázcích je znázorněn i nejmenší průměr světelné skvrny, která představuje obraz. V případech orientace čočky a) a b) je zřejmý velký rozdíl ve velikosti této skvrny. Je vidět, že otvorovou vadu lze do značné míry ovlivnit např. vhodnou volbou poloměrů 1. a 2. lámavé plochy jednoduché čočky. Jednoduše lze tuto vadu zeslabovat též omezením apertury (průměrem otvoru propouštějícího záření). Tím ale zeslabujeme zářivý výkon procházející soustavou.

## 8.2. Optické zobrazení v paraxiální aproximaci

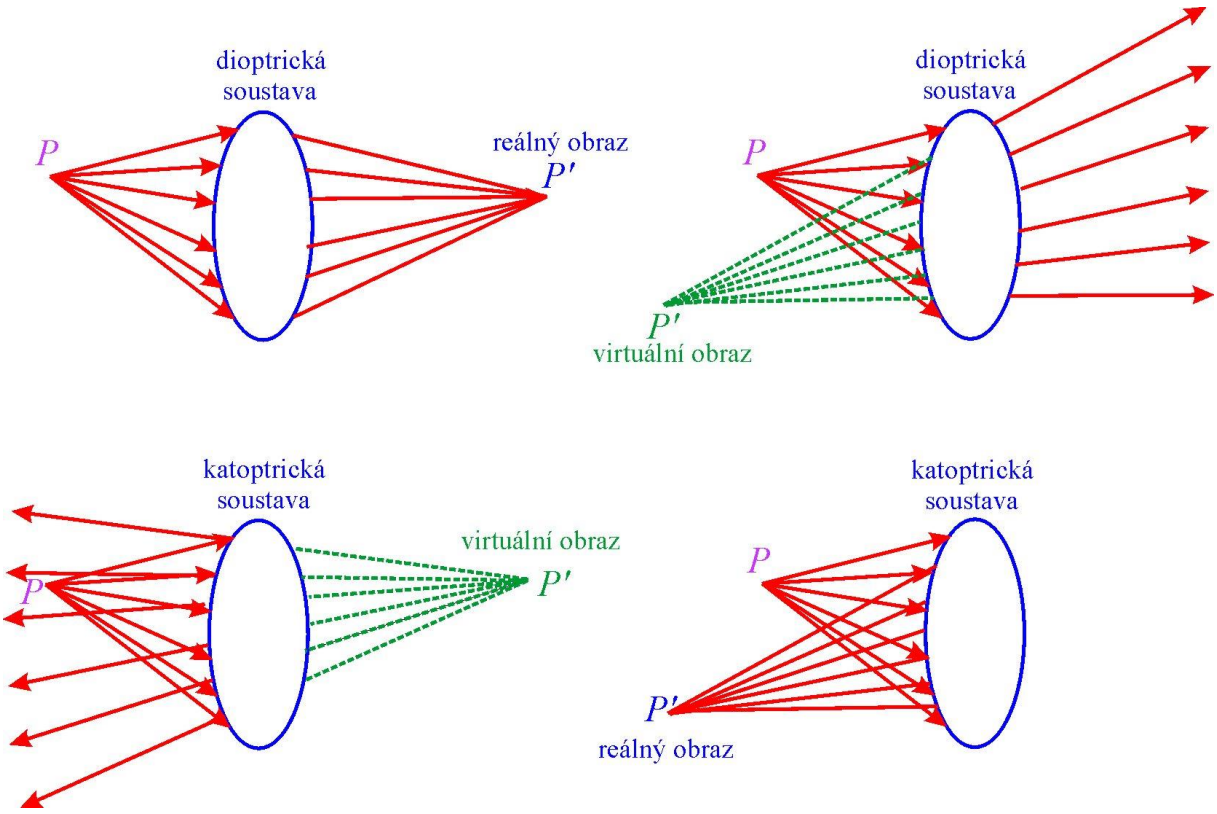
Cílem optického zobrazování je vytvořit obraz předmětu. V tomto textu se nebudeme zaobírat obecnými vlastnostmi zobrazovacích soustav, ani obecnými požadavky na zobrazení. Intuitivně můžeme říci, že za obraz předmětu budeme považovat světelný úkaz v místě, kde se paprsky vycházející z bodu předmětu různými směry opět co „nejvíce sbližují“ (v ideálním případě „setkávají“). Nebo též tak, že intenzita záření v místě obrazu svítícího bodu nabývá maxima.

Základními pracovními předpoklady paprskové optiky pro zobrazování jsou:

- platnost paprskové rovnice (8.20) v celém prostoru; v homogenním prostředí to znamená předpoklad o přímkovém tvaru paprsků v celém prostoru;
- zákony odrazu a lomu na rozhraních dvou prostředí; v paraxiální aproximaci počítáme s přibližným zákonem lomu;
- paprsky se šíří nezávisle na tom, zda tímto prostředím prochází i jiné světlo;
- pokud paprsek je orientován jedním směrem, může se **po stejné dráze** šířit i paprsek směrem opačným.

Za ideální zobrazení bodu budeme považovat případ, kdy se všechny paprsky vycházející z předmětového bodu umístěného v libovolném místě trojrozměrného prostoru setkají opět v jednom bodě obrazu. Pak mluvíme o stigmatickém (bodovém) zobrazení. Za ideální zobrazení přímky považujme opět přímku. A optimální by bylo, kdyby si zobrazovaný objekt (např. obecně orientovaný trojúhelník) byl se svým obrazem podobný v geometrickém slova smyslu, tedy byly by zachovány i úhly mezi stranami obecně orientovaného trojúhelníku. Takové vlastnosti by měl systém někdy nazývaný „absolutní přístroj." Ukazuje se však, že v praxi pouze rovinné zrcadlo (či kombinace rovinných zrcadel) takové požadavky splňuje. Jestliže odstoupíme od požadavku geometrické podobnosti obecně orientovaného trojúhelníku, splňuje požadavky na stigmatické zobrazení bodu a zobrazení přímky jako přímky **matematická projektivní (kolineární) transformace**. Pokud bod a jeho obraz (přímka a její obraz) budou splňovat předpis daný kolineární transformací, řekneme, že se jedná o **konjugované body (přímky).** K fyzikální realizaci této transformace se lze **přiblížit** např. lomem (či odrazem) na kulových plochách v režimu paraxiální aproximace, což bude hlavní náplní následujícího textu. Přitom bude optická soustava soubor kulových rozhraní (odrazových a lomných ploch), pomocí kterých se uskuteční optické zobrazování. Mezi sousedními rozhraními je index lomu konstantní. Optickou osou budeme nazývat přímku, na které leží středy křivostí lomných či odrazných ploch (případně středy oskulačních koulí pro asférické plochy v obecnějším případě).

Svazek paprsků vycházejících z jednoho bodu, procházejících jedním bodem či končících v jednom bodě se nazývá homocentrický svazek. V homogenním a izotropním prostředí homocentrický svazek odpovídá kulovým vlnám emitovaným z tohoto bodu. Stigmatická zobrazovací soustava zobrazuje homocentrický svazek opět jako homocentrický.




Obr. 8.11 Schématické znázornění reálného a virtuálního obrazu $P'$ předmětového bodu $P$ při zobrazení dioptrickou a katoptrickou soustavou s vyznačením homocentrických svazků

Pokud paprsky od předmětu vstupují do soustavy a vystupují na opačné straně soustavy (obr. 8.11), mluvíme o **dioptrické soustavě**. Ta může být realizována lomnými plochami nebo sudým počtem odrazových ploch, případně jejich vhodnou kombinací. V opačném případě, kdy paprsky vstupují i vystupují na stejné straně soustavy, se jedná o soustavu **katoptrickou** (zrcadlovou), kterou můžeme realizovat např. lichým počtem odrazných ploch. Někdy se setkáme s poněkud odlišným významem těchto pojmů: katoptrické soustavy jsou tvořeny zrcadly, dioptrické soustavy čočkami a pro smíšené soustavy (čočky + zrcadla) vznikl název katodioptrické soustavy. Zobrazovaným předmětem nemusí být reálně existující těleso, ale může jím být i reálný nebo virtuální obraz vytvořený jiným optickým systémem.

Za velmi významné praktické parametry zobrazujících soustav můžeme považovat:

1. **zorné pole** definované pro konjugované plochy (roviny) v předmětovém a v obrazovém prostoru; v soustavě je zorné pole definované **clonou zorného pole**;
2. **rozlišení** při zobrazení blízkých bodů v rovině kolmé na optickou osu, a to nejen bodů na optické ose, ale i bodů na okraji zobrazované scény;
3. **hloubka ostrosti**, tj. jak se změní ostrost obrazu (rozlišení) při posunu předmětové plochy ve směru podél optické osy; její určení je spojeno s tím, jak velkým obrazem svítícího bodu (světlou skvrnou) se spokojíme (tolerance neostrosti, přijatelné rozostření);
4. **světelnost**, tj. kolik zářivého výkonu emitovaného předmětem je soustava schopna využít a soustředit do vykresleného obrazu.

Požadavky na světelnost, na velikost zorného pole a v kvalitních soustavách i požadavky na omezení vlivu difrakce vedou k používání optických prvků patřičně velkých průměrů. Kvalitativně můžeme říci, že s rostoucím průměrem optických prvků stoupají velmi významně i nároky na kompenzaci optických vad (aberací).

Pro získání základní hrubé představy o vlastnostech zobrazovací optické soustavy dobře poslouží co nejjednodušší popis pomocí předmětové a obrazové ohniskové vzdálenosti, poloh hlavních bodů a poloh uzlových bodů. V paprskové optice bereme bod a přímky v matematickém slova smyslu.

### 8.2.1 Kolineární (projektivní) transformace

Fyzický prostor si můžeme myšleně rozdělit na **předmětový prostor** s kartézskými souřadnicemi $x, y, z$ a **obrazový prostor** se souřadnicemi $x', y', z'$. Tyto prostory obecně nejsou disjunktní, ale mohou se prolínat. Obecný tvar kolineární transformace polohy bodu z předmětového do obrazového prostoru $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$ lze s ohledem na symetrii uspořádání centrované optické soustavy (středy kulových lomných i odrazných ploch se nacházejí na jedné přímce, tj na optické ose) zapsat poměrně jednoduše při vhodné volbě souřadných soustav pro předmětový a obrazový prostor. Takové vztahy označujeme jako zobrazovací rovnice, V zobrazování se používá několik souřadných soustav, z nichž se zmiňme o Newtonově soustavě a Gaussově soustavě, obr. 8.12. V obou případech je pro definici soustav důležitá poloha úsečky, pro kterou platí, že obraz úsečky umístěné v hlavním bodě $H$ předmětového prostoru a kolmá k optické ose bude úsečka stejně veliká a stejně orientovaná v hlavním bodě $H'$ obrazového prostoru (červená a modrá šipka v obr. 8.12). Dalšími důležitými body jsou obraz bodu nekonečně vzdáleného $(0,0,-\infty) \rightarrow F'$ (což je obrazové ohnisko) a předmětový bod, který se zobrazuje do nekonečna $F \rightarrow (0,0,\infty)$ nazvané předmětové ohnisko. Newtonova soustava a Gaussova soustava se liší volbou počátků. Počátky Newtonových systémů jsou zvoleny v ohniskách, počátky Gaussových soustav jsou zvoleny v hlavních bodech.

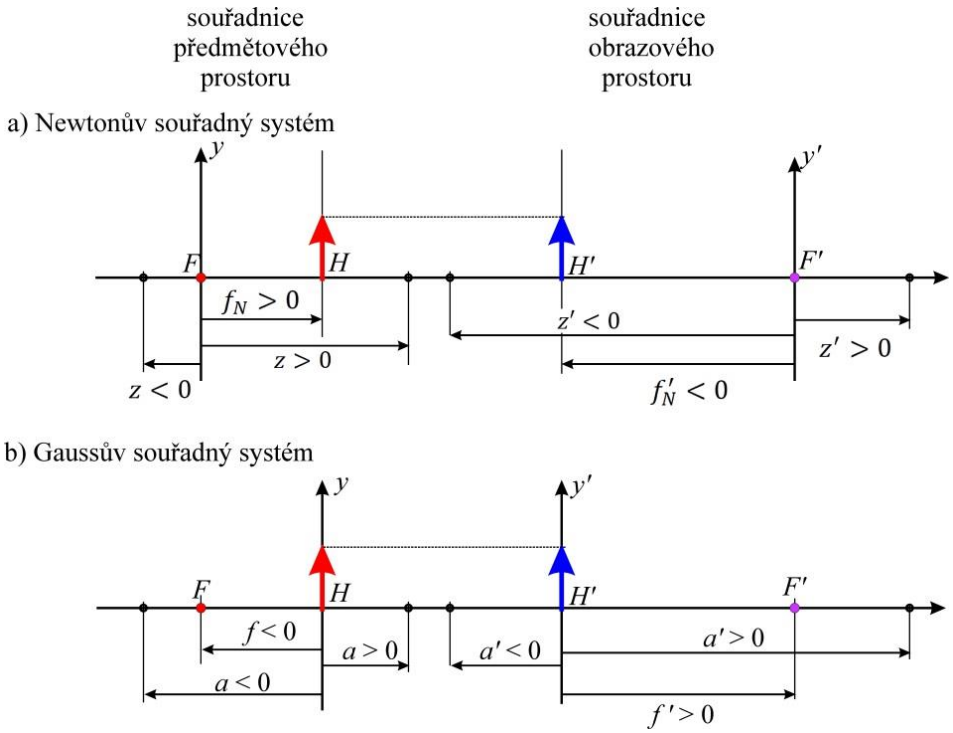
Při uvedeném značení a uvážení osové symetrie lze ukázat, že kolineární transformaci je možné zjednodušit na tvary, které označujeme jako zobrazovací rovnice. Nyní uvedeme jen přehled výsledků, Gaussovy zobrazovací rovnice odvodíme v dalším textu maticovou metodou.

**a) Newtonovy zobrazovací rovnice**

$$x' = -\frac{x f_N}{z}, \quad y' = -\frac{y f_N}{z}, \quad z' = \frac{f_N f_N'}{z}, \tag{8.32}$$

které jsou běžně zapisovány ve tvaru

$$z\, z' = f_N\, f_N', \qquad \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = -\frac{f_N}{z} = -\frac{z'}{f_N'}. \tag{8.33}$$




Obr. 8.12 a) Newtonův souřadný systém pro popis kolineární transformace. b) Gaussovy souřadnice předmětového a obrazového prostoru. Červenou šipkou je naznačen předmět v předmětové hlavní rovině a modře je zakreslen jeho obraz v obrazové hlavní rovině. $F$ a $F'$ značí předmětové a obrazové ohnisko. Nerovnosti vypsané u úseček naznačují obvyklé znaménkové konvence.

Použitím vztahů $f = -f_N\,, f' = -f'_N\,,\ a = z + f,\ a' = z' + f'$ dostaneme

b) **Gaussovy zobrazovací rovnice**,

$$a' = \frac{af'}{a - f}\,, \qquad a = \frac{a'f}{a' - f'}$$
$$x' = \frac{xf}{f - a} = \frac{x\,(f' - a')}{f'}\,, \qquad y' = \frac{yf}{f - a} = \frac{y\,(f' - a')}{f'}\,, \tag{8.34}$$

což je běžněji zapisováno jako

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1, \qquad \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f - a} = \frac{f' - a'}{f'}\,. \tag{8.35}$$

Máme tedy matematický předpis pro „vyhovující“ zobrazení.

Ukážeme, že vhodným modelem pro přibližnou realizaci takového stigmatického zobrazení jsou optické soustavy obsahující lomné (i odrazné) kulové plochy, pokud se omezíme pouze na paprsky z Gaussova nitkového prostoru, kde všechny uvažované paprsky

- se nacházejí blízko osy v porovnání s poloměry křivostí zúčastněných kulových ploch a

- svírají s osou malý úhel (paraxiální aproximace chodu paprsků).

Model paprskové optiky platný v těsné blízkosti optické osy (v Gaussově nitkovém prostoru) bývá též nazýván **gaussovská optika**. V části 8.2.2.4 uvedeme odvození Gaussových zobrazovacích rovnic v paraxiálním modelu lomu na kulové ploše, v 8.2.2.6 pro zobrazení tenkou čočkou a v 8.2.2.8 pro odraz na kulovém zrcadle.

## 8.2.2 Paraxiální zobrazování kulovými plochami

Aproximace paraxiálního zobrazení má blízko k uvedené kolineární transformaci. Z důvodu osové symetrie vystačíme v mnoha případech se základními představami a obrázky ve dvojdimenzionálním řezu. V paraxiálním aproximaci používáme přiblížení, že při průchodu rozhraním se paprsek láme podle „zjednodušené“ verze Snellova zákona lomu použitelné pro malé úhly dopadu a lomu a aproximace goniometrických funkcí (v jednotkách úhlů radiány)

$$n_1 \sin\Theta_\mathrm{i} = n_2 \sin\Theta_\mathrm{t} \quad \rightarrow \quad n_1\Theta_\mathrm{i} = n_2\,\Theta_\mathrm{t}, \qquad \sin\Theta \cong \tan\Theta \cong \Theta\,. \tag{8.36}$$

„Zjednodušená verze zákona lomu“ je podstatná k tomu, aby zobrazení lomem/odrazem na kulové ploše bylo možno popsat kolineární transformací. Druhá část zákona lomu, totiž že lomený paprsek zůstává v rovině dopadu, která je určena směrem dopadajícího paprsku a **lokální normálou** k rozhraní, platí i v paraxiální aproximaci. Pro případ zobrazování **mimoosových bodů** se v tomto textu omezíme jen na část úlohy, ve které se budeme věnovat pouze paprskům ležícím v rovině určené zobrazovaným bodem a optickou osou, tj. schématům kresleným v rovině zvané **tangenciální** (či **meridiální** nebo **poledníková**). Toto přiblížení však nestačí, pokud se začneme zabývat optickými vadami, jako jsou astigmatismus, koma aj.

Zopakujme **kardinální body** v předmětovém a obrazovém prostoru, které jsme potřebovali pro zavedení Newtonova či Gaussova souřadného systému a přidejme další.

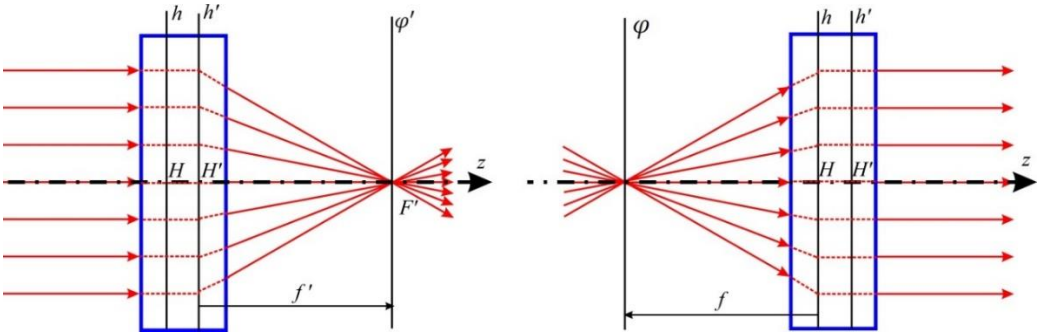
- **Obrazové ohnisko** $F'$ je paraxiální obraz nekonečně vzdáleného (nevlastního) bodu ležícího na optické ose.

- **Předmětové ohnisko** $F$ je předmětový bod na optické ose, jehož paraxiální obraz leží v nekonečnu. Z toho vyplývá, že tato ohniska nejsou opticky sdružená (nejsou konjugovaná, jedno není obrazem druhého). Ohnisky procházejí příslušné ohniskové roviny $\varphi$ a $\varphi'$ kolmé na optickou osu soustavy.

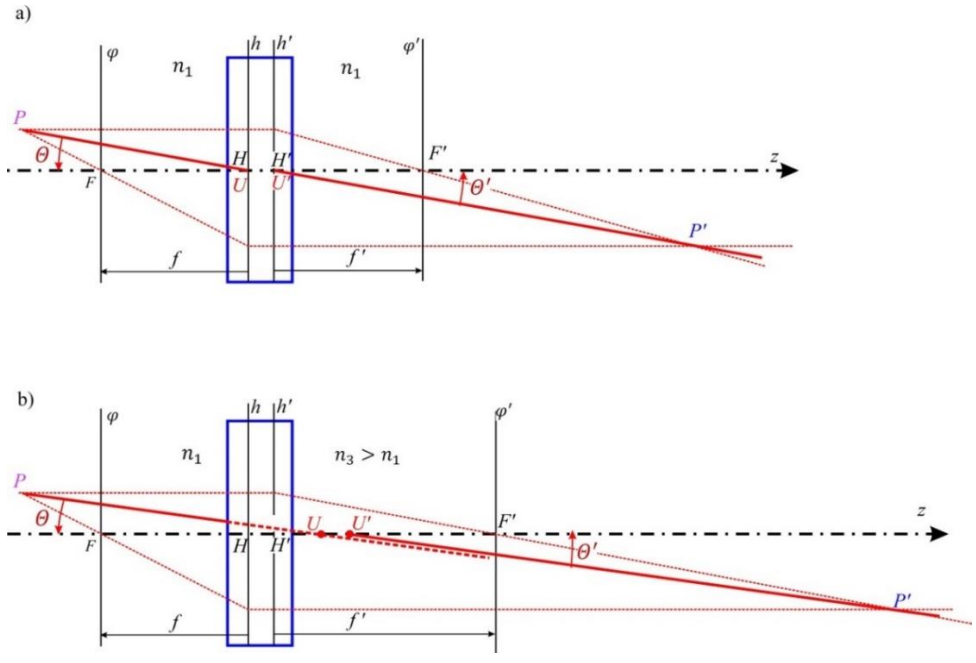
- **Hlavní body** jsou dva opticky sdružené (konjugované) body na optické ose, tj. hlavní předmětový bod $H$ a hlavní obrazový bod $H'$. Kolmo na optickou osu těmito body procházejí hlavní předmětová rovina $h$ a hlavní obrazová rovina $h'$. Leží-li předmět v hlavní předmětové rovině, leží jeho obraz v hlavní obrazové rovině. Tento obraz je stejně velký a stejně orientovaný, tj. **příčné zvětšení** je $+1$ (se zdůrazněním na znaménko +).

- **Uzlové body** jsou body ležící na optické ose a jsou to průsečíky osy s dvěma sdruženými přímkami (jedna je obrazem druhé), jejichž **úhlové zvětšení** je $+1$.
- **Předmětová ohnisková vzdálenost** $f$ je vzdálenost předmětového ohniska $F$ od předmětového hlavního bodu $H$.
- **Obrazová ohnisková vzdálenost** $f'$ je vzdálenost obrazového ohniska $F'$ od obrazového hlavního bodu $H'$.

Vlastnosti kardinálních bodů užíváme při geometrických konstrukcích chodu významných paprsků, které mají názorně ukázat polohy předmětu a jeho obrazu.



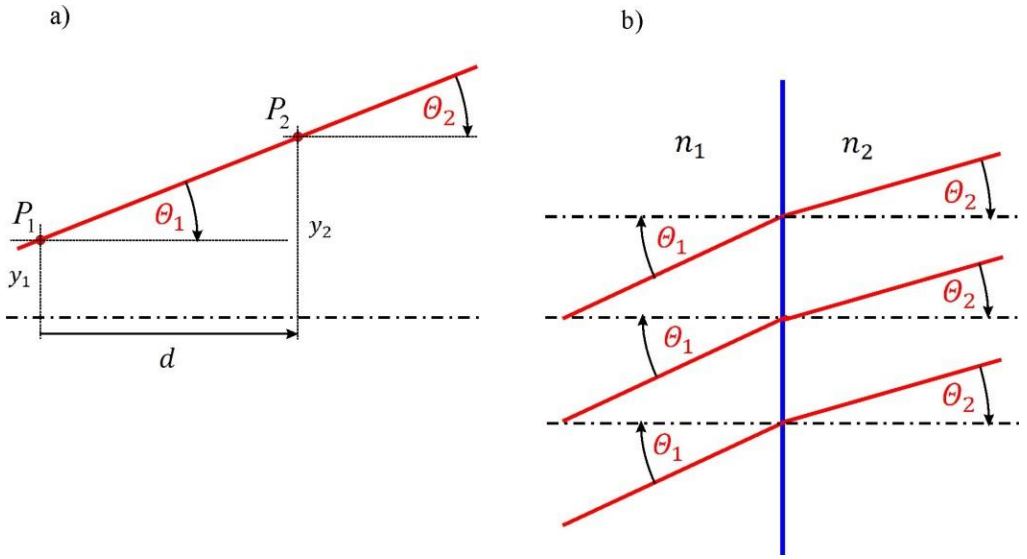

Obr. 8.13 Hlavní body $H, H'$a ohniska $F, F'$ ideální dioptrické soustavy v paraxiální aproximaci. Obrázek je nakreslen pro stejné indexy lomu na obou stranách soustavy, kdy platí $f' = -f$. Kvůli přehlednosti obrázku nesplňují zakreslené paprsky paraxiální podmínku.




Obr. 8.14 Uzlové body $U, U'$ ideální dioptrické soustavy v paraxiální aproximaci. a) Pro stejné indexy lomu na obou stranách soustavy $n_1 = n_3$, kdy je $f' = -f$, $U \equiv H$ a $U' \equiv H'$. Přímka $H'P'$ je obrazem přímky $HP$ a úhly $\Theta = \Theta'$ (včetně znaménka). V důsledku toho jsou přímky $H'P' \equiv U'P'$ a $HP \equiv UP$ rovnoběžné. b) Pro různé indexy lomu $n_1 < n_3$ , $f' > -f$. Pak uzlové a hlavní body nejsou totožné. Pro přímky procházející uzlovými body je $\Theta = \Theta'$, ale přímky $HP$ a $H'P'$ rovnoběžné nejsou.

### 8.2.2.1 Maticový formalizmus

Efektivní metodou pro kvantitativní popis dějů v Gaussově nitkovém prostoru je využití **maticového formalizmu** pro popis paprsků a změn jejich směrů při lomu a odrazu. Přitom je paprsek charakterizován sloupcovým dvojrozměrným vektorem, kde první složkou je souřadnice $y$ bodu, kterým paprsek prochází v nějaké rovině kolmé na osu, a druhou souřadnicí je úhel, který tento paprsek svírá v témže místě se směrem optické osy. Budeme užívat jednu ze znaménkových konvencí, podle které úhly **od paprsku ke směru optické osy** jsou kladné, jestliže jejich smysl je proti chodu hodinových ručiček.




Obr. 8.15 a) Parametry pro přímkový paprsek v homogenním prostředí, který prochází body $P_1$ a $P_2$. Na obrázku jsou úhly $\Theta_1 = \Theta_2 < 0$. Směr $d$ je kladný. b) Lom rovinné vlny (rovnoběžné paprsky) na rovinném rozhraní; pro lom rovinné vlny změna úhlu nezávisí na souřadnici $y$. Rovinná vlna zůstává rovinnou.

Pro paprsek podle obr. 8.15 a) napíšeme

$$y_2 = y_1 + \Delta y = y_1 - d \tan \Theta_1 \cong y_1 - d\, \Theta_1.$$

Takovému paprsku určenému body $P_1$ a $P_2$ můžeme přiřadit **přenosovou matici** $\mathbb{T}$ ze vztahu

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \Theta_1 \end{pmatrix} = \mathbb{T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \Theta_1 \end{pmatrix}. \tag{8.37}$$

To znamená, že polohu bodu $P_2$ a směr paprsku tímto bodem procházejícím lze spojit s polohou bodu $P_1$ a směrem paprsku tímto bodem procházejícím lineárními vztahy

$$y_2 = Ay_1 + B\Theta_1,$$

$$\Theta_2 = Cy_1 + D\Theta_1.$$

Zapsáno maticově

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \Theta_1 \end{pmatrix} = \mathbb{T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \Theta_1 \end{pmatrix} \tag{8.38}$$

a indexy 1 a 2 se vztahují k rovinám, v nichž leží body $P_1$ a $P_2$. Vztah (8.38) můžeme v paraxiální aproximaci ($\Theta_1, \Theta_2$ malé) v Gaussově nitkovém prostoru ($y_1, y_2$ malé) rozepsat do rozvoje

$$y_2 = \frac{\partial y_2}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial y_2}{\partial \Theta_1} \Theta_1,$$

$$\Theta_2 = \frac{\partial \Theta_2}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial \Theta_2}{\partial \Theta_1} \Theta_1.$$

Z toho je vidět význam prvku matice $A$ jako příčné zvětšení a členu $D$ jako úhlové zvětšení.

**Lom na rovinném rozhraní** můžeme popsat při $y_2 = y_1$ a změně směru paprsku v rozhraní daném zákonem lomu v paraxiální aproximaci jako

$$\sin \Theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \Theta_1, \qquad \Theta_2 \cong \frac{n_1}{n_2}\, \Theta_1,$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \Theta_1 \end{pmatrix}. \tag{8.39}$$

V tomto případě se indexy 1 a 2 vztahují k jedné rovině, totiž rovině rozhraní, ale před lomem a po lomu chodu paprsku.

#### 8.2.2.2 Vlastnosti přenosových matic $ABCD$

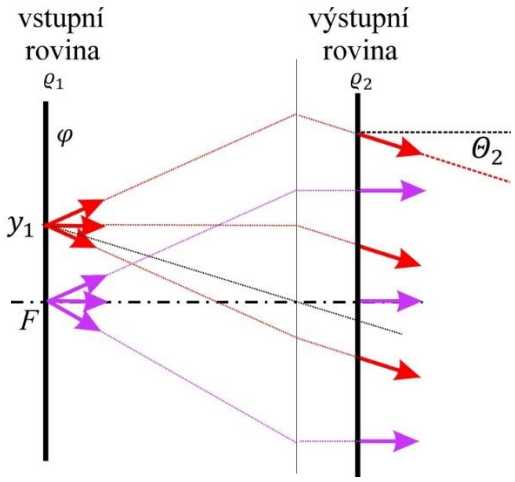
Diskutujme vlastnosti přenosové matice spojující paprsky vystupující ze vstupní roviny $\varrho_1$ a jejich parametry v rovině $\varrho_2$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \Theta_2 \end{pmatrix}_{\varrho_2} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix} = \mathbb{T}_{\varrho_2, \varrho_1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \Theta_1 \end{pmatrix}_{\varrho_1}.$$

Podívejme se na několik speciálních případů.

1) $D = 0, \quad \Theta_2 = C y_1.$

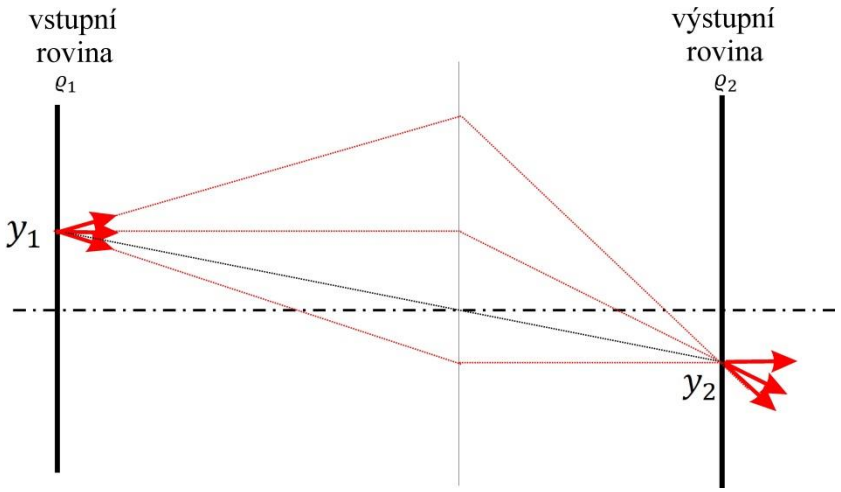
Úhel vystupujících paprsků nezávisí na úhlu vstupujících paprsků. Speciálně pro $y_1 = 0$ je $\Theta_2 = 0$. Vstupní rovina je předmětovou ohniskovou rovinou. $\Theta_2$ závisí jen na $y_1$.




Obr. 8.16 Význam členu přenosové matice $D = 0$. Pak je vstupní rovina předmětová ohnisková.

2) $B = 0, \quad y_2 = Ay_1.$

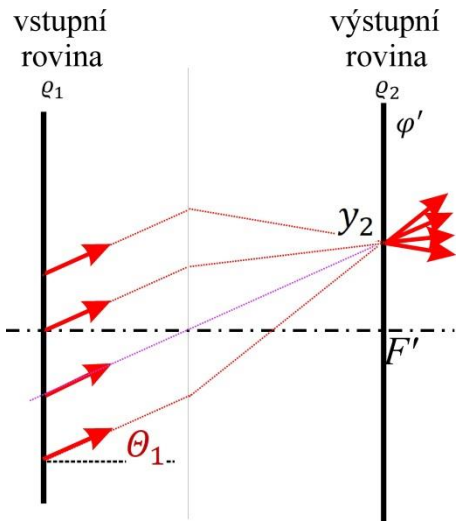
Vstupní a výstupní rovina jsou navzájem konjugované, jsou tedy předmětovou a obrazovou rovinou. Paprsky vycházející z bodu v rovině $\varrho_1$ se protnou v rovině $\varrho_2$.




Obr. 8.17 Význam přenosové matice s $B = 0$. Roviny $\varrho_1$ a $\varrho_2$ jsou konjugované.

3) $A = 0, \quad y_2 = B\Theta_1.$

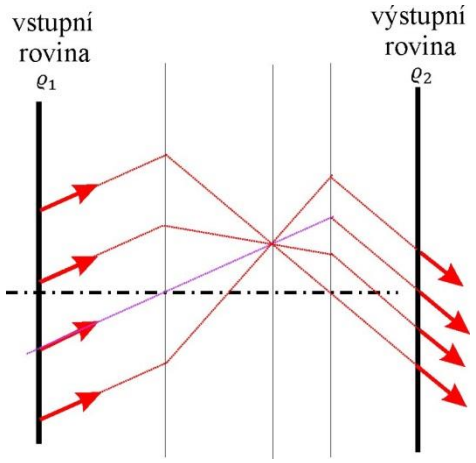
Paprsky, které jsou na vstupní rovině rovnoběžné, se protnou v jednom bodě výstupní roviny. Výstupní rovina je obrazovou ohniskovou rovinou.




Obr. 8.18 Význam přenosové matice obsahující $A = 0$. Výstupní rovina je obrazovou ohniskovou rovinou.

4) $C = 0, \quad \Theta_2 = D\Theta_1.$

Rovnoběžné vstupující paprsky vystupují jako rovnoběžné pod jiným úhlem. Takové soustavě říkáme teleskopická nebo konfokální, protože ji lze realizovat spojením dvou soustav, pro které je obrazové ohnisko první soustavy totožné s předmětovým ohniskem druhé soustavy.




Obr. 8.19 Význam přenosové matice s $C = 0$; teleskopické (konfokální) uspořádání

### 8.2.2.3 Lom na kulové ploše v paraxiální aproximaci

Základní vztahy v paraxiální aproximaci a s ohledem na znaménka orientovaných úhlů podle obr. 8.20 jsou

$$\Phi = \Theta_1 + \Theta_\mathrm{i}, \qquad \Phi = \Theta_2 + \Theta_\mathrm{t}, \qquad \Phi = \frac{y_1}{R} = \frac{y_2}{R}, \quad y_1 = y_2 = y_h, \qquad (8.40)$$

$$n_1\Theta_\mathrm{i} = n_2\Theta_\mathrm{t},$$

kde veličiny z předmětového prostoru jsou označeny indexy 1 a odpovídající veličiny obrazového prostoru indexy 2.

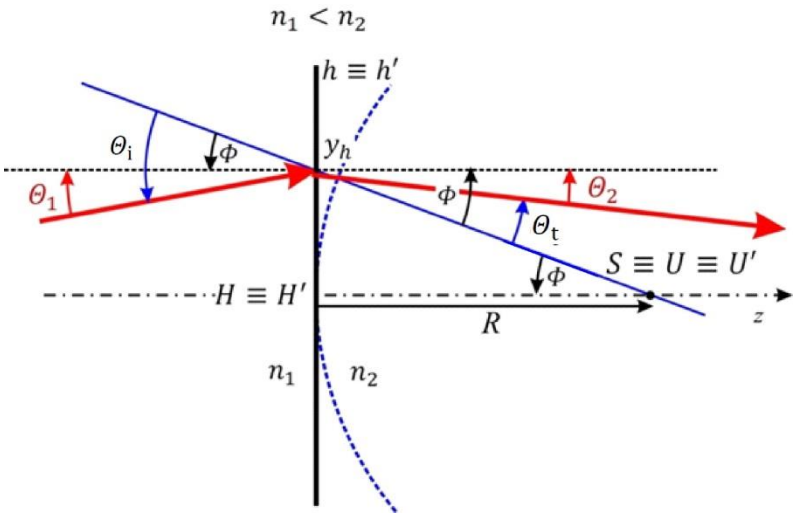
Z uvedených vztahů dostaneme pro úhel $\Theta_2$

$$\Theta_2 = \Phi - \Theta_\mathrm{t} = \Phi - \frac{n_1}{n_2}\Theta_\mathrm{i} = \Phi - \frac{n_1}{n_2}(\Phi - \Theta_1) =$$

$$= \Phi\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) + \frac{n_1}{n_2}\Theta_1 = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{y_2}{R} + \frac{n_1}{n_2}\Theta_1 .$$

Totéž zapsáno pomocí přenosové matice $ABCD$

$$\begin{pmatrix} y_h \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_h \\ \Theta_1 \end{pmatrix} = \mathbb{T}_{LOM} \cdot \begin{pmatrix} y_h \\ \Theta_1 \end{pmatrix}.$$




Obr. 8.20 Lom paprsku na kulové ploše v paraxiální aproximaci v tangenciální rovině. Rozměry a úhly zakreslené na obrázku z důvodu názornosti nesplňují požadavky paraxiální aproximace. Znaménka úhlů na obrázku:

$\Theta_1 < 0$ od dopadajícího paprsku ke směru optické osy,
$\Theta_2 > 0$ od lomeného paprsku ke směru optické osy,
$\Phi > 0$ od normály kulové plochy k optické ose,
$\Theta_\mathrm{i} > 0$ od normály kulové plochy k dopadajícímu paprsku,
$\Theta_\mathrm{t} > 0$ od normály kulové plochy k lomenému paprsku,
$R > 0$ od kulové plochy do středu, zleva doprava.

Použijme přenosovou matici pro lom na kulové ploše v paraxiální aproximaci pro stanovení obrazové ohniskové vzdálenosti $f'$ z podmínek $\Theta_1 = 0$ (vstupují paprsky rovnoběžné s optickou osou) a $\Theta_2 = \frac{y_h}{f'}$ (vystupující paprsek směřuje do obrazového ohniska bez ohledu na velikost $y_h$)

$$\Theta_2 = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R}\, y_h = \frac{y_h}{f'}, \qquad \frac{1}{f'} = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R}. \tag{8.41}$$

Podobně z podmínky $\Theta_2 = 0$ dostaneme z přenosové matice pro předmětovou ohniskovou vzdálenost vztahy

$$0 = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R}\, y_h + \frac{n_1}{n_2}\,\Theta_1 = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R}\, y_h + \frac{n_1}{n_2}\,\frac{y_h}{f},$$
$$\Theta_1 = \frac{y_h}{f} = -\frac{n_2}{n_1}.\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R}\, y_h = -\frac{n_2}{n_1}\,\frac{y_h}{f'}, \tag{8.42}$$
$$\frac{1}{f} = -\frac{n_2}{n_1}\,\frac{1}{f'}, \qquad f' = -\frac{n_2}{n_1}\, f.$$

Vezměme případ podle obrázku 8.20: $n_1 < n_2$ a $R > 0$. Pak je

$$1 - \frac{n_1}{n_2} > 0, \quad \frac{1}{f'} = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R} > 0, \quad f' > 0$$

a obrazové ohnisko $F'$ se nachází napravo od vrcholu kulové lomné plochy a předmětové ohnisko $F$ je nalevo od lomné plochy, protože $f < 0$.

### 8.2.2.4 Paraxiální zobrazení jednou lomnou plochou

Ve vzdálenosti $l_1$ před hlavní rovinou lomné kulové plochy umístíme předmět $P$ a budeme hledat, kde dojde k vytvoření jeho obrazu $P'$. Obecný paprsek procházející bodem $P$ charakterizujme vektorem $\begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix}$, kde různé úhly $\Theta$ tvoří vějíř paprsků procházejících bodem $P$. Příslušnou **přenosovou matici zobrazení** sestavujeme tak, že postupně násobíme matice působící na jednotlivé úseky chodu paprsků. Přenosovou matici pro lineární část paprsku z $P$ do místa na hlavní rovině označme $\mathbb{T}_{l_1}$, lom na kulové ploše je popsán maticí $\mathbb{T}_{LOM}$ a cesta paprsku z lomné plochy do místa vzdáleného $l_2$ je popsána maticí $\mathbb{T}_{l_2}$ Pro bod v libovolné rovině 2, kterým prochází paprsek vycházející z $P$ pod úhlem $\Theta$ , napíšeme

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \mathbb{T}_{l_2} \cdot \left(\mathbb{T}_{LOM} \cdot \mathbb{T}_{l_1}\right) \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix}$$

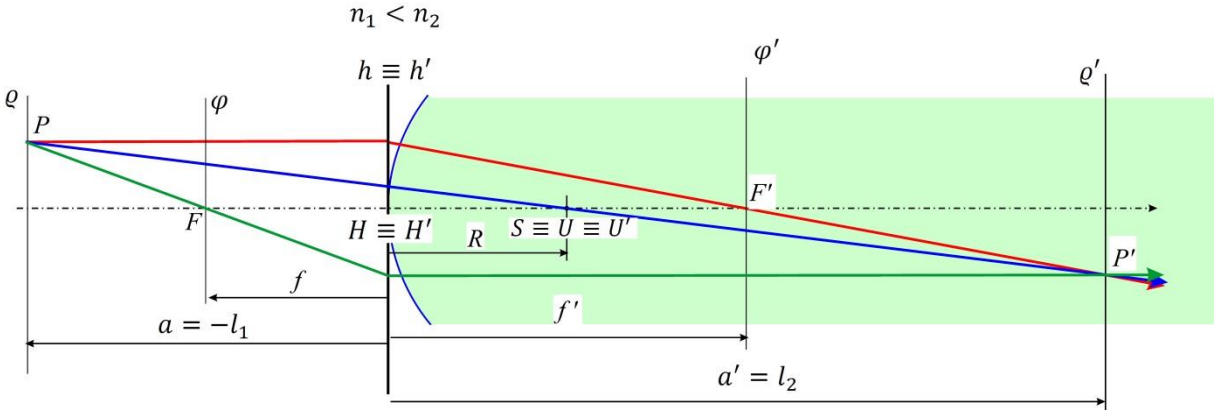
$$= \left[ \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -l_1 \\ \frac{1}{f'} & \frac{-l_1}{f'} + \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix} = \tag{8.43}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_2}{f'} & -l_1 - l_2 \frac{n_i}{n_t} + \frac{l_1 l_2}{f'} \\ \frac{1}{f'} & \frac{-l_1}{f'} + \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix}.$$

Zatím jsme při sestavování matice nevyužili podmínku zobrazení a uvedená matice (8.43) popisuje stav paprsku procházejícího bodem $P$ v libovolné rovině v obrazovém prostoru, která je od lomné plochy vzdálená $l_2$. Podmínkou zobrazení je setkání paprsků vycházejících z bodu $P$ pod **různými** úhly $\Theta$. Poloha obrazu $P'$ o souřadnici $y'$ nesmí záviset na úhlech $\Theta$.

$$y' = Ay + B\Theta,$$

takže jako podmínku bodového zobrazení požadujeme $B = 0$.




Obr. 8.21 Zobrazení jednou kulovou lomnou plochou v paraxiální aproximaci v meridiální rovině

Jestliže umístíme předmět do roviny ve vzdálenosti $l_1 = -a$ před hlavní rovinu lomné plochy, bude konjugovaná obrazová rovina ve vzdálenosti $l_2 = a'$ splňovat podmínku $B = 0$, když

$$a - a\frac{a'}{f'} - a'\frac{n_1}{n_2} = 0. \tag{8.44}$$

To nastane, jestliže je splněno

$$a'\left(\frac{a}{f'} + \frac{n_1}{n_2}\right) = a, \qquad a'\left(\frac{a}{f'} - \frac{f}{f'}\right) = a, \qquad f = -\frac{n_1}{n_2} f', \tag{8.45}$$

$$\frac{a'}{f'} = \frac{a}{a-f}, \qquad \frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1,$$

což je Gaussova zobrazovací rovnice, se kterou jsme se setkali v části 8.2.1.

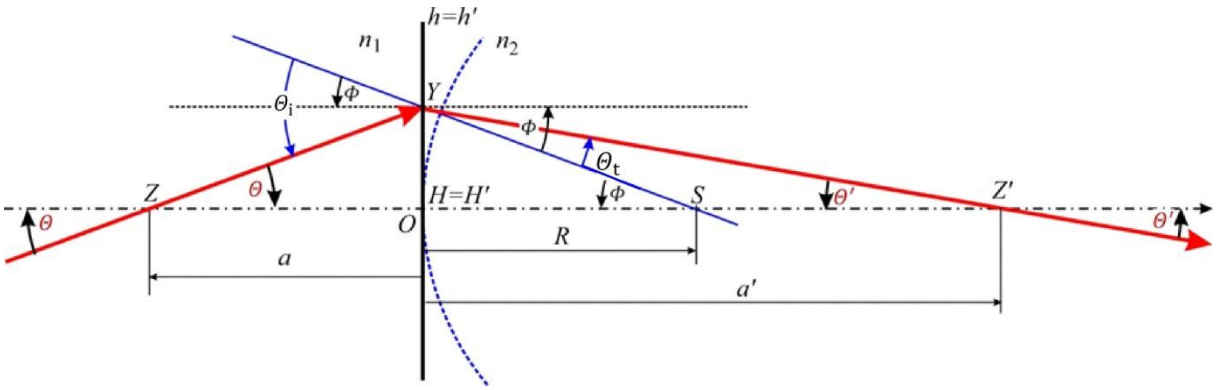
Pro matici zobrazení jednou lomnou plochou můžeme napsat

$$\begin{pmatrix} y' \\ \Theta' \end{pmatrix} = [\mathbb{T}_{a'} \cdot (\mathbb{T}_{LOM} \cdot \mathbb{T}_{-a})] \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix} = \mathbb{T}_{ZL} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{a'}{f'} & 0 \\ \dfrac{1}{f'} & \dfrac{a}{f'} + \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix}. \tag{8.46}$$

***Abbeův invariant paraxiální optiky***

Zákon lomu na kulové ploše v paraxiální aproximaci bývá v literatuře prezentován ve tvaru Abbeova invariantu paraxiální optiky. Ten je formulován pomocí souřadnic bodu na optické ose $a$ a jeho obrazu $a'$.




Obr. 8.22 K odvození Abbeova invariantu paraxiální optiky

S ohledem na znaménka úhlů (na obr. 8.22 $\Theta < 0,\ \Theta' > 0,\ a < 0$) a zákon lomu v paraxiální aproximaci

$$\begin{gathered} \Theta_\mathrm{i} = \Phi - \Theta, \qquad \Theta_\mathrm{t} = \Phi - \Theta', \\ n_1 \Theta_\mathrm{i} = n_2 \Theta_\mathrm{t}, \\ y_h = y_h' = R\Phi = a\Theta = a'\Theta', \\ n_1 \left( \frac{y_h}{R} - \frac{y_h}{a} \right) = n_2 \left( \frac{y_h}{R} - \frac{y_h}{a'} \right). \end{gathered} \tag{8.47}$$

Vztah mezi veličinami **před** rozhraním a **za** rozhraním

$$n_1 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left( \frac{1}{a'} - \frac{1}{R} \right) \tag{8.48}$$

je nazýván **Abbeův invariant paraxiální optiky**. Z něho lze přímo odvodit zobrazovací rovnici

$$\frac{n_1}{a} - \frac{n_2}{a'} = \frac{n_1 - n_2}{R}, \tag{8.49}$$

$$\frac{n_1 R}{(n_1 - n_2)a} - \frac{n_2 R}{(n_1 - n_2)a'} = 1$$

a při zavedení ohniskových vzdáleností

$$f = \frac{-n_1 R}{n_2 - n_1}, \qquad f' = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$$

je opět

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1.$$

### 8.2.2.5 Přenosová matice $ABCD$ tenké čočky

Pod čočkou budeme nyní rozumět spojení dvou kulových lomných ploch různých poloměrů křivosti. V paraxiální aproximaci kulového rozhraní jsme položili předmětovou i obrazovou hlavní rovinu do vrcholu kulové plochy. Výrazy charakterizující čočku se velmi zjednoduší, jestliže použijeme myšlený model zvaný „**tenká čočka.**“ Základní zjednodušení spočívá v tom, že ztotožníme hlavní předmětovou a hlavní obrazovou rovinu. Tedy všechny vzdálenosti mezi hlavními rovinami jsou nulové, čehož využijeme při sestavování přenosové matice.

Přenosovou matici v **modelu tenké čočky** získáme vynásobením matic obou rozhraní $\mathbb{T}_2 \cdot \mathbb{T}_1$, aniž bychom zahrnuli do výpočtu dráhu paprsku od jednoho rozhraní k druhému a též $y_1 = y_2 = y_h$.

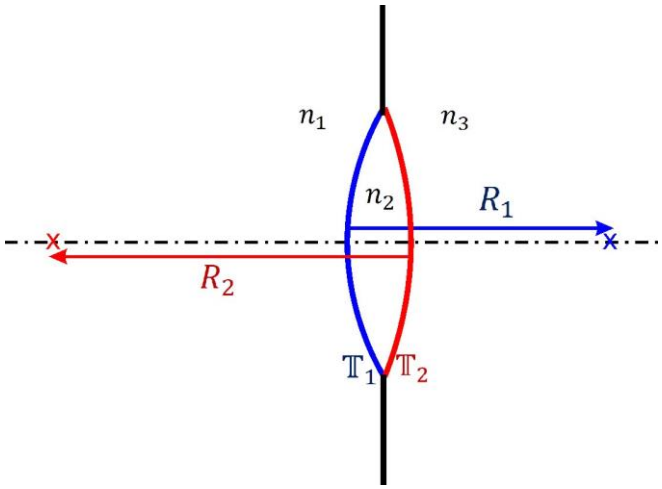
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_h \\ \Theta_2 \end{pmatrix} &= \mathbb{T}_{tč} \cdot \begin{pmatrix} y_h \\ \Theta_1 \end{pmatrix} = (\mathbb{T}_2 \cdot \mathbb{T}_1) \cdot \begin{pmatrix} y_h \\ \Theta_1 \end{pmatrix} = \\ &= \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_2'} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_1'} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} y_h \\ \Theta_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_1'}\frac{n_2}{n_3} & \frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_h \\ \Theta_1 \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{8.50}$$

kde souřadnice bereme v hlavní rovině před a za tenkou čočkou a kde

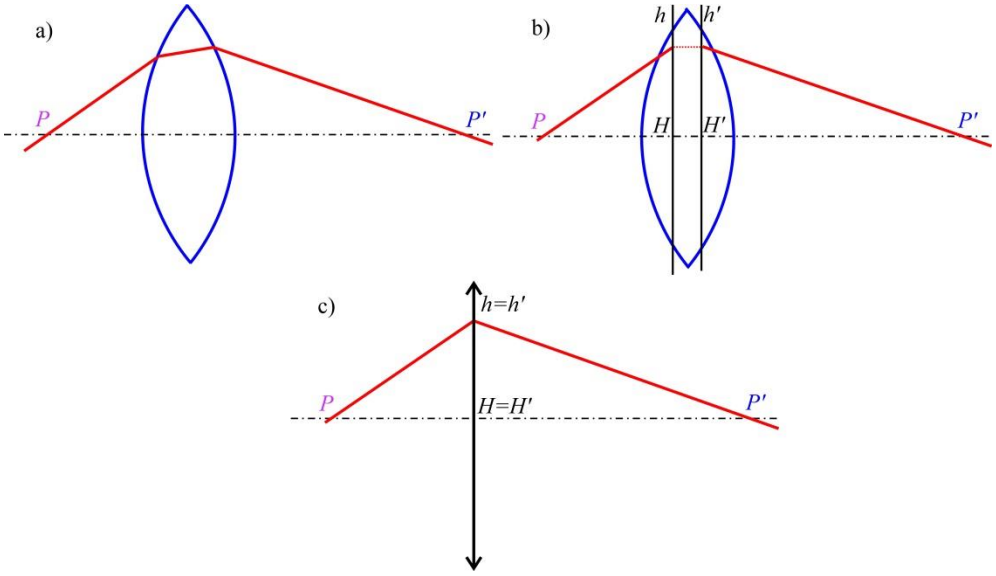
$$\begin{aligned}\frac{1}{f_1'} &= \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R_1}, \qquad \frac{1}{f_2'} = \left(1 - \frac{n_2}{n_3}\right)\frac{1}{R_2}, \\ \frac{1}{f'} = C &= \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_1'}\frac{n_2}{n_3} = \left(1 - \frac{n_2}{n_3}\right)\frac{1}{R_2} + \frac{n_2}{n_3}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R_1}, \\ \frac{1}{f} &= -\frac{n_3}{n_1}\frac{1}{f'}.\end{aligned} \tag{8.51}$$

Pro častý případ čočky ve vzduchu ($n_1 = n_3 = 1$) dostaneme obvykle prezentovanou **čočkovou rovnici** pro tenkou čočku

$$\frac{1}{f'} = (1-n_2)\frac{1}{R_2} + (n_2-1)\frac{1}{R_1} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)(n_2-1) = -\frac{1}{f}. \qquad (8.52)$$




Obr. 8.23 Parametry pro přenosovou matici čočky. V tomto obrázku je $R_1 > 0$ a $R_2 < 0$.




Obr. 8.24 a) Schématické znázornění chodu paprsků v čočce, b) paraxiální model reálné („tlusté“) čočky a c) model tenké čočky

### 8.2.2.6 Paraxiální zobrazení tenkou čočkou

Maticové vyjádření pro zobrazení tenkou čočkou dostaneme analogicky k zobrazení jednou lomnou plochou tak, že zahrneme i dráhu paprsku od předmětu k čočce a od čočky k rovině 2

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \mathbb{T}_{za\ tč} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} = [\mathbb{T}_{l2} \cdot (\mathbb{T}_{tč} \cdot \mathbb{T}_{l1})] \cdot \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & \frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right\} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix} = \tag{8.53}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_2}{f'} & \frac{l_1 l_2}{f'} - l_1 - l_2 \frac{n_1}{n_3} \\ \frac{1}{f'} & -\frac{l_1}{f'} + \frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix}.$$

Podmínka pro setkání paprsků procházejících bodem $P$ s různými úhly $\Theta$ v místě $P'$ implikuje $B = 0$

$$\frac{l_1 l_2}{f'} - l_1 - l_2 \frac{n_1}{n_3} = 0, \tag{8.54}$$

neboli v Gaussových souřadnicích $l_2 = a'$ a $l_1 = -a$ a též $f = -\frac{n_1}{n_3} f'$

$$\frac{-aa'}{f'} + a - a' \frac{n_1}{n_3} = 0, \qquad \frac{-aa'}{f'} + a + a' \frac{f}{f'} = 0, \qquad \frac{a}{f} + \frac{a'}{f'} = \frac{aa'}{ff'}, \tag{8.55}$$

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1 .$$

Pro konjugované dvojice $y', y$ a $\Theta', \Theta$ je matice zobrazení tenkou čočkou, která odděluje prostředí o indexech lomu $n_1$ a $n_3$,

$$\begin{pmatrix} y' \\ \Theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f' - a'}{f'} & 0 \\ \frac{1}{f'} & \frac{n_1}{n_3} \frac{f'}{f' - a'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{f - a} & 0 \\ -\frac{n_1}{n_3} \frac{1}{f} & \frac{n_1}{n_3} \frac{f - a}{f} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix}. \tag{8.56}$$

Pro čočku obklopenou z obou stran stejným prostředím o indexu $n_1$ je $f' = -f$ a dostaneme

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}. \tag{8.57}$$

Pro určení vzdálenosti uzlových a hlavních bodů můžeme využít podobnosti trojúhelníků $PZU$ a $P'Z'U'$ (obr. 8.25)

$$\frac{a' - \Delta u}{a - \Delta u} = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f - a} = \frac{f' - a'}{f'}. \tag{8.58}$$

Úpravou dostaneme

$$a' \Delta u = a' f' - a f' + a a' \ | \times f ,$$

$$a \, \Delta u = a f - a' f + a a' \ | \times f',$$

$$a' f \, \Delta u = a' f f' - a f f' + a a' f \ ,$$

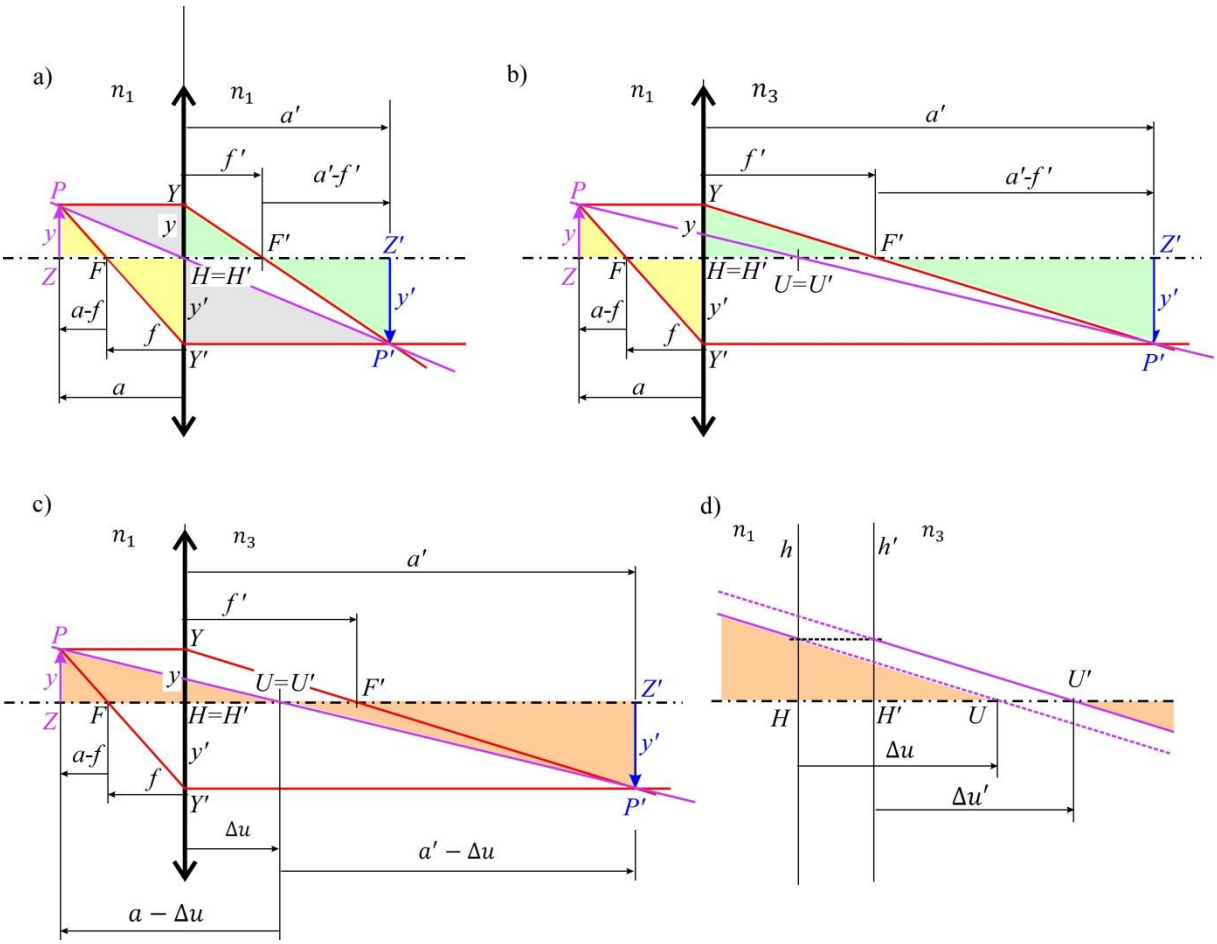
$$af'\Delta u = aff' - a'ff' + aa'f' , \tag{8.59}$$

$$\Delta u\,(af' + a'f) = aa'(f + f')$$

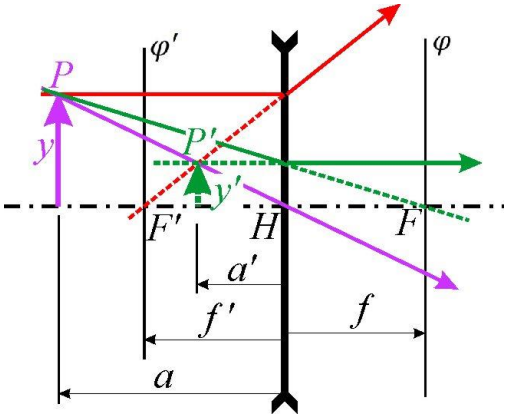
a zobrazovací rovnice zní $af' + a'f = aa'$, z čehož plyne

$$\Delta u = f + f'. \tag{8.60}$$

Spojná čočka splňuje $f < 0, f' > 0$, zatímco pro rozptylnou čočku platí $f > 0, f' < 0$. Spojné čočky se při zobrazování běžně používají samostatně, kdežto vlastnosti rozptylných čoček se zpravidla využívají ve složených zobrazovacích systémech, např. při korekci optických vad.



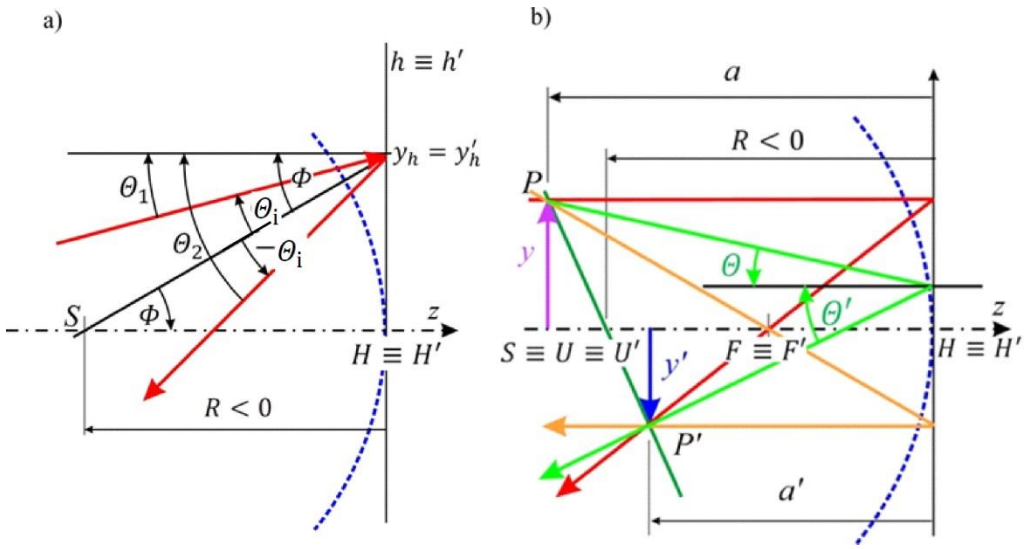

Obr. 8.25 Znázornění zobrazení tenkou spojnou čočkou. a) Pro $n_1 = n_3$, kdy hlavní a uzlové body splývají. b) Pro $n_1 \neq n_3$, kdy hlavní a uzlové body jsou různé. Vztah $\frac{y'}{y} = \frac{f}{f-a}$ plyne z podobnosti trojúhelníků $PZF$ a $Y'HF$ (žluté trojúhelníky) a vztah $\frac{y'}{y} = \frac{f'-a'}{f'}$ z podobnosti trojúheníků $P'Z'F'$ a $YHF'$ (zelené trojúhelníky). Pokud $n_1 \neq n_3$, nejsou přímky $PH$ a $H'P'$ rovnoběžné (v obrázku nezakresleno), takže nesplňují definici pro uzlové body a body $H$ a $H'$ nejsou body uzlové. c) Pro určení vzdálenosti uzlových bodů od hlavních bodů lze použít podobnosti trojúhelníků $PZU$ a $P'Z'U'$. Pro vzdálenosti platí $\Delta u = \Delta u' = \overline{HU} = \overline{H'U'} = f + f'$. d) Uvedený vztah platí i v obecnějším případě, kdy předmětová hlavní rovina a obrazová hlavní rovina nesplývají.




Obr. 8.25 e) Schéma zobrazení tenkou rozptylnou čočkou, $f = -f' > 0$. Na obrázku jsou zakresleny paprsky (nebo jejich prodloužení) procházející ohnisky a paprsek procházející uzlovým bodem. Čárkovaně jsou vyznačena prodloužení reálných chodů paprsků: v levé části, „před čočkou“ je to prodloužení paprsku pro znázornění průchodu obrazovým ohniskem $F'$ (červeně) a prodloužení paprsku pokračujícího „za čočkou“ rovnoběžně s osou (zeleně). V pravé části („za čočkou“) je čárkovaně naznačen původní směr zeleného paprsku směřujícího do předmětového ohniska $F$. Přitom je opět využito to, že v případě stejných indexů lomu na obou stranách čočky jsou uzlové body totožné s hlavními a navíc v aproximaci tenké čočky splývají obě hlavní roviny, tedy $H \equiv U \equiv H' \equiv U'$. Pro $a < f' < 0$ je obraz $P'$ virtuální a přímý.

### 8.2.2.7 Odraz na kulové ploše v paraxiální aproximaci

Přidržíme se znaménkové konvence, že kladný směr je určen kladným směrem osy $z$, bez ohledu na směr šíření paprsku před a po odrazu.




Obr. 8.26 a) Úhly pro paraxiální popis odrazu na dutém kulovém zrcadle v meridiální rovině. b) Zobrazení bodu $P$ odrazem na konvexním zrcadle. Pro paraxiální aproximaci jsou hlavní body totožné s vrcholem kulové plochy (průsečíkem optické osy s kulovou plochou) a uzlové body jsou totožné se středem kulové plochy.

Podobným postupem jako v případě lomu na plochách čočky nejprve odvodíme matici popisující pouze změnu směru při odrazu na kulové ploše podle obr. 8.26 a). Pak započteme

dráhy od předmětu k odrazové ploše a od odrazové plochy k obrazu. Podmínkou zobrazení je opět $B = 0$.

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \mathbb{T}_{zrcadlo} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix} = \mathbb{T}_{l2} \cdot (\mathbb{T}_R \cdot \mathbb{T}_{l1}) \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - {}^{2l_2}/_R & -l_1 + {}^{2l_1 l_2}/_R + l_2 \\ {}^{2}/_R & -{}^{2l_1}/_R - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix}. \tag{8.61}$$

Obecné vzdálenosti $l_1$ a $l_2$ nahradíme Gaussovými souřadnicemi $a$ a $a'$, z čehož dostaneme zobrazovací rovnici

$$a = -l_1 \ , \qquad a' = l_2 \ , \qquad f = f' = \frac{R}{2} < 0, \quad l_1 - l_2 = \frac{2l_1 l_2}{R}, \tag{8.62}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} = \frac{1}{f'} \ .$$

Pro duté zrcadlo je v naší znaménkové konvenci $R < 0$, takže obě ohniskové vzdálenosti jsou záporné $f = f' < 0$. Příčné zvětšení udává člen matice $A$

$$\frac{y'}{y} = 1 - \frac{2}{R}\ a' = \frac{f' - a'}{f'} = \frac{f}{f - a} \ . \tag{8.63}$$

### 8.2.2.8 Zvětšení při optickém zobrazení

Při optickém zobrazení rozlišujeme 3 typy zvětšení:

- příčné (transverzální) zvětšení $M_T$,
- podélné (longitudinální) zvětšení $M_L$
- a úhlové zvětšení $M_\Theta$.

$$M_T = \frac{y'}{y} \ , \qquad M_L = \frac{\Delta a'}{\Delta a}, \qquad M_\Theta = \frac{\mathrm{tg}\ \Theta'}{\mathrm{tg}\ \Theta}. \tag{8.64}$$

Význam těchto veličin ukážeme na modelu tenké čočky umístěné mezi prostředí $n_1$ a $n_3$. **Příčné zvětšení** udává člen matice $A$

$$M_T = \frac{y'}{y} = A = \frac{f' - a'}{f'} = \frac{f}{f - a}. \tag{8.65}$$

**Podélné zvětšení** můžeme odvodit zderivováním zobrazovací rovnice

$$a'f + af' = aa' \ , \qquad a' = \frac{-af'}{f - a} \ ,$$

čímž dostaneme

$$M_L = \frac{da'}{da} = -\frac{f'}{f - a} - \frac{af'}{(f - a)^2} = -\frac{ff'}{(f - a)^2} = \frac{n_3}{n_1}\ \frac{f^2}{(f - a)^2}. \tag{8.66}$$

**Úhlové zvětšení** je obecně definováno jako poměr tangent úhlů dvou **konjugovaných** přímek (jedna je obrazem druhé)

$$M_\Theta = \frac{\mathrm{tg}\,\Theta'}{\mathrm{tg}\,\Theta} \cong \frac{\Theta'}{\Theta}. \tag{8.67}$$

V paraxiální aproximaci $\mathrm{tg}\,\Theta' \cong \Theta'$ a $\mathrm{tg}\,\Theta \cong \Theta$ a úhlové zvětšení souvisí s členem $D$ matice $ABCD$

$$\begin{pmatrix} y' \\ \Theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \Theta \end{pmatrix},$$
$$M_\Theta = \frac{\Theta'}{\Theta} = D = \frac{n_1}{n_3}\frac{f'}{f'-a'} = \frac{n_1}{n_3}\frac{f-a}{f}\ , \tag{8.68}$$

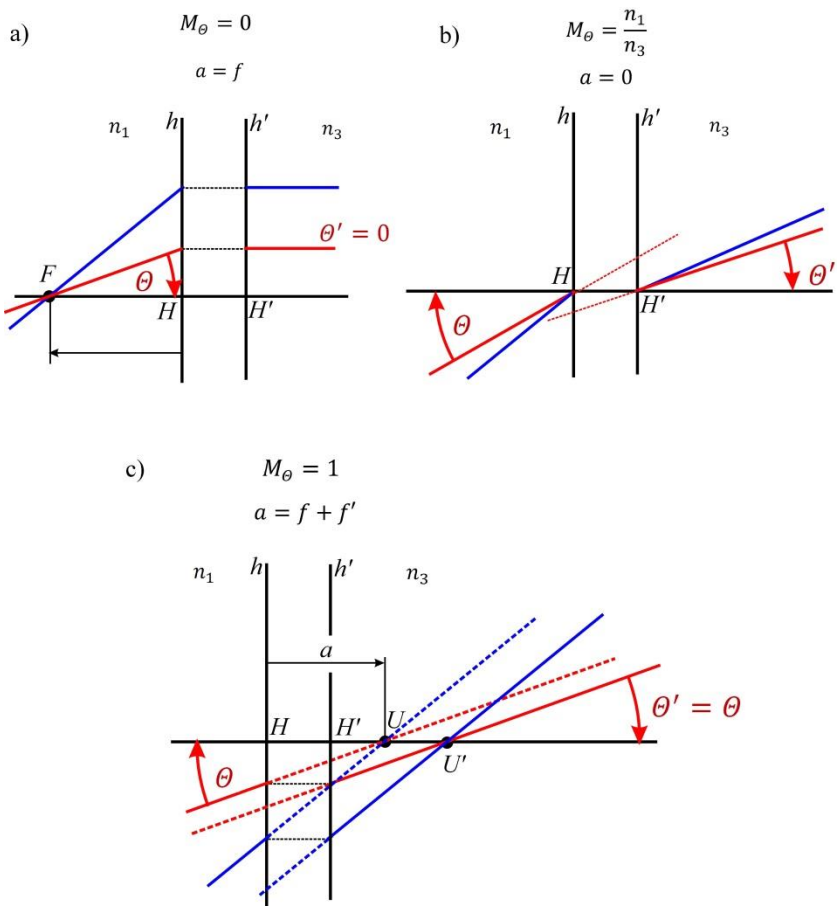
kde $a$ je Gaussova souřadnice **průsečíku předmětové přímky s optickou osou**. Úhlové zvětšení v paraxiální aproximaci závisí pouze na poloze průsečíku přímky s optickou osou a nikoli na úhlu, který přímka svírá s osou. Speciálně pro přímku procházející předmětovým ohniskem je $a = f$ a $M_\Theta = 0$. Pro $a = 0$ je $M_\Theta = \frac{n_1}{n_3}$, jak odpovídá zákonu lomu v průsečíku hlavní roviny a optické osy. Pro $a = f + f'$ dostaneme

$$M_\Theta = \frac{n_1}{n_3}\frac{f-f-f'}{f} = -\frac{n_1}{n_3}\frac{f'}{f} = \frac{n_1}{n_3}\frac{n_3}{n_1} = 1,$$

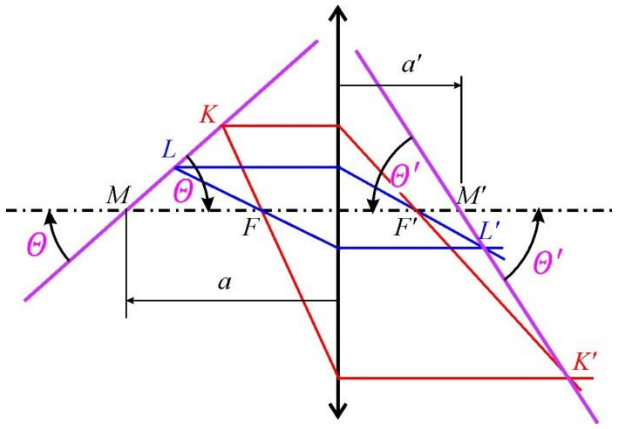
což se shoduje s definicí uzlového bodu.

Uvedená tři zvětšení nejsou nezávislá, ale splňují vztah

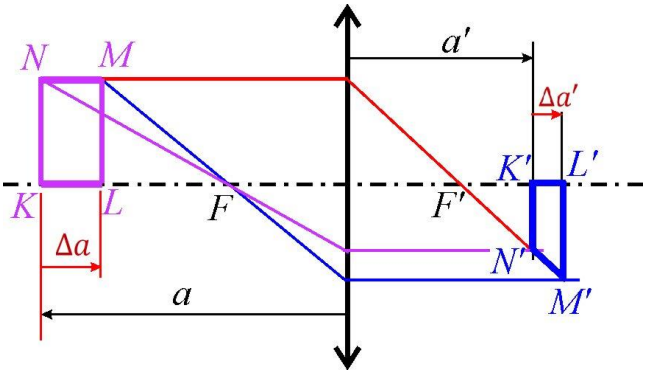
$$M_L\, M_\Theta = M_T,$$
$$M_T = \frac{n_3}{n_1}\frac{f^2}{(f-a)^2}\ \frac{n_1}{n_3}\frac{f-a}{f} = \frac{f}{f-a} = \frac{f'-a'}{f'}\ . \tag{8.69}$$




Obr. 8.27 Příklady úhlového zvětšení. a) Předmětová přímka prochází předmětovým ohniskem $M_\Theta = 0$. b) Předmětová přímka prochází hlavním bodem $M_\Theta = \frac{n_1}{n_3}$. c) Předmětová přímka prochází uzlovým bodem $M_\Theta = 1$.




Obr. 8.28 Znázornění úhlového zvětšení pro tenkou spojnou čočku ve vzduchu. Přímka $KLM$ svírá s optickou osou úhel $\Theta$ (v obrázku záporný) a její obraz $K'L'M'$ svírá úhel $\Theta'$ (v obrázku kladný).




Obr. 8.29 Znázornění podélného zvětšení pro tenkou spojnou čočku ve vzduchu. Obrazem obdélníka $KLMN$ o podélném rozměru $\Delta a$ je lichoběžník $K'L'M'N'$ podélného rozměru $\Delta a'$.

## 8.3 Důležité optické soustavy

Základní přirozenou zobrazovací soustavou pro člověka je **oko**. Jde o poměrně složitou optickou soustavu, jejíž základní úlohou je vytvořit na sítnici reálný obraz objektů nacházejících se v prostoru před okem. Vzhledem k limitům zobrazení, které tato soustava má, došlo historicky ke konstrukci doplňkových optických přístrojů, jejichž cílem je zlepšit pozorování blízkých předmětů (**lupa**, **mikroskop**) a předmětů vzdálených (**dalekohled**). Výsledná optická soustava (doplňkový přístroj + oko) zobrazuje pozorované předměty na sítnici oka pod větším zorným úhlem než oko samotné. Zvětšení optického přístroje $\Gamma = \frac{\vartheta'}{\vartheta}$ je dáno poměrem zorného úhlu $\vartheta'$, pod nímž je předmět viděn v přístroji neakomodovaným okem, a zorného úhlu $\vartheta$, pod nímž je viděn okem bez přístroje. Jedná se o úhlové zvětšení, které porovnává úhly paprsků vycházejících z jednoho mimoosového bodu předmětu při zobrazení dvěma různými optickými soustavami (oko bez přístroje a s přístrojem). Je to tedy zcela jiná veličina než úhlové zvětšení při optickém zobrazení $M_\Theta$, které porovnává pod jakým úhlem je zobrazena přímka svírající s optickou osou úhel $\Theta$ při zobrazení optickou soustavou. V případě lupy a mikroskopu je úhel $\vartheta$ obvykle stanoven pro dohodnutou (konvenční) zrakovou vzdálenost $L = 250\ \mathrm{mm}$, která se pokládá za optimální pro pozorování malých předmětů prostým okem. V dalším textu budeme příslušný úhel značit $\vartheta_L$. Pro vizuální pozorování jak v mikroskopu, tak v dalekohledu je optimální umístění oka do výstupní pupily optického přístroje.

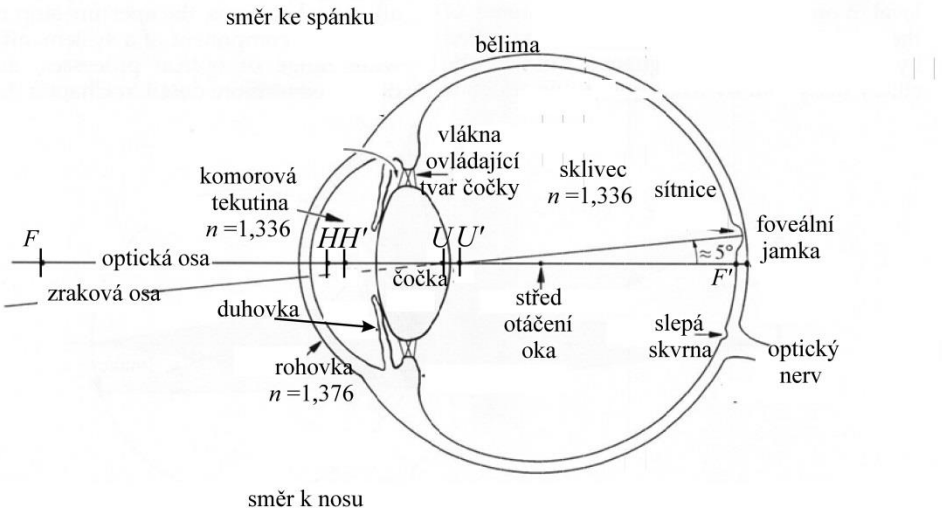
### 8.3.1 Oko

Oko je velmi komplexní orgán. Zde si jej popíšeme jen z hlediska paprskové optiky. Základní vlastnosti určuje lom na rohovce s další korekcí čočkou uvnitř oka. Jako typické hodnoty pro paraxiální model můžeme uvést pro ohniskové vzdálenosti $f = -16{,}7\ \mathrm{mm}$ a $f' = 22{,}3\ \mathrm{mm}$. Skutečné vlastnosti se od paraxiálního modelu značně liší.

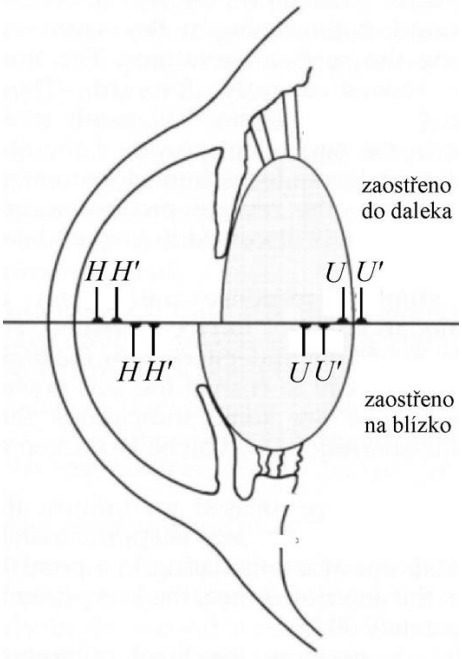
Pružnost čočky dovoluje vlastnosti mírně modifikovat. Při zaostření na vzdálené předměty je čočka „štíhlejší“, což zajišťují napjatá vlákna závěsného aparátu ovládající tvar čočky. Při

zaostření na blízké předměty se tah těchto vláken uvolní a pružné vlastnosti čočky zajistí, že se čočka více vyklene. Důsledkem je změna poloh hlavních a uzlových bodů a to tak, že předmětové hlavní body se posunou směrem ke středu oka, zatímco uzlové body se posunou opačným směrem. Tím je zajištěno, že i obraz blízkého předmětu vzniká v ploše sítnice, jejíž poloha je stabilní.

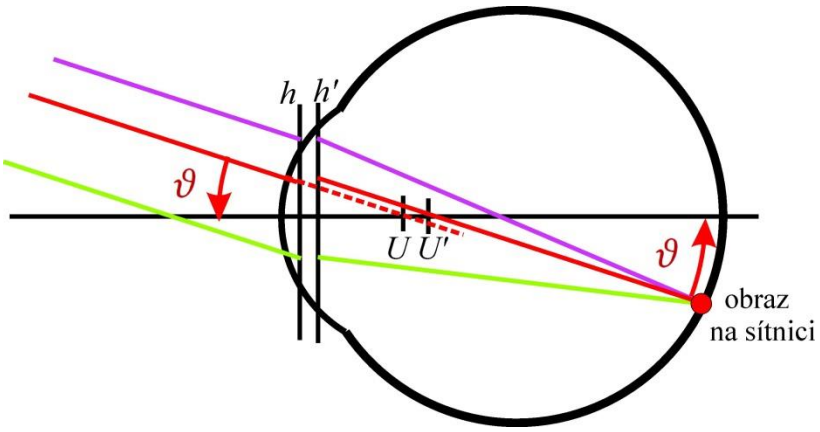
Oblast nejostřejšího a barevného vidění (velká plošná hustota čípků) je oblast foveální jamky a jejího okolí (makula – žlutá skvrna).




Obr. 8.30 Horizontální řez pravým okem. Nákres odpovídá oku zaostřenému na nekonečno.




Obr. 8.31 Akomodace oka změnou tvaru oční čočky

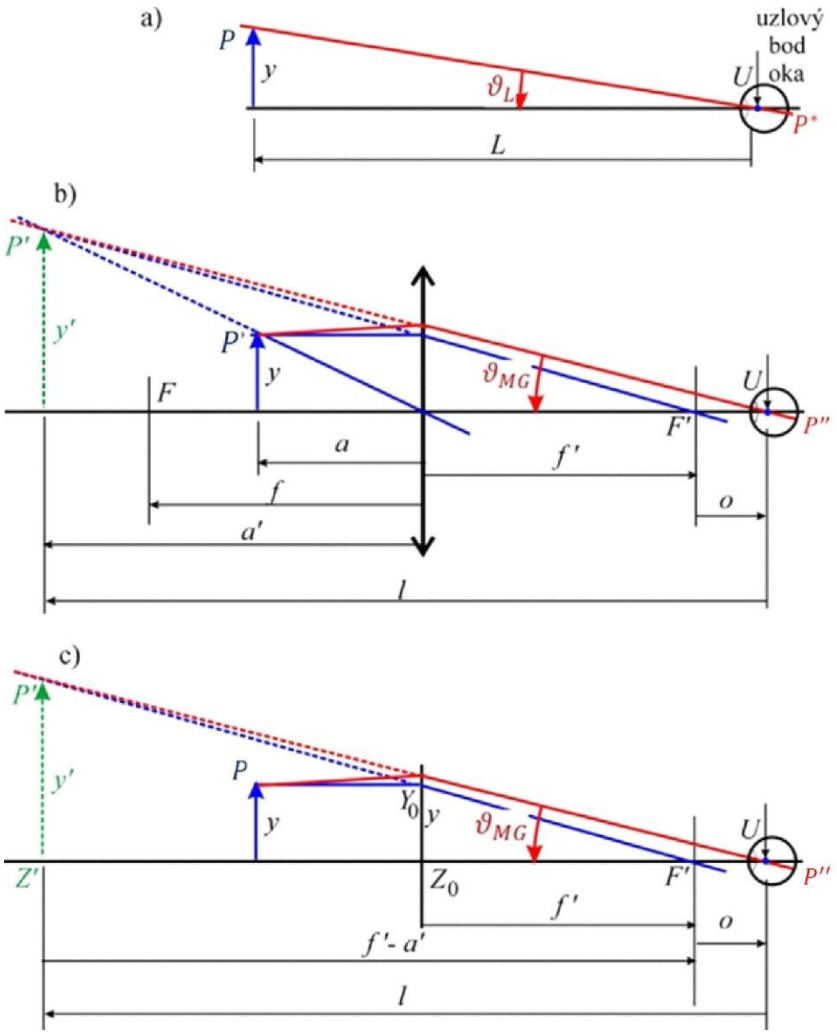



Obr. 8.32 Paraxiální konstrukce obrazu na sítnici od velmi vzdáleného předmětu. Velikost reálného obrazu na sítnici je úměrná úhlu $\vartheta$. Vrcholy těchto úhlů jsou v příslušných uzlových bodech.

### 8.3.2 Lupa

Nejjednodušší aplikací spojné čočky je zvětšovací sklo (lupa, magnifying glass MG), která zvětšuje obraz předmětu na sítnici v porovnání s pozorováním téhož předmětu $P$ prostým okem. Na sítnici je vytvořen reálný obraz $P^*$. Pro kvantifikaci zvětšení se úmluvou stanovuje konvenční zraková vzdálenost $L = 25$ cm, ze které oko pozoruje předmět bez lupy. V této vzdálenosti normální oko pozoruje na předmětu nejvíce detailů. Je to přibližně desetinásobek průměru oční bulvy. Rozměr obrazu $P^*$ na sítnici je úměrný úhlu $\vartheta_L$, pod kterým se předmět na sítnici promítá, obr. 8.33 a).

Spojná čočka umístěná ve vhodné vzdálenosti $|a| < |f|$ vytvoří virtuální obraz $P''$, který je okem pozorován pod úhlem $\vartheta_{MG}$. Změna úhlu závisí na ohniskové vzdálenosti čočky a na místě, kam čočku umístíme. Při pozorování se oko obvykle samovolně umístí a natočí tak, aby obraz padl na nejcitlivější část sítnice.




Obr.8.33 Schématický náčrtek funkce lupy. Vložením spojné čočky mezi pozorovaný předmět a oko pozorovatele změníme úhel, pod kterým se jeví velikost pozorovaného předmětu. Pro zjednodušení zakreslujeme pro uzlové body optické soustavy oka $U \equiv U'$.

a) Pozorování bez lupy. Na sítnici oka se promítá reálný obraz $P^*$. Úhlová velikost předmětu umístěného ve vzdálenosti $L$ od oka je $\vartheta_L$.
b) Spojná čočka ve funkci zvětšovacího skla vytvoří virtuální obraz $P'$ Úhlová velikost tohoto virtuálního obrazu při pozorování okem je $\vartheta_{MG}$. Na sítnici vznikne reálný obraz $P''$
c) Podobnost trojúhelníku $Y_0 Z_0 F'$ o odvěsnách $y, f'$ a trojúhelníku $P'Z'F'$ o odvěsnách $y', f' - a'$ vede ke vztahu pro příčné zvětšení $\frac{y'}{y} = \frac{f'-a'}{f'}$. V trojúhelníku $P'UZ'$ je určen úhel $\operatorname{tg} \vartheta_{MG} = \frac{y'}{l}$.

Z náčrtku na obr. 8.33 dostaneme

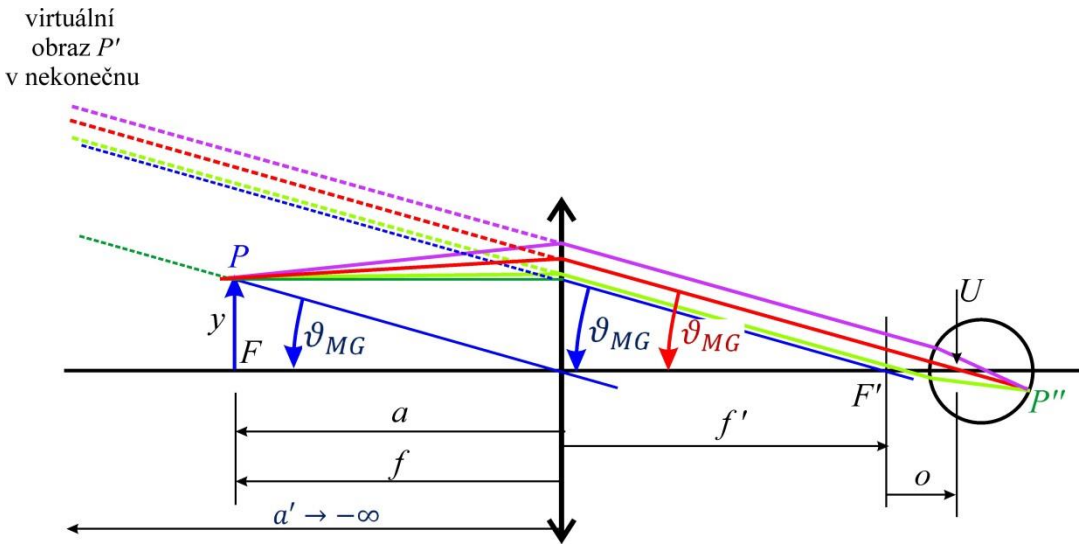
$$y = -L\,\vartheta_L\,, \qquad y' = -l\,\vartheta_{MG},$$
$$-l = f' - a' + o\,.$$

Zavedeme zvětšení zvětšovacího skla (lupy) poměrem úhlů

$$\Gamma_{MG} = \frac{\vartheta_{MG}}{\vartheta_L} = \frac{y'}{l}\,\frac{L}{y} = \frac{y'}{y}\,\frac{L}{l} = \frac{f'-a'}{f'}\,\frac{L}{l} = \frac{-(l+o)}{f'}\,\frac{L}{l} = \frac{L}{f}\left(1 + \frac{o}{l}\right). \tag{8.70}$$

Zvětšení lupy tedy závisí na ohniskové vzdálenosti použité spojné čočky a na polohách předmětu a oka.

Z praktického hlediska je velmi významný případ, kdy předmět umístěme do předmětového ohniska $a = f$.




Obr. 8.34 Lupa v režimu, kdy je pozorovaný předmět umístěn do předmětového ohniska. Je znázorněn chod paprsků vystupujících z předmětu $P$. Virtuální obraz $P'$ se nachází velmi daleko. Modré čáry představují paraxiální konstrukci pro $P'$. Do oka vstupuje rovnoběžný svazek reprezentovaný zeleným, červeným a fialovým paprskem. Červený paprsek prochází uzlovým bodem oka. Tento svazek vytváří na sítnici reálný obraz $P''$.

Zobrazení lupou podle obr. 8.34 vede k virtuálnímu obrazu v $a' \to -\infty$ a tedy i $l \to -\infty$. Paprsky vycházející z bodu předmětu vstupují do oka jako rovnoběžné a zvětšení podle (8.70) je

$$\Gamma_{MG,\infty}(a = f) = \frac{L}{f}. \tag{8.71}$$

Toto zvětšení nezávisí na poloze vzhledem k oku. Tento režim se využívá v řadě složitějších optických přístrojů (mikroskopy, teleskopy), kdy je tímto způsobem pozorován obraz vytvořený objektivem. Pak je ovšem „lupa“ nahrazena z důvodu minimalizace optických vad složitějšími soustavami čoček sestavenými jako okulár

## 8.3.3 Mikroskop

Větší užitečné zvětšení než s lupou lze získat přidáním další spojné soustavy (objektivu) před lupu, která se v mikroskopu nazývá okulár. V uspořádání podle obr. 8.35 objektiv mikroskopu s krátkou ohniskovou vzdáleností vytváří reálný zvětšený obraz $P'$, který můžeme pozorovat pomocí okuláru. Parametry pro objektiv označme indexem 1 a parametry pro okulár indexem 2. V terminologii mikroskopů je poloha obrazu $P'$ vyjádřena pomocí optického intervalu $\Delta$, což je vzdálenost od obrazového ohniska objektivu $F_1'$ k předmětovému ohnisku okuláru $F_2$. Do paraxiální zobrazovací rovnice můžeme dosadit $a_1' = \Delta + f_1'$.

Velikost $y_1'$ je určena příčným zvětšením objektivu v daném uspořádání. Z podobnosti trojúhelníků $Y_1H_1F_1'$ a $P'Z_1'F_1'$ plyne

$$\frac{y_1'}{\Delta} = -\frac{y_1}{f_1'}, \qquad M_{T,obj} = \frac{y_1'}{y_1} = -\frac{\Delta}{f_1'}.$$

Pokud je $P'$ umístěn v ohniskové rovině okuláru, je další zvětšení dáno velikostí $\Gamma_{\infty,okular}$. Stejně jako v případě lupy při vizuálním pozorování porovnáváme úhlové velikost předmětu, jak se jeví při pozorování mikroskopem oproti tomu, jaká by byla jeho úhlová velikost $\vartheta_L$ při pozorování pouhým okem z konvenční vzdálenosti $L = 250$ mm. V paraxiální aproximaci

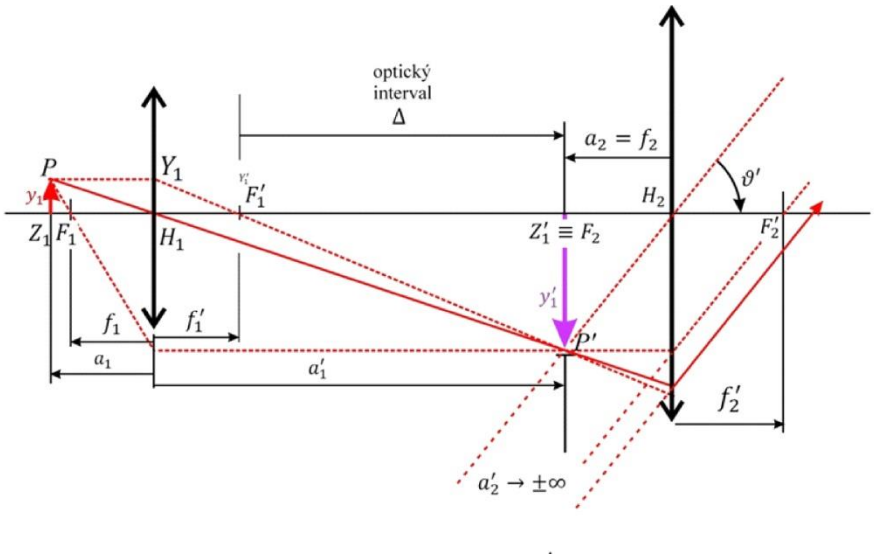
$$\vartheta_L = \frac{y_1}{L}, \quad \vartheta' = \frac{y_1'}{f_2}, \quad \Gamma_{mikroskop} = \frac{\vartheta'}{\vartheta_L} = \frac{y_1'}{f_2}\frac{L}{y_1} = -\frac{\Delta}{f_1'}\frac{L}{f_2}. \tag{8.72}$$

Obvykle je udávána absolutní hodnota celkového zvětšení mikroskopu při pozorování

$$\Gamma_{mikroskop} = \left|M_{T,obj}\Gamma_{\infty,okular}\right| = \left|\frac{L}{f_2}\frac{\Delta}{f_1'}\right|. \tag{8.73}$$

Optický interval $\Delta$ je dán konstrukcí mikroskopu spolu s patřičnými rozměry pro montáž objektivů a okulárů a je normován úmluvami, nejběžněji $\Delta = 160$ mm.

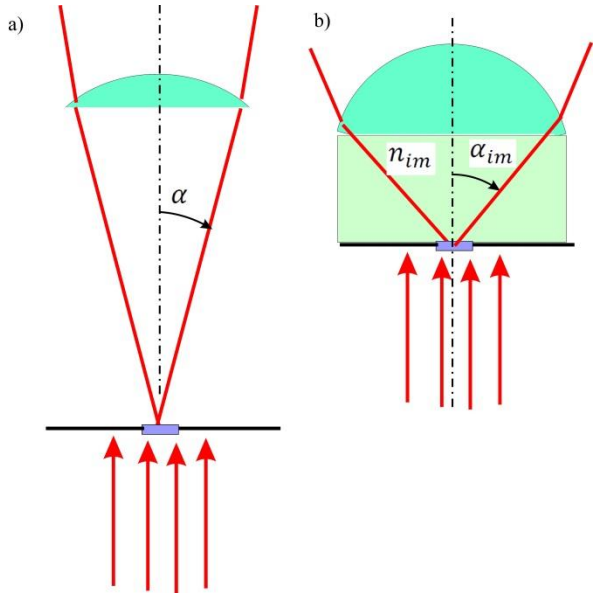
Velmi důležitou vlastností mikroskopu je schopnost **rozlišit detaily** pozorovaného objektu. To závisí na řadě faktorů, na vlastnostech objektu (hlavním působením objektu na procházející nebo odražené světlo je absorpce, rozptyl, rozdíly v indexu lomu uvnitř objektu apod.), způsob osvětlení (stupeň koherence osvětlení) a další. Z těchto důvodů byly vymyšleny různé modifikace mikroskopů.




Obr. 8.35 Základní idea uspořádání dvoustupňového čočkového mikroskopu. Je naznačen případ, že ve všech prostorách mezi čočkami (včetně prostoru vzorku) je index lomu 1. Čárkovaně je naznačena geometrická konstrukce zobrazení v paraxiální aproximaci.

I sebelepší vlastnosti zobrazovací soustavy z hlediska geometrické optiky však nepřekonají omezení daná difrakcí. Pro světelnost a difrakční limitu prostorového rozlišení mikroskopu je

velmi důležitou veličinou **numerická apertura** $NA = n \sin \alpha$, kde $n$ je index lomu v prostoru mezi pozorovaným vzorkem a první lámavou plochou objektivu. $\alpha$ je úhel mezi okrajovým a středovým paprskem vstupujícím do mikroskopu. Prostor mezi předmětem a první plochou první čočky lze vyplnit imerzní kapalinou a objektivy, které jsou k takovému uspořádání uzpůsobeny, jsou označovány jako imerzní. Podrobněji je o imerzním objektivu pojednáno v Poznámce P8.6




Obr.8.36 K pojmu numerická apertura mikroskopu. a) Do objektivu zaostřeného mikroskopu v prostředí s indexem lomu $n = 1$ dopadá světlo z kuželu s vrcholovým úhlem $\alpha$. Numerická apertura je v tomto případě $NA = \sin \alpha$. b) Prostor mezi vzorkem a objektivem je vyplněn prostředím s indexem lomu $n_{im} > 1$, $NA = n_{im} \sin \alpha_{im}$.

## 8.3.4 Dalekohled (teleskop)

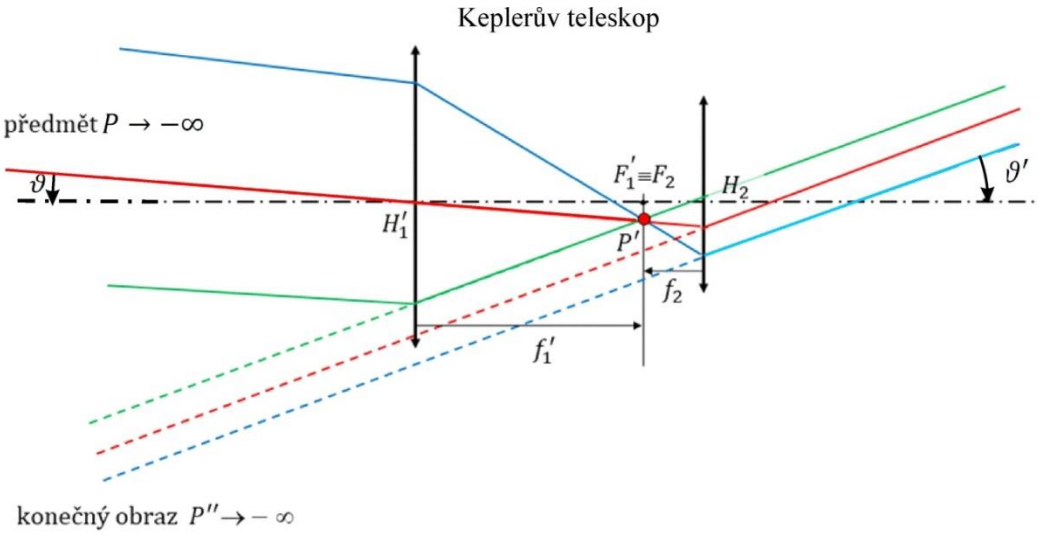
Dalekohled slouží ke zvětšení úhlu, pod kterým pozorujeme **vzdálené** objekty. Paprsky z dalekohledu dopadají do oka pod větším úhlem než bez něj. Dalekohled je konstruován jako konfokální sestava čoček či zrcadel. Princip čočkového dalekohledu je naznačen na obrázku 8.37. Tvoří jej v nejjednodušším uspořádání soustava dvou čoček. Objektiv je spojná čočka, do které dopadají ze vzdálených objektů téměř rovnoběžné paprsky (rovnoběžné v limitě $a \rightarrow -\infty$). Reálný obraz vzdáleného předmětu vzniká v obrazové ohniskové rovině objektivu, která je zároveň předmětovou ohniskovou rovinou okuláru, Okulár tvoří buď spojná čočka (**Keplerův** dalekohled) nebo rozptylná čočka (**Galileův** dalekohled)

Zvětšení dalekohledu v paraxiální aproximaci lze odvodit z trojúhelníků $F_1'P'H_1'$ a $F_1'P'H_2$ (obr. 8.37)

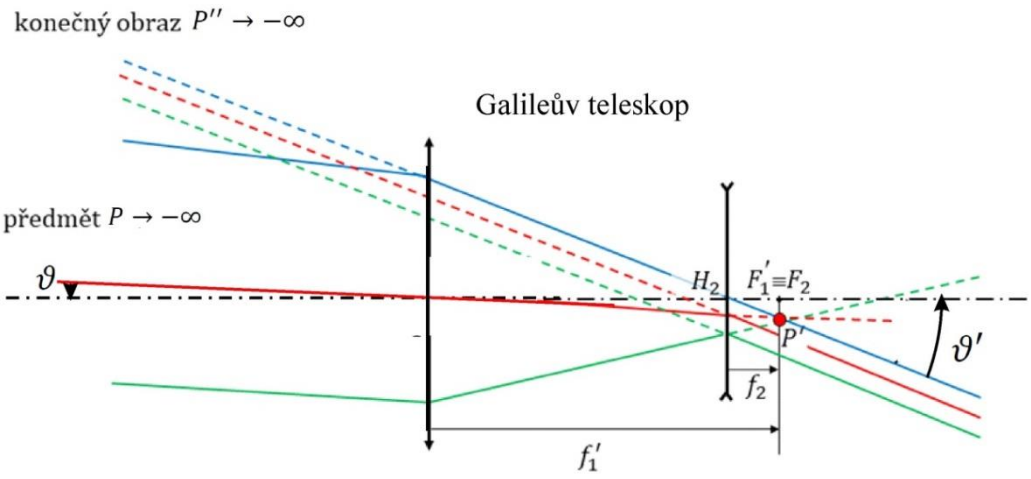
$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{y'}{f_1'} = \frac{\overline{F_1'P'}}{\overline{F_1'H_1'}}\,, \qquad \operatorname{tg}\vartheta' = \frac{y'}{f_2} = \frac{\overline{F_1'P'}}{\overline{F_1'H_2}} = \frac{\overline{F_1'P'}}{\overline{F_2H_2}}$$

$$\Gamma_{\text{teleskop}} = \frac{\vartheta'}{\vartheta} \cong \frac{\operatorname{tg}\vartheta'}{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{y'}{f_2}\,\frac{f_1'}{y'} = \frac{f_1'}{f_2}\,.$$

Pro úhel $\vartheta$, pod kterým pozoruje oko vzdálený předmět, platí obr. 8.33a. Vzhledem k tomu, že délka dalekohledu je zanedbatelná vůči vzdálenosti pozorovaného objektu, jde o stejný (téměř) úhel, pod kterým vstupují paprsky do objektivu dalekohledu (obr. 8.37). U obou dalekohledů je $f_1' > 0$, v případě Keplerova dalekohledu je $f_2 < 0$ a $\Gamma_{\text{teleskop}} < 0$ (vzniká převrácený obraz), u Galileova dalekohledu je $f_2 > 0$, $\Gamma_{\text{teleskop}} > 0$ (vzniká přímý obraz).

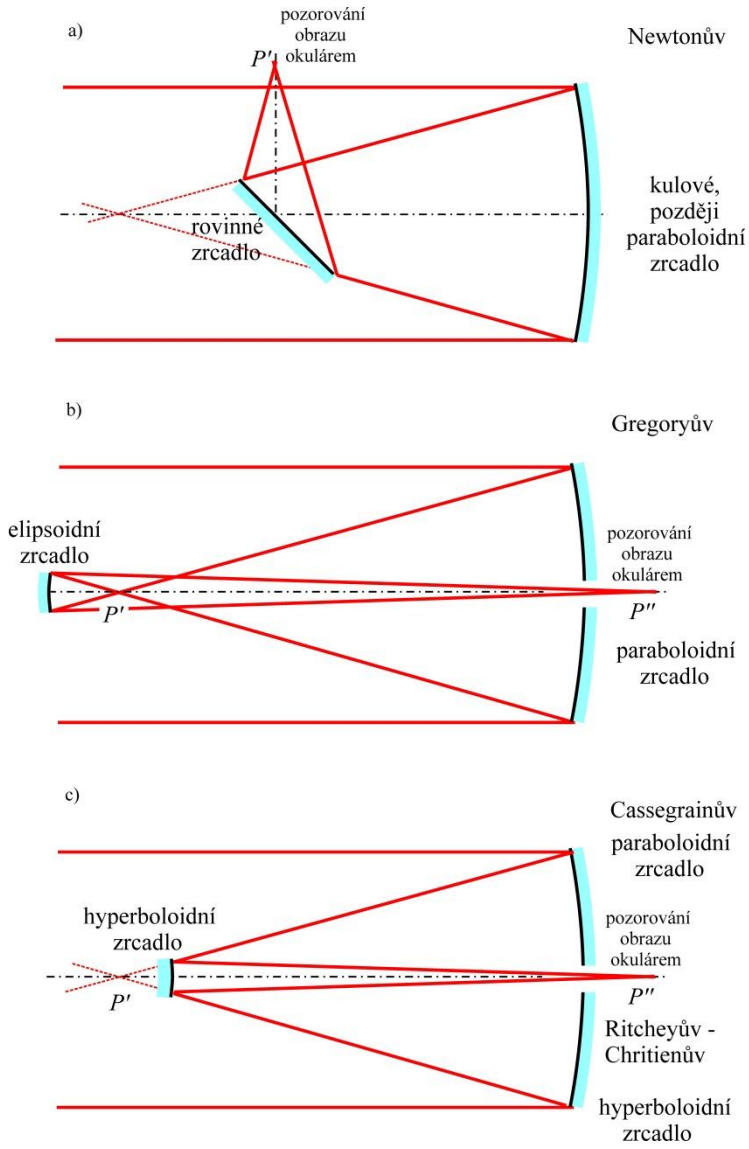



Obr. 8.37a Základní princip **Keplerova** čočkového teleskopu zaostřeného na nekonečně vzdálený předmět pro vizuální pozorování, kdy z okuláru vstupují do oka rovnoběžné svazky. Úhlové zvětšení je $\Gamma_\infty = \frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{f_1'}{f_2} < 0$. V tomto schématu je zakreslen **zvětšený** a **převrácený** virtuální obraz vzdáleného předmětu.




Obr. 8.37b Základní princip Galileova čočkového teleskopu zaostřeného na nekonečně vzdálený předmět pro vizuální pozorování, kdy z okuláru vstupují do oka rovnoběžné svazky. Úhlové zvětšení je $\Gamma_\infty = \frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{f_1'}{f_2} > 0$. V tomto schématu je zakreslen **zvětšený** a **přímý** virtuální obraz vzdáleného předmětu.

Zejména kvalitní astronomické dalekohledy jsou většinou zhotovovány kombinacemi reflexních asférických ploch (nekulové plochy, rotační paraboloidy a hyperboloidy). Hlavně kvalitní teleskopy jsou v posledních letech realizovány na základě schématu podle Ritchey a Chrétiena, kdy primární zrcadlo je duté hyperboloidní zrcadlo a sekundární zrcadlo je vypuklé hyperboloidní, obr. 8.38.

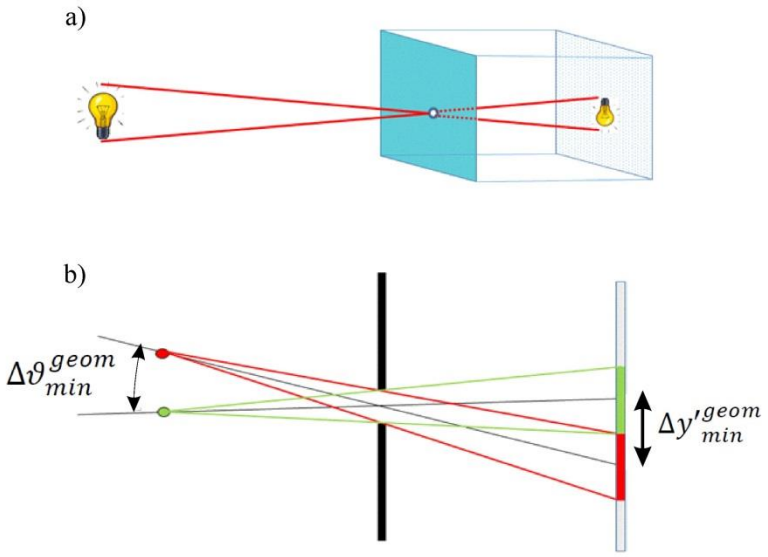



Obr. 8.38 Schémata základních typů zrcadlových teleskopů. a) Newtonův teleskop využíval v první verzi (1668) fokuzace kulovou odraznou plochou, v podějších verzích paraboloidní plochou. Obraz bylo možno sledovat okulárem. b) Gregoryův teleskop (první realizace podle Gregoryova návrhu Hook 1673) jako primární zrcadlo používá paraboloid vytvářející reálný obraz *P'* a ten je zobrazen do reálného obrazu *P''*. c) Cassegrainův systém používá k zobrazení virtuálního bodu P' pomocí reflexní hyperboloidní plochy do reálného P''. Dnes nejvíce používaný systém pro „velké" dalekohledy vychází z hyperboloidní plochy primárního zrcadla a dále je shodný s Cassegrainovým schématem. Je pojmenován podle jmen George Willis Ritchey a Henri Jacques Chrétien, Konstrukce byla realizována kolem roku 1910.

## 8.3.5 Fotoaparát

Fotoaparát je optický přístroj určený k vytváření obrazů reálných předmětů na plochu detektoru. Detektorem může být např. fotocitlivá vrstva filmu nebo matice detektorů. Předchůdcem fotoaparátu byla **camera obscura** (dírková komora), kde optický systém byl tvořen malým otvorem v nepropustné přepážce, kterým se snímaná scéna zobrazovala na plátno nebo stěnu místnosti. Vznikal tak zmenšený a převrácený obraz scény (obr. 8.39). Historicky

známý princip popsaný např. Aristotelem (350 př.n.l.) použil arabský učenec Ibn Al Haitham (1020) k důkazu, že světlo se šíří přímočaře.

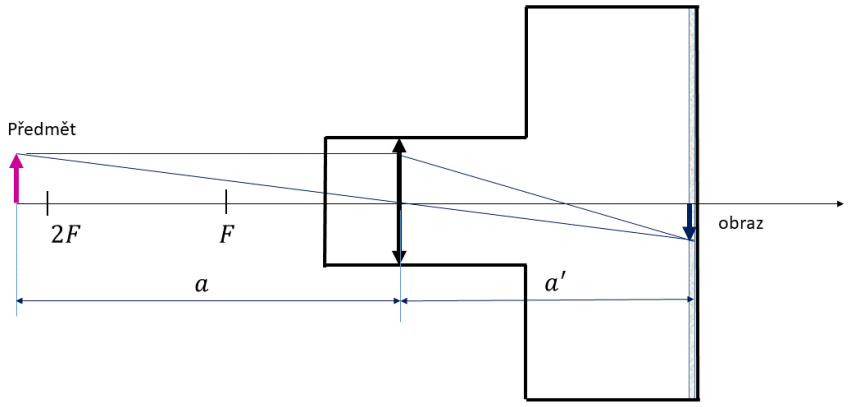



Obr. 8.39 Camera obscura a) Základní princip, b) minimální úhel rozlišení dvou bodů předmětu z hlediska geometrické optiky. V závislosti na velikosti vstupního otvoru přístroje je každý bod zobrazen jako kružnice. Minimální rozlišení je zde definováno podmínkou, aby se kružnice dvou sousedních rozlišitelných bodů nepřekrývaly.

Ostrost zobrazení závisí na velikosti vstupního otvoru. Z hlediska popisu pomocí geometrické optiky se každý bod předmětu zobrazuje jako kroužek, který je tím menší čím menší je vstupní otvor. Zmenšování otvoru tedy vede v geometrickém modelu ke zvýšení ostrosti obrazu. Z hlediska vlnového popisu však je třeba vzít v úvahu difrakci, kdy každý bod předmětu při zobrazení přes difrakční aperturu vytváří difrakční obraz. Rozlišení dvou bodů obrazu je pak limitováno Rayleighovým kritériem , obr. 6.24, kdy minimální rozlišitelný úhel a tím i minimální rozlišitelná vzdálenost dvou bodů obrazu je tím menší, čím větší je průměr vstupního otvoru). Optimálního rozlišení lze tedy dosáhnout zmenšováním vstupního otvoru do té míry, dokud se neprojeví difrakční jevy. Malý průměr otvoru má rovněž za následek malou intenzitu světla při zobrazení.

Ve fotoaparátu je místo vstupního otvoru optický systém zobrazující scénu na plochu fotografického filmu, který je v dnešních digitálních fotoaparátech nahrazen maticí detektorů tvořenou CCD (Charged Coupled Device) zobrazovacími elementy. V nich dochází k přeměně dopadajícího optického signálu na signál elektrický, který je pak dále elektronicky zpracován. Typický rozměr zobrazovacího elementu je 5x5 $\mu m^2$. Na rozdíl od camery obscury je apertura zobrazovací optiky co největší, aby byl minimální rozlišitelný úhel daný Rayleighovým kritériem co nejmenší. Optimální je zvolit takovou konstrukci optického systému fotoaparátu, aby rozlišení bylo limitováno pouze velikostí zobrazovacího elementu (prvek matice CCD detektoru, zrno fotografického filmu), nikoliv difrakčními jevy optického systému.

Základní princip zobrazení ve fotoaparátu je zobrazen na obr. 8.40 pro nejjednodušší případ, kdy optický systém tvoří jedna spojná čočka. Při změně polohy předmětu dochází k zaostření optického systému posunem čočky v objektivu tak, aby byla splněna Gaussova zobrazovací rovnice. Reálně se ve fotoaparátech využívá složitějších optických systémů sestávajících z řady čoček s cílem omezit vady zobrazení. V mobilních telefonech se dnes aplikuje uspořádání s několika objektivy s různou ohniskovou vzdáleností, které umožňují vytvoření ostrého obrazu předmětů různě vzdálených od vstupní apertury fotoaparátu.




Obr. 8.40 Fotoparát – jednoduché schéma zobrazení předmětu na detektor (fotocitlivý film, matice CCD detektorů)

## Poznámka P8.1 – Maxwellovy rovnice v nehomogenním materiálovém prostředí bez volných nábojů a proudů

### *Divergenční Maxwellovy rovnice*

Pole $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ a $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$ musí vyhovovat Maxwellovým rovnicím a materiálovým vztahům. Postup ukažme na divergenční rovnici pro elektrickou indukci v izotropním prostředí bez volných nábojů

$$\text{div}\,[\,\boldsymbol{D}(x,y,z,t)] = \varepsilon_0\,\text{div}\,[\varepsilon_r(x,y,z)\,\boldsymbol{E}(x,y,z,t)] = \varepsilon_0\,(\varepsilon_r\,\text{div}\,\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\cdot\text{grad}\,\varepsilon_r) = 0. \qquad \text{(P8.1.1)}$$

Pro názornost rozepišme ve složkách za použití vyjádření vlny pomocí eikonálu $\mathcal{S}(x,y,z)$, viz (8.3),

$$\text{div}\,(\varepsilon_r\,\boldsymbol{E}) = \left[\varepsilon_r\left(\frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + E_{0x}\,ik_0\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}\right) + \right.$$

$$+\varepsilon_r\left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial y} + E_{0y}\,ik_0\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}\right) + \varepsilon_r\left(\frac{\partial E_{0z}}{\partial z} + E_{0z}\,ik_0\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}\right)\Big]\,e^{ik_0\mathcal{S}}\,e^{-i\omega t} +$$

$$+\left(E_{0x}\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} + E_{0y}\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} + E_{0z}\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z}\right)e^{ik_0\mathcal{S}}\,e^{-i\omega t} = 0.$$

To můžeme napsat ve vektorovém formalismu s použitím **časově nezávislých amplitud** $\boldsymbol{E}_0\,(\boldsymbol{r})$. Pro pozdější užití vynásobíme obě strany rovnice koeficientem $\frac{1}{ik_0}$

$$\varepsilon_r(\boldsymbol{r})\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + ik_0\varepsilon_r(\boldsymbol{r})\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\ \cdot \mathrm{grad}\ \mathcal{S}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{grad}\ \varepsilon_r(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad |\times \frac{1}{ik_0},$$

$$\frac{1}{ik_0}\ [\varepsilon_r(\boldsymbol{r})\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{grad}\ \varepsilon_r(\boldsymbol{r})] + \varepsilon_r(\boldsymbol{r})\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\ \cdot \mathrm{grad}\ \mathcal{S}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{P8.1.2}$$

Zcela podobně můžeme naložit s rovnicí pro magnetickou indukci, což bude pro „nemagnetické“ prostředí jednodušší. Příslušné magnetické pole vlny je

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\ e^{ik_0\mathcal{S}(\boldsymbol{r})}\ e^{-i\omega t} \tag{P8.1.3}$$

a

$$\mathrm{div}\ \mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0\ [\mathrm{div}\ \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) + ik_0\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{grad}\ \mathcal{S}(\boldsymbol{r})]e^{ik_0\mathcal{S}}\ e^{-i\omega t} = 0,$$

$$\frac{1}{ik_0}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{grad}\ \mathcal{S}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{P8.1.4}$$

### *Rotační Maxwellovy rovnice*

Pro odvození důsledků plynoucích z rotačních Maxwellových rovnic použijeme vzorec, kde $a(\boldsymbol{r})$ je nějaká skalární funkce polohy a $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ je vektorová funkce polohy

$$\mathrm{rot}\ a\boldsymbol{A} = a\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} + (\mathrm{grad}\ a)\ \times \boldsymbol{A}.$$

Z rovnice

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{P8.1.5}$$

vyplývá pro nemagnetické prostředí $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{rot}\left[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\ e^{i[k_0\mathcal{S}(\boldsymbol{r})-\omega t]}\right] + \left[\mathrm{grad}\left(e^{i[k_0\mathcal{S}(\boldsymbol{r})-\omega t]}\right)\right] \times \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) =$$

$$= i\omega\mu_0\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\ e^{i[k_0\mathcal{S}(\boldsymbol{r})-\omega t]}, \tag{P8.1.6}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + ik_0\ [\mathrm{grad}\ \mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) - i\omega\mu_0\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) = 0,$$

tedy jsme opět dostali **časově nezávislou** rovnici pro amplitudy $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ a $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$ a grad $\mathcal{S}(\boldsymbol{r})$
Podělením této rovnice $k_0$ dostaneme

$$\frac{1}{k_0}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + i\ [\mathrm{grad}\ \mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) - i\frac{\omega}{k_0}\ \mu_0\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) = 0\ . \tag{P8.1.7}$$

Pro prostředí bez volných proudů je

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = [\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) + ik_0\ [\mathrm{grad}\ \mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) + i\omega\ \varepsilon_0\varepsilon_r(\boldsymbol{r})\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})]\ e^{ik_0\mathcal{S}}\ e^{-i\omega t} = 0, \tag{P8.1.8}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) + ik_0\ [\mathrm{grad}\ \mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) + i\omega\ \varepsilon_0\varepsilon_r(\boldsymbol{r})\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = 0\ ,$$

$$\frac{1}{k_0}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) + i\ [\mathrm{grad}\ \mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) + i\frac{\omega}{k_0}\ \varepsilon_0\varepsilon_r(\boldsymbol{r})\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = 0.$$

Tak dostáváme rovnice (8.7) a (8.8) a v limitě velmi velkých $k_0$ z nich plynou (8.12) a (8.13).

## Poznámka P8.2 – odvození rovnice eikonálu

Při odvození rovnice eikonálu vyjdeme z rovnic (8.12) a (8.13).

$$\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{k_0}{\omega\mu_0}[\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}),$$

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{-k_0}{\varepsilon_0\omega n^2}[\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}).$$

Kombinací obou rovnic je

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{-k_0}{\varepsilon_0\omega n^2}\,\frac{k_0}{\omega\mu_0}[\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times \{[\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\}.$$

Uplatníme vzorec pro vektorový součin $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ a z rovnosti

$$\frac{k_0}{\varepsilon_0\omega n^2}\,\frac{k_0}{\omega\mu_0} = \frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 n^2} = \frac{1}{n^2}$$

získáme

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{n^2}\,\{\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})\,[\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})] - \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\,[\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r}) \cdot \text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})]\}.$$

Zároveň

$$\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{-k_0}{\varepsilon_0\omega n^2}\,\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r}) \cdot \{[\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\} = 0,$$

protože vektory $\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})$ a $[\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})] \times \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$ jsou na sebe kolmé. Shrňme

$$n^2(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\,[\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})]^2,$$

$$n^2(\boldsymbol{r}) = [\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})]^2\,.$$

To je rovnice (8.15) a po zavedení směru tečny paprsku jako jednotkového vektoru $\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})$ dostáváme rovnici eikonálu (8.17)

$$\text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r}) = n(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})\,.$$

## Poznámka P8.3 – odvození paprskové rovnice

Při odvození paprskové rovnice vyjdeme z rovnice eikonálu ve tvaru (8.19), kde prostorové závislosti veličin $\mathcal{S}[\boldsymbol{r}(\text{s})]$, $n[\boldsymbol{r}(\text{s})]$ a $\boldsymbol{s}_0[\boldsymbol{r}(\text{s})]$ je vyjádřena pomocí parametru na paprsku s

$$\text{grad}\,\mathcal{S}[\boldsymbol{r}(\text{s})] = n[\boldsymbol{r}(\text{s})]\,\boldsymbol{s}_0[\boldsymbol{r}(\text{s})] = n[\boldsymbol{r}(\text{s})]\,\left.\frac{d\boldsymbol{r}(\text{s})}{d\text{s}}\right|_r.$$

Pro zkrácení zápisu zaveďme vektor $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = n(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})$ a rozepišme ve složkách derivaci

$$\left[\frac{d}{ds}\,[n(\boldsymbol{r})\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})]\right]_x = \frac{da_x}{ds} = \frac{\partial a_x}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \text{s}} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \text{s}} + \frac{\partial a_x}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \text{s}} = \frac{\partial a_x}{\partial x}\,s_{0x} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\,s_{0y} + \frac{\partial a_x}{\partial z}\,s_{0z}.$$

Dále využijeme, že vektor $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \text{grad}\,\mathcal{S}(\boldsymbol{r})$, z čehož plyne $\text{rot}\,\boldsymbol{a} = 0$, tedy

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial a_z}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial z},$$

čímž dostaneme ve všech členech derivace $\frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{da_x}{ds} = \frac{\partial(n\, s_{0x})}{\partial x} s_{0x} + \frac{\partial(n\, s_{0y})}{\partial x} s_{0y} + \frac{\partial(n\, s_{0z})}{\partial x} s_{0z} =$$

$$= \left(\frac{\partial n}{\partial x}\, s_{0x} + n\, \frac{\partial s_{0x}}{\partial x}\right) s_{0x} + \left(\frac{\partial n}{\partial x}\, s_{0y} + n\, \frac{\partial s_{0y}}{\partial x}\right) s_{0y} + \left(\frac{\partial n}{\partial x}\, s_{0z} + n\, \frac{\partial s_{0z}}{\partial x}\right) s_{0z} =$$

$$= \left(s_{0x}^2 + s_{0y}^2 + s_{0z}^2\right) \frac{\partial n}{\partial x} + n \left(\frac{\partial s_{0x}}{\partial x} s_{0x} + \frac{\partial s_{0y}}{\partial x} s_{0y} + \frac{\partial s_{0z}}{\partial x} s_{0z}\right) =$$

$$= \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{n}{2} \frac{\partial(\boldsymbol{s}_0 \cdot \boldsymbol{s}_0)}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x},$$

protože $s_{0x}^2 + s_{0y}^2 + s_{0z}^2 = \boldsymbol{s}_0 \cdot \boldsymbol{s}_0 = 1$ a je to konstanta.

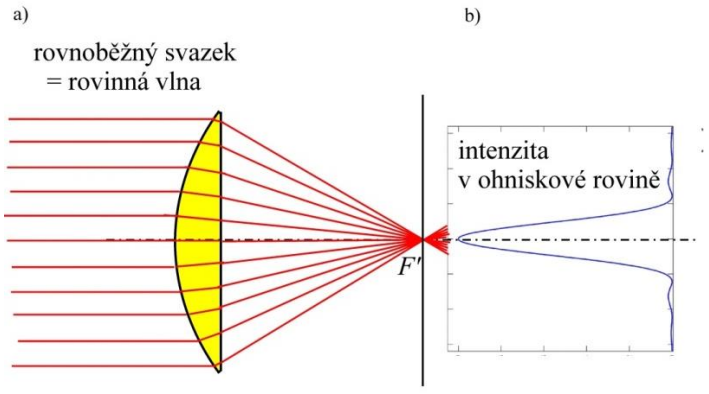
Zcela podobně pro další složky a výsledek zapsaný vektorově je

$$\frac{d}{ds}\,[n(\boldsymbol{r})\boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{r})] = \left(\frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y}, \frac{\partial n}{\partial z}\right) = \text{grad}\, n(\boldsymbol{r})\,,$$

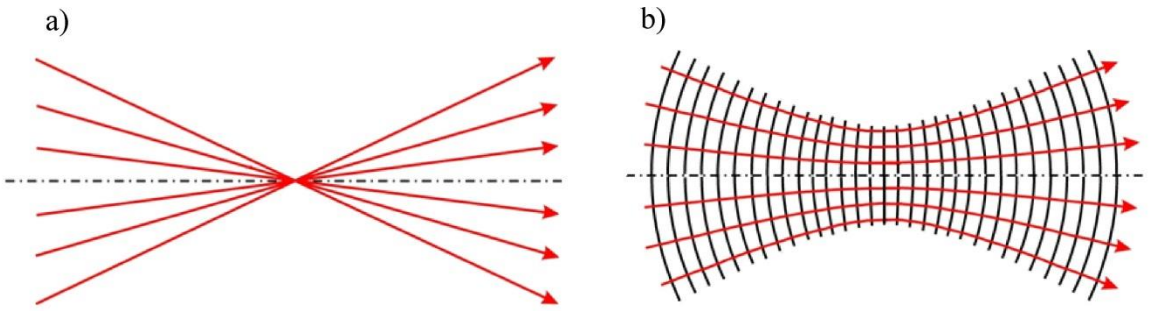
což je paprsková rovnice (8.20).

## Poznámka P8.4 – pojem paprsek a difrakce

Na obr. P8.4.1 je nakresleno nejjednodušší schéma pro fokusaci rovinné vlny čočkou v idealizovaném modelu geometrické optiky a výsledek pro intenzitu v modelu Fraunhoferovy difrakce. Obr. P8.4.2a) znázorňuje pojetí paprsku v geometrické optice a modelu vycházejícího z tvrzení, že směr „paprsku“ je v daném místě kolmý na vlnoplochy (což dobře platí v regulární oblasti prostoru). Tvar vlnoploch na obr. P8.4.2 b) vychází z předpokladu o přibližně kulových vlnoplochách v konvergujícím (divergujícím) svazku.




Obr. P8.4.1 a) Znázornění fokusace rovnoběžného svazku v modelu paprskové optiky. b) Rozložení intenzity v ohniskové rovině ve skalárním modelu Fraunhoferovy difrakce, viz též obr. 6.18.



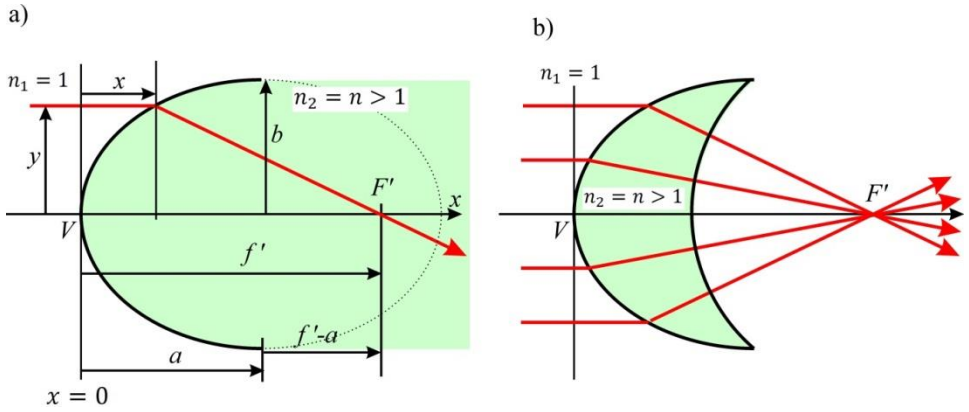

Obr. P8.4.2 Schématické znázornění paprsků. a) Běžný způsob kreslení chodu paprsků ve schématech paprskové optiky. Oblast ohniska není regulární. Křížení paprsků je z hlediska **vlnové optiky** nesmyslné, protože hladká vlnoplocha by v jednom místě měla více normál. Místo křížení paprsků (singulární oblast) v geometrické optice je získáno **extrapolací** směrů paprsků z regulární oblasti. b) Paprsky jako normály k vlnoplochám ve vlnové optice ve **vzdáleném** okolí ohniska, tj jsou zobrazeny pouze některé z vlnoploch vzdálené o mnoho vlnových délek.

Základ odlišnosti modelu geometrické optiky a vlnového popisu v singulární oblasti prostoru spočívá v zanedbání některých členů v (8.7), (8.8) a dalších. Limity $\lambda_0 \to 0$, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \to \infty$ implikují $\frac{1}{k_0}$ rot $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \to 0$. Takovou aproximaci můžeme použít, pokud se amplituda $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ mění v prostoru velmi pomalu na škále vlnových délek. To lze v regulární části prostoru, ale nikoli v singulárních částech. Tvar vlnoploch v těsné blízkosti ohniska je však mnohem složitější než ukazuje silně zjednodušená představa na obr. P8.4.2 b).

## Poznámka P8.5 – Příklady použití Descartových ploch pro stigmatická zobrazení

Je vhodné připomenout pravidlo o zpětném chodu paprsků: šíří-li se paprsek jedním směrem, pak se může po stejné dráze šířit i opačně

1. **Fokuzace rovnoběžného svazku lomem na lomné ploše elipsoidu**. Rovnoběžný svazek vstupuje z prostředí o nižším indexu lomu do prostředí s vyšším indexem. Kolimace homocentrického svazku v prostředí o větším indexu lomu lomem do prostředí o nižším indexu.




Obr. P8.5.1 Fokusace rovnoběžného svazku lomnou plochou elipsoidu. a) Základní geometrické uspořádání. b) Praktické provedení ve tvaru aplanatického menisku, kdy na druhé ploše (kulové se středem v $F'$) nedochází k lomu.

Jako příklad výpočtu tvaru Descartovy plochy uveďme fokusaci rovnoběžného svazku elipsoidální lomnou plochou. Podle obr. P8.5.1 na lámavou plochu mezi prostředím $n_1 = 1$ a prostředím $n_2 = n > 1$ dopadá svazek rovnoběžných paprsků. Vlnoplocha rovnoběžného svazku je rovina, všechny její body jsou stejně vzdálené od nevlastního bodu $P$ Proto můžeme vzdálenosti odčítat od libovolné vlnoplochy, na obrázku od vlnoplochy procházející vrcholem $V$. Z důvodu osové symetrie se omezíme na řez v rovině $xy$. Podle principu stacionárnosti optických drah pro fokusaci do bodu $P' \equiv F'$ má platit

$$x + n\sqrt{(f' - x)^2 + y^2} = nf', \tag{P8.5.1}$$

přičemž levá strana je pro paprsky splňující $-b < y < b$ a pravá strana pro $y = 0$. Zdůrazněme, že symboly $a, b$ nemají nic společného s Gaussovými souřadnicemi, ale standardně značí velkou a malou poloosu elipsy. Podle obrázku je $f', a, b, x_0 > 0$, $0 \le x < x_0$. $f$ značí vzdálenost $F'$ od vrcholu lámavé plochy. Po umocnění

$$n^2(f'^2 - 2f'x + x^2 + y^2) = (nf' - x)^2. \tag{P8.5.2}$$

Po seřazení kvadratické členy, lineární členy a absolutní člen dostaneme

$$\begin{gathered} n^2y^2 + (n^2 - 1)x^2 - 2nf'(n - 1)x + n^2f'^2 - n^2f'^2 = 0, \\ n^2y^2 + (n^2 - 1)x^2 - 2nf'(n - 1)x = 0 \end{gathered} \tag{P8.5.3}$$

Zkusme, zda tato rovnice vyhovuje rovnici elipsy, jejíž střed se nachází v bodě $(x_0, 0)$ a která vyhovuje rovnici

$$\begin{gathered} \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \\ a^2y^2 + b^2x^2 - 2b^2x_0x + b^2x_0^2 - a^2b^2 = 0\,. \end{gathered} \tag{P8.5.4}$$

Můžeme porovnat kvadratické, lineární a absolutní členy. Předtím musíme členy obou rovnic převést na stejný fyzikální rozměr. První rovnici obsahující $n, f'$ vynásobíme koeficientem $k^2$, jehož fyzikální rozměr je (délka)2 a porovnáme jednotlivé členy v (P8.5.3) a v (P8.5.4)

| | |
|---|---|
| absolutní člen | $0 = x_0^2 - a^2,$ |
| člen $\propto y^2$ | $k^2n^2 = a^2,$ |
| člen $\propto x^2$ | $k^2(n^2 - 1) = b^2,$ |
| člen $\propto x$ | $2k^2nf'(n - 1) = 2b^2x_0\,.$ |

Po dosazení do posledního řádku z předchozích

$$b^2 = \frac{a^2}{n^2}n\frac{f'}{a}(n - 1) = \frac{a^2}{n^2}(n^2 - 1),$$

$$f'(n - 1) = \frac{a}{n}(n^2 - 1), \qquad a = f'\frac{n}{n + 1},$$

$$b^2 = \frac{a}{n}f'(n - 1) = \frac{f'^2(n - 1)}{n + 1}\,, \qquad b = f'\sqrt{\frac{n - 1}{n + 1}},$$

což jsou výrazy pro velkou a malou poloosu elipsy vyjádřené pomocí zadané vzdálenosti ohniska a indexu lomu za lomnou plochou. Spočtěme posuv $x_0$, tj. vzdálenost středu elipsy od vrcholu $V$

$$x_0 = \frac{2k^2 nf'(n-1)}{2b^2} = \frac{a^2}{n^2}\frac{n+1}{f'^2(n-1)}\, nf'(n-1) = \tag{P8.5.5}$$

$$= \frac{a^2}{n}\,\frac{n+1}{f'} = \frac{a^2\,(n+1)}{n}\,\frac{n}{a(n+1)} = a\,,$$

jak odpovídá obr. P8.5.1.

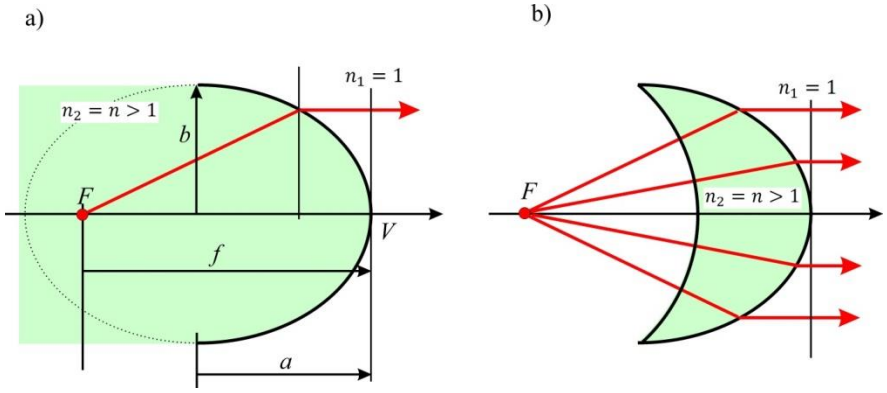
Spočtěme vzdálenost ohnisek elipsy od jejího středu, tj. délkovou excentricitu elipsy $e$ a porovnejme s polohou ohniska $F'$ vzdáleného od středu elipsy $f' - a$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = f'\sqrt{\frac{n^2}{(n+1)^2} - \frac{n-1}{n+1}} = f'\frac{1}{n+1}, \tag{P8.5.6}$$

$$f' - a = f'\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = f'\frac{1}{n+1}.$$

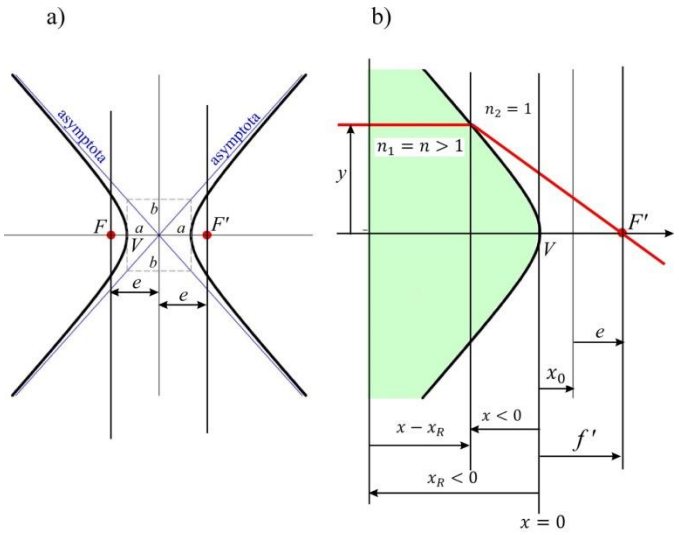
Ohnisko $F'$ je totožné s jedním z ohnisek elipsy, v 3dim prostoru pak s ohniskem elipsoidu.

Podívejme se na obrácený chod paprsků z bodového zdroje v ohnisku elipsoidu. Na výstupu dostaneme rovnoběžný svazek.

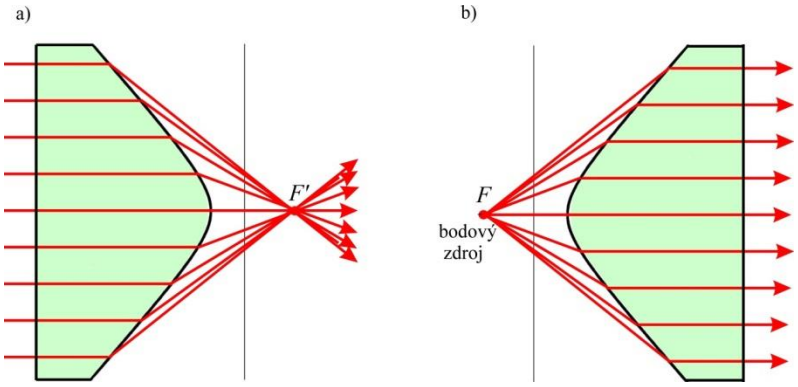



Obr. P8.5.2 Kolimace rozbíhavého svazku vycházejícího z bodového zdroje umístěného v ohnisku $F$. a) Základní geometrické uspořádání. b) Praktické provedení ve tvaru aplanatického menisku, kdy na první ploše (kulové se středem v $F$) nedochází k lomu.

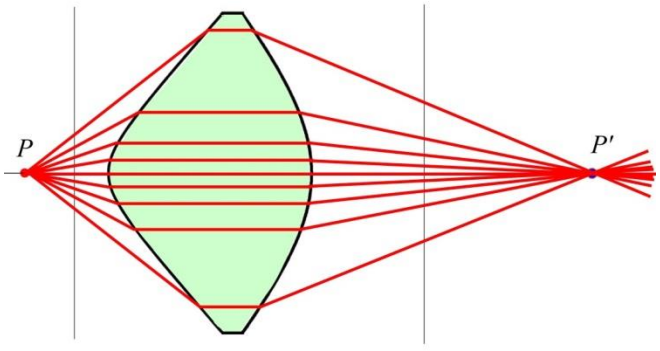
2. **Fokusace lomnou plochou hyperboloidu**, kdy rovnoběžný svazek v prostředí o větším indexu lomu stupuje do prostředí s menším indexem. Kolimace v případě, že homocentrický svazek vstupuje z prostředí o menším indexu do prostředí s vyšším indexem




Obr. P8.5.3 a) Připomenutí základních parametrů hyperboly. b) Geometrické uspořádání pro fokusaci rovnoběžného svazku plochou hyperboloidu.

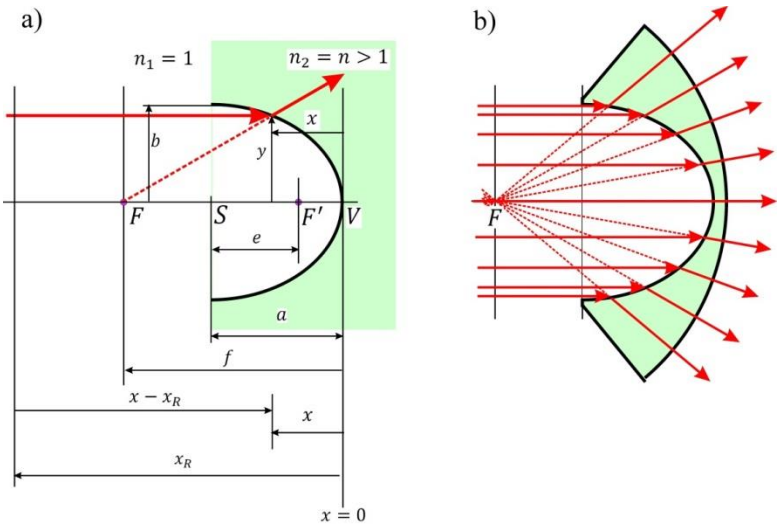



Obr. P8.5.4 a) Fokusace rovnoběžného svazku lomnou plochou hyperboloidu. b) Kolimace svazku vycházejícího z bodového zdroje.



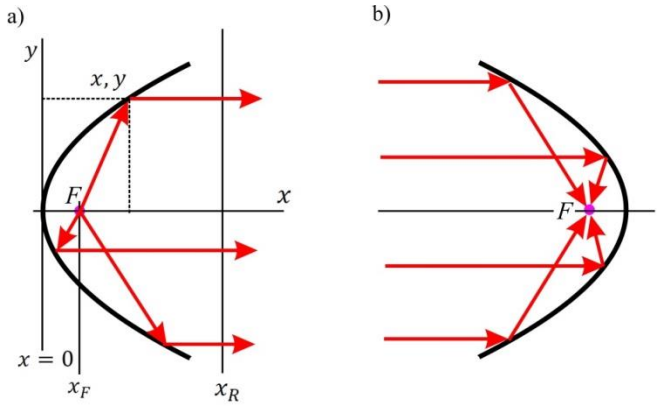

Obr. P8.5.5 Příklad spojné čočky tvořené dvěma lomnými plochami hyperboloidů, která stigmaticky zobrazuje bod $P$ do bodu $P'$. V čočce se šíří rovnoběžný svazek.

3. **Rozptylná čočka realizovaná jako kombinace elipsoidální a kulové lomné plochy**.
Z rovnoběžného svazku vytvoří rozbíhavý homocentrický svazek.

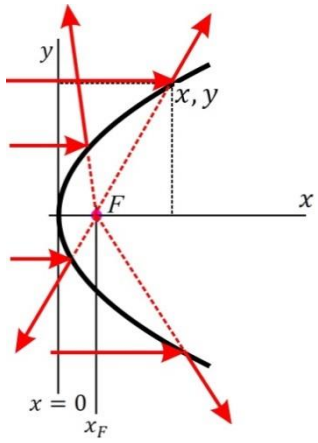



Obr. P8.5.6 Příklad rozptylné čočky vytvářející z rovnoběžného svazku rozbíhavou kulovou vlnu. a) Základní geometrické uspořádání. b) Provedení ve tvaru aplanatického menisku, kde na první ploše elipsoidu dochází k lomu a na druhé ploše (kulové se středem v $F$) se paprsky nelámou.

**4. Fokusace / kolimace paraboloidním zrcadlem**

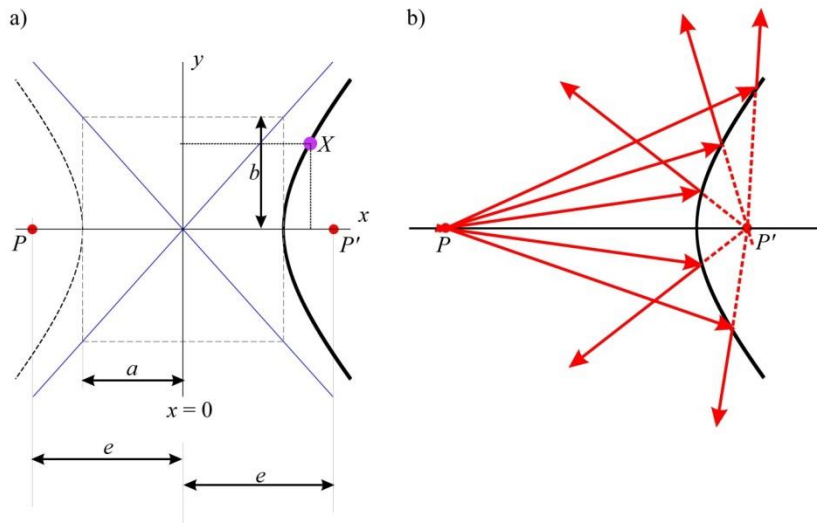



Obr. P8.5.7 a) Kolimace homocentrického svazku paprsků odrazem na ploše paraboloidu. b) Fokusace rovnoběžného svazku paprsků.




Obr. P8.5.8 Odraz rovnoběžného svazku paprsků na vnější straně paraboloidu. Rovnoběžný svazek vytváří v ohnisku virtuální bodový obraz.

5. **Odraz na vypuklé ploše hyperboloidu**. Vytváří v ohnisku hyperboloidu virtuální obraz reálného bodu umístěného v druhém ohnisku.



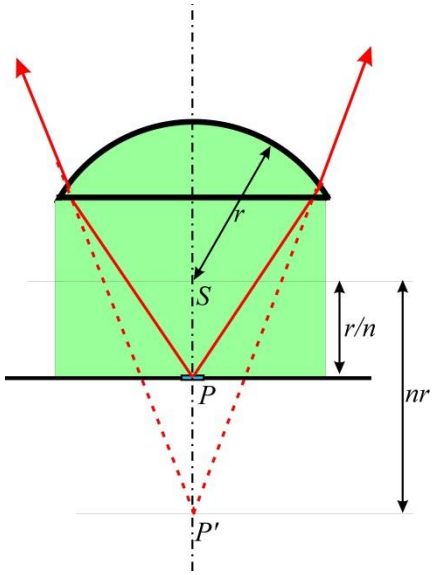

Obr. P8.5.9 Odraz na hyperboloidním zrcadle. a) Geometrie hyperboly. b) Dopadající a odražené paprsky.

## Poznámka P8.6 – imerzní mikroskopický objektiv

Pro menší zvětšení mikroskopu lze s úspěchem používat objektivy, kde mezi předmětem a čelní čočkou objektivu je vzduch. Pro větší zvětšení (např. 100x) je potřeba k tomu, aby byly dostatečně zobrazeny detaily předmětu a zvětšení bylo smysluplně využito, náležitě zvětšit i prostorové rozlišení. K omezení nežádoucího vlivu difrakce je zapotřebí dostatečný průměr optických prvků. Praktické omezení pro vzduchové objektivy vyplývá z možností potlačení optických vad. Podstatné vylepšení lze dosáhnou použitím imerzního objektivu, kdy mezi předmět a první čočku umístíme prostředí (imerzní kapalinu). Nejvhodnější je kapalina o stejném indexu lomu jako má materiál první čočky. Mikroskopické objektivy (vzduchové i imerzní) jsou poměrně komplikované soustavy, protože pro kvalitní zobrazení je nutno minimalizovat více typů zobrazovacích vad.

1) Stigmatické zobrazení kulovou lámavou plochou nastane, je-li předmět vhodně umístěn v prostředí o stejném indexu lomu jako má materiál čočky. Stigmatické zobrazení plyne z geometrické optiky

(Fermatova principu) i daleko od paraxiální aproximace, viz obr. 8.9. Jedná se o Descartovu kulovou lámavou plochu. Překresleme obr. 8.9 do podmínky pro imerzní objektiv, obr. P8.5.1a.




Obr. P8.6.1 Základní idealizované schéma funkce první čočky imerzního objektivu. Index lomu materiálu čočky a indexu lomu imerzní kapaliny jsou stejné. Pokud umístíme předmět $P$ do vzdálenosti $r/n$ od středu kulové plochy $S$, pak ve vzdálenosti $nr$ od středu vznikne virtuální stigmatický obraz $P$‘.

Faktor index lomu ve vztahu pro numerickou aperturu souvisí se zmenšením vlnové délky v prostředí o indexu lomu vyšším než 1. Ve výrazech pro rozlišovací schopnost plynoucích z difrakce, např. v popisu Fraunhoferovy difrakce vystupuje poměr $D/\lambda$, kde $D$ souvisí s příčným rozměrem příslušné apertury. K podobnému závěru lze dospět i názorně na základě Abbeova popisu limity rozlišovací schopnosti (Ernst Karl Abbe, 1840 – 1905). Tento model vychází z představy o zobrazení periodického motivu v předmětu, např. mřížky na průchod. Limitní případ pro zaregistrování této periodicity i v obraze je určen podmínkou, že difrakční maximu alespoň prvního řádu musí do apertury vstoupit. Z mřížkové rovnice (6.24) pro mřížku osvětlenou jedinou monochromatickou rovinnou vlnou se sousedními vrypy vzdálenými $h$

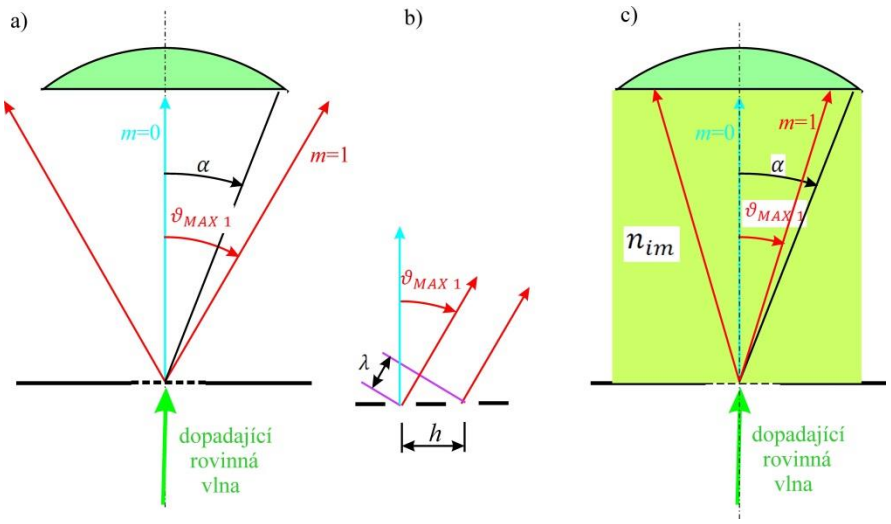
$$h\,(\sin\vartheta_{MAX\,m} - \sin\Theta_\mathrm{i}) = m\lambda\,.$$

Pro 1. řád difrakce $m = 1$ a kolmý dopad na rovinu mřížky $\Theta_\mathrm{i} = 0$ dostaneme pro úhel potřebný ke vstupu difraktovaného svazku $\vartheta_{MAX\,1} = \arcsin \lambda/h$. Čím menší je vlnová délka, tím menší úhel potřebujeme k rozlišení detailů rozměrů $h$, viz obr. P8.5.2. Pokud ztotožníme úhel potřebný k zaznamenání detailů rozměru $h_{MIN}$ (rozlišení) s úhlem $\alpha$, uvedenou mřížkovou rovnici přepíšeme

$$h_{MIN} \sin\alpha = \frac{\lambda_{VAK}}{n}$$

a pro rozlišovací schopnost v rámci tohoto velmi hrubého modelu dostaneme

$$\frac{1}{h_{MIN}} = \frac{1}{\lambda_{VAK}}\; n \sin\alpha\,.$$




Obr. P8.6.2 Schématické znázornění Abbeova přístupu k popisu rozlišení mikroskopického objektivu. Vliv indexu lomu imerzní kapaliny spočívá ve změně vlnové délky $\lambda_{im} = \lambda_0/n_{im}$.

a) Objektiv bez imerze a maximum prvního řádu difrakce na zobrazované mřížce do apertury objektivu nevstupuje. Detaily předmětu velikosti $h$ nejsou zobrazeny.

b) Připomenutí difrakce rovinné vlny na mřížce. c) Imerzní kapalina zmenší vlnovou délku a do apertury objektivu maximum prvního řádu difrakce na zobrazované mřížce vstupuje a v obraze detaily předmětu velikosti $h$ se mohou objevit.

c) Ztráty na intenzitě procházejícího záření způsobené odrazy na rozhraních se zmenšují, jsou-li indexy lomu imerzní kapaliny a materiálu čočky pokud možno stejné.

# 9. Základy vláknové optiky

Koncept šíření světla úzkým a dlouhým dielektrikem, založený na principu totálního odrazu na rozhraní dielektrika byl ověřen Johnem Tyndallem (1870), který ukázal šíření světla úzkým paprskem vody ($n = 1.33$) ve vzduchu ($n = 1$). Později byl tento efekt demonstrován rovněž ve skle. Širokého využití našly vlnovody zejména po objevu laseru ve druhé polovině dvacátého století v oblasti přenosu informace a komunikace na velkou vzdálenost.

Základy fungování vlnovodu popíšeme na jednoduchém modelu šíření světla v planárním vlnovodu reprezentovaném dielektrickou deskou (obr. 9.1). Využijeme nejprve paprskového popisu. Budeme předpokládat, že světlo vstupuje na čelní stranu vlnovodu z materiálu s indexem lomu $n_0$, který je menší než index lomu vlnovodu $n_1$. Ve vlnovodu dochází k lomu paprsku ke kolmici. Paprsek pak dopadá na stěnu vlnovodu pod úhlem $\alpha > \alpha_C$, kde $\alpha_C$ je kritický úhel pro totální odraz na rozhraní s materiálem pláště s indexem lomu $n_2$, dochází k totálnímu odrazu. Tato situace se dále opakuje, až na konci vlnovodu paprsek vystoupí z vlnovodu. Podmínka pro úhel dopadu na stěnu vlnovodu $\alpha > \alpha_C$ limituje úhel dopadu na vstupu vlnovodu, který musí splňovat podmínku $\Theta_\mathrm{i} \leq \Theta_\mathrm{m}$. V další části velikost úhlu $\Theta_\mathrm{m}$ v závislosti na indexech lomu $n_0$, $n_1$ a $n_2$ odvodíme. Použijeme postupu uvedeného v učebnici [3].

Vyjdeme z podmínky pro totální odraz

$$\sin \alpha_C = \frac{n_2}{n_1}.$$

Dále zjevně platí (obr. 9.1)

$$\Theta_\mathrm{t} + \alpha_c = \frac{\pi}{2}.$$

Ze zákona lomu dostaneme

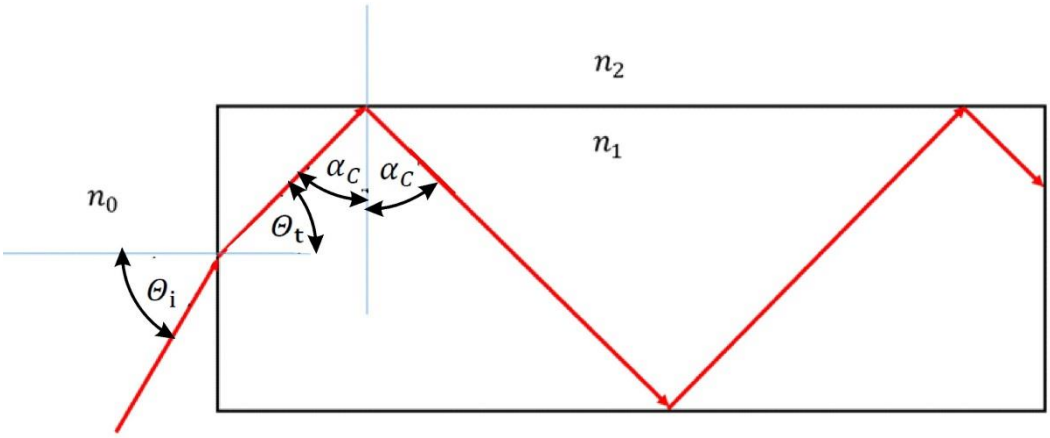
$$n_0 \sin \Theta_\mathrm{m} = n_1 \sin \Theta_\mathrm{t} = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_C\right)$$

Rovnici umocníme a dostaneme

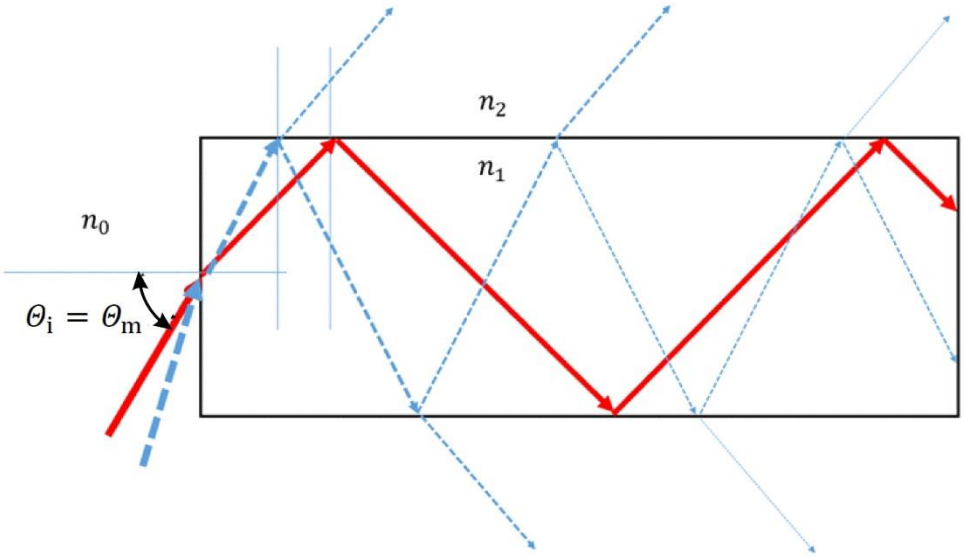
$$n_0^2 \sin^2 \Theta_\mathrm{m} = n_1^2(1 - \sin^2 \alpha_C) = n_1^2\left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) = n_1^2 - n_2^2\,. \tag{9.1}$$

Veličina $n_0 \sin \Theta_\mathrm{m} = NA$ se nazývá numerická apertura vlnovodu. Platí tedy

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\,. \tag{9.2}$$

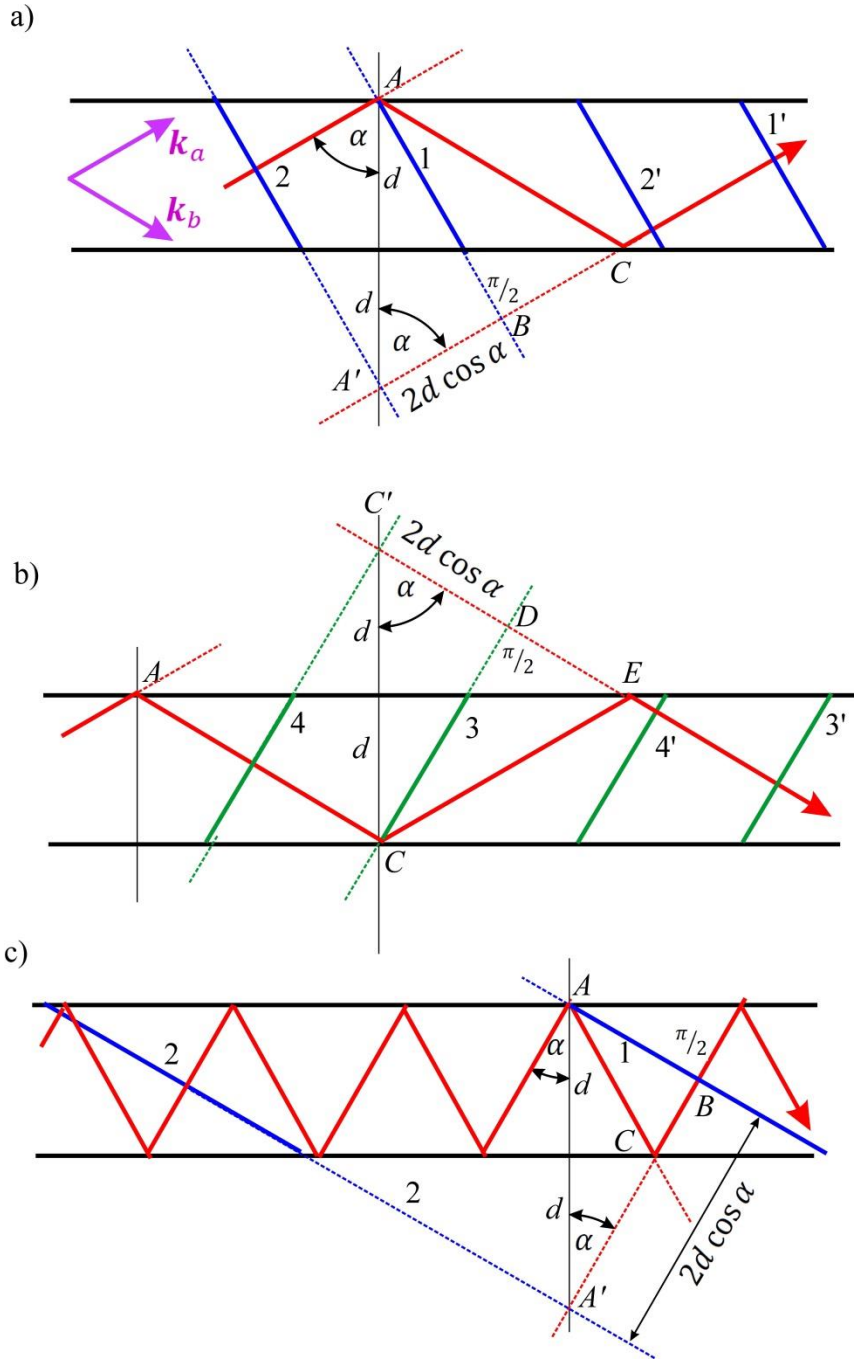



Obr. 9.1 Navázání světelného signálu z prostředí s indexem lomu $n_0$ do vlnovodu. Zobrazeno pro případ mezního úhlu dopadu $\Theta_i = \Theta_m$ kdy dochází na rozhraní mezi vlnovodem a jeho pláštěm k totálnímu odrazu. K totálnímu odrazu dochází i pro všechny úhly dopadu $\Theta_i < \Theta_m$. Při dopadu záření v intervalu úhlů $\Theta_i \in (0, \Theta_m\rangle$ dochází tedy v důsledku totálního odrazu na stěnách vlnovodu k téměř bezztrátovému šíření signálu.




Obr. 9.2 Zobrazení průchodu světelného paprsku pro případ mezního úhlu dopadu $\Theta_m$ (plná červená čára), kdy dochází na rozhraní mezi vlnovodem a jeho pláštěm k totálnímu odrazu a pro úhel dopadu $\Theta_i > \Theta_m$ (modrá čárkovaná čára) kdy k totálnímu odrazu nedochází. Část energie vlny v tomto případě v souladu s průběhem Fresnelova výkonového koeficientu transmise (kapitola 3 - Odraz a lom) uniká při každém odrazu do materiálu pláště.

Dále opustíme jednoduchý paprskový popis šíření a využijeme některé výsledky modelu vlnového.




Obr. 9.3 a) Geometrická konstrukce k určení dráhového rozdílu mezi vlnoplochami procházejícími body $A$ a $A'$. Paprsky jsou kresleny červeně a vlnoplochy modře. Vlnoplochy 1 a 2 jsou zakresleny pro jeden okamžik, vlnoplochy 1' a 2' znázorňují jejich polohu v pozdějším čase. Trojúhelník $ABA'$ je pravoúhlý s přeponou $AA'$ délky $2d$ a odvěsna $A'B$ má délku $2d\cos\alpha$. Nakresleno pro případ velkého úhlu $\alpha$ a paprsky směřující k horní části obrázku. b) Určení dráhového rozdílu mezi vlnoplochami procházejícími body $C$ a $C'$. Paprsky jsou kresleny červeně a vlnoplochy zeleně. Pro případ velkého úhlu $\alpha$ a paprsky směřující k dolní části obrázku. c) Pro malý úhel $\alpha$, který ovšem ještě musí splňovat podmínku totálního odrazu. V obrázku a) jsou zakresleny i vlnové vektory interferujících rovinných vln: $\boldsymbol{k}_a$ se vztahuje k modrým vlnoplochám na obr. a) a $\boldsymbol{k}_b$ se vztahuje k zeleným vlnoplochám na obr. b).

Aby se vlny mohly efektivně šířit vlnovodem (tzv. vedené módy), musí se po odrazech setkávat ve fázi. Představme si příspěvek k poli uvnitř vlnovodu jako složený pouze ze dvou dvojic vln. Na obr. 9.3 a) procházejí vlnoplochy vlny 1 bodem $A$ a vlnoplochy vlny 2 v témže okamžiku procházejí bodem $A'$. Pro stanovení podmínky sfázování těchto dvou vln nejprve vypočteme dráhový rozdíl těchto dvou vln. Vlna (zobrazená paprskem) odražená na horním rozhraní v bodě $A$ (obr. 9.3) se následně odráží na spodním rozhraní v bodě $C$ a směřuje zpět k hornímu rozhraní. Z důvodu symetrie je $\overline{AC} = \overline{A'C}$. Budeme-li v našem modelu uvažovat šířící se vlny jako vlny rovinné, pak na vlnoploše procházející bodem $A$ leží i bod $B$. Dráhový rozdíl mezi vlnoplochami procházejícími body $A'$ a $B$ lze vyjádřit pomocí geometrické konstrukce na obr. 9.3 a) jako

$$\overline{A'B} = 2d \cos \alpha,$$

kde $d$ je tloušťka vlnovodu. Vlnoplochy 1 a 2 spolu putují podél vlnovodu s konstantní m dráhovým rozdílem a tedy i s konstantním fázovým rozdílem. Odpovídající fázový rozdíl pak je

$$2n_1 k_0 d \cos \alpha + \Delta\varphi_{odr}(\alpha), \tag{9.3}$$

kde $\Delta\varphi_{odr}(\alpha) \in (0, \pi\rangle$ je změna fáze při odrazu, ke které dochází při totálním odrazu ($\alpha > \alpha_C$). Aby se vlny po odrazu setkaly ve fázi a došlo ke konstruktivní interferenci, musí platit

$$2n_1 k_0 d \cos \alpha + \Delta\varphi_{odr}(\alpha) = 2M\pi. \tag{9.4}$$

Zanedbáme-li v prvním přiblížení změnu fáze při odrazu $NA$, pak pro mezní případ totálního odrazu ($\alpha = \alpha_C$) s využitím vztahu pro numerickou aperturu $NA$ (9.2) dostaneme

$$2n_1 k_0 d \cos \alpha_C = 2\, k_0 NA = \frac{4\pi}{\lambda_0} NA \approx 2M\pi,$$

$$M \approx \left\{\frac{2d}{\lambda_0} NA\right\}_{\text{celá část}}.$$

Vzhledem k tomu, že úhel $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, je $M$ nezáporné celé číslo. Číslo $M + 1$ pak udává celkový počet módů, které se vlnovodem mohou šířit. Je-li $\frac{2d}{\lambda_0} NA < 1$, je $M = 0$. V tomto případě se vlnovodem může šířit jen tzv. nulový mód.

Vlnu šířící se planárním vlnovodem si můžeme kvalitativně představit jako výsledek interference zmíněných dvou rovinných vln tak, jak jsme ji uvažovali v odstavci 4.1.2 „Dvousvazková interference vln $\boldsymbol{k}_1 \nparallel \boldsymbol{k}_2$," obr. 4.12 a Poznámka P4.2, ovšem se stranovým omezením daným stěnami vlnovodu. Výsledná vlna je částečně stojatá, v níž maxima hustot energií i velikosti Poyntingova vektoru jsou v příčném směru modulovány.

Důležitým parametrem charakterizujícím vlnovod je útlum. Je definován jako

$$B = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} \text{ [dB]}, \tag{9.5}$$

kde $P_1$ je výkon na vstupu vlnovodu a $P_2$ výkon na výstupu. Udává se v decibelech.

Základní popis šíření světla ve vlnovodech jsme popsali na modelu dielektrické desky. V praxi často využívaným typem vlnovodu je optické vlákno. Výsledky, které jsme odvodili pro desku (existence módů, které se mohou vláknem šířit i na velkou vzdálenost), platí kvalitativně i pro vlákna, kde ale popis je podstatně složitější. Navíc optická vlákna jsou často realizována nikoli ostrým rozhraním indexů lomu, ale gradientem indexu lomu mezi jádrem vlnovodu a vnějším prostředím Optická vlákna se obvykle vyrábějí z taveného křemene.

# 10. Anizotropní neabsorbující prostředí – lineární dvojlom

## 10.1. Základní popis anizotropního prostředí

Dosud jsme uvažovali izotropní prostředí, ve kterém susceptibilita $\chi(\omega)$ je skalární veličina a je tedy stejná pro všechny směry šíření světla a směry vektoru $\boldsymbol{E}$. V důsledku toho i index lomu $n$ nezávisí na těchto směrech. Vektor polarizace $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$ je rovnoběžný s vektorem elektrického pole $\boldsymbol{E}$. Nižší symetrie krystalové mřížky anizotropních materiálů může způsobit, že látka reaguje na působení elektrického pole v jiném směru, tj. $\boldsymbol{P}$ nemusí být rovnoběžné s $\boldsymbol{E}$. V důsledku toho je rychlost světla v látce různá v závislosti na směru šíření a polarizaci $\boldsymbol{E}$. Jak uvidíme, obecně jednomu směru vlnového vektoru přísluší pro dvě ortogonální polarizace dva indexy lomu. To se při vhodné orientaci destičky z dvojlomného materiálu jeví jako zdvojení obrazu předmětu pozorovanému přes tuto destičku, jak popsal dánský vědec Erasmus Bartholinus (1625 – 1698) v roce 1669. Blíže bude vysvětleno v 10.3, obr. 10.8. Tomuto jevu věnoval pozornost též Christiaan Huygens (1629 – 1695) v souvislosti se svým konceptem sekundárních vlnoploch. Vlnovou teorii šíření vln v anizotropním prostředí rozpracoval Augustin-Jean Fresnel (1788 – 1827) ve 20. letech 19. století.

Rozeznáváme v principu dva typy dvojlomu: **lineární dvojlom a kruhový dvojlom**, které oba souvisí se strukturními charakteristikami materiálu. Pro případ šíření rovinných vln v neabsorbujícím prostředí je lineární dvojlom jev, při kterém se látkou mohou šířit s vlastními indexy lomu lineárně polarizované vlny určitých, navzájem kolmých směrů polarizace. V druhém případě se látkou šíří vlny, které mají vlastní indexy lomu vlny pravotočivě a levotočivě kruhově polarizovaného světla. V případě, že v látce se vyskytují strukturní asymetrie, které vedou k oběma typům dvojlomu (např. krystalický křemen), jsou vlastními módy (tj. vlnami majícími vlastní hodnotu indexu lomu) obecně vlny polarizované elipticky. V tomto textu se budeme zabývat **lineárním** dvojlomem.

Budeme předpokládat, že anizotropie vedoucí k lineárnímu dvojlomu se týká pouze interakce látky s elektrickou částí elektromagnetické vlny, která vyvolává polarizaci. Budeme předpokládat, že magnetická část elektromagnetické vlny splňuje izotropní vztah $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$. Budeme se zabývat pouze homogenním a neabsorbujícím prostředím, ve kterých je tenzor susceptibility $\vec{\vec{\chi}}$ nezávislý na prostorových souřadnicích a na čase a všechny jeho složky jsou reálné.

Rovněž budeme předpokládat, že elektrické pole je natolik slabé, že odezva materiálu daná vektorem polarizace $\boldsymbol{P}$ je lineární funkcí elektrického pole vlny. Dále budeme předpokládat, že materiálové vztahy jsou lokální v čase i prostoru. Takže pro složky vektoru polarizace můžeme psát

$$P_i(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0 \sum_{j=x,y,z} \chi_{ij} E_j(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{10.1}$$

a

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t).$$

Lze ukázat, že tenzor susceptibility $\overleftrightarrow{\chi}$ je pro neabsorbující prostředí bez optické aktivity (tj. bez kruhového dvojlomu) symetrický $(\chi_{ij} = \chi_{ji})$ a reálný. Důkaz s využitím Poyntingova teorému lze nalézt v učebnici [4]. Z toho plyne, že existuje taková rotace souřadného systému, která transformuje tenzor susceptibility na diagonální tvar

$$\overleftrightarrow{\chi} \equiv \chi_{ij} \equiv \begin{pmatrix} \chi_x & 0 & 0 \\ 0 & \chi_y & 0 \\ 0 & 0 & \chi_z \end{pmatrix}. \tag{10.2}$$

Právě v takovém souřadném systému budeme v dalších úvahách pracovat. Jak uvidíme, uvedený tenzor popisuje vlastnosti materiálu, ve kterém se pro obecný směr vlnového vektoru mohou šířit dvě lineárně polarizované vlny, každá s vlastním indexem lomu. Lineární polarizace těchto vln jsou navzájem kolmé. Budeme předpokládat, že se krystalem šíří rovinná, homogenní elektromagnetická vlna s vlnovým vektorem $\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c} n \boldsymbol{s}_0$, kde $\boldsymbol{s}_0$ je jednotkový vektor ve směru šíření **vlnoploch** (ploch konstantní fáze) a je na rovinu vlnoploch kolmý. Rychlost pohybu vlnoploch je fázová rychlost $\mathrm{v}_f = \frac{c}{n}$. Dále z uvedených vztahů plyne, že taková látka reaguje na působení vlny okamžitě, tj. nedochází k fázovému posunu časového průběhu vektoru polarizace $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ vůči působící vlně $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \\ \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{P}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Můžeme tedy psát pro složky vektoru elektrické indukce

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_0 (1 + \chi_x) E_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_{0x} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} e^{-i\omega t}, \\ D_y &= \varepsilon_0 (1 + \chi_y) E_y = \varepsilon_0 \varepsilon_y E_y = \varepsilon_0 \varepsilon_y E_{0y} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} e^{-i\omega t}, \\ D_z &= \varepsilon_0 (1 + \chi_x) E_z = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_{0z} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Z Maxwellových rovnic pro prostředí bez volných elektrických nábojů dále plyne

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\, \boldsymbol{D} = \frac{\partial \mathrm{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= i\left(k_x D_{0x} + k_y D_{0y} + k_x D_{0z}\right) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} e^{-i\omega t} = \\ &= i\, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D} = 0, \end{aligned} \tag{10.5}$$

takže $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{D}$. S využitím vztahu (10.3) dále platí

$$\text{div}\,\boldsymbol{D} = \text{div}\,(\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = i\boldsymbol{k}\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = 0. \tag{10.6}$$

Vzhledem k tomu, že v anizotropních látkách nemusí být vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{P}$ paralelní, platí až na zvláštní případy $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} \neq 0$, na rozdíl od izotropních látek, kde platí $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0$ v prostředí bez volných nábojů obecně.

Z rovnice $\text{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ dále dostáváme po dosazení z (10.3) $i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ , tedy $\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{B}$. Protože předpokládáme nemagnetické prostředí a $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$, je rovněž $\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{H}$.

Dále vyjdeme z Maxwellovy rovnice

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$

kterou rozepíšeme do složek a dosadíme za složky z rovnic (10.3). Po provedení derivací dostaneme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, && i\left(k_y E_z - k_z E_y\right) = i\omega B_x,\\
&\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, && i(k_z E_x - k_x E_z) = i\omega B_y,\\
&\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, && i\left(k_x E_y - k_y E_x\right) = i\omega B_z\,.
\end{aligned} \tag{10.7}$$

Tedy souhrnně

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \omega\boldsymbol{B}. \tag{10.8}$$

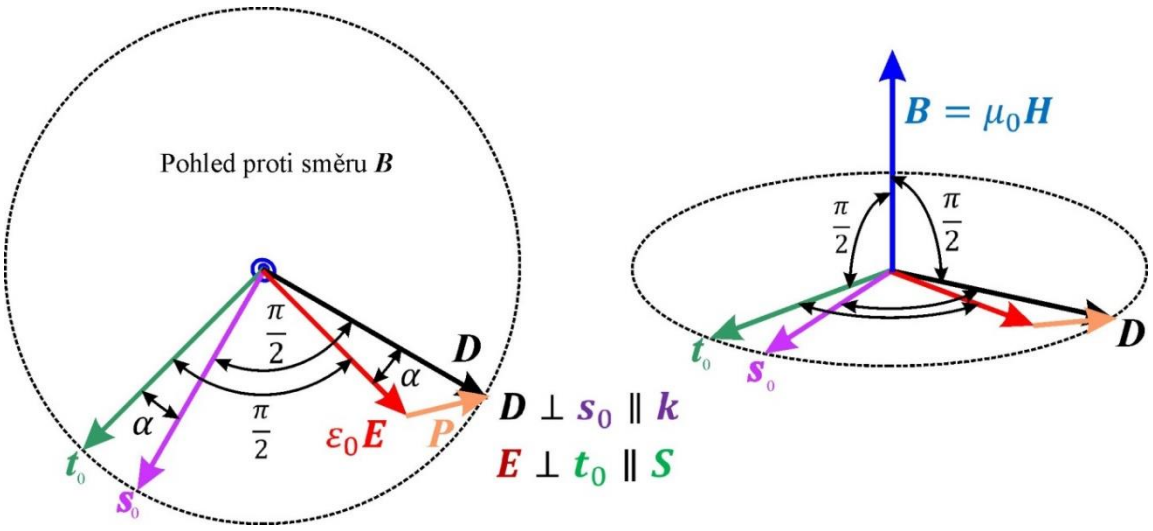
Ze vztahu (10.8) plyne, že $\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{k}$.

Podobným postupem z rovnice

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

dostaneme, že $\boldsymbol{H}\perp\boldsymbol{D}$. Celkově tedy platí $\boldsymbol{B}$ (a tedy i $\boldsymbol{H}$) $\perp\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{k}$. Dále je $\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{D}$, ale vektor $\boldsymbol{k}$ není obecně kolmý k vektoru $\boldsymbol{E}$.

Ze vzájemných vztahů vektorů rovněž plyne důležitý závěr týkající se směru šíření energie v anizotropních materiálech. V důsledku nekolinearity vektorů $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{D}$ se energie šíří v obecně jiném směru než vlnoplochy rovinné vlny. Připomeňme, že vlnoplochy jsou plochy konstantní fáze a i v tomto případě jsou to roviny kolmé na $\boldsymbol{k}$, t.j. směr $\boldsymbol{k}$ je normála k vlnoploše. I v případě lineárního dvojlomu platí, že směr šíření energie je dán Poyntingovým vektorem $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = S\boldsymbol{t}_0$, kde $\boldsymbol{t}_0$ je jednotkový vektor, který svírá se směrem vlnového vektoru $\boldsymbol{k}$ daným vektorem $\boldsymbol{s}_0$ úhel, který označíme $\alpha$. Vzájemná orientace diskutovaných vektorů $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{B},\boldsymbol{H},\boldsymbol{k}$ (resp. $\boldsymbol{s}_0$) a $\boldsymbol{S}$ (resp. $\boldsymbol{t}_0$) je zobrazena na obr. 10.1.




Obr.10.1 Orientace vektorů v anizotropním prostředí v jednom místě a v jednom čase: vektor elektrické indukce $\boldsymbol{D}$ je kolmý na vlnový vektor $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{s}_0$ a vektor intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$ je kolmý na Poyntingův vektor $\boldsymbol{S} \parallel \boldsymbol{t}_0$. Vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{D}$ svírají úhel $\alpha$ a stejný úhel svírají vektory $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{k}$. Vektor polarizace $\boldsymbol{P}$ splňuje obecný vztah $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$.

## 10.2 Fresnelova rovnice

Při odvození Fresnelovy rovnice vyjdeme z Maxwellových rotačních rovnic pro rovinnou vlnu v „nemagnetickém“ prostředí

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega \varepsilon_0 \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \boldsymbol{E},$$

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \mu_0 \boldsymbol{H}.$$

Dosadíme-li z rovnice (10.8) $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E})$, dostaneme

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) = -\omega \varepsilon_0 \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \boldsymbol{E}. \tag{10.9}$$

Rozepsáno ve složkách v souřadném systému, kde je $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ diagonální

$$k_x(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}) - k^2 E_x = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_x E_x,$$

$$k_y(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}) - k^2E_y = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_y E_y,$$

$$k_z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}) - k^2E_z = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_z E_z.$$

V této kapitole se výhradně zabýváme látkami, které neabsorbují elektromagnetickou energii při dané frekvenci a permitivity $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ jsou reálná, kladná čísla. Zavedeme označení $n_1 = \sqrt{\varepsilon_x}$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_y}$, $n_3 = \sqrt{\varepsilon_z}$ a s využitím vztahů $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}n^2$ a $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{s}_0$ upravíme (10.9) na

$$(n^2 - n_1^2)E_x = n^2 s_{0x}(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{E}), \tag{10.10a}$$

$$(n^2 - n_2^2)E_y = n^2 s_{0y}(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{E}), \tag{10.10b}$$

$$(n^2 - n_3^2)E_z = n^2 s_{0z}(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{E}). \tag{10.10c}$$

Vynásobením rovnice (10.10 a) složkou $s_{0x}$, rovnice (10.10b) složkou $s_{0y}$ a rovnice (10.10c) složkou $s_{0z}$ dostáváme pro $n^2 - n_1^2 \neq 0$, $n^2 - n_2^2 \neq 0$ a $n^2 - n_3^2 \neq 0$

$$s_{0x}E_x = \frac{n^2}{n^2 - n_1^2}s_{0x}^2(\boldsymbol{s_0}\cdot\boldsymbol{E}),$$

$$s_{0y}E_y = \frac{n^2}{n^2 - n_2^2}s_{0y}^2(\boldsymbol{s_0}\cdot\boldsymbol{E}),$$

$$s_{0z}E_z = \frac{n^2}{n^2 - n_3^2}s_{0z}^2(\boldsymbol{s_0}\cdot\boldsymbol{E}).$$

Sečtením všech tří rovnic nakonec dojdeme k rovnici

$$(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{E}) = n^2\left(\frac{s_{0x}^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{s_{0y}^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{s_{0z}^2}{n^2 - n_3^2}\right)(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{E}),$$

ze které plyne pro $(\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{E}) \neq 0$ **Fresnelova rovnice**

$$\frac{s_{0x}^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{s_{0y}^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{s_{0z}^2}{n^2 - n_3^2} = \frac{1}{n^2}. \tag{10.11}$$

Fresnelova rovnice určuje index lomu $n$, se kterým se šíří rovinná vlna s obecně orientovaným vlnovým vektorem $\boldsymbol{k}$ (tj. s jednotkovým vektorem ve směru $\boldsymbol{s}_0$).

Dále se budeme zabývat případem **jednoosých materiálů**, kdy platí $n_1 = n_2 \neq n_3$. V tomto případě, pokud se světelná rovinná vlna šíří s vlnovým vektorem $\boldsymbol{k} = (0,0,k)$ ve směru $z$, nezávisí její fázová rychlost na směru polarizační roviny, protože indexy lomu pro $s_{0x} = s_{0y} = 0, s_{0z} = 1$ a pro směry kmitání vektoru $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, 0)$ jsou stejné, totiž $n = n_1 = n_2$, jak plyne z (10.10). Tento významný směr šíření se nazývá **optická osa**. Její orientace je určena symetrií materiálu. Pokud $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ jedná se o materiály **dvouosé**. Tento název vyplývá

z toho, že v nich existují dvě optické osy, tj. dva směry $\boldsymbol{k}$, pro které jsou fázové rychlosti stejné pro všechny lineární polarizace. Popis těchto látek je výrazně složitější než v případě jednoosých látek, proto se jím nebudeme v základním kurzu zabývat. Pokud jsou všechny tři indexy stejné, tj. $n_1 = n_2 = n_3$, jedná se izotropní prostředí, které jsme popsali v minulých přednáškách.

Pro případ **jednoosých** anizotropních materiálů ($n_1 = n_2$), které jsou navíc nemagnetické, homogenní a neabsorbují elektromagnetickou energii, můžeme tedy dále rovnici (10.11) upravit. Zaveďme pro zkrácení zápisu zkratky $n_1^2 - n^2 = a$ , $n_3^2 - n^2 = b$ ,

$$\frac{s_{0x}^2}{(-a)} + \frac{s_{0y}^2}{(-a)} + \frac{s_{0z}^2}{(-b)} = \frac{1}{n^2},$$

$$abs_{0x}^2 + abs_y^2 + a^2 s_{0z}^2 = \frac{-a^2 b}{n^2},$$

$$a^2 b + n^2 a\left[ab + as_{0z}^2 + bs_{0x}^2 + bs_{0y}^2\right] = 0,$$

$$a\left[ab + n^2(as_{0z}^2 + bs_{0x}^2 + bs_{0y}^2)\right] = 0. \qquad (10.12)$$

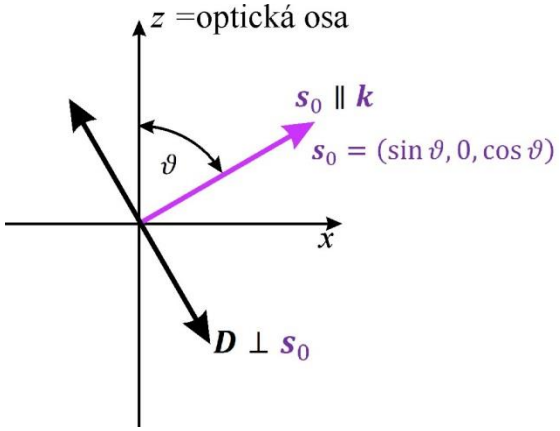
Tato rovnice má pro index lomu $n$ dvě řešení. První řešení označíme indexem „$o$“, tedy $n_o$.V tomto případě je

$$a = n_1^2 - n_o^2 = 0,$$

$$n_1^2 = n_o^2.$$

Toto řešení zjevně nezávisí na směru vlnového vektoru (komponentách vektoru $\boldsymbol{s}_0$). Tento index lomu se nazývá **řádným (ordinarius**).

Druhé řešení již na směrech $\boldsymbol{s}_0$ závisí. Označíme ho indexem „$e$“, tj. $n_e$. Jedná se o tzv **mimořádný** index lomu (**extraordinarius**). Uvedené názvy zavedl Christian Huygens (1629 – 1695). Vzhledem k tomu, že jednoosý krystal je symetrický vůči rotaci kolem optické osy $z$, můžeme bez újmy na obecnosti popisovat šíření světelné vlny v libovolné rovině obsahující optickou osu. Zvolme pro popis rovinu $xz$, tj. $y = 0$. V ní nechť svírá vlnový vektor s optickou osou $z$ úhel $\vartheta$, tj. $\boldsymbol{s}_0 = (\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$.




Obr.10.2 Směr vlnového vektoru $\boldsymbol{s}_0 \parallel \boldsymbol{k}$ v rovině *xz*

Fresnelova rovnice (10.12) pro mimořádnou vlnu v řezu $s_{0y} = 0$, obr. 10.2, je

$$ab + n_e^2\,(as_{0z}^2 + bs_{0x}^2) = 0,$$

tedy

$$(n_1^2 - n_e^2)(n_3^2 - n_e^2) + (n_1^2 - n_e^2)n_e^2\cos^2\vartheta + (n_3^2 - n_e^2)n_e^2\sin^2\vartheta = 0.$$

Po několika úpravách dostaneme

$$n_1^2 n_3^2 - n_e^2[n_1^2(1 - \cos^2\vartheta) + n_3^2(1 - \sin^2\vartheta)] = 0,$$

$$n_e^2 = \frac{n_1^2 n_3^2}{n_1^2\sin^2\vartheta + n_3^2\cos^2\vartheta} \tag{10.13}$$

a pro převrácenou hodnotu

$$\frac{1}{n_e^2} = \frac{n_1^2\sin^2\vartheta + n_3^2\cos^2\vartheta}{n_1^2 n_3^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{n_1^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{n_3^2}.$$

Zavedeme proměnné $x_e = n_e \sin\vartheta$, $z_e = n_e\cos\vartheta$ a dostaneme

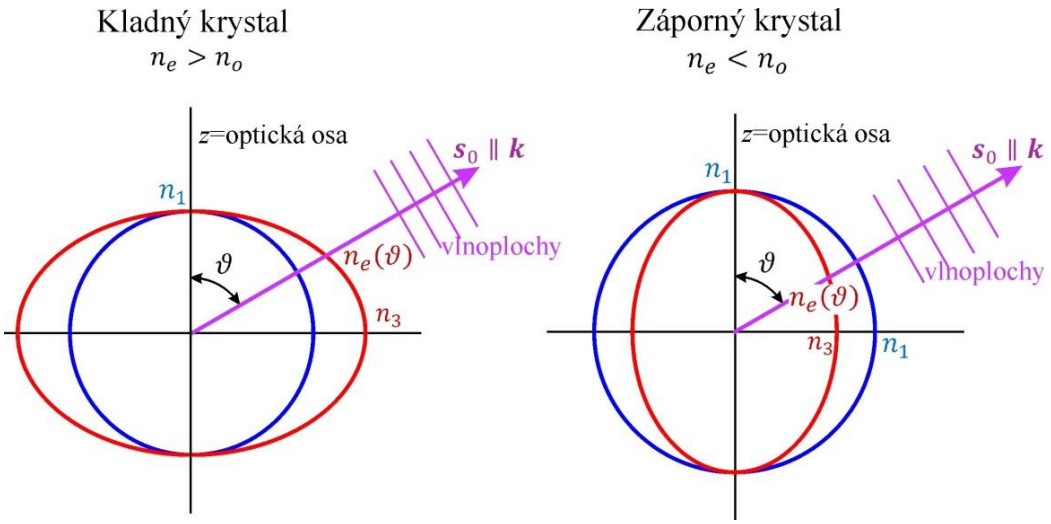
$$\frac{x_e^2}{n_3^2} + \frac{z_e^2}{n_1^2} = 1. \tag{10.14}$$

To je rovnice elipsy v osové poloze s poloosou délky $n_3$ ve směru *x* a poloosou velikosti $n_1$ ve směru *z*.

Při započtení osové symetrie dostáváme celkově rovnici plochy rotačního elipsoidu

$$\frac{x_e^2}{n_3^2} + \frac{y_e^2}{n_3^2} + \frac{z_e^2}{n_1^2} = 1. \tag{10.15}$$

Veličiny $n_1$ a $n_3$ představují hlavní řádný $(o)$ a hlavní mimořádný $(e)$ index lomu. Směrovou závislost obou řešení rovnice (10.12), tj. $n_o$ a $n_e(\vartheta)$ znázorníme v rovině *xz* pro kladný krystal a pro záporný krystal na obr. 10.3 jako řezy kulovou plochou a plochou rotačního elipsoidu.




Obr.10.3 Řez normálovými (indexovými) plochami jednoosého kladného a záporného krystalu v rovině *xz*. Indexy lomu řádné a mimořádné vlny získáme jako vzdálenosti průsečíků přímky ve směru vlnových vektorů $\boldsymbol{s}_0 \parallel \boldsymbol{k}$ s normálovými plochami řádné (modře) a mimořádné vlny (červeně). Vlnoplochy řádné i mimořádné vlny jsou roviny kolmé na vlnový vektor $\boldsymbol{k}$, ovšem fázové rychlosti jsou různé: v kladném krystalu je fázová rychlost mimořádné vlny $^{c}/_{n_e}$ menší než fázová rychlost řádné vlny $^{c}/_{n_1}$ a v záporném krystalu je tomu naopak.

Toto je jeden z možných způsobů grafického znázornění vztahů pro šíření rovinných vln v anizotropním prostředí. Je to diagram v prostoru *x,y,z* (resp. řez plochou v tomto prostoru). Ve směru vlnového vektoru $\boldsymbol{s}_0$ vynášíme příslušné indexy lomu $n_o$ a $n_e$. Výslednou kulovou/elipsoidální plochu nazýváme **normálová plocha** (indexová plocha nebo po vynásobení faktorem $\frac{\omega}{c}$ též $k$- plocha).

Dále se budeme zabývat otázkou, **jak je polarizována řádná** a **mimořádná vlna**. Dosadíme výsledky řešení do Fresnelových rovnic (10.10) s uvážením jednoosého případu $n_1 = n_2$. Nejprve pro řádnou vlnu, pro kterou platí $n_o = n_1$ a $\boldsymbol{s}_0 = (\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$. Dostáváme

$$(n_1^2 - n_1^2)E_x = n_1^2 \sin\vartheta\,(E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta), \qquad (10.16a)$$

$$(n_1^2 - n_1^2)E_y = n_1^2.0.\,(E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta), \qquad (10.16b)$$

$$(n_1^2 - n_3^2)E_z = n_1^2 \cos\vartheta\;(E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta). \qquad (10.16c)$$

Z rovnice (10.16a ) dostáváme pro obecný směr $\sin\vartheta \neq 0$

$$E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta = 0. \qquad (10.17)$$

Tento výsledek dosadíme do rovnice (10.16c) a z ní pak je $E_z = 0$. Zpětným dosazením do rovnice (10.16a), resp. do rovnice (10.17) je nakonec i $E_x = 0$. Řádná vlna je proto polarizovaná ve směru $\boldsymbol{E} = (0, E_y, 0)$. To znamená, že **řádná vlna je polarizovaná kolmo k rovině dané optickou osou a směrem šíření** (v našem případě k rovině *xz*). Tato rovina se

nazývá **rovina hlavního řezu**. Z rovnice (10.17) dále plyne, že poměr složek $E_x/E_z$ je pro daný směr šíření $\vartheta$ reálný a konstantní, tj. řádná vlna je lineárně polarizovaná.

V případě **mimořádné vlny** platí $n = n_e$

$$(n_e^2 - n_1^2)E_x = n_e^2 \sin\vartheta(E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta), \tag{10.18a}$$

$$(n_e^2 - n_1^2)E_y = 0, \tag{10.18b}$$

$$(n_e^2 - n_3^2)E_z = n_e^2 \cos\vartheta\ (E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta). \tag{10.18c}$$

Z rovnice (10.18b) je zřejmé, že v tomto případě je $E_y = 0$, tedy vektor $\boldsymbol{E}$ kmitá v rovině *xz*, tj. v rovině hlavního řezu. Rovnici (10.18a) vynásobíme $\sin\vartheta$ a dostaneme

$$(n_e^2 - n_1^2)\sin\vartheta\ E_x = n_e^2\ \sin^2\vartheta\ (E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta).$$

Rovnici (10.18c) vynásobíme $\cos\vartheta$

$$(n_e^2 - n_3^2)\cos\vartheta\ E_z = n_e^2\ \cos^2\vartheta\ (E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta).$$

Obě rovnice sečteme a dostaneme

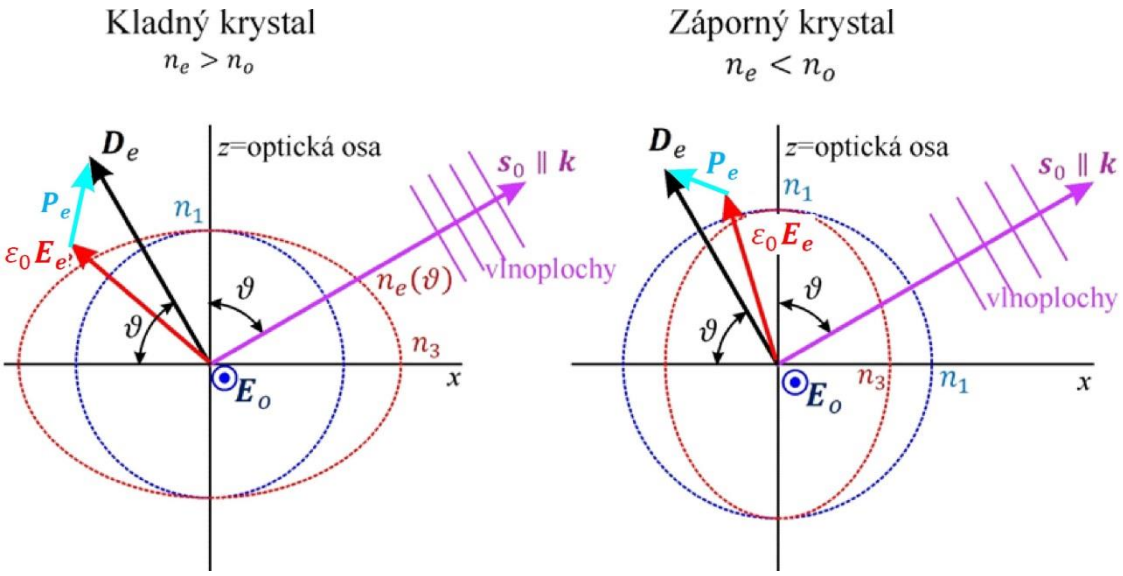
$$n_e^2\ E_x \sin\vartheta + n_e^2 E_z \cos\vartheta - n_1^2\ E_x \sin\vartheta - n_3^2 E_z \cos\vartheta =$$
$$= n_e^2(\sin^2\vartheta\ + \cos^2\vartheta)(E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta),$$
$$n_e^2(\ E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta) - n_e^2(\ E_x \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta) =$$
$$= n_1^2\ E_x \sin\vartheta + n_3^2 E_z \cos\vartheta,$$

z čehož plyne

$$n_1^2\ E_x \sin\vartheta = -n_3^2 E_z \cos\vartheta,$$
$$\frac{E_x}{E_z} = -\frac{n_3^2}{n_1^2}\operatorname{cotg}\vartheta. \tag{10.19}$$

Tedy i v případě mimořádné vlny je poměr obou složek pro daný směr šíření reálný a konstantní. Mimořádná vlna je lineárně polarizovaná.

Druhá možnost, jak splnit rovnici (10.18b) je $n_e = n_1$. Z předchozího rozboru ale víme, že zároveň $n_1 = n_o$, tedy toto řešení představuje již diskutovanou řádnou vlnu.




Obr. 10.4 Polarizace řádné a mimořádné vlny pro jednoosý kladný i záporný krystal. Mimořádná vlna $e$ je polarizována v rovině hlavního řezu $xz$ a to tak, že vektor elektrické indukce $\boldsymbol{D}_e$ je kolmý na vlnový vektor $\boldsymbol{k}$, ale vektor elektrického pole $\boldsymbol{E}_e$ obecně kolmý není. Elektrická indukce i elektrické pole řádné vlny $o$ jsou navzájem rovnoběžné a kolmé na rovinu hlavního řezu. Pro řádnou vlnu je $E_o \parallel D_o \perp xz$.

Shrnutí:

Anizotropním jednoosým prostředím se šíří dvě vlny, a to vlna řádná, jejíž fázová rychlost nezávisí na směru $\boldsymbol{s}_0$ (index lomu $n_o$, je „izotropní“) a vlna mimořádná, jejíž fázová rychlost závisí na směru $\boldsymbol{s}_0$ protože index lomu $n_e(\vartheta)$.

Obě vlny jsou lineárně polarizované s navzájem kolmými polarizacemi.

Vektor elektrické intenzity, vektor polarizace i vektor elektrické indukce řádné vlny kmitají kolmo k rovině hlavního řezu.

Vektor elektrické intenzity, vektor polarizace i vektor elektrické indukce mimořádné vlny kmitají v rovině hlavního řezu, ve které leží i vlnový vektor vlny.

Nyní rozebere šíření energie v mimořádné vlně. Jak již dříve řečeno, i v případě materiálu s lineárním dvojlomem platí, že energie nesená vlnou se šíří ve směru $\boldsymbol{t}_0$ Poyntingova vektoru a s hustotou výkonového toku danou jeho velikostí $\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{t}_0$. Zatímco v případě řádné vlny jsou vektory $S$ a $\boldsymbol{s}_0$ kolineární, v případě mimořádné vlny spolu svírají úhel $\alpha$ (obr. 10.1) a pro paprskovou rychlost $\mathrm{v}_r$ šíření energie mimořádné vlny tedy platí

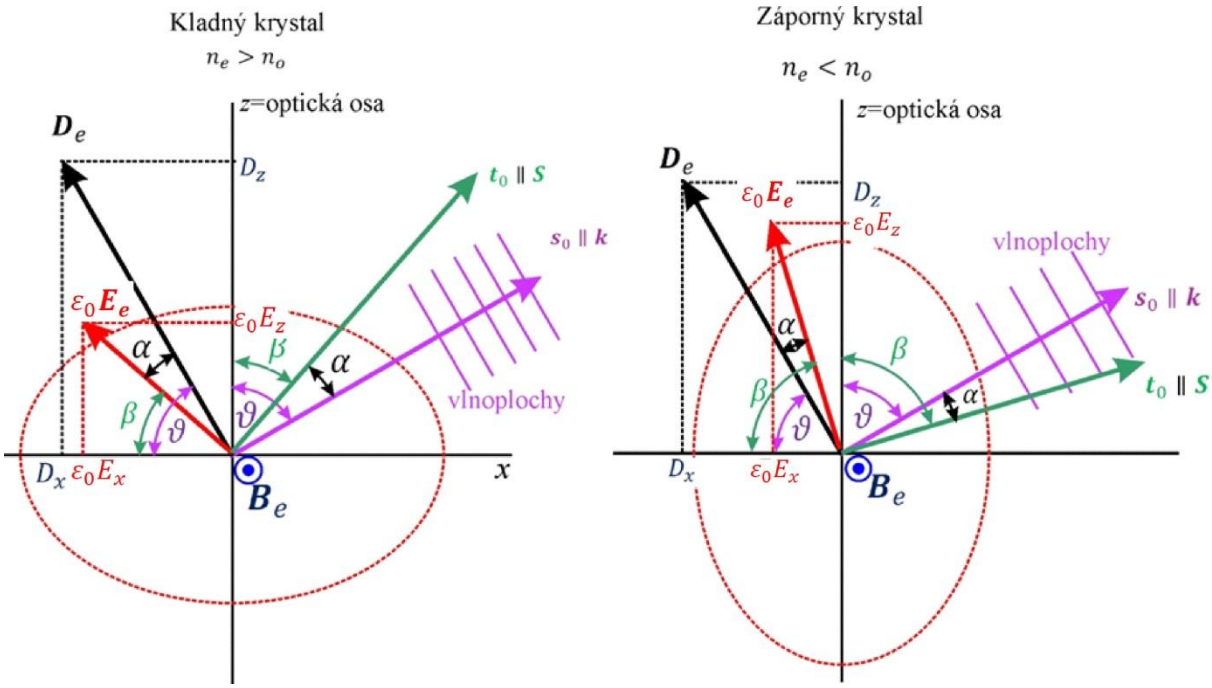
$$\mathrm{v}_r = \frac{\mathrm{v}_f}{\cos\alpha},$$

kde $\mathrm{v}_f$ je fázová rychlost mimořádné vlny.

Dále ukážeme, že úhel $\alpha$ mezi směrem šíření energie $\boldsymbol{t}_0$ a směrem šíření vlnoploch $\boldsymbol{s}_0$ je dán poměrem indexů lomu $n_1$ a $n_3$. Pro příslušné složky vektoru elektrické indukce $\boldsymbol{D}$ platí

$$D_x = \varepsilon_0 n_1^2 E_x, \qquad D_z = \varepsilon_0 n_3^2 E_z,$$

$$\frac{D_z}{D_x} = \frac{n_3^2}{n_1^2}\frac{E_z}{E_x}.$$




Obr. 10.5 Vzájemné orientace vektorů mimořádné vlny $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{t}_0$ v rovině hlavního řezu. Orientace vlnového vektoru $\boldsymbol{k}$ vůči optické ose je určena úhlem $\vartheta$, směr Poyntingova vektoru $\boldsymbol{S}$ je dán úhlem $\beta$ a tyto vektory svírají úhel $\alpha$.

Podle obr. 10.5 je

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{E_z}{E_x}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{D_z}{D_x},$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{n_3^2}{n_1^2}\operatorname{tg}\beta. \tag{10.20}$$

Pro úhel $\alpha$ zjevně platí $\alpha = \vartheta - \beta$. Pro případ kladného krystalu je $\vartheta > \beta$. Pro případ záporného krystalu je $\vartheta < \beta$.

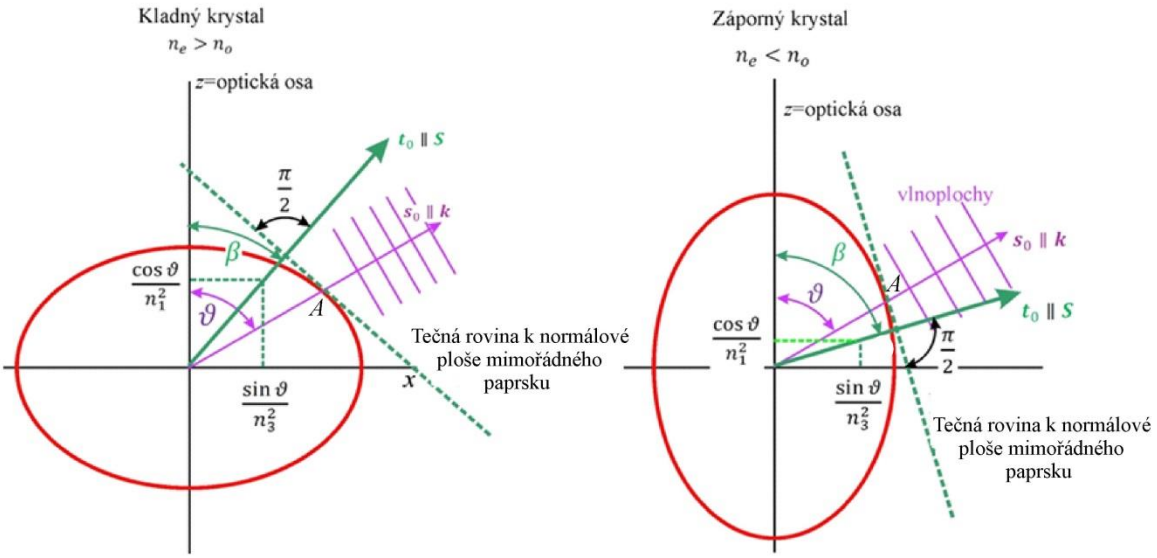
V další části ukážeme, že směr šíření energie daný vektorem $\boldsymbol{t}_0$ je určen normálou k tečné rovině normálové plochy. Označme jako bod $A = (x_0, y_0, z_0)$ průsečík přímky se směrem $\boldsymbol{s}_0$ s normálovou plochou mimořádného paprsku. Vzdálenost bodu $A$ od počátku reprezentuje index lomu pro mimořádnou vlnu s vlnovým vektorem ve směru určeném úhlem $\vartheta$. Vektor normály $\boldsymbol{N}(x, y, z)$ k tečné rovině k obecné ploše $F(x, y, z) = 0$ vedené k ploše $F$ v bodě $(x_0, y_0, z_0)$ lze psát jako

$$\boldsymbol{N}(x,y,x) = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x_0 y_0 z_0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}. \qquad (10.21)$$

V našem případě je plochou $F(x,y,z)=0$ rotační elipsoid. V rovině řezu $xz$, ve které vzhledem k rotační symetrii šíření vln v jednoosém prostředí popisujeme, se jedná o elipsu s rovnicí

$$\frac{x_e^2}{n_3^2}+\frac{z_e^2}{n_1^2}-1=0,$$

$$A \equiv (x_0, y_0, z_0) = n_e\,(\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta).$$




Obr. 10.6 Směr Poyntingova vektoru jako normála k tečné rovině k normálové (indexové) ploše v průsečíku směru vlnového vektoru $\boldsymbol{s}_0$ v bodě $A$

Normála k tečné rovině k normálové (indexové) ploše má tedy směr určený vektorem

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x_0 y_0 z_0} = \left(\frac{2x_0}{n_3^2},0,\frac{2z_0}{n_1^2}\right) = 2n_e\left(\frac{\sin\vartheta}{n_3^2},0,\frac{\cos\vartheta}{n_1^2}\right). \qquad (10.22)$$

Spočteme z poměru složek $N_z$ a $N_x$ úhel $\varphi$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{n_1^2}{n_3^2} = \operatorname{tg}\beta\,. \qquad (10.23)$$

Dokázali jsme, že $\varphi=\beta$. Tedy normála k tečné rovině v bodě průsečíku udávajícího směr šíření vlnoploch mimořádné vlny $\boldsymbol{s}_0$ s normálovou plochou mimořádné vlny má směr šíření energie mimořádné vlny $\boldsymbol{t}_0$.

# 10.3 Lom světla na rozhraní s anizotropním jednoosým prostředím

I při dopadu světelné vlny na rovinné rozhraní mezi izotropním a jednoosým anizotropním prostředím platí zákon lomu. Vzhledem k tomu, že se tímto prostředím mohou šířit dvě vlny s různými indexy lomu – řádným a mimořádným, rozdělí se dopadající vlna (vlnový vektor $\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}$) na dvě lomené vlny: řádnou (vlnový vektor $\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}o}$ a index lomu $n_o$) a mimořádnou (vlnový vektor $\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}e}$, index lomu $n_{te}(\Theta_{\mathrm{t}e})$).

Zákon lomu platí ve tvaru

$$n_i \sin\Theta_{\mathrm{i}} = n_o \sin\Theta_{\mathrm{t}o} \quad \text{(řádná vlna)} \tag{10.24}$$

a

$$n_i \sin\Theta_{\mathrm{i}} = n_{te}\,(\vartheta) \sin\Theta_{\mathrm{t}e} \quad \text{(mimořádná vlna).} \tag{10.25}$$

Úhel $\vartheta$ (tj. úhel mezi vlnovým vektorem a optickou osou) v konkrétní geometrii (optická osa, rovina dopadu, rovina rozhraní) závisí na vzájemné orientaci optické osy a úhlu lomu $\vartheta = \vartheta(\Theta_{\mathrm{t}e})$. Stejně tak je tomu pro index lomu $n_{te} = n_{te}[\vartheta(\Theta_{\mathrm{t}e})]$. Tato úloha tedy není zcela triviální. Úhel $\Theta_{\mathrm{t}e}$ můžeme nalézt řešením rovnice (10.25) s využitím rovnice (10.13). Zde využijeme názornou možnost, totiž nakreslit geometrickou konstrukci využívající spojitosti elektrického pole fází dopadající a lomené vlny vedoucí k rovnosti

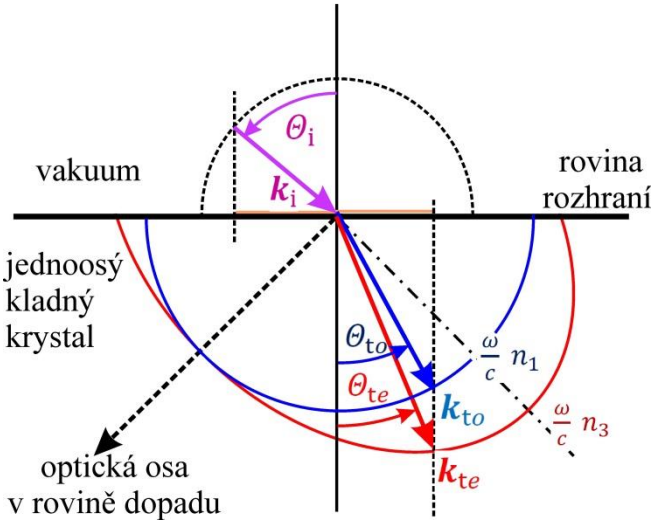
$$(\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}o} - \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}) \cdot \boldsymbol{r}_b = (\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}e} - \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}) \cdot \boldsymbol{r}_b = 0,$$

kde $\boldsymbol{r}_b$ je vektor ležící v rovině rozhraní. Tečné složky vlnových vektorů k rovině rozhraní $\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{t}o}$ a $\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}e}$ jsou tedy stejné**.** Jedná se o stejnou podmínku návaznosti vlnoploch, kterou jsme použili při odvození zákona lomu pro rozhraní izotropních prostředí. Zkonstruujeme z normálových ploch *k*-plochy, které se získají z normálových ploch vynásobením faktorem $\frac{\omega}{c}$.

Při stanovení úhlů lomu $\Theta_{\mathrm{t}o}$ a $\Theta_{\mathrm{t}e}$ z geometrické konstrukce postupujeme následovně:

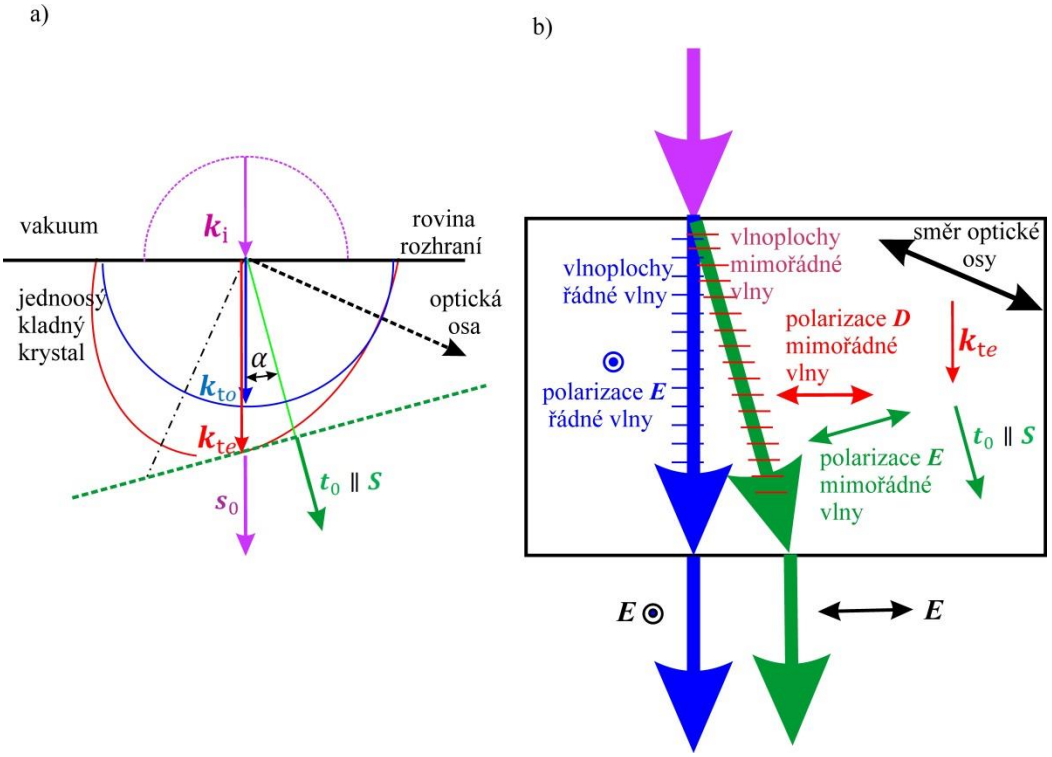
1. Provedeme řez *k*- plochou v rovině dopadu.
2. V získané rovině řezu nakreslíme průsečnici s rovinou rozhraní.
3. Vyznačíme vlnový vektor dopadající vlny $\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}$**.**
4. Stanovíme průmět vektoru $\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}$ do roviny rozhraní. Vzhledem k rovnosti tečných složek $\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{t}o}$ a $\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}e}$ vyznačíme stejně velký průmět pro lomené paprsky v rovině rozhraní a z něj příslušné průsečíky s *k*-plochami řádné a mimořádné vlny. Tyto průsečíky určují směry vlnových vektorů obou lomených paprsků.

Postup pro určení úhlů lomu řádné a mimořádné vlny geometrickou konstrukcí je zobrazen na obr. 10.7. Řez *k*-plochou kladného krystalu je zobrazen pro případ, kdy optická osa leží v rovině dopadu a je obecně natočena vůči rovině rozhraní.




Obr. 10.7 Geometrická konstrukce určení směru vlnového vektoru lomeného paprsku pro řádnou (modře) a mimořádnou (červeně) vlnu pro kladný krystal a pro optickou osu ležící v rovině dopadu

Dále se budeme věnovat speciálnímu případu **kolmého dopadu** na anizotropní jednoosý krystal. V případě kolmého dopadu ze zákona lomu vyplývá, že ke změně směru vlnového vektoru nedochází. Směr šíření vlnoploch **obou vln** je dán vektorem $\boldsymbol{s}_0$. Jak víme z předchozího výkladu, směr šíření energie řádného paprsku je rovněž dán vektorem $\boldsymbol{s}_0$**,** zatímco směr šíření energie mimořádného paprsku je dán paprskovým vektorem $\boldsymbol{t}_0$**,** který svírá s vektorem $\boldsymbol{s}_0$ úhel $\alpha$. Při dopadu prostorově omezeného svazku na rozhraní s anizotropním prostředím dochází proto ke zdvojení obrazu v důsledku dvojlomu. V případě kolmého dopadu jeden obraz vzniká v původním směru šíření (odpovídá řádnému paprsku, jehož energie se šíří ve směru vektoru $\boldsymbol{s}_0$), druhý svazek je odchýlen uvnitř dvojlomného krystalu o úhel $\alpha$ a odpovídá mimořádnému paprsku se směrem šíření energie $\boldsymbol{t}_0$. Vznik dvojlomu při kolmém dopadu je demonstrován pro kladný krystal na obr. 10.8.




Obr. 10.8 a) Geometrická konstrukce pro určení směru vlnových vektorů a směru šíření energie lomeného svazku, který vysvětluje vznik zdvojeného obrazu pro případ kolmého dopadu. Vlnoplochy řádné i mimořádné vlny jsou rovnoběžné s rovinou rozhraní, ale jejich vzdálenosti jsou rozdílné, protože jsou rozdílné fázové rychlosti. Vlnový vektor uvnitř krystalu řádné vlny $\boldsymbol{k}_{to}$ a mimořádné vlny $\boldsymbol{k}_{te}$ jsou rovnoběžné s vlnovým vektorem dopadající vlny $\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}$. Poyntingův vektor řádné vlny (nezakreslen) je rovněž rovnoběžný se směrem $\boldsymbol{k}_{to}$. Směr Poyntingova vektoru mimořádné vlny $t_0$ je kolmý na tečnou rovinu k indexové ploše. b) Směr Poyntingova vektoru řádné vlny zakreslen modře a směr Poyntingova vektoru mimořádné vlny zakreslen zeleně. Směry Poyntingových vektorů určují směry šíření energie v prostorově omezeném svazku (směry „paprsků“).

# 10.4 Použití dvojlomných látek

Dvojlomné látky se používají v řadě optických prvků. Zejména se využívá skutečnosti, že řádná a mimořádná vlna jsou lineárně polarizované s navzájem kolmými polarizacemi a mohou se v anizotropním materiálu šířit různými směry. Optické prvky připravené z anizotropních látek se proto zpravidla využívají k přípravě polarizovaného světla nebo ke změně jeho stavu.

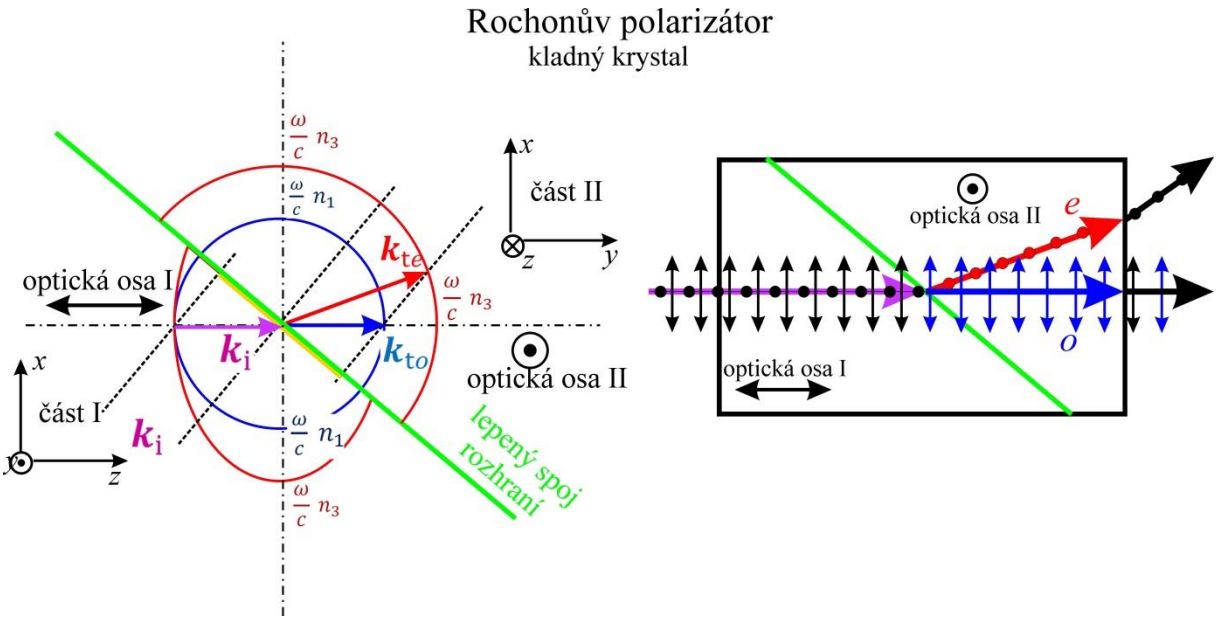
## 10.4.1 Krystalový polarizátor

Geometrických uspořádání krystalových polarizátorů využívajících vlastností dvojlomných materiálů je celá řada. Výsledkem je prostorové oddělení svazků se dvěma navzájem kolmými polarizacemi záření. Základními principy je využití různých indexů lomu pro různé polarizace. Můžeme využít

- různé směry lomených svazků

- nebo nastavení takových podmínek, že pro jednu polarizaci dojde na nějakém rozhraní k totální reflexi a pro druhou polarizaci nikoli.

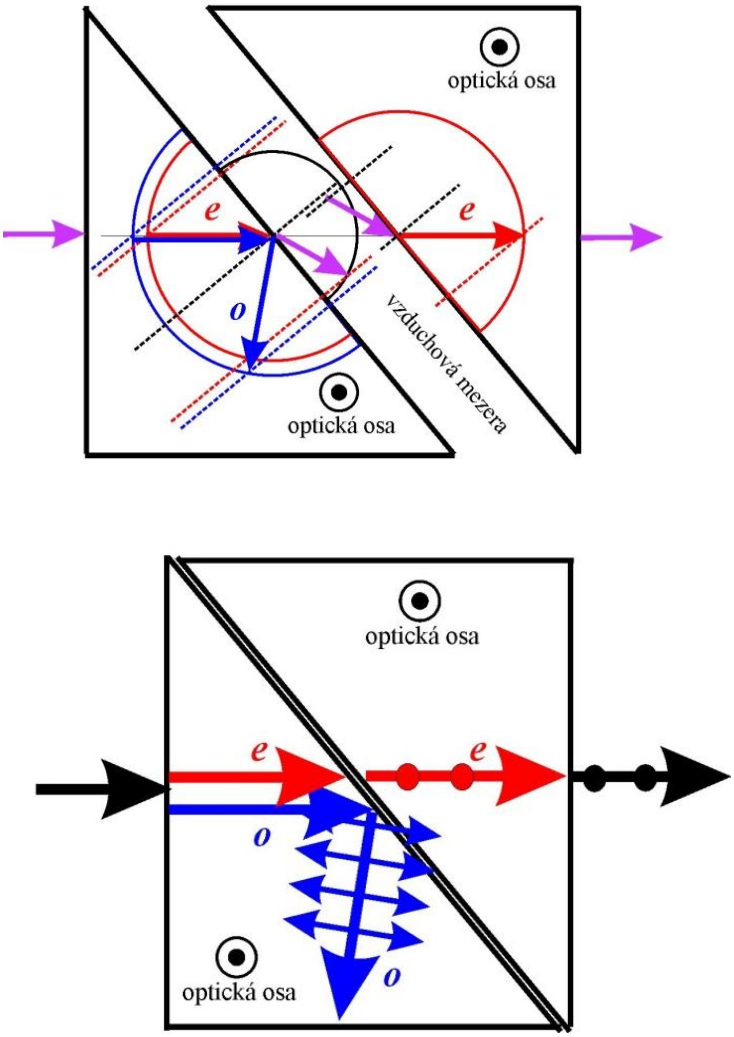
Příkladem poměrně jednoduchého polarizátoru využívajícího změnu směru svazků podle zákona lomu je Rochonův polarizátor (polarizační hranol), obr. 10.9. Ten se skládá ze dvou částí vzájemně spojených optickým tmelem nebo prostřednictvím vzduchové mezery. Optická osa má v obou částech různou orientaci. V části I Rochonova hranolu se vlny šíří paralelně se směrem optické osy, takže se šíří stejnou rychlostí pro všechny polarizace (viz definice optické osy). Druhá část hranolu II je vyříznutá tak, že optická osa je v ní orientována kolmo vůči směru optické osy v části I. Proto při šikmém dopadu na rozhraní dochází k dvojlomu. V části II již rozlišujeme řádný a mimořádný paprsek. Řádný paprsek je polarizovaný v části II v rovině obrázku (kolmo na rovinu hlavního řezu v části II) a jeho index lomu je stejný v části II jako v části I. Na rozhraní nedochází k lomu tohoto paprsku a šíří se v původním směru. Mimořádný paprsek v části II (polarizovaný kolmo k rovině obrázku, tedy polarizovaný v rovině hlavního řezu) se láme. Při výstupu z části II do okolí se řádný paprsek dále šíří v původním směru (kolmý dopad na rozhraní hranol/vzduch, kdy nedochází k lomu), mimořádný se dále láme podle zákona lomu na rozhraní anizotropní prostředí/vzduch. V případě dopadu prostorově omezeného nepolarizovaného úzkého svazku na Rochonův hranol pak z hranolu vystupují dva prostorově omezené a oddělené lineárně polarizované svazky s navzájem kolmými polarizacemi.




Obr 10.9 Geometrická konstrukce průchodu světelné vlny Rochonovým polarizačním hranolem s využitím normálových ploch. Zobrazeno pro kladný krystal. Naznačené souřadné soustavy se vztahují k orientaci elipsoidů susceptibilit pro dané orientace krystalů. Svislé šipky v pravé části naznačují směr kmitů ***E*** v rovině obrázku, plné kroužky polarizaci kolmou na rovinu obrázku.

Z dalších typů polarizátorů pracujících na podobném principu jmenujme Wollastonův a Sénarmontův.

Totální reflexi využívá rovněž řada uspořádání, mj. velmi známý Nicolův polarizátor nebo polarizátory z rodiny Glanových hranolů. Jako příklad je na obr. 10.10 nakresleno schéma Glanova-Foucaultova polarizátoru s totálním odrazem na rozhraní části I a vzduchové mezery. Jak je z obrázku patrné, pro řádnou vlnu nastává na rozhraní totální odraz, takže do části II již nevstupuje a v části II se šíří pouze mimořádný svazek.



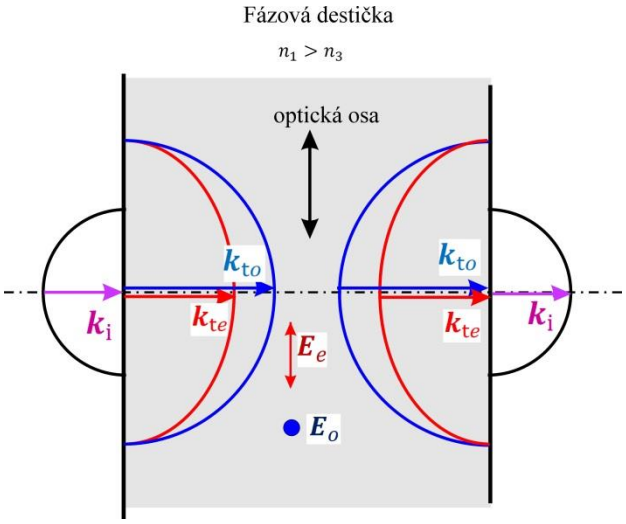

Obr. 10.10 Znázornění totálního odrazu řádného svazku na rozhraní krystal – vzduch pro vhodně zvolený úhel dopadu na toto rozhraní. V horní části obrázku jsou znázorněny vlnové vektory (včetně konstrukce lomu) a v dolní části obrázku příslušné polarizace. Průmět vlnového vektoru řádné vlny do roviny rozhraní je větší než průmět vlnového vektoru ve vzduchu. Nelze tedy splnit podmínku spojitosti (3.7) pro lomenou vlnu a dochází k totálnímu odrazu řádné vlny. Obrázek je nakreslen pro záporný krystal $n_o > n_e$ a zhruba odpovídá realizaci s krystalem kalcitu. Část II polarizátoru již slouží jen pro „narovnání“ směru procházejícího svazku a v principu materiál části II ani nemusí být dvojlomný. Uspořádání se vzduchovou mezerou bývá označováno jako Glanův-Foucaultův polarizátor. Lepená verze (která musí brát v úvahu index lomu lepidla) se obvykle nazývá Glanův-Thompsonův polarizátor.

## 10.4.2 Fázová destička

Fázová destička je optický prvek, kterým lze měnit polarizační stav světla. Připravuje se z jednoosého dvojlomného materiálu jako planparalelní výřez s **optickou osou ležící v rovině destičky** (tj. rovnoběžnou se vstupní plochou). V takovém případě vykazují světelné vlny ve dvou navzájem kolmých směrech lineární polarizace rozdílné indexy lomu, což vede k jejich vzájemnému fázovému posunu během šíření. Vzhledem k tomu, že světlo dopadá na fázovou destičku kolmo, nedochází k lomu a obě vlny se šíří společně různou rychlostí v původním směru. Protože vlny dopadají kolmo i na optickou osu, nenastane ani jejich prostorové oddělení v důsledku odchýlení směru Poyntingova vektoru. Dopad na zadní stěnu fázové destičky je rovněž kolmý, nedochází k lomu a obě nyní navzájem fázově posunuté vlny lineární polarizace se opět složí v jednu vlnu vystupující do okolního prostředí se změněným polarizačním stavem. Fázový posun závisí na tloušťce destičky a na rozdílu indexů lomu řádného a mimořádného paprsku, což jsou v dané geometrii indexy $n_3$ a $n_1$

$$\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_o = (k_e - k_o)d = \frac{\omega}{c}(n_3 - n_1)d. \tag{10.26}$$

Nejčastěji používanými fázovými destičkami jsou čtvrtvlnová a půlvlnová destička. Jejich název je odvozen z dráhového rozdílu, který vzniká při šíření obou vln navzájem kolmé lineární polarizace, a to $\frac{\lambda}{4}$ v případě čvrtvlnové destičky odpovídající fázovému posunu o $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\lambda}{2}$ v případě půlvlnné destičky odpovídající fázovému posunu o $\pi$. Podrobněji jsme se popisu fázové destičky a jejímu vlivu na polarizační stav světla věnovali v kapitole 2 – „Polarizace“. Ukázali jsme použitím Jonesova formalismu, že čtvrtvlnová destička mění polarizační stav světla z lineárně polarizovaného na kruhově polarizované a naopak. Půlvlnová destička se používá k rotaci lineárně polarizovaného světla.

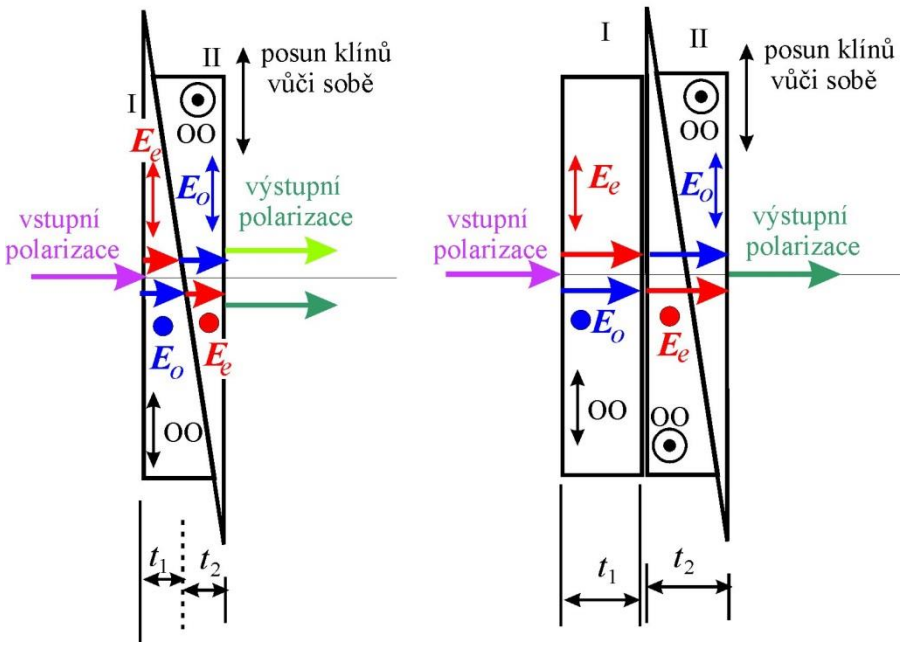



Obr. 10.11 Fázová destička z jednoosého záporného krystalu

## 10.4.3 Kompenzátor

Čtvrtvlnová a půlvlnová destička jsou speciálními případy obecnějšího prvku - kompenzátoru, kterým lze nastavit libovolné fázové zpoždění mezi řádnou a mimořádnou vlnou. Tento prvek je založen na změně fázového rozdílu obou vln změnou optické dráhy způsobenou mechanickým posunem dvou klínů z dvojlomného materiálu vůči sobě. Jako konkrétní případ popíšeme tzv. Babinetův kompenzátor.

Původní Babinetův kompenzátor se skládá ze dvou klínů dvojlomného materiálu vyříznutých s malým vrcholovým úhlem, které mají navzájem kolmé orientace optických os. Tento typ kompenzátoru má tu nevýhodu, že v ploše není uvedený fázový rozdíl konstantní, protože rozdíl tlouštěk závisí na poloze světelného svazku. Tuto nevýhodu odstraňuje Soleilův-Babinetův kompenzátor (obr.10.12), který se skládá z pevné planparalelní desky s jednou orientací optické osy (např. oblast I) a druhá oblast (II) je tvořena vzájemně pohyblivými klíny, které mají souhlasnou orientaci optické osy. Takže tloušťka $t_1$ je pevná a tloušťku $t_2$ lze měnit vzájemným posuvem klínů. Rozdíl obou tlouštěk je v celé užitečné ploše kompenzátoru konstantní.




Obr. 10.12 Babinetův a Babinetův–Soleilův kompenzátor s vyznačenými směry optických os dvojlomného materiálu a kmity elektrického pole. Červeně je vyznačena mimořádná vlna (index lomu $n_e$) a modře vlna řádná (index lomu $n_o$) v daných částech kompenzátoru. OO značí směr optické osy. Mechanickým posunem klínů se mění délka optické dráhy, kterou světlo proběhne částmi kompenzátoru. Tím se mění fázový posun obou složek polarizace. Jedná se o fázovou destičku s proměnnou tloušťkou. V Babinetově kompenzátoru je v ploše různý rozdíl tlouštěk klínů a proto z různých míst vystupuje poněkud odlišná polarizace.

V části I je optická osa v rovině nákresu, v části II je kolmo k ní. Světelná vlna dopadá na rovinu rozhraní části I kolmo, nedochází tedy k lomu. Dále prochází částí I o tloušťce $t_1$, přitom

dochází k fázovému posunu lineárně polarizovaných svazků s navzájem kolmými polarizacemi. Ty dopadají na rozhraní mezi částí I a II. Předpokládáme, že vrcholový úhel klínu je malý a můžeme proto zanedbat lom (dochází k téměř kolmému dopadu na rozhraní). V prostředí II je optická osa otočená o 90 stupňů. Proto je stočená i rovina hlavního řezu daná směrem šíření a optickou osou a paprsek, který byl řádný v prostředí I se stává v prostředí II mimořádným a naopak. Při šíření v části II se opět řádný a mimořádný paprsek vzájemně fázově posouvají úměrně tloušťce této části $t_2$. Část II je v Babinetově–Soleilově kompenzátoru konstrukčně řešená jako posuvná, takže $t_2$ lze plynule měnit. Tím se mění dráhový a fázový rozdíl v části II a tím i v celém kompenzátoru.

Náběh fáze vlny 1 (řádná v části I, mimořádná v části II) je

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_o t_1 + n_e t_2). \tag{10.27}$$

Náběh fáze vlny 2 (mimořádná v části I, řádná v části II) je

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e t_1 + n_o t_2) \tag{10.28}$$

a fázový rozdíl obou vln můžeme psát

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_0)(t_2 - t_1)\,. \tag{10.29}$$

Fázový rozdíl lze měnit vzájemným posunem obou klínů.

# 10.5 Popis šíření světla v anizotropním prostředí pomocí indexového elipsoidu (indikatrix)

Dosud jsme pro popis šíření světla v anizotropním prostředí používali normálových (indexových) ploch nebo *k*-ploch, které vyjadřují velikosti indexu lomu (normálová plocha) nebo ***k***-vektoru (*k*-plocha) ve směru vlnového vektoru ***k*** daném jednotkovým vektorem $\boldsymbol{s}_0$. V literatuře je častý alternativní popis pomocí tzv. indexového elipsoidu (nazývaný rovněž optická indikatrix). V tomto případě vyjadřujeme **závislost indexu lomu na směru vektoru elektrické indukce *D***, který je k vektoru ***k*** kolmý (obr. 10.1). Vyjdeme z rovnice pro hustotu elektrické energie elektromagnetického záření

$$w_e = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left(E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z\right) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_1} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_2} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_3}\right), \tag{10.30}$$

kde jsme využili vztahů $D_x = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_x$, $\varepsilon_1 = n_1^2$ a podobně pro ostatní složky. Po úpravě dostaneme

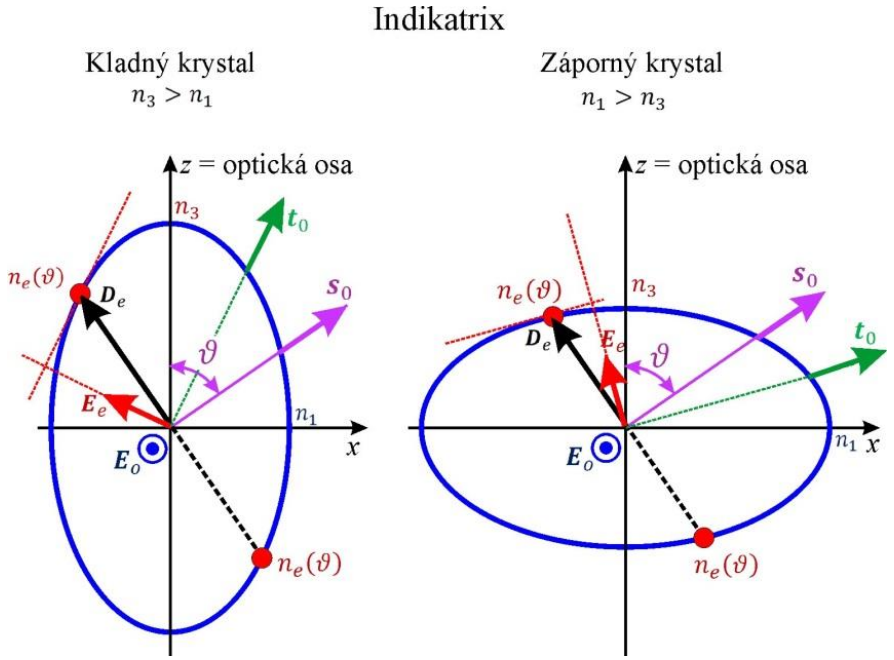
$$\frac{D_x^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2}{n_2^2} + \frac{D_z^2}{n_3^2} = 2\varepsilon_0 w_e.$$

Obvykle se využívá normování, kdy položíme $2\varepsilon_0 w_e = 1$. Tím dostaneme obvykle uváděnou rovnici pro optickou indikatrix vyjádřenou geometricky

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1. \tag{10.31}$$

V grafickém vyjádření se jedná o elipsoid, který je v případě jednoosých krystalů rotační ($n_1 = n_2$).

Na rozdíl od normálové plochy, ve které byla diagramem pro řádnou vlnu koule a pro mimořádnou vlnu elipsoid, indikatrix je elipsoid poskytující informace zároveň o řádné i mimořádné vlně. Tento elipsoid je v prostoru *x*,*y*,*z* otočen oproti orientaci elipsoidu normálové plochy mimořádné vlny o 90°. To je způsobeno tím, že normálovou plochu jsme konstruovali vynášením indexu lomu do směru vlnového vektoru, zatímco **indikatrix představuje závislost indexu lomu do směru elektrické indukce**. Směr elektrického pole $\boldsymbol{E}$ vlny lze dostat jako normálu k rovině tečné k ploše elipsoidu v místě určeném směrem $\boldsymbol{D}$.

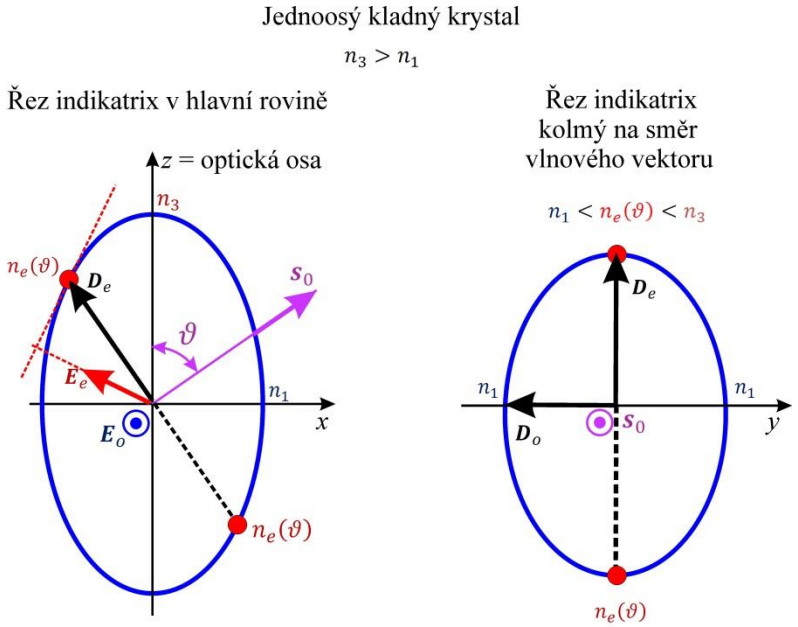



Obr.10.13 Hlavní řez indexového elipsoidu (řez optickou indikatrix) pro jednoosý kladný a záporný krystal. Směr elektrické indukce $\boldsymbol{D}_e$ je kolmý na směr vlnového vektoru $\boldsymbol{s}_0$ a leží v rovině hlavního řezu. Směr elektrické intenzity $\boldsymbol{E}_e$ je kolmý na tečnou rovinu k indikatrix, která prochází bodem $n_e(\vartheta)$ na indikatrix určeným směrem $\boldsymbol{D}_e$. Směr elektrické indukce $\boldsymbol{D}_o$ i směr elektrické intenzity $\boldsymbol{E}_o$ řádného paprsku jsou navzájem rovnoběžné a kolmé na rovinu hlavního řezu. V diagramu šipky $\boldsymbol{D}_e$ a $\boldsymbol{E}_e$ označují směry vektorů a nemají vztah k jejich velikosti. Veličiny $\boldsymbol{D}_e$ a $\boldsymbol{E}_e$ mají různé fyzikální rozměry a indexový elipsoid je normován podle (10.31).

Směr elektrické indukce $\boldsymbol{D}$ řádné i mimořádné vlny i velikosti příslušných indexů lomu dostaneme pomocí řezu elipsoidem indikatrix, který je kolmý na vlnový vektor (směr $\boldsymbol{s}_0$). Tak

dostaneme elipsu a její dvě poloosy ukazují jak fyzikálně možné směry $\boldsymbol{D}$, tak i příslušné indexy lomu. Tento v principu jednoduchý postup lze použít i v případě dvouosého materiálu, kdy je indikatrix elipsoidem nerotačním, určeným 3 poloosami a práce s normálovými plochami ($k$-plochami) je podstatně složitější. Odtud plyne obliba užívání indikatrix.

V případě zde probíraného jednoosého materiálu leží jedna poloosa elipsy získané řezem elipsoidu ($\perp \boldsymbol{s}_0$) v hlavní rovině určené směrem optické osy a $\boldsymbol{s}_0$. Velikost této poloosy udává mimořádný index lomu $n_e(\vartheta)$. Druhá poloosa zmíněné elipsy je kolmá na hlavní rovinu a její velikost je řádný index lomu $n_o = n_1$.




Obr. 10.14 Hlavní řez indikatrix a její řez kolmý na směr vlnového vektoru. Řezem je elipsa a její hlavní poloosy určují směry polarizace a velikosti indexů lomu příslušných vln.

# 11. Nelineární optika

V dosavadním textu jsme předpokládali, že prostředí, ve kterém se šíří elektromagnetické vlnění, je lineární. Z hlediska makroskopického popisu pomocí Maxwellových rovnic to znamená, že pro monochromatický průběh polí vektor polarizace $\boldsymbol{P}$ je úměrný první mocnině budícího elektrického pole $\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{P}_\omega = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}(\omega) \boldsymbol{E}_\omega \,. \tag{11.1}$$

Modelové lineární prostředí se vyznačuje řadou významných vlastností, jakými jsou např. platnost principu superpozice a nezávislost optických parametrů (např. index lomu, absorpční koeficient) na intenzitě záření. Při šíření lineárním prostředí se rovněž nemění frekvence vlny. Odezva látek na budící elektromagnetické záření je obecně nelineární, ale v případě slabé elektrické intenzity lze v řadě případů odezvu látky za lineární považovat a vztah (11.1) aplikovat.

V případě **nelineárního** prostředí platí mezi vektorem polarizace a budícím elektrickým polem obecnější vztah, který můžeme rozvést v řadu. V zjednodušeném symbolickém zápisu

$$P = \varepsilon_0 \chi E + \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 + \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 + \cdots \tag{11.2}$$

kde $\chi^{(2)}$ a $\chi^{(3)}$ jsou susceptibility druhého a třetího řádu. V případě zobecnění popisu na anizotropní prostředí jsou příslušné susceptibility tenzory daného řádu. S rostoucím řádem velikosti jednotlivých příspěvků k výsledné polarizaci silně klesají, proto je ve většině praktických případů možné omezit se na nelinearity druhého a třetího řádu. Poctivější zápis vztahu (11.2) využije tenzorového formalismu Pro $i$-tou složku celkové polarizace můžeme rozepsat

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij}(\omega)\, E_j(\omega) \; + \varepsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} \left(\omega_i, \omega_j, \omega_k\right) E_j\left(\omega_j\right) E_k(\omega_k) +$$

$$+ \varepsilon_0 \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)} \left(\omega_i, \omega_j, \omega_k, \omega_l\right) E_j\left(\omega_j\right) E_k(\omega_k) E_l(\omega_l) \,.$$

Přitom o symetrii tenzorů rozhoduje symetrie uspořádání atomů (iontů,...) v dané látce a ta též určí, které řády optických nelinearit se v dané látce projeví a jakým způsobem. Symetrie látky určí, které složky tenzorů jsou nulové a které složky tenzorů se sobě rovnají.

Dále je vhodné upozornit, že elektrická pole $E_j, E_k, E_l$ mohou kmitat na různých frekvencích, což poskytuje obrovské množství různých kombinací, jako je generace součtových a rozdílových frekvencí a mnohé jiné. Zde si všimneme jen několika vybraných ilustračních příkladů pro jevy 2. a 3. řádu.

# 11.1 Nelineární optické jevy druhého řádu

Výskyt jevů druhého řádu je v látkách omezen na ty, které nemají střed symetrie. Důvodem je to, že v látkách se středem symetrie musejí být jejich vlastnosti neměnné při inverzi příslušných os souřadného sytému.

Předpokládejme, že s látkou bez středu symetrie interaguje rovinná, monochromatická vlna

$$E(\omega, t) = E_0 \cos \omega t = \frac{E_0}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right).$$

Odezva prostředí odpovídající polarizaci druhého řádu pak je)

$$\begin{aligned} P^{(2)}(t) &= \varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{E_0^2}{4}\left(2 + e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t}\right) \\ &= \varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{E_0^2}{2} + \varepsilon_0 \chi^{(2)} \cos(2\omega t)\,. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Vidíme tedy, že v důsledku nelinearity druhého řádu je v látce generována vlna s dvojnásobnou frekvencí oproti vlně budící (druhý člen rovnice 11.3). Efekt **generace druhé harmonické** frekvence byl poprvé experimentálně pozorován v roce 1961 na Univerzitě v Michiganu. Byl využit 3-kW puls červeného laseru (694.3nm) dopadající na krystal křemene. Podařilo se generovat vlnu druhé harmonické frekvence (347.15 nm) s velmi malou intenzitou (přibližně $10^8$krát slabší než byla intenzita budícího červeného laseru. V dnešní době jsou účinnosti generace druhé harmonické frekvence podstatně vyšší a jev je v laboratorní praxi hojně využívána pro změnu frekvence laserů.

Člen $\varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{E_0^2}{2}$ odpovídá za vznik jevu nazývaného **optické usměrnění** a je to generace „statické“[8] polarizace látky. Tohoto efektu lze využít např. při generaci záření v THz části spektra. Intenzivní pikosekundové pulzy z viditelné či ultrafialové oblasti spektra dopadají na materiál bez středu symetrie, excitují pohyblivé nosiče a zároveň generují přes jev optického usměrnění elektrické pole. Pohyblivé nosiče jsou tímto polem urychlovány. Zrychlený pohyb elektrických nábojů generuje elektromagnetické pole, jehož zákmit trvá řádově ps a této době kmitu $10^{-12}$ s odpovídá frekvence $10^{12}$ Hz = THz.

Při dosavadním popisu nelineárních optických jevů jsme se soustředili na časovou část odezvy, šířením vlny v prostoru jsme se zatím nezabývali. Aby se vlna druhé harmonické frekvence mohla účinně šířit, musí být splněna tzv. podmínka sfázování. Budeme předpokládat, že budící vlna s frekvencí $\omega$ a vlnovým vektorem $k_1$, která se šíří v nelineárním krystalu délky $d$ vykazujícím jevy druhého řádu ve směru osy $z$ , generuje při svém postupu v každém místě vlnu s frekvencí $2\omega$ a vlnovým vektorem $k_2$. Maximální intenzitu vlny s frekvencí $2\omega$ na výstupu krystalu ($z = d$) dostaneme, pokud se všechny vlny druhé harmonické generované podél krystalu (0 až $d$) interferencí sečtou konstruktivně. To vede k **podmínce sfázování** (podrobněji viz. učebnice [5].

[8] ve smyslu mnohem pomalejší než jsou kmity záření $\omega$.

$$2k_1 - k_2 = 0\,, \tag{11.4}$$

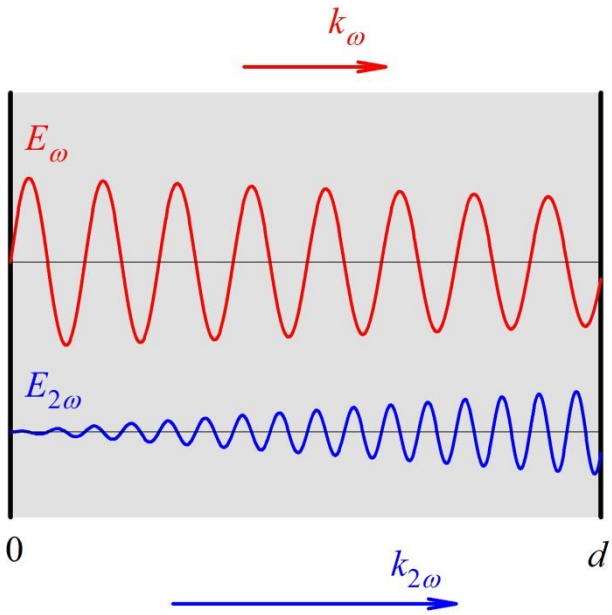
$$2\omega\frac{n(\omega)}{c} = \frac{2\omega}{c}n(2\omega)\,,$$

z čehož plyne podmínka

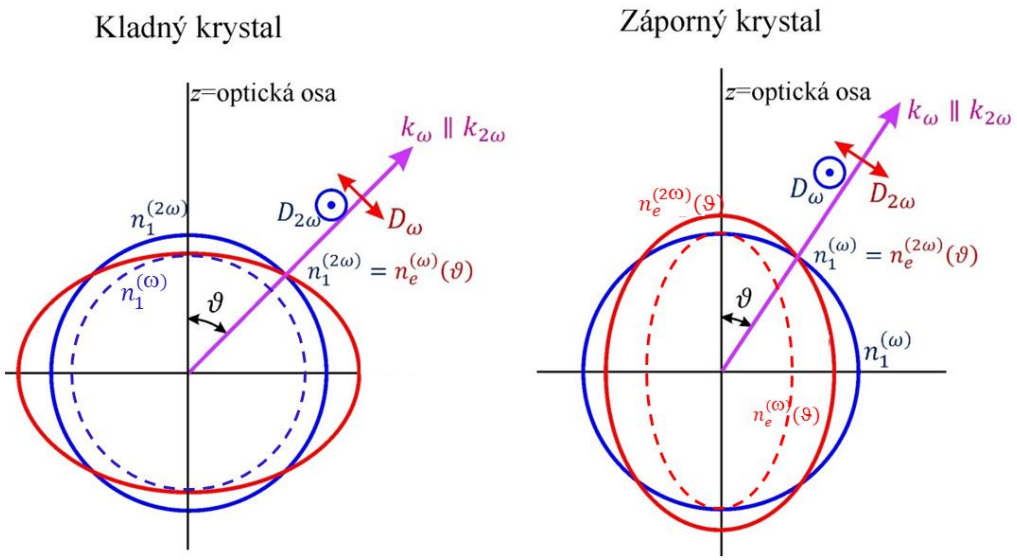
$$n(\omega) = n(2\omega)\,. \tag{11.5}$$

V běžných izotropních materiálech není možné tuto podmínku splnit, protože index lomu na frekvenci $\omega$ závisí (v oblasti tzv. normální disperze index lomu s frekvencí roste, v oblastech anomální disperze s frekvencí klesá – podrobněji v kapitole 12 „Absorpce a index lomu“).

Pro splnění podmínky sfázování je tedy třeba využít anizotropních materiálů, kde lze podmínku sfázování splnit díky tomu, že se v nich šíří řádná a mimořádná vlna. Krystal je nutné vhodně natočit. K nalezení správného směru natočení vůči optické ose je nutná znalost závislosti $n(\omega)$ pro daný anizotropní materiál. Grafická metoda nalezení směru natočení je zobrazena na obr. 11.2 pro kladný i záporný jednoosý krystal.




Obr. 11.1 Schématické zobrazení generace druhé harmonické frekvence při splnění podmínky sfázování $k_{2\omega} = 2\,k_\omega$, neboli $n_{2\omega} = n_\omega$




Obr. 11.2 Geometrická konstrukce k nalezení směru natočení jednoosého anizotropního krystalu vůči optické ose pro splnění podmínky sfázování. Zobrazeno pro případ normální disperze, kdy index lomu s frekvencí roste. Směry kmitů pole o frekvenci $\omega$ a pole o frekvenci $2\omega$ jsou na sebe kolmé.

## 11.2 Nelineární optické jevy třetího řádu

Nelineární optické jevy třetího řádu se vyskytují ve všech látkách. Vzhledem k tomu, že izotropní látky mají vždy střed symetrie a nevykazují tedy nelinearity druhého řádu, jsou nelineární jevy třetího řádu nejnižšími nelinearitami v materiálech se středem symetrie. Zde se z mnohých možných kombinací tří elektrických polí omezíme na nejjednodušší případ, kdy všechna tři pole $E_j(\omega_j), E_k(\omega_k), E_l(\omega_l)$ vystupující v třetím členu rozvoje polarizace jsou totožná $j = k = l$ a materiál je izotropní. Mezi nejvýznamnější jevy tohoto typu patří **generace třetí harmonické frekvence** a **závislost indexu lomu na intenzitě světla** vedoucí k efektům **samofokuzace** a **automodulace fáze**.

Interaguje–li s nelineárním prostředím harmonická monochromatická vlna s frekvencí $\omega$, lze nelineární část odezvy materiálu vyjádřenou pomocí vektoru polarizace psát jako

$$P^{(3)}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{E_0^3}{8} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)^3 =$$

$$= \varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{E_0^3}{8} \left(e^{3i\omega t} + e^{-3i\omega t}\right) + 3\varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{E_0^3}{8} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) =$$

$$= \varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{E_0^3}{4} \cos(3\omega t) + 3\varepsilon_0 \chi^{(3)} \frac{E_0^3}{4} \cos(\omega t) =$$

$$= P_{3\omega}^{(3)}(t) + P_{\omega}^{(3)}(t) .$$

První člen $P_{3\omega}^{(3)}(t)$ popisuje kmitání polarizace na frekvenci $3\omega$ s amplitudou $\varepsilon_0\chi^{(3)}\frac{E_0^3}{4}$ a odpovídá generaci třetí harmonické frekvence. Druhý člen $P_{\omega}^{(3)}(t)$ je příspěvek ke kmitání polarizace na frekvenci $\omega$. Tedy tento člen přispívá k „základním" kmitům na frekvenci $\omega$, které charakterizuje susceptibilita a tedy „lineární" index lomu. Jak je zřejmé ze závislosti amplitudy $3\varepsilon_0\chi^{(3)}\frac{E_0^3}{4}$ to vede k závislosti indexu lomu na intenzitě světla. Při jeho odvození budeme postupovat podle učebnice [6]. S využitím vztahu pro intenzitu lineárně polarizované vlny (velikost Poyntingova vektoru) $I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n_L E_0^2$, kde $n_L$ označuje lineární část indexu lomu (v předchozích kapitolách označovanou jako $n$), dostaneme

$$P_{\omega}^{(3)}(t) = \frac{3\varepsilon_0\chi^{(3)}I}{2n_L\,\varepsilon_0 c}\;E_0\cos(\omega t) = \frac{3\varepsilon_0\chi^{(3)}I}{2n_L\,\varepsilon_0 c}\;E(t). \tag{11.6}$$

Celková odezva materiálu na frekvenci $\omega$ je pak součtem standardní lineární odezvy $P_L(\omega,t)$ a funkce $P^{(3)}(\omega,t)$. Pro okamžité hodnoty polarizace dostáváme

$$P_{\omega}(t) = P_L(t) + P_{\omega}^{(3)}(t)\,,$$

$$P_{\omega}(t) = \varepsilon_0\chi_L E(t) + \varepsilon_0\frac{3\chi^{(3)}I}{2n_L\varepsilon_0 c}\,E(t) = \varepsilon_0\left[\chi_L(\omega)+\chi_{NL}(\omega)\right]E(t)\,,$$

kde pro vztah lineární části indexu lomu a lineární susceptibility platí

$$n_L = \sqrt{1+\chi_L}$$

a pro nelineární část susceptibility platí

$$\chi_{NL} = \frac{3\chi^{(3)}I}{2n_L\,\varepsilon_0 c}\,.$$

Omezujeme se na popis dielektrického materiálu, kdy je susceptibilita reálnou funkcí. V tomto případě dostáváme reálný index lomu

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1+\chi_L(\omega)+\chi_{NL}(\omega)}\,.$$

Nelineární část susceptibility $\chi_{NL}(\omega)$ je velmi malá, proto můžeme tento výraz aproximovat s využitím Taylorova rozvoje

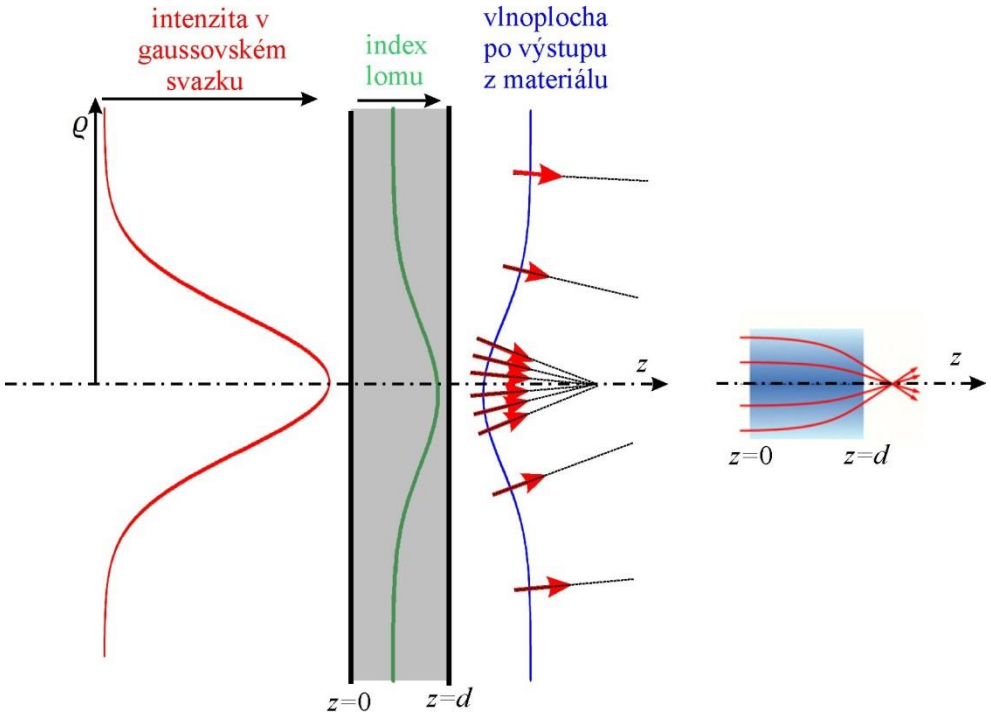
$$n(\omega) \approx \sqrt{1+\chi_L(\omega)}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{\chi_{NL}(\omega)}{1+\chi_L(\omega)}\right) =$$

$$= n_L\left(1+\frac{1}{2}\frac{\chi_{NL}(\omega)}{n_L^2}\right) = n_L(\omega)+\frac{1}{2}\frac{\chi_{NL}(\omega)}{n_L}\,.$$

S využitím vztahu pro $\chi_{NL}$ pak dostaneme

$$n = n_L + \frac{3\chi^{(3)}}{4n_L^2\,\varepsilon_0 c}\,I = n_L + \frac{1}{2}\,n_2 I\,, \qquad n_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{2n_L^2\,\varepsilon_0 c}\,. \tag{11.7}$$

Nelineární část indexu lomu $n_{NL} = \frac{1}{2}n_2 I$ je tedy úměrná intenzitě světla $I$. V důsledku této závislosti dochází při ozáření materiálu svazkem s proměnným prostorovým rozložením intenzity $I(x,y)$ k odpovídající změně rozložení indexu lomu $n(x,y)$ a tím i k závislosti optické dráhy na poloze $(x,y)$ v rovině ozáření (kolmé na osu šíření svazku. Rozložení intenzity v laserovém svazku můžeme dobře popsat pomocí Gaussovy funkce (gaussovský, osově symetrický svazek). Ve středu svazku je maximální intenzita $I(\varrho = 0) = I_0$. V tomto místě dochází k největšímu prodloužení optické dráhy $\Delta_{OD} = n(I_0)d$. Na krajích svazku je intenzita malá a prodloužení optické dráhy je zanedbatelné. Osvětlená část materiálu tedy působí podobně jako optická čočka. Část vlnoplochy odpovídající středu osvětlené plochy tedy po průchodu vzorkem o tloušťce $d$ je zpožděna vůči částem vlnoplochy procházející krajem osvětlené plochy. Modelový případ je znázorněn na obr. 11.3.




Obr. 11.3 Hrubý nástin jevu samofokuzace pro $n_2 > 0$ Závislost indexu lomu $n(I)$ způsobí deformaci vlnoplochy v důsledku rozdílu optických drah jednotlivých částí vlnoplochy. Na ose $z$ je nejvyšší intenzita osvětlení $I$. Příslušná část vlnoplochy prochází nejdelší optickou dráhu a na výstupu ze vzorku je zpožděna vůči částem vlnoplochy procházejícími místy s nižší intenzitou osvětlení. V ozářené části vzorku platí pravidlo, že paprsky jsou vtahovány do oblasti s vyšším indexem lomu. Nejintenzivněji osvětlená část vzorku funguje podobně jako spojná čočka. Slabě osvětlené části se fokusace nezúčastní.

# 12. Absorpce a index lomu – interakce světla s látkou

Popis interakce elektromagnetického záření s látkami můžeme provádět na různých úrovních:

- popisy látky i pole založené na kvantové mechanice a kvantové teorii pole;
- popisy založené na kvantovém popisu látky a „klasickém“ (nekvantovém) popisu pole;
- popisy založené na klasickém (nekvantovém) popisu látky i pole.

V tomto textu se zaměříme na nejjednodušší verzi z poslední možnosti. Budeme se zabývat fenomenologickým (tj. makroskopickým) popisem interakce „klasického“ elektromagnetického pole splňujícího makroskopické Maxwellovy rovnice a látka bude reprezentována souborem klasických oscilátorů (Lorentzův model) a relaxátorů (Drudeův model volných nosičů). Omezíme se na reakci látky na monochromatické elektromagnetické pole. Rovněž se nebudeme zabývat anizotropními látkami, látkami s optickou aktivitou (ve smyslu kruhového dvojlomu a kruhového dichroismu) a nebudeme uvažovat nelineárními procesy. Látku budeme považovat za homogenní a časově stálou, tedy její vlastnosti nejsou závislé ani na prostorových souřadnicích, ani na čase. Pro začátek budeme uvažovat polonekonečné absorbující prostředí pro $z > 0$, na které dopadá z vakua **kolmo** k rozhraní rovinná vlna. Jak vyplyne z dalšího, v tomto případě se v absorbujícím prostředí šíří homogenní, tlumená, rovinná vlna

Slábnutí intenzity postupné rovinné vlny při šíření uvnitř absorbujícího prostředí ve směru osy $z$ je v rámci nejjednoduššího modelu popsáno exponenciálním tlumením

$$I(z) = I(z_0)e^{-\alpha(z-z_o)}, \tag{12.1}$$

kde $I(z_0)$ je intenzita záření ve vzorku na souřadnici $z_0$ a parametr $\alpha$ v exponenciále je nazývaný **extinkční koeficient.** Pokud je vzorek dostatečně homogenní, takže můžeme zanedbat ztráty výkonu neseného vlnou rozptylovými mechanismy a ztráty výkonu jdou na vrub absorpčním procesům, nazveme tento parametr **absorpční koeficient** (též absorpční „konstanta“, přestože závisí na různých parametrech, mj. hlavně na frekvenci vlny). Rozměr $\alpha$ je $\mathrm{m}^{-1}$. Její fyzikální význam je tloušťka materiálu $d = \frac{1}{\alpha}$, po jejímž průchodu poklesne intenzita záření na $\frac{1}{e}$ původní hodnoty.

V dalším vezměme pro zjednodušení $z_0 = 0$. Exponenciální závislost intenzity je důsledkem předpokladu, že ubývání intenzity vztažené na jednotku délky je úměrné intenzitě v tomto místě

$$dI(z) = -\alpha\, I(z)\, dz,$$

$$\int \frac{dI(z)}{I(z)} = -\alpha \int dz,$$

$$\ln I(z) + C = -\alpha z,$$

$$C\, I(z) = e^{-\alpha z}$$

a integrační konstantu $C = \frac{1}{I_0}$ určíme z podmínky $I(z = 0) = I_0$.

Z praktického hlediska je základním experimentem měření propustnosti planparalelního vzorku tloušťky $d$, kdy zjišťujeme poměr intenzity záření (Poyntingova vektoru) vystupujícího ze vzorku a intenzity do vzorku vstupujícího. Obecně není úloha určení absorpčního koeficientu z tohoto poměru triviální, ale za silně zjednodušujících podmínek (vhodná tloušťka vzorku s ohledem na velikost absorpčního koeficientu, zanedbání vnějších i vnitřních odrazů na rozhraních) je pokles intenzit před a za vzorkem formulován jako Lambertův-Beerův zákon

$$I_{OUT}(d) = I_0 e^{-\alpha d}.$$

Pokles výkonové intenzity při šíření vlny v homogenním absorbujícím prostředí je spojen se zmenšením amplitudy kmitů, a to všech zúčastněných polí. Exponenciální pokles amplitudy lineárně polarizované vlny lze zahrnout v **reálném popisu** jako člen $e^{-k_I z}$

$$E_x(z,t) = E_{0x}\, e^{-k_I z} \cos(k_R z) = E_{0x}\, e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z} \cos\left(\frac{\omega}{c} n z\right), \tag{12.2}$$

kde $k_I, k_R, \kappa, n$ jsou reálná čísla, přičemž $k_I$ (resp. $\kappa$) charakterizuje exponenciální pokles amplitudy kmitů. Podobně jako v případě netlumených monochromatických vln je i pro případ tlumených monochromatických vln z početních důvodů mnohem elegantnější používat komplexní symboliku. Popis šíření tlumené vlny lze zcela analogicky popisu vlny v neabsorbujícím prostředí provést pomocí vlnového vektoru a indexu lomu. V absorbujícím prostředí to učiníme přes **komplexní vlnový vektor** $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{K}}} = \boldsymbol{k_R} + i\boldsymbol{k_I}$**.** V obecném případě nemusí mít reálná a imaginární část stejný směr.[9] V dalším textu se omezíme na případ kolmého dopadu na rozhraní vakuum – absorbující prostředí, kdy jsou reálná i imaginární část vlnového vektoru paralelní.

V uvažované geometrii mají tedy reálná i imaginární část tohoto vektoru nenulové pouze $z$-ové složky. Podobně jako souvisí velikost vlnového vektoru s indexem lomu v neabsorbujícím prostředí, je tomu tak i v případě absorbujícího prostředí. V uvažované geometrii

$$\widetilde{\mathcal{K}}_z = (k_R)_z + i(k_I)_z = \frac{\omega}{c}(n + i\kappa) = \frac{\omega}{c}\widetilde{\mathcal{N}}, \tag{12.3}$$

kde jsme zavedli komplexní index lomu $\widetilde{\mathcal{N}}(\omega)$

$$\widetilde{\mathcal{N}}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega).$$

Komplexní vyjádření rovnice (12.2) má pak tvar

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_0(z = 0, t = 0)\, e^{i\widetilde{\mathcal{K}} z}\, e^{-i\omega t}.$$

---

Např. při šikmém dopadu na rozhraní je směr $\boldsymbol{k_R}$ určen zákonem lomu a je kolmý na roviny konstantní fáze, zatímco směr $\boldsymbol{k_I}$ je kolmý na roviny konstantní amplitudy, které jsou rovnoběžné s rovinou rozhraní. Výsledkem je nehomogenní vlna, ve které se amplituda podél vlnoplochy mění. Nehomogenní vlna pak už není vlnou příčnou, ale (jak plyne z Maxwellových rovnic) má i podélné složky závisející na polarizaci.

Látka je charakterizována materiálovými parametry, jako jsou susceptibilita, permitivita, vodivost a permeabilita. Pro látky, ve kterých dochází k transformaci energie elektromagnetického pole na jiné formy energie (převážně teplo) je opět výhodné zavést tyto parametry pro monochromatickou excitaci „nemagnetické“ látky jako komplexní

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\omega) &= \chi_R(\omega) + \chi_I(\omega) \\ \tilde{\varepsilon}_r(\omega) &= \varepsilon_R(\omega) + i\varepsilon_I(\omega), \\ \tilde{\sigma}(\omega) &= \sigma_R(\omega) + i\sigma_I(\omega), \\ \mu &= \mu_0. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Prvním důležitým krokem je najít vztahy mezi parametry popisujícími vlnu (komplexní index lomu $\tilde{\mathcal{N}}$) a parametry popisujícími látku (např. $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$).

Zopakujme makroskopické Maxwellovy rovnice pro „nemagnetické“ prostředí s hustotou volných nábojů $\rho_f$ a hustotou volných proudů $\boldsymbol{j}_f$

$$\text{div}\,\widetilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t) = \rho_f(\boldsymbol{r},t), \qquad \text{div}\,\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t) = 0,$$

$$\text{rot}\,\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}, \qquad \text{rot}\,\widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t) = \tilde{\boldsymbol{j}}_f(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

doplněné o lokální, izotropní a lineární materiálové vztahy

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t) &= \varepsilon_0 \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) + \widetilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r},t) = \\ &= \varepsilon_0\, \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\,(1+\tilde{\chi}) = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_r\, \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t), \\ \tilde{\boldsymbol{j}}_f(\boldsymbol{r},t) &= \tilde{\sigma}\ \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t), \\ \widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t) &= \mu_0\, \widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t). \end{aligned}$$

Přitom veličiny $\widetilde{\boldsymbol{E}}, \widetilde{\boldsymbol{D}}, \widetilde{\boldsymbol{P}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{H}}, \tilde{\sigma}$ a $\tilde{\varepsilon}_r$ jsou závislé na frekvenci monochromatické vlny.

Budeme zabývat šířením rovinné, lineárně polarizované, monochromatické vlny ve směru osy $z$. Budeme uvažovat vlnu tlumenou a homogenní s elektrickým polem v komplexní symbolice.

Dosazením homogenní, postupné, monochromatické, tlumené, rovinné a lineárně polarizované vlny (12.3) do Maxwellových rovnic dostaneme v modelu s předpokladem $\tilde{\sigma}(\omega \neq 0) = 0$

$$\tilde{E}_x = E_0\, e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t}, \tag{12.5a}$$

$$\tilde{B}_y = \frac{1}{c} E_0\, \tilde{\mathcal{N}}\, e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t}. \tag{12.5b}$$

$$\tilde{H}_y = \frac{1}{\mu_0 c} E_0\, \tilde{\mathcal{N}}\, e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t} = E_0 \varepsilon_0 c\, \tilde{\mathcal{N}}\, e^{i\tilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t}, \tag{12.5c}$$

$$\widetilde{D}_x = E_0\varepsilon_0\,\widetilde{\mathcal{N}}^2 e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\,e^{-i\omega t} = E_0\varepsilon_0\,(\varepsilon_R + i\varepsilon_I)e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\,e^{-i\omega t}\,. \tag{12.5d}$$

Protože koeficient úměry mezi $\widetilde{D}_x$ a $\tilde{E}_x$, (podobně mezi $\widetilde{H}_y$ a $\tilde{E}_x$) je číslo komplexní, tyto veličiny **nekmitají v absorbujícím prostředí ve fázi**, ale s fázovým posuvem určeným poměrem komplexní a reálné části indexu lomu. Vztahy (12.5b) a (12.5c) můžeme přepsat pomocí fázového posunu $\varphi_{\mathcal{N}}$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_y &= \varepsilon_0 c\,(n + i\kappa)\tilde{E}_x = \varepsilon_0 c\,|\mathcal{N}|\,e^{i\varphi_{\mathcal{N}}}\,\tilde{E}_x, \\ \widetilde{D}_x &= \varepsilon_0\,(n + i\kappa)^2\tilde{E}_x = \varepsilon_0\,|\mathcal{N}|^2\,e^{2i\varphi_{\mathcal{N}}}\,\tilde{E}_x, \\ \tan\varphi_{\mathcal{N}} &= \frac{\kappa}{n}, \qquad |\mathcal{N}|^2 = n^2 + \kappa^2. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Z rovnosti $(n + i\kappa)^2 = \tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_R + i\varepsilon_I$ vyplývají vztahy

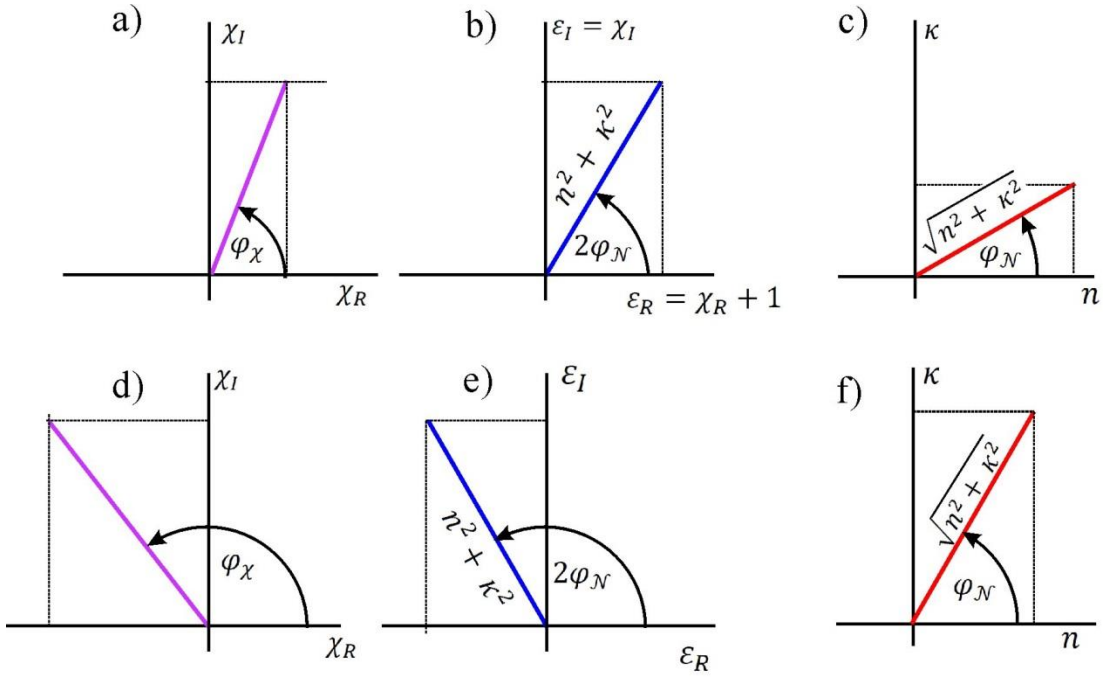
$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\{\tilde{\varepsilon}_r\} = \varepsilon_R = n^2 - \kappa^2, \qquad \mathrm{Im}\{\tilde{\varepsilon}_r\} = \varepsilon_I = 2n\kappa, \\ &n = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2}\right)}, \qquad \kappa = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_I^2}\right)}, \\ &e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z} = e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}\,e^{i\frac{\omega}{c}nz}. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Slábnutí intenzity postupné vlny při průchodu prostředím můžeme vypočítat jak ze závislosti hustoty elektrické energie, tak ze závislosti Poyntingova vektoru na souřadnici $z$. V obou případech dostáváme slábnutí intenzity podél směru šíření popsané závislostí $e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z}$. V diskusi na počátku této kapitoly jsme zavedli absorpční koeficient $\alpha$, pro jehož hodnotu porovnáním dostáváme

$$\alpha = 2\frac{\omega}{c}\,\kappa = 2k_I. \tag{12.8}$$

Z rovnic (12.7) plyne, že pokud dochází k absorpci ($\alpha > 0$), je $\kappa > 0, \varepsilon_I > 0$ a permitivita $\tilde{\varepsilon}_r$ je komplexní. V tomto případě je komplexní i susceptibilita $\tilde{\chi}$ a pro vektor polarizace $\boldsymbol{P}$ můžeme psát v našem uspořádání

$$\tilde{P}_x(z,t) = \varepsilon_0\tilde{\chi}\,\tilde{E}_x(z,t) = \varepsilon_0\big(\chi_R + i\,\chi_I\big)\tilde{E}_x(z,t) = \varepsilon_0|\tilde{\chi}\,|\,e^{i\varphi_\chi}\tilde{E}_x(z,t). \tag{12.9}$$




Obr. 12.1 Znázornění významu úhlů $\varphi_\chi$, $\varphi_\mathcal{N}$ a $2\varphi_\mathcal{N}$. V horní řádce diagramů (a,b,c) pro $\varphi_\mathcal{N} < 45°$ a v dolní řádce diagramů (d,e,f) pro $\varphi_\mathcal{N} > 45°$.

**Absorpce v dielektriku** je tedy spojena s **fázovým posunem** mezi budícím elektrickým polem $\boldsymbol{E}$ a odezvou látky reprezentovanou vektorem polarizace $\boldsymbol{P}$. V důsledku Maxwellových rovnic dochází i k fázovému posuvu mezi elektrickým a magnetickým polem. Pokud je absorpční koeficient roven nule, jsou nulové i imaginární části permitivity a susceptibility ($\varphi_\chi = 0$) a vektory $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ kmitají ve fázi.

Objemová hustota výkonu odebíraného vlně vztažená na jednotkovou vzdálenost a časově vystředovaná je

$$\langle -\mathrm{div}\, S\rangle_t = -\left\langle \frac{\partial S_z}{\partial z}\right\rangle_t = \frac{1}{2}\, cn\varepsilon_0 E_0^2\ \alpha\, e^{-\alpha z} = \tag{12.10}$$

$$= \varepsilon_0 E_0^2\, \omega\, n\, \kappa\, e^{-2\frac{\omega}{c}\kappa z} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\, \omega\, \varepsilon_I\, e^{-\alpha z}.$$

Ke stejnému výsledku dospějeme i tak, že za objemovou hustotu ztrát výkonu budeme považovat Jouleovo teplo $Q$ uvolněné v důsledku součinu polarizačního proudu $\boldsymbol{j}_P = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$ a elektrického pole $\boldsymbol{E}$ v souladu s tzv. Poyntingovým teorémem, který popisuje energetickou bilanci ve zvoleném elementárním objemu látky. V naší geometrii

$$\langle Q(z)\rangle_t = \langle j_{Px}(z)\cdot E_x(z)\rangle_t = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\, \omega\, \varepsilon_I\, e^{-\alpha z}. \tag{12.11}$$

Ze vztahů (12.10) a (12.11) plyne, že objemová hustota výkonu odebíraného vlně v absorbujícím prostředí je úměrná součinu $\omega n(\omega)\kappa(\omega) = \frac{\omega}{2}\,\varepsilon_I(\omega)$.

Jev absorpce (vedoucí ke komplexnímu indexu lomu) je významný i z hlediska odrazu dopadajícího světla. Fresnelovy amplitudové koeficienty (kapitola 3 - „Odraz a lom“) jsme definovali jako reálné veličiny, což platí pro odraz na neabsorbujícím dielektriku s vyloučením totálního odrazu. V případě absorbujícího dielektrika tomu již tak není. Vzhledem k tomu, že dochází k absorpci, je index lomu komplexní. Fresnelovy amplitudové koeficienty odrazu $r_s, r_p$ a průchodu přes rozhraní $t_s, t_p$ do druhého prostředí pro obě složky polarizace získáme dosazením komplexních indexů lomu do rovnic (3.21), (3.22), (3.26) a a(3.27). Speciálně pro případ kolmého dopadu ze vzduchu ($n_1 = 1$) do absorbujícího dielektrika ($\tilde{\mathcal{N}}_2 = n_2 + i\kappa_2$) dostaneme pro amplitudový koeficient odrazu

$$\tilde{r}_{s,p}(\omega) = \tilde{r}(\omega) = \frac{1 - n_2(\omega) - i\kappa_2(\omega)}{1 + n_2(\omega) + i\kappa_2(\omega)}. \tag{12.12}$$

Pro výkonový koeficient odrazu pro případ kolmého dopadu na absorbující dielektrikum $R(\omega)$ pak platí

$$R(\omega) = r(\omega).r^*(\omega) = \frac{1 - n_2(\omega) - i\kappa_2(\omega)}{1 + n_2(\omega) + i\kappa_2(\omega)}.\frac{1 - n_2(\omega) + i\kappa_2(\omega)}{1 + n_2(\omega) - i\kappa_2(\omega)} = \tag{12.13}$$

$$= \frac{[n_2(\omega) - 1]^2 + \kappa_2^2(\omega)}{[n_2(\omega) + 1]^2 + \kappa_2^2(\omega)}.$$

Dosud jsme diskutovali šíření monochromatické, homogenní, tlumené vlny a vztah komplexního indexu lomu $\tilde{\mathcal{N}}(\omega) = n(\omega) + i\kappa(\omega)$ s fenomenologickým parametrem popisu látkového prostředí, komplexní permitivitou $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$ a předpokládali jsme nulovou vodivost $\sigma = 0$. Za takového předpokladu byly odvozeny vztahy (12.5) až (12.11).

V dalším budeme prezentovat dva nejjednodušší modely pro určení frekvenční závislosti $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$, totiž model Lorentzova oscilátoru a Drudeův model pro volně pohyblivé náboje (např. „volné“ elektrony v kovu).

## 12.1 Lorentzův model odezvy dielektrika

Základní nekvantový Lorentzův model (Hendrik Antoon **Lorentz,** 1853 – 1928) vychází z představy látky jako souboru oscilátorů -elektrických dipólů, jejichž náboje vnější elektrické pole vychyluje z jejich rovnovážných poloh. Ve své jednoduché, zde prezentované podobě, neuvažuje vzájemné působení kmitajících objektů přes lokální elektrická (případně magnetická) pole. Toto vnější pole vytváří v látce oscilující polarizaci.

Jednou z možností je, že nabitou částicí je elektron v atomu, který se chová jako klasická částice podle zákona síly $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Na elektrony působí elastická síla, která jej váže k jádru atomu a dále disipativní síla, která má za následek absorpci energie. Model dále předpokládá, že všechny základní stavební elementy látky (atomy) jsou identické a každý má jeden nebo několik elektronů reagujících na vnější pole. Atomy nebo molekuly jsou rovnoměrně rozloženy v objemu s objemovou koncentrací nábojů $N$. Při působení elektrického pole dochází k vychýlení elektronu v obalu vůči jádru o výchylku $\boldsymbol{r}$ a ke vzniku elementárního dipólu.

Objemovou hustotu dipólového momentu pak vyjadřuje vektor polarizace $\boldsymbol{P}$, který můžeme psát jako

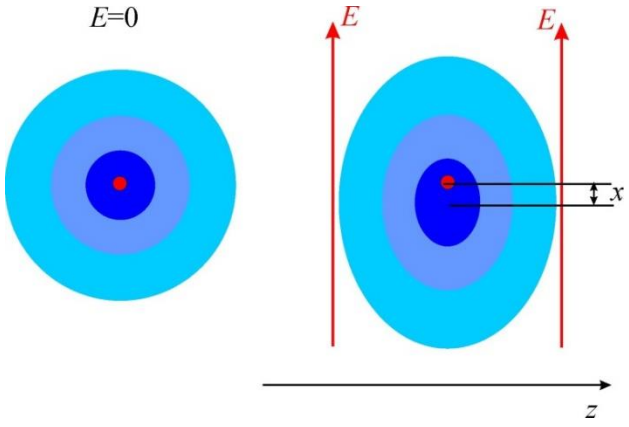
$$\boldsymbol{P}(z,t) = Nq\boldsymbol{r}(z,t), \tag{12.14}$$

kde $q$ je efektivní náboj tvořící dipól $\pm q$ a jejich objemová koncentrace je $N$. Výchylka $\boldsymbol{r}(z,t)$závisí na velikosti elektrického pole $\boldsymbol{E}(z,t)$ v daném místě**.** V dalším se omezíme na výchylky (a směr dipólových momentů) ve směru osy $x$.

Na základě Newtonova zákona síly sestavíme pohybovou rovnici popisující výchylku elektronu z rovnováhy $\tilde{x}(t)$. Předpokládáme, že výchylka je komplexní veličina, tj. může dojít k fázovému posunu vůči budícímu elektrickému poli. Použijeme jednorozměrný popis, kdy budeme předpokládat, že elektron se vůči jádru vychyluje ve směru $x$, ve kterém rovněž působí elektrické pole $\tilde{\boldsymbol{E}} = \left(E_0 e^{-i\omega t}, 0,0\right)$. Elektrické pole tedy působí v místě atomu na elektron silou $qE(t)$. Proti tomu působí síla tření $-m\gamma\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}$, která je zodpovědná za absorpci energie a rovněž síla $-k_H x(t)$ zodpovědná za vazbu elektronu k jádru.

$$\begin{aligned} m\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} + m\gamma\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + k_H\tilde{x}(t) &= q\tilde{E}(t), \\ ma = \; q\tilde{E}(t) - \; m\gamma\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} - k_H\tilde{x}(t), & \end{aligned} \tag{12.15}$$

kde $\gamma$ je konstanta popisující tlumení úměrné rychlosti $\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}$ a $k_H$ je konstanta vratné („elastické“) síly vážící elektron k jádru atomu (Hookova konstanta při představě pružinového modelu).




Obr. 12.2 Schématické znázornění vlivu elektrického pole na atom a vznik dipólového momentu

Rovnici (12.15) upravíme a dostaneme

$$\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} + \gamma\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + \omega_0^2\,\tilde{x}(t) = \frac{q}{m}\tilde{E}(t), \tag{12.16}$$

kde jsme zavedli kruhovou frekvenci $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_H}{m}}$ jako vlastní frekvenci kmitů netlumeného oscilátoru.

Rovnice (12.16) je diferenciální rovnicí druhého řádu s nenulovou pravou stranou. Její obecné řešení je součet řešení homogenní rovnice (pravá strana $= 0$) a partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Řešení homogenní rovnice $\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0$ pro $t \to \infty$ konverguje k nule. Vlastní kmity se tedy po dostatečně dlouhé době utlumí. Nebudeme dále diskutovat přechodové jevy, ale budeme se zabývat jen kmity po uplynutí velmi dlouhé ("∞") doby od počátku působení elektrického pole. Řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$. Dosazením $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$ pro **vynucené kmity** dostaneme

$$\begin{aligned} [(-i\omega)^2\tilde{x}_0 - i\omega\gamma\tilde{x}_0 + \omega_0^2\tilde{x}_0]e^{-i\omega t} &= \frac{q}{m}E_0 e^{-i\omega t}, \\ \tilde{x}_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) &= \frac{q}{m}E_0, \\ \tilde{x}_0 &= \frac{qE_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \end{aligned} \tag{12.17}$$

To představuje příspěvek k objemové hustotě dipólového momentu (polarizaci) $P$ od daného typu oscilátoru

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{P}_x(t) = Nq\tilde{x} = Nq\tilde{x}_0 e^{-i\omega t} = \frac{Nq^2E_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}e^{-i\omega t} = \\ = \Delta\tilde{\chi}(\omega)\, E_0\, e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{12.18}$$

a příspěvek k susceptibilitě od tohoto typu oscilátorů je

$$\Delta\tilde{\chi}(\omega) = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \tag{12.19}$$

Pokud tlumení $\gamma$ nelze zanedbat, jsou susceptibilita $\tilde{\chi}(\omega)$, permitivita $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$ a polarizace $\tilde{P}$ komplexní veličiny. Vztah pro příspěvek k susceptibilitě od jednoho typu oscilátoru můžeme upravit pro rozdělení na reálnou a imaginární část

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\chi}(\omega) = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\gamma\omega)^2} = \\ = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\gamma\omega)^2} + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{i\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\gamma\omega)^2} = \\ = \Delta\chi_R(\omega) + i\,\Delta\chi_I(\omega). \end{aligned} \tag{12.20}$$

Uvedený výraz pro $\Delta\tilde{\chi}(\omega)$ představuje příspěvek k susceptibilitě od jednoho typu oscilátorů v látce. Látka, ve které by se vyskytoval pouze jediný typ oscilátoru, neexistuje. Rejstřík mechanismů absorpce elektromagnetického vlnění je velmi široký: od kmitání téměř volných

nosičů náboje s $\omega_0 \to 0$, přes reorientace dipólů (např. molekuly vody v mikrovlnné troubě), kmitů iontů v mikrovlnné a infračervené oblasti, kmity elektronových oblaků v atomech či molekulách ve viditelné a ultrafialové oblasti až po oblast rentgenovou. Přitom při námi uvažované podmínce, že výchylky kmitů nejsou příliš veliké (platí lineární superposice polí i výchylek nábojů), je **aditivním parametrem susceptibilita,** což plyne z toho, že se skládají polarizace $\boldsymbol{P}_j$ od jednotlivých typů oscilátorů $j$

$$\tilde{\chi}(\omega) = \sum_j \tilde{\chi}_j(\omega) = \sum_j \chi_{Rj}(\omega) + i \sum_j \chi_{Ij}(\omega), \tag{12.21}$$

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \tilde{\chi}(\omega) = 1 + \sum_j \chi_{Rj}(\omega) + i \sum_j \chi_{Ij}(\omega).$$

Experimentální hodnoty koeficientů $\frac{N_j q_j^2}{\varepsilon_0 m_j}$ obecně neodpovídají hodnotám např. náboje a hmotnosti volných elektronů pro oscilátory, které by měly popisovat polarizaci vyvolanou právě pohybem elektronových oblaků. Proto je k tomuto členu přidáván ještě další koeficient zvaný **síla oscilátoru** $f_j$. Navíc můžeme zápis zjednodušit tím, že položíme všechny $\frac{N_j q_j^2}{\varepsilon_0 m_j}$ jako stejné a odlišnosti mezi různými rezonančními přechody soustředíme právě do parametru $f_j$. V aproximaci, že všechny mechanismy lze popsat uvedeným modelem oscilátoru, bychom dostali

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \frac{N_e q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j f_j \frac{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega}{\left(\omega_{0j}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\gamma_j \omega\right)^2}$$

kde $f_j, \omega_{0j}, \gamma_j$ jsou efektivní hodnoty parametrů pro oscilátory typu $j$. a pro oscilace poloh elektronů použijme elektronové hodnoty $N_e, q_e, m_e$. Pro reálnou část permitivity $\mathrm{Re}\{\tilde{\varepsilon}_r\} = \varepsilon_R$ je

$$\varepsilon_R(\omega) = n^2 - \kappa^2 = 1 + \sum_j \chi_{Rj}(\omega) =$$

$$= 1 + \frac{N_e q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j f_j \frac{\omega_{0j}^2 - \omega^2}{\left(\omega_{0j}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\gamma_j \omega\right)^2} \tag{12.22}$$

a pro imaginární část $\mathrm{Im}\{\tilde{\varepsilon}_r\} = \varepsilon_I$ je

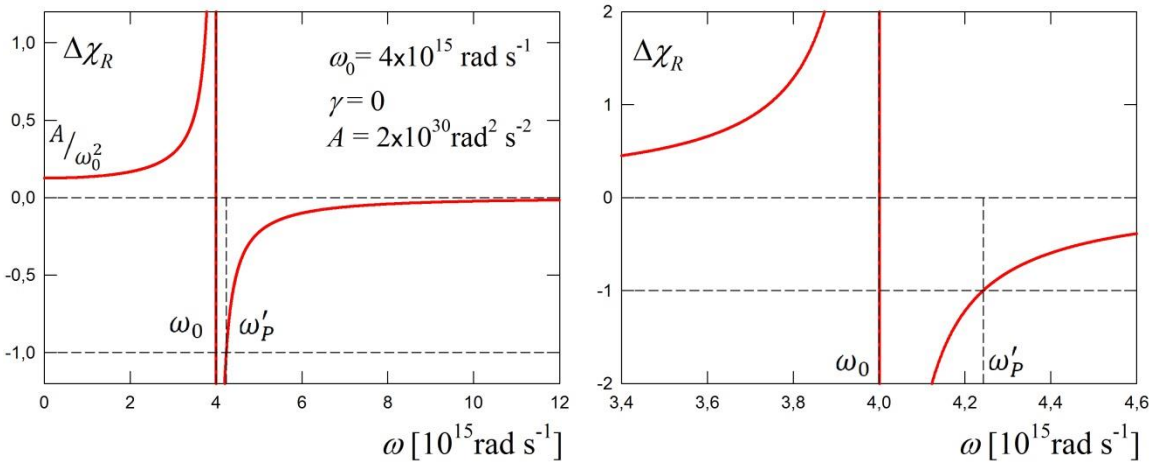
$$\varepsilon_I(\omega) = 2n\kappa = \sum_j \chi_{Ij}(\omega) = \frac{N_e q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j f_j \frac{\gamma_j \omega}{\left(\omega_{0j}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\gamma_j \omega\right)^2}.$$

Při popisu parametrů v dalších obrázcích budeme užívat zkratku

$$A_j = \frac{N_e q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} f_j$$

Síla oscilátoru $f_j$ má vztah ke korektnějšímu pojednání o optických vlastnostech, totiž ke kvantově mechanickému pojmu **pravděpodobnost přechodu**, který je založen na integrálech vlnových funkcí kvantově mechanických stavů, mezi kterými se přechod absorbující foton o energii $\hbar\omega$ uskuteční. Kvantově mechanické modely vedou někdy ke stejným či podobným spektrálním závislostem, ovšem s jiným významem koeficientu před členem popisujícím spektrální závislostí.

Pro osvětlení některých pojmů se podívejme na výsledek modelu pro **jeden typ oscilátoru bez tlumení**, $\gamma = 0$.




Obr. 12.3 Příspěvek k susceptibilitě od jednoho typu netlumeného oscilátoru

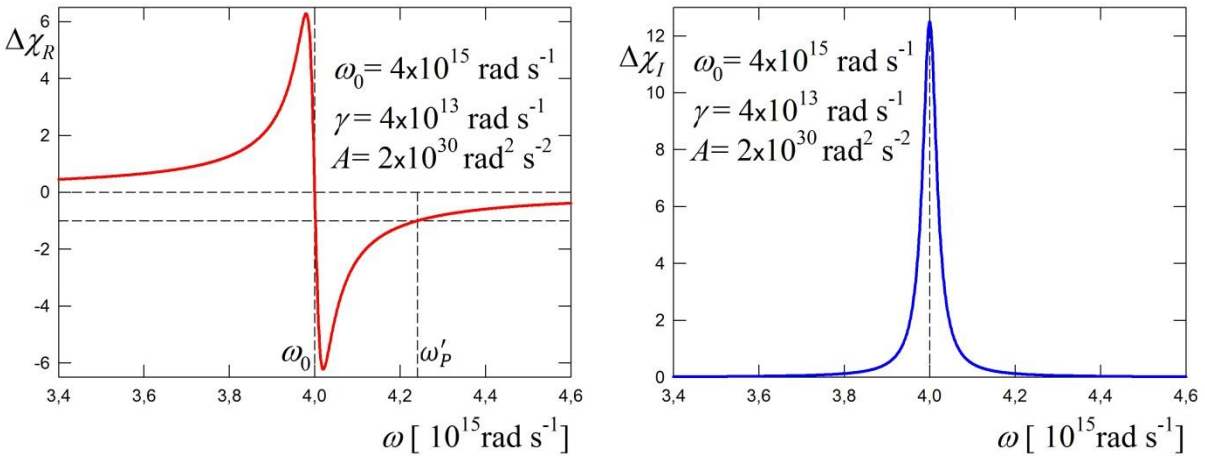
Susceptibilita je reálná. Pro $\omega < \omega_0$ kmitají elektrické pole $E$, polarizace $P$ i elektrická indukce $D$ ve fázi. V limitě nízkých frekvencí je příspěvek $\Delta\chi_R(\omega \to 0) = \frac{A}{\omega_0^2} > 0$ (pro případ přítomnosti mnoha typů oscilátorů dostaneme $\chi_R(\omega \to 0) = \sum_l \frac{A_l}{\omega_{0l}^2}$)).

Při $\omega = \omega_0$ susceptibilita diverguje, polarizace by byla $P(\omega_0) \to \pm\infty$. V případě nenulového tlumení tato potíž odpadá.

Zajímavá je spektrální oblast $\omega_0 < \omega < \omega'_P$, kde $\omega'_P = \sqrt{\omega_0^2 + A}$ dostaneme ze vztahu $\Delta\chi_R(\omega'_P) = -1$ a $\Delta\chi_R(\omega_0 < \omega < \omega'_P) < -1$. Takže v protifázi k vnějšímu elektrickému poli kmitá nejen polarizace, ale dokonce i indukce $D$. V jednooscilátorovém modelu by byla permitivita $\varepsilon(\omega'_P) = 0$, tj. $D = 0$, neboli $P = -\varepsilon_0 E$. Přítomnost tlumení a přítomnost dalších typů oscilátorů sice situaci v reálných látkách významně komplikují, přesto (pokud podobná situace nastane) je výsledkem vysoká odrazivost v části této spektrální oblasti.

V limitě vysokých frekvencí je $\Delta\chi_R(\omega \to \infty) = 0$, přičemž $\Delta\chi_R(\omega_0 < \omega) < 0$ a to pro všechny typy oscilátorů.

Důsledek zavedení nepříliš silného, ale nenulového tlumení pro uvedený model jediného typu oscilátoru je na obr. 12.4.



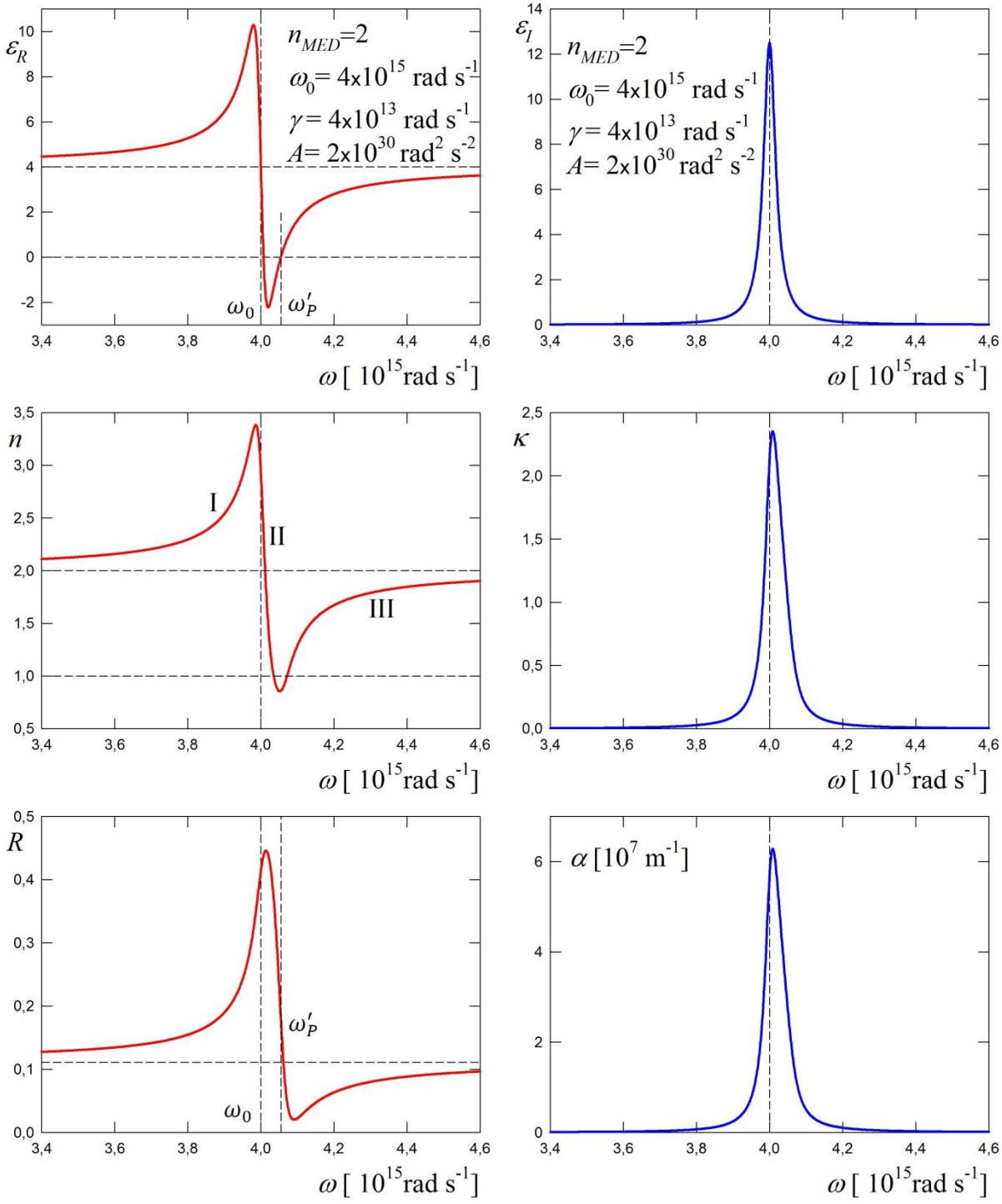

Obr. 12.4 Příspěvky k reálné a imaginární části susceptibility od jednoho typu lorentzovského oscilátoru. Kruhové frekvenci $\omega_0 = 4 \times 10^{15}$ rad s$^{-1}$ odpovídá vlnová délka 471 nm.

V další části uvedeme výsledky zjednodušených modelů, které předpokládají pouze jediný typ spektrálně osamoceného lorentzovského oscilátoru (v následujícím bez indexu) ve sledované spektrální oblasti. Příspěvky jiných, frekvenčně vzdálených rezonančních frekvencí (např. od interakce pole – elektrony, pole – ionty, pole – natáčení dipólových momentů přítomných v látce atp.) jsou hrubě simulovány jako **konstantní příspěvek** k reálné části permitivity, tj. i k indexu lomu,

$$\varepsilon_R(\omega) = n_{MED}^2 + A\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2},$$
$$\varepsilon_I(\omega) = A\,\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}. \qquad (12.23)$$

Obrázek 12.5 zobrazuje závislosti diskutovaných fyzikálních veličin na úhlové frekvenci pro středně silný oscilátor z oblasti typické pro absorpci způsobenou vázanými elektrony. Z obrázku je patrné, že imaginární část susceptibility (a permitivity) má maximum poblíž frekvence $\omega_0$, kdy dochází k maximální absorpci výkonu elektromagnetického pole.

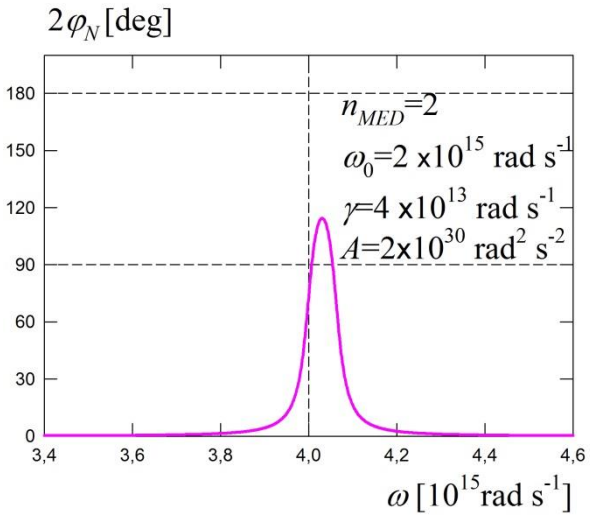
Reálná a imaginární část indexu lomu nejsou aditivní veličiny, jejich průběh nelze vyjádřit jako součet příspěvků jednotlivých oscilátorů. Průběh frekvenční závislosti reálné části indexu lomu $n$ má poměrně komplikovaný průběh. V části I (obr. 12.5) od malých frekvencí až do jisté frekvence index lomu s frekvencí roste. Takovým oblastem frekvencí říkáme oblasti **normální disperze**. Např. při průchodu slunečního světla atmosférou jsou rezonanční frekvence molekul plynů atmosféry výrazně vyšší než frekvence viditelného světla. Z pohledu našeho modelu se tedy viditelný obor spektra nachází v oblasti normální disperze I.. Více se rozptyluje modrá barva než červená. Pokud se pozorovatel dívá během slunečného dne na bezmračnou oblohu, vidí světlo rozptýlené na nehomogenitách koncentrace molekul rozptýlené, tedy převážně modré světlo (Rayleighův rozptyl).




Obr. 12.5 Výsledky modelu s jedním typem velmi silného oscilátoru posazeným do materiálu se základním konstantním indexem lomu $n_{MED} = 2$. Kruhová frekvence $\omega_0 = 4 \times 10^{15}$ rad s$^{-1}$ odpovídá vlnové délce 471 nm. Index lomu 2 znamená, že výkonová odrazivost je 0,111. Velmi vysoký absorpční koeficient $\alpha = 6 \times 10^7 \mathrm{m}^{-1} = 6 \times 10^5$ cm$^{-1}$ znamená redukci intenzity záření na 1% na dráze 77 nm, což je podstatně kratší než vlnová délka. V takovém případě je adekvátním experimentem měření odrazivosti. Oblasti I a III označují oblasti normální disperze indexu lomu, II je oblast anomální disperze.

V oblasti kolem rezonanční frekvence naopak index lomu s frekvencí klesá. Tuto oblast nazýváme oblastí **anomální disperze**. Šířka této oblasti souvisí hlavně s velikostí tlumení; s rostoucím tlumením se oblast II rozšiřuje. V této oblasti dochází k silné absorpci záření, protože koeficient $\kappa$, a tím i absorpční koeficient $\alpha = 2\frac{\omega}{c}\,\kappa$ nabývají značných hodnot.

Od určité frekvence index lomu opět roste. Jedná se tedy opět o oblast normální disperze (část III v obr. 12.5.




Obr. 12.6. Fázové rozdíly mezi elektrickou indukcí a elektrickým polem $2\varphi_{\mathcal{N}}$ pro případy velmi silných absorpčních pásů uvedených na obr. 12.6.

Průběh $R(\omega)$ je zobrazen na obrázku 12.5 pro stejné parametry, pro které byly vypočteny průběhy reálné a imaginární závislosti indexu lomu na frekvenci.

Jak již bylo zmíněno (rovnice 12.6 -12.8), absorpce energie vlny v látce je spojena s fázovými posuvy mezi základními veličinami, totiž o fázový posun $\varphi_{\mathcal{N}}$ mezi magnetickým polem vlny $\boldsymbol{H}$ a elektrickým polem $\boldsymbol{E}$ budícím kmity a o fázový úhel $2\varphi_{\mathcal{N}}$ mezi elektrickou indukcí $\boldsymbol{D}$ a elektrickým polem $\boldsymbol{E}$. K nejvýraznějším fázovým rozdílům dochází v okolí rezonanční frekvence. U velmi silných oscilátorů může dokonce nastat situace, kdy se úhel $2\varphi_{\mathcal{N}}$ blíží k 180° a a elektrická indukce $\boldsymbol{D}$ kmitá téměř v protifázi k budícímu elektrickému poli.

Pokud se zajímáme o (téměř) neabsorbující typická dielektrika v blízké a viditelné spektrální oblasti, převažují kladné příspěvky k $\chi_R$ od oscilátorů s vyššími $\omega_{0l}$ (normální disperze v oblasti I). Z toho plyne typická spektrální závislost indexu lomu $n(\omega) = \sqrt{1 + \chi_R(\omega)}$, který se monotónně zvyšuje s rostoucí frekvencí (klesající vlnovou délkou). Tyto závislosti bývají aproximovány různými, více či méně složitými vztahy a pro technicky významné látky (např. různé typy skel) jsou tabelovány. Jen jako jednoduché příklady **uveďme Cauchyovu disperzní formuli** pro neabsorbující plyny

$$n(\lambda) \cong 1 + A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) \tag{12.24}$$

nebo **Sellmeierovu rovnici** běžně užívanou pro technickou charakterizaci optických skel

$$n^2(\lambda) \cong 1 + \sum_{l=1}^{3} \frac{B_l \lambda^2}{\lambda^2 - C_l}, \tag{12.25}$$

kde koeficienty $B_l$ a $C_l$ jsou pro jednotlivé typy skel tabelovány.

Pro spektrálně „osamocené“ oscilátory, které nejsou extrémně silné, se používá pro absorpční koeficient aproximace zvaná **Lorentzův tvar absorpčního pásu**. Příslušné aproximace spočívají v tom, že:

- reálná část indexu lomu se v oblasti pásu nemění $n(\omega) \cong n = konst.$
- $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \cong 2\omega\,(\omega_0 - \omega)$

$$\alpha(\omega) = 2\frac{\omega}{c}\kappa = 2\frac{\omega}{c}\,\frac{\chi_I}{2n} = \frac{\omega}{nc} A \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \cong \tag{12.26}$$

$$\cong A\frac{\omega^2}{nc}\,\frac{1}{\omega^2}\,\frac{\gamma}{4\,(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} = \frac{A}{4nc}\,\frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + {\gamma^2}/{4}}.$$

# 12.2 Drudeův model – odezva vodivého prostředí na elektromagnetickou vlnu

Drudeův model popisuje odezvu látek s volně pohyblivými náboji (ionty v plynném plazmatu, např. v zemské ionosféře, elektrony v dopovaných polovodičích a v kovech), které nejsou vázány k rovnovážným polohám, na budící harmonickou monochromatickou elektromagnetickou vlnu. V souladu s předchozím výkladem se omezíme na model zahrnující pouze vliv elektrické složky pole. V pohybové rovnici (12.14) položíme vazební konstantu $k_H = 0$. Pro tento případ z rovnice 12.23 dostaneme pro relativní permitivitu modelového případu, který obsahuje pouze **1 typ volných nosičů** náboje a **žádné lorentzovské oscilátory** či jiné mechanismy interakce elektromagnetického pole s látkou. Pro soubor volných nábojů $q$ o objemové koncentraci $N$ a hmotnosti $m$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\,\frac{1}{-i\gamma\omega - \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{i\gamma\omega + \omega^2},$$

kde $\sqrt{\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}} = \omega_p$ je nazývána **plazmová frekvence**. Jedná se o charakteristickou frekvenci prostředí, pokud uvažujeme pouze volně pohyblivé (nevázané) náboje. V kovech se nachází v ultrafialové části spektra, v polovodičích je v infračervené oblasti.

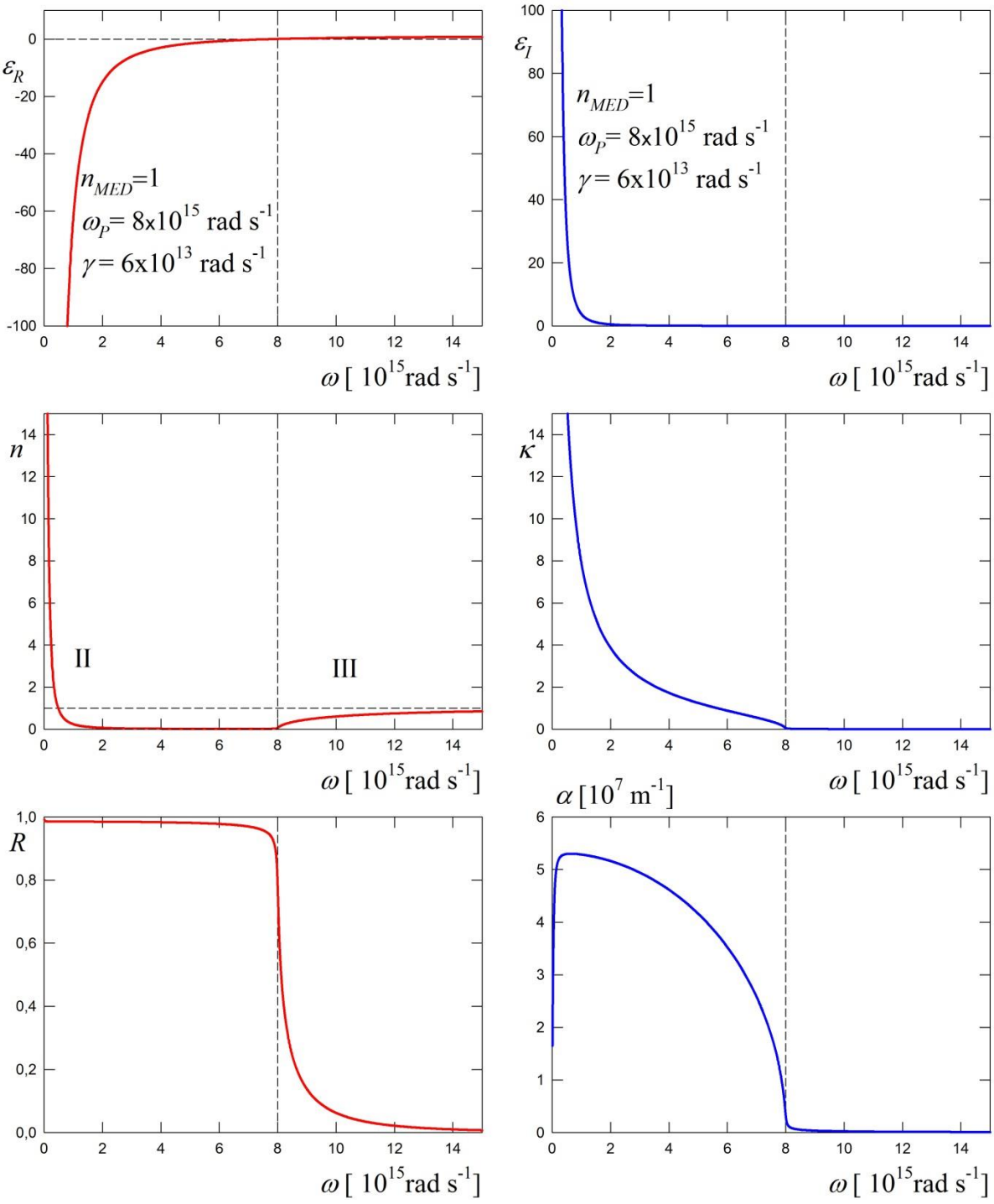
Výpočtem reálné a imaginární části výrazu dostaneme pro reálnou a imaginární část permitivity v takovém modelovém případě

$$\varepsilon_R = n^2 - \kappa^2 = 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\omega^4 + \gamma^2 \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2},$$

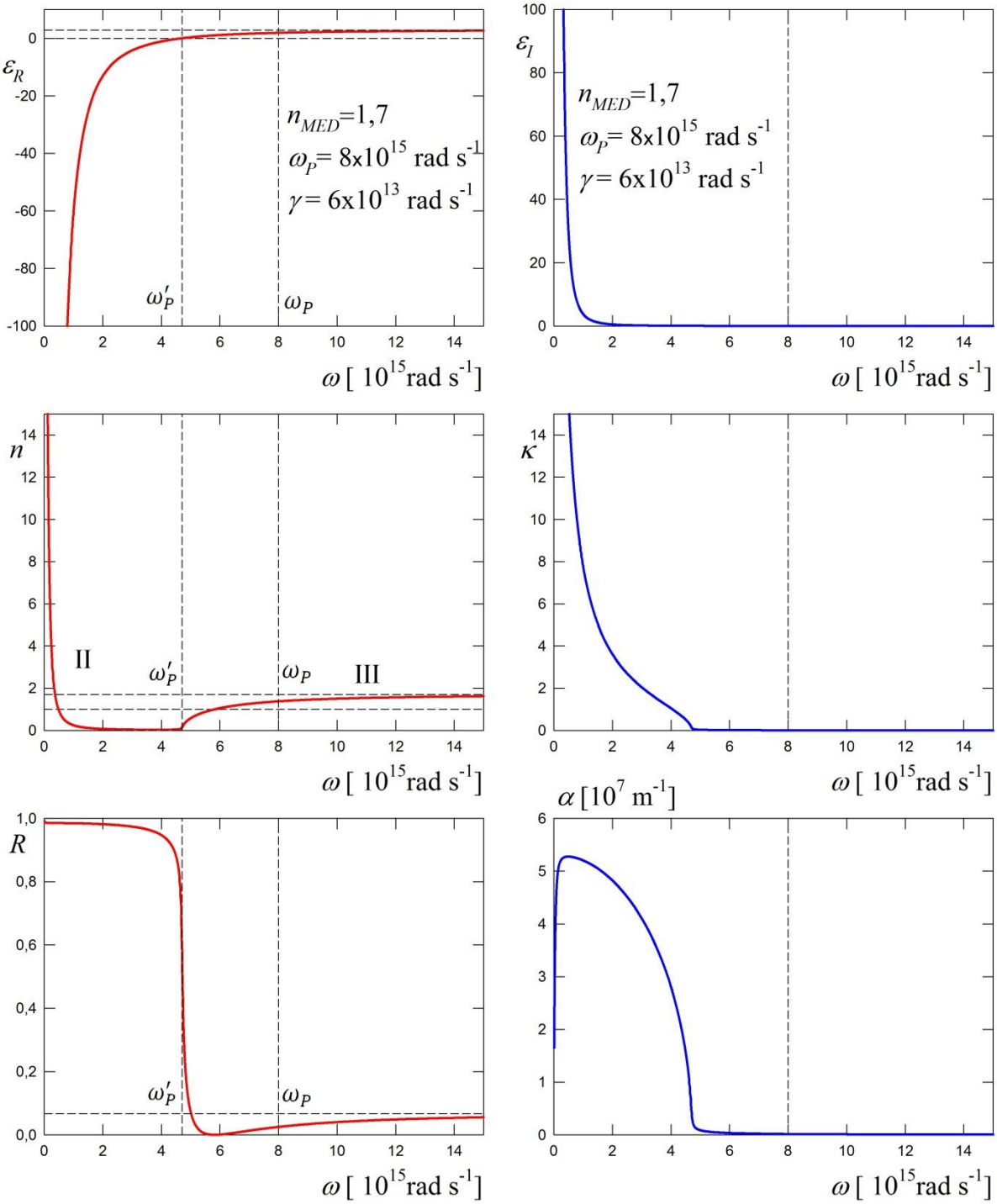
$$\varepsilon_I = 2n\kappa = \frac{\gamma \omega_p^2}{\omega^3 + \gamma^2 \omega}.$$

Z těchto rovnic pak můžeme vyjádřit $n(\omega)$ a $\kappa(\omega)$. Frekvenční závislost těchto veličin je zobrazena na obr. 12.7. Jako velmi typický rys se jeví silný pokles odrazivosti s rostoucí frekvencí právě u plasmové frekvence $\omega_p$, též nazývaný reflexní hrana. Je zjevné, že pod plazmovou frekvencí dochází k silné absorpci záření ($\kappa > 0$, a tedy i absorpční koeficient $\alpha > 0$). Naopak nad plazmovou frekvencí jsou tyto veličiny malé a vodivé prostředí elektromagnetické záření daných frekvencí propouští.

Stejně jako v případě Lorentzových oscilátorů, i v případě Drudeova modelu jsou závislosti $n(\omega)$ a $\kappa(\omega)$ ovlivněny přítomností další mechanismů interakce. Na obr.12.11. je nakreslen zjednodušený model, kdy jsou optické parametry ovlivněny pouze přidáním konstantního reálného indexu lomu $n_{MED}$. Důsledkem je změna frekvence, při které je $\varepsilon_R = 0$. Je též patrné odsunutí reflexní hrany od plasmové frekvence $\omega_p$. Tento jev je velmi výrazně pozorovatelný např. ve spektrální závislosti odrazivosti zlata, kdy plasmová frekvence spočtená z koncentrace volných elektronů a jejich parametrů (efektivní hmotnost) se nachází podobně jako u mnoha jiných kovů v ultrafialové oblasti spektra, ale vlivem právě jiných absorpčních mechanismů je posunuta z UV oblasti k vlnové délce zhruba 540 nm, tj. do viditelné oblasti. Zlato tak v menší míře odráží zelené a modré světlo než světlo červené a to způsobuje jeho žlutavou barvu. V jiných kovech (stříbro, hliník) ovlivnění posuvu reflexní hrany od plasmové není tak silné a tyto kovy odrážejí dobře v celém viditelném oboru.




Obr. 12.7 Základní parametry (reálná a imaginární část relativní permitivity, reálná a imaginární část indexu lomu, výkonový koeficient odrazivosti a absorpční koeficient) v „čistém“ Drudeově modelu, když předpokládáme, že k vlastnostem nepřispívají jiné mechanismy než pohyb volných nábojů jednoho druhu. Takový případ však není reálný.




Obr. 12.8 Základní parametry (reálná a imaginární část relativní permitivity, reálná a imaginární část indexu lomu, výkonový koeficient odrazivosti a absorpční koeficient) v modelu, když předpokládáme, že k vlastnostem přispívají i jiné mechanismy než pohyb volných nábojů. V uvedeném modelu jsou tyto mechanismy velmi hrubě zahrnuty jako příspěvek $n_{MED}$ k indexu lomu nezávislý na frekvenci. V porovnání s obr. 12.7 je zřejmé, že i taková „malá“ úprava (pouze posunutí hranice spektrální oblasti, kde je $\varepsilon_R < 0$) má významné důsledky v posunu spektrálních charakteristik, jako je např. odsunutí reflexní hrany od plasmové frekvence.

## Poznámka P12.1 – Maxwellovy rovnice v absorbujícím prostředí

Rovnici

$$\mathrm{rot}\,\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

rozepíšeme ve složkách pro $\tilde{E}_x = E_0\, e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t}$,

$$\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial t} = -i\,\widetilde{\mathcal{K}}\,E_0\, e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t},$$

provedeme integraci přes čas a dostaneme

$$\tilde{B}_y = \int -\frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial t}\,dt = \frac{-i\widetilde{\mathcal{K}}}{-i\omega}E_0\, e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t} = \int -\frac{\partial \tilde{B}_y}{\partial t}\,dt = \frac{\widetilde{\mathcal{K}}}{\omega}E_0\, e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t}$$

$$H_y = \frac{\widetilde{\mathcal{K}}}{\mu_0\omega}E_0\, e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t} = \frac{E_0}{\mu_0}\,\widetilde{\mathcal{N}}e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t}.$$

Podobně z rovnice

$$\mathrm{rot}\,\widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

dostaneme

$$\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{D}_x}{\partial t} = -\frac{i\widetilde{\mathcal{K}}^2}{\mu_0\omega}E_0\, e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t}$$

a

$$\widetilde{D}_x = \int \frac{\partial \widetilde{D}_x}{\partial t}\,dt = \frac{-i\widetilde{\mathcal{K}}^2}{-i\mu_0\omega^2}E_0\, e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t} = \frac{\omega^2}{c^2}\widetilde{\mathcal{N}}^2\frac{1}{\mu_0\omega^2}E_0\, e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t} =$$

$$= E_0\varepsilon_0\,\widetilde{\mathcal{N}}^2 e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t} = E_0\varepsilon_0\widetilde{\varepsilon_r}e^{i\widetilde{\mathcal{K}}z}\, e^{-i\omega t}.$$

Dále vypočteme hustotu elektrické energie tlumené vlny. Využijeme podobného postupu jako při odvození vztahu (1.49) s tím, že relativní permitivita je v absorbujícím prostředí komplexní

$$\langle u_E\rangle_T = I = \frac{1}{2}\langle \mathrm{Re}\{\widetilde{\boldsymbol{E}}\}\cdot \mathrm{Re}\{\widetilde{\boldsymbol{D}}\}\rangle_T = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\langle\frac{1}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{E}} + \widetilde{\boldsymbol{E}}^*\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\widetilde{\boldsymbol{D}} + \widetilde{\boldsymbol{D}}^*\right)\rangle_T =$$

$$= \frac{1}{8}\varepsilon_0\widetilde{\varepsilon_r}\langle\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{D}}^* + \widetilde{\boldsymbol{E}}^*\widetilde{\boldsymbol{D}}\,\rangle_T$$

a dostaneme

$$\langle u_E\rangle_T = \frac{1}{4}\varepsilon_0\widetilde{\varepsilon_r}E_0^2\,.$$

# 13. Záření černého tělesa, fotoelektrický jev

Koncem 19. a začátkem 20. století se řadě fyziků jevilo, že stávající popis fyziky je v podstatě kompletní („Všechny základní fyzikální zákony byly objeveny a jsou tak dobře známy, že možnost nových objevů je velmi malá. Naše budoucí objevy se budou pohybovat v oblasti 6-tého desetinného místa“, A. A. Michelson, 1903). Současně se však množily experimenty, které se pomocí stávajících modelů nedařilo vysvětlit. Jedním z těch, které nejvýznamnějším způsobem přispěly k formulaci pojmu „kvantum energie“ a k přechodu od klasického ke kvantovému popisu fyzikálních jevů bylo měření a teoretický popis spektra záření černého tělesa. Výsledky týkající se spektra záření černého tělesa uvedeme v této kapitole jen přehledně a zaměříme se na jejich historický vývoj [7]. Konkrétní odvození jednotlivých vztahů spadají spíše do oblasti termodynamiky a statistické fyziky a v tomto základním kurzu Optiky je provádět nebudeme.

## 13.1 Záření černého tělesa

Jak jsme viděli v předchozích kapitolách, může se elektromagnetické záření při dopadu na materiálový objekt odrazit nebo může být tělesem absorbováno (omezíme se na případ nepropustných těles, takže se nemusíme zabývat situací, kdy část záření tělesem projde). Podíl absorbované energie vůči energii dopadající je definován pomocí tzv. absorbance

$$\alpha(\nu) = \frac{I_a(\nu)}{I_0(\nu)}, \tag{13.1}$$

kde $I_0(\nu)$ je intenzita záření (výkon nesený zářením v jednotkové ploše)[10] o frekvenci $\nu$ dopadajícího na těleso s teplotou $T$ a $I_a(\nu)$ je intenzita plošná hustota absorbovaného záření.

Podobně podíl reflektovaného záření vůči dopadajícímu je popsán koeficientem reflektance

$$\varrho(\nu) = \frac{I_r(\nu)}{I_0(\nu)}, \tag{13.2}$$

kde $I_{r\nu}(T)$ je intenzita záření s frekvencí $\nu$ odraženého od tělesa s teplotou $T$. Ze zákona zachování energie pro **nepropustná** tělesa dostaneme

$$I_0(\nu) = I_r(\nu) + I_a(\nu), \qquad 1 = \varrho(\nu) + \alpha(\nu).$$

V ustáleném stavu plyne ze zákona zachování energie, že zářivý výkon tělesem absorbovaný musí být v rovnovážném stavu do okolí opět uvolněn. Toto uvolnění energie se obecně může dít různými způsoby, mj. přes emitované záření. Podíl emitovaného záření vůči záření dopadajícímu popisuje tzv. emisivita

[10] V této kapitole budeme užívat pojem intenzita ve smyslu velikost Poyntingova vektoru.

$$\varepsilon(\nu) = \frac{I_e(\nu)}{I_0(\nu)}.$$

Dále se budeme zabývat případem **termodynamické rovnováhy**, kdy uvažované objekty tvoří uzavřený systém a vzájemné toky energií (výkonů) se ustálily tak, že **všechny části tohoto systému mají stejnou teplotu**.

Německý fyzik Gustav Kirchhoff v roce 1859 dokázal pomocí aplikace druhého zákona termodynamiky jednoduchý vztah mezi absorbancí a emisivitou látek, tj. že poměr mezi emitovaným a absorbovaným zářením $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ je při dané teplotě $T$ a frekvenci $\nu$ záření **v termodynamické rovnováze** nezávislý na materiálu tělesa, tj.

$$\left(\frac{\varepsilon(\nu,T)}{\alpha(\nu,T)}\right)_{\text{mat1}} = \left(\frac{\varepsilon(\nu,T)}{\alpha(\nu,T)}\right)_{\text{mat2}}. \tag{13.3}$$

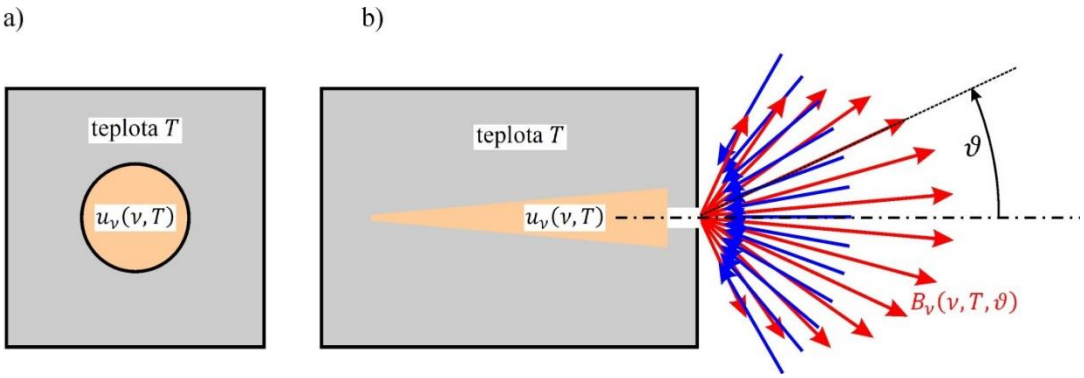
Jak plyne ze zápisu, rovnost poměrů platí pro každou frekvenci. Jednoduše řečeno to znamená, že těleso, které silně absorbuje záření, jej rovněž silně emituje. Kirchhoff ukázal, že pokud by tento zákon neplatil, vedlo by to k toku tepelné energie z chladnějšího tělesa na teplejší, což je v rozporu s druhým termodynamickým zákonem. Těleso, které veškeré dopadající záření absorbuje (jeho absorbance je rovna jedné v celé spektrálním oboru), se nazývá **černé těleso** („black body bb“)**.** Z rovnice (13.3) pak plyne

$$\frac{\varepsilon(\nu,T)}{\alpha(\nu,T)} = \frac{\varepsilon_{bb}(\nu,T)}{1} = \varepsilon_{bb}(\nu,T)\,. \tag{13.4}$$

To znamená, že podíl emisivity a absorbance libovolného tělesa je roven emisivitě černého tělesa a je nezávislý v termodynamické rovnováze na jakýchkoliv materiálových parametrech. Tato konstantnost při dané teplotě představuje tedy univerzální přírodní zákon.

Experimentálně lze černé těleso realizovat pomocí dutiny v tělese s malým výstupním otvorem. Záření, které se nachází uvnitř dutiny, je v termodynamické rovnováze se stěnami. Záření, které zvnějšku projde vstupním otvorem do dutiny, se po mnoha odrazech utlumí a přispěje k ohřevu stěn. Intenzita odraženého záření je po $N$ odrazech rovna $I_r^{(N)} = \varrho^N I$. Zvláště pokud je materiál stěn dutiny zhotoven z velmi slabě odrážejícího materiálu, je při malém koeficientu odrazu $\varrho$ intenzita odraženého záření zanedbatelná. Většina zářivého výkonu se tedy absorbuje. Ze stěn dutiny je emitováno rovnovážné záření, jehož teplota odpovídá teplotě stěn dutiny. Toto záření vyplní dutinu. Jeho objemovou spektrální hustotu energie označíme $u_\nu(T)$, fyzikální rozměr J m$^{-3}$ Hz$^{-1}$. To je objemová hustota energie připadající na jednotkový interval frekvencí [11]. Výstupním otvorem z dutiny vystupuje záření s výkonem, který můžeme vztáhnout na jednotku plochy otvoru, do jednotkového prostorového úhlu a v jednotkovém frekvenčním intervalu.

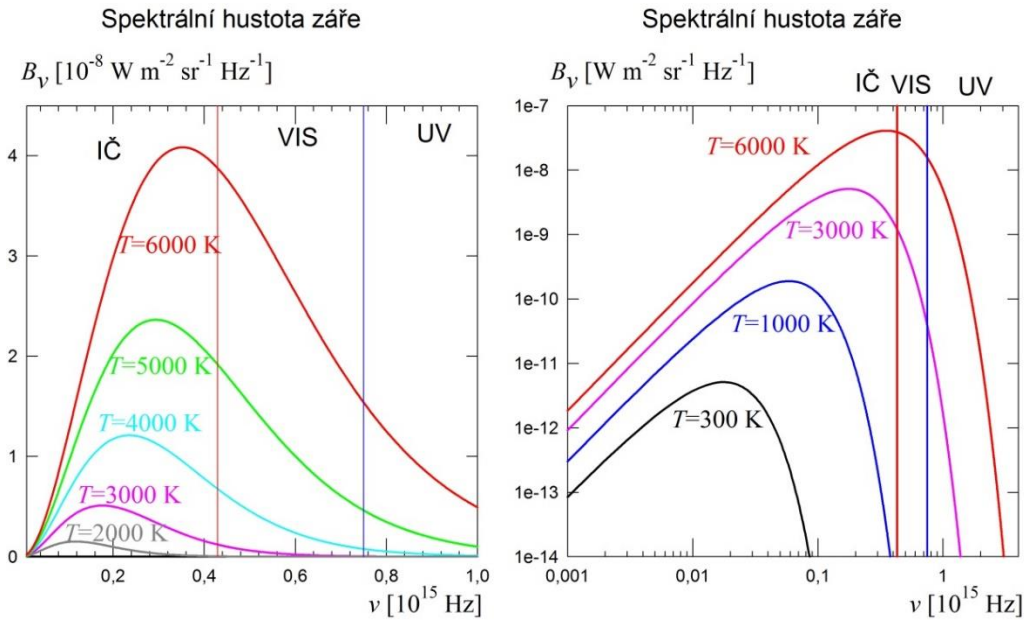
[11] Nadále budeme značit spektrální hustoty příslušným indexem u dané veličiny. Takže $u_\nu(\nu_0,T)\,\Delta\nu$ představuje příspěvek k objemové hustotě energie pole od frekvenčních složek s frekvencemi z úzkého intervalu frekvencí $\nu \in (\nu_0, \nu_0+\Delta\nu)$. Podobně $u_\lambda(\lambda,T)$ je příspěvek k energii vztažený na jednotkový interval vlnových délek.




Obr. 13.1 a) Záření uzavřené v dutině o teplotě T má rovnovážnou spektrální hustotu energie $u_\nu(\nu,T)$, jednotky J m$^{-3}$ Hz$^{-1}$. Na tvaru dutiny ani materiálu stěn nezáleží. b) Praktické provedení modelu pro emisi záření. Záření v dutině není v termodynamické rovnováze s vnějším prostorem. Pro zdroj záření černého tělesa je důležité, aby otvor pro výstup záření co nejméně ovlivňoval záření uvnitř dutiny a dopadající záření nebylo odráženo zpět. K tomu přispívá tvar dutiny a vnitřní povrch s co největší absorbancí. Dopadající záření (modré šipky) můžeme charakterizovat pomocí plošné hustoty zářivého toku [W m$^{-2}$] a emitované záření (červené šipky) buď plošnou hustotou zářivého toku vztaženou na jednotkový prostorový úhel (zář) nebo zářivým tokem do celého poloprostoru (intenzita vyzařování). Jejich spektrální rozložení popisují příslušné spektrální hustoty. Konstantní teplota stěn dutiny $T$ je udržována regulovaným topením.

$$B_\nu(\nu,T,\vartheta)=\frac{c}{4\pi}u_\nu(\nu,T)\,f(\vartheta)\qquad\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr.\,m^2\,Hz}}\right],$$

kde $\vartheta$ charakterizuje směr, do kterého je záření emitováno a pro záření černého tělesa je $f(\vartheta)=\cos\vartheta$ . V radiometrii je tato veličina zvána **spektrální hustota záře** (spectral radiance). Podobně jako při odvození vztahu (1.49) představuje $c$ objem, ve kterém se nachází záření, jež projde za 1s plochou 1m$^2$ při šíření rychlostí $c$).




Obr. 13.2 Spektrální hustota záře emitované černým tělesem o teplotě $T$ v závislosti na frekvenci. Vlevo v lineárních škálách, vpravo v logaritmických stupnicích.

Dalším ze zákonů, který byl formulován Josefem Stefanem (1879) na základě experimentálních měření provedených Johnem Tyndallem a následně teoreticky vysvětlen Ludwigem Boltzmannem pomocí termodynamických úvah, byl **Stefanův-Boltzmannův zákon**, který popisuje vztah mezi **celkovou** rovnovážnou objemovou hustotou zářivé energie v dutině (tj. bez ohledu na spektrální rozdělení) a teplotou (v rovnováze jde o stejnou teplotu jakou má těleso, které záření vyzařuje). **Stefanova-Boltzmannova konstanta** je vyjádřena přes výkon záření (zářivý tok), které je emitováno jednotkovou plochou černého tělesa do celého poloprostoru (radiometrická terminologie: intenzita vyzařování, radiant exitance $M_e$)

$$M_e(T) = \sigma T^4 \,, \qquad [\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,] \,.$$

V dnešní soustavě SI má tato konstanta přesnou hodnotu

$$\sigma = \frac{\pi^2}{60}\,\frac{k_B^4}{c^2\hbar^3} = \frac{2\pi^5}{15}\,\frac{k_B^4}{c^2 h^3} \cong 5{,}670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W m^{-2} K^{-4}} \,.$$

S hustotou energie elektromagnetického pole v dutině v termodynamické rovnováze je tato veličina spojena vztahem

$$U(T) = \frac{4}{c}\sigma T^4 \ \cong 7{,}566 \times 10^{-16}\ T^4 \ \ \mathrm{J\,m^{-3}} \,.$$

Další krok k pochopení problematiky záření černého tělesa udělal Wilhelm Wien (1894), kdy analyzoval myšlenkový pokus, při kterém se ve válci vyplněném termodynamicky rovnovážným zářením posouvá píst. Dochází k adiabatické kompresi objemu (rovnováha se během pomalého posunu pístu zachovává), mění se frekvence vln odražených od stěny pístu (Dopplerův jev) a vnitřní energie záření uvnitř objemu válce narůstá z důvodu práce vykonané při posunu pístu. Kvantitativní analýzou tohoto pokusu lze dospět k závěru, že součin vlnové délky záření, při které má spektrum záření černého tělesa při dané teplotě maximum, a teploty je konstantní

$$\lambda_m T = b \cong 2{,}898 \times 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}, \qquad (13.5)$$

kde $b$ je Wienova konstanta. V dnešní soustavě SI je její hodnota definována přesně přes násobek podílu $hc/k_B$ Tento vztah se nazývá **Wienův posunovací zákon**. Vyjadřuje experimentálně pozorovaný fakt, že s rostoucí teplotou se maximum spektra záření černého tělesa posouvá ke kratším vlnovým délkám (větším frekvencím).

Wien (1896) rovněž došel k závěru, že spektrální závislost hustoty energie v dutině by měla mít tvar

$$u_\nu^{(W)}(\nu, T) = A\,\nu^3\, e^{-\frac{B\nu}{T}}, \qquad (13.6)$$

kde $a, b, A, B, A', B'$ jsou nějaké konstanty. Tato závislost se nazývá **Wienův vyzařovací zákon**. Dobře popisoval experimentální data, která byla tehdy změřena zejména v oblasti vysokých frekvencí.

Max Planck (1897-1899) rozpracoval mikroskopický model, ve kterém jsou stěny dutiny, z níž je emitováno záření černého tělesa, tvořeny oscilátory kmitajícími s frekvencí $\nu$. V tomto modelu je záření černého tělesa o frekvenci $\nu$ v rovnováze s oscilátory o stejné frekvenci. Planck na základě tohoto modelu dospěl k závěru, že funkce $u_\nu(T)$ má tvar

$$u_\nu(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\bar{u}_{osc}(\nu,T), \tag{13.7}$$

kde $\bar{u}_{osc}(\nu,T)$ je průměrná energie připadající na jeden oscilátor s frekvencí $\nu$ při teplotě $T$. Planck předpokládal, že elektrické pole elektromagnetické vlny vybudí jednotlivé oscilátory nerovnoměrně (s různou amplitudou), ale s určitým rozdělením velikosti amplitud. Průměrnou energii $\bar{u}_{osc}(\nu,T)$ pak dostal sečtením energií všech oscilátorů vydělenou jejich počtem.

Lord Rayleigh (1900) a James Jeanes (1905) se problematikou záření černého tělesa rovněž zabývali a dospěli k vlastnímu vyzařovacímu zákonu (**Rayleighův-Jeansův vyzařovací zákon**), kdy provedli výpočet možného počtu stojatých vln v dutině černého tělesa, použili ekvipartiční teorém a z něj odvodili hustotu energie záření připadající na jednotkový interval frekvencí $\nu$.

$$u_\nu^{(RJ)}(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BT\ ,$$

kde $k_B$ je Boltzmannova konstanta. V dnešní soustavě SI má přesnou hodnotu $1{,}380\ 649 \times 10^{-23}\ \mathrm{JK}^{-1}$.

Porovnání s experimentálně měřenými spektry ukázala, že Wienův zákon je v relativně dobrém souladu jen za vysokých frekvencí (viditelná a ultrafialová oblastv) a vůbec neplatí za malých frekvencí, tzv. „**infračervená katastrofa**“), zatímco Rayleighův-Jeansův zákon naopak poskytuje poměrně dobrý soulad s experimentem za nízkých frekvencí (ale vykazuje značné odchylky od experimentu za vysokých frekvencí, tzv. „**ultrafialová katastrofa**“). – obr. 13.3.

Tento neuspokojivý stav se snažil vyřešit **M. Planck**, který nejprve **aplikoval standardní termodynamickou teorii.** Odhadl funkční tvar entropie $S$ v oblasti vysokých frekvencí, z níž odvodil pomocí vztahu $\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$ funkci $u(\nu,T)$- vztah 13.6 a potom funkci $S$ modifikoval, aby získané $u(\nu,T)$ v limitě splňovalo jak Wienův zákon (vysoké frekvence), tak Rayleigh-Jeansův zákon (nízké frekvence). Pomocí takto odhadnuté termodynamické entropie $S$ dospěl ke správné funkční závislosti vyzařovacího zákona, který je v souladu s experimentem v celé frekvenční oblasti:

$$u_\nu(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{b'\nu}{e^{\frac{a'\nu}{T}}-1}, \tag{13.8}$$

kde $a'$ a $b'$ byly empirické parametry volené tak, aby tato teoretická závislost dobře aproximovala experimentální data změřená pro celou frekvenční oblast spektra a různé teploty. Bezprostředním podnětem k této práci byla data získaná v r. 1900 Heinrichem Rubensem ve vzdálené infračervené oblasti spektra. Tímto postupem se podařilo nalézt správnou funkční závislost, ale bez hlubšího pochopení fyzikálních jevů, které tuto závislost způsobují.

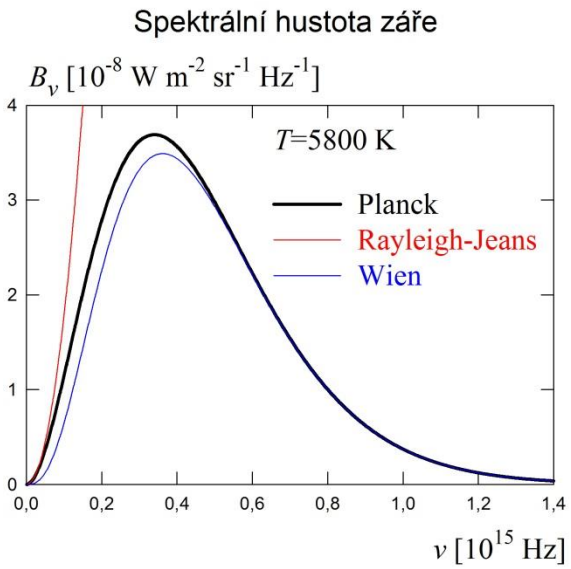
Max Planck proto na tématu dále pracoval a k definici entropie $S$ využil statistické teorie publikované Ludwigem. Boltzmannem (1877). To formálně vyžadovalo rozdělit celkovou energii záření $E$ mezi $N$ oscilátorů. Planck proto zavedl pojem energetického kvanta ℮ Z porovnání termodynamicky definované entropie $S$ vyplývající z Wienova vyzařovacího zákona pro záření a statistické konfigurační entropie mnoha oscilátorů kmitajících na frekvenci $\nu$ (entropie $S = k_B.\ln W$, kde $W$ je počet nerozlišitelných způsobů, kterými lze rozdělit $P$ energetických kvant mezi $N$ oscilátorů) odvodil vyzařovací zákon ve tvaru

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{℮}{e^{\frac{℮}{k_B T}} - 1}. \tag{13.9}$$

Porovnáním s vlastním, dříve odvozeným vzorcem (13.8) dospěl k důležitému závěru, že formálně zavedená energie kvanta ℮ je úměrná frekvenci záření, tedy

$$℮ = h\nu = \hbar\omega\,, \tag{13.10}$$

kdy konstantu úměrnosti ve vztahu (13.8) označenou jako $b'$ označujeme jako $h$. Dále z porovnání obou vzorců plyne, že pro empirickou konstantu $a'$ ze vztahu (13.8) platí v mikroskopickém modelu $a' = \frac{h}{k_B}$. Konstanta úměrnosti $h \cong 6{,}626 \times 10^{-34}$ J s se nazývá **Planckova** konstanta a má od r. 2019 přesnou hodnotu $h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J Hz$^{-1}$.




Obr. 13.3 Porovnání spektrálních hustot spočtených podle vzorců Planckova (černě), Rayleighova-Jeansova (červeně) a Wienova (modře)

Nízkofrekvenční limitou Planckova vyzařovacího zákona je Rayleighův-Jeansův vyzařovací zákon, pro vysoké frekvence dostaneme v limitě Wienův vyzařovací zákon a integrací přes všechny frekvence dostaneme Stefanův-Boltzmannův zákon.

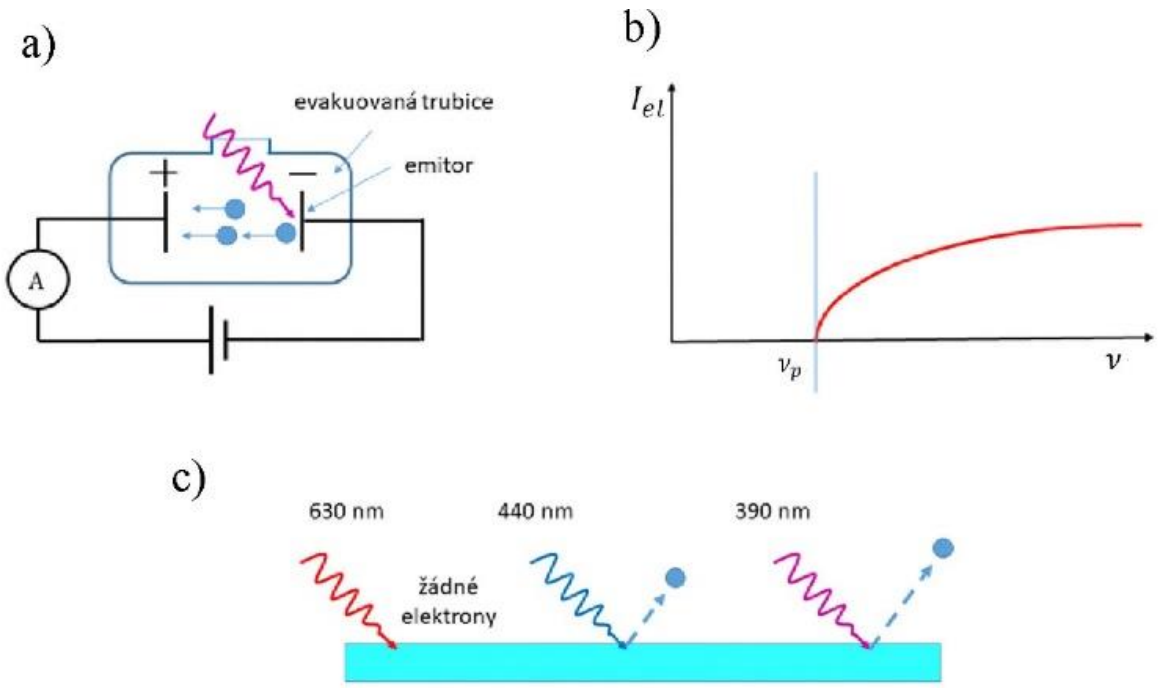
Planckovo odvození vyzařovacího zákona a zavedení pojmu kvanta energie lze dnes považovat za klíčový krok k budoucí formulaci kvantové mechaniky. Planck sám však nespojoval přímo formálně zavedené kvantum energie ε s tím, že by záření samotné bylo kvantováno. Kvantování energie bylo v Planckově postupu vázáno na diskrétnost energetického spektra oscilátorů

tvořících černé těleso, nikoliv na záření, které je s černým tělesem v rovnováze. Předpoklad o kvantování energetických stavů oscilátorů při tehdejším stavu poznání nutně neimplikoval kvantování energetických stavů záření. Diskrétnost energetického spektra oscilátorů bylo možné vysvětlit např. nějakými procesy akumulace záření oscilátory. Přesto Planck v roce 1918 dostal Nobelovu cenu za objev „energetických kvant“.

## 13.2 Vnější fotoelektrický jev

Dalším klíčovým experimentem, který posunul fyzikální komunitu k formulaci kvantově-mechanické teorie byl **vnější fotoelektrický jev**, poprvé experimentálně zjištěný Philippem Lenardem (1902). Při ozáření povrchu alkalických kovů ultrafialovým zářením pozoroval záření tvořené elektrony uvolněné z látky. Jejich tok měřil jako elektrický proud tekoucí ampérmetrem. Velikost elektrického proudu vykazovala prahový efekt, tj. byla měřitelná až od určité frekvence budícího záření. (obr. 13.4). Existence frekvenčního prahu je v rozporu s představami vlnové teorie. Podle ní, rovnice (1.48), nezávisí výkon nesený vlnou na frekvenci, ale na amplitudě. Mělo by proto být možné dodat dostatečnou energii k uvolnění elektronu zvýšením amplitudy světla (tj. jeho intenzity) i při nízkých frekvencích budícího záření. To však nebylo pozorováno. Existence prahu při měření fotoelektrického jevy vedla A. Einsteina k myšlence vysvětlit tento jev pomocí energetických kvant formulovaných M. Planckem, která aplikoval na popis záření. Einstein vyslovil předpoklad (1905), že světlo se skládá z jednotlivých kvant o energii $\mathcal{e} = h\nu$ a hybnosti $\mathfrak{p} = \frac{h\nu}{c}$ . Proces emise elektronu při fotoelektrickém jevu pak lze chápat jako zánik jednoho fotonu, při kterém dojde k předání jeho energie jednomu elektronu vázanému k jádru. Pokud je energie fotonu větší než vazební energie elektronu $\mathcal{E}_{VAZ}$, dojde k jeho uvolnění z látky. Rozdíl mezi energií fotonu $h\nu$ a vazební energií elektronu se projeví větší kinetickou energií $\mathcal{E}_{KIN}$ elektronu při opuštění látky. Pokud nezahrneme ztráty energie fotoelektronu při cestě k povrchu materiálu, lze energetickou bilanci procesu popsat jednoduchou rovnicí

$$\mathcal{E}_{KIN} = h\nu - \mathcal{E}_{VAZ} .$$




Obr. 13.4 Fotoelektrický jev, a) Schéma měření, kdy budící světelné záření dopadá na materiál umístěný ve vakuové trubici a zapojený jako katoda. b) Závislost měřeného elektrického proudu $I_{el}(\nu)$ na frekvenci dopadajícího záření, $\nu_p$ je prahová frekvence pro vznik fotoproudu. c) Schéma popisující měřenou závislost $I_{el}(\nu)$.

## 13.3 Vlny spojené s částicemi

Po experimentálním objevu fotoelektrického jevu a jeho vysvětlení Einsteinem pomocí energetických kvant bylo zjevné, že některé vlastnosti světla lze dobře popsat vlnovým modelem (např. interference) a jiné modelem částicovým – kvantovým. Další důležitý krok učinil Louis Victor de Broglie (1924), který vyslovil hypotézu o existenci částicových vln. Broglie vyšel z Einsteinova předpokladu o tom, že kvantum energie – foton, má hybnost o velikosti

$$g = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

a navrhl, že tento vztah lze zároveň chápat tak, že částice o hmotnosti $m$ pohybující se rychlostí v a mající tedy hybnost $\mathfrak{p}$ je spojena s vlnou o vlnové délce $\lambda$.

$$\lambda = \frac{h}{g} = \frac{h}{m\mathrm{v}}.$$

L. de Broglie byl za tuto teorii oceněn Nobelovou cenou v roce 1929. Po vzniku kvantové mechaniky (1925) se začala rozvíjet i kvantová teorie elektromagnetického pole, jejíž součástí je kvantová optika.

# Obsah


1. Úvod – elektromagnetické vlny ... 3
1.2 Maxwellovy rovnice ... 4
1.3 Vlnová rovnice ... 6
1.3.1 Jednorozměrná vlnová rovnice ... 7
1.3.2 Vlna v třírozměrném prostoru ... 8
1.4 Vlnová rovnice v materiálovém prostředí ... 10
1.5. Energie postupné rovinné monochromatické vlny ... 16
1.6 Tlak světelného záření ... 19
1.7 Kulová vlna ... 19
2. Polarizace rovinné monochromatické vlny ... 24
2.1 Šíření v neabsorbujícím, izotropním prostředí bez lineárního a kruhového dvojlomu ... 24
2.2 Polarizační elipsa ... 26
2.3 Jonesův formalismus ... 31
2.4 Příprava lineárně polarizovaného světla ... 34
2.5 Intenzita záření procházejícího „ideálním“ polarizátorem ... 36
2.5 Změna polarizačního stavu polarizátorem a fázovou destičkou ... 37
3. Odraz a lom na rozhraní dvou dielektrik ... 45
3.1 Zákon odrazu a lomu ... 45
3.2 Fresnelovy vztahy ... 50
3.2.1 Fresnelovy vztahy - Elektrické pole vln kolmé k rovině dopadu (polarizace $\boldsymbol{s}$) ... 51
3.2.2 Fresnelovy vztahy - Elektrické pole vln v rovině dopadu (polarizace $\boldsymbol{p}$) ... 52
3.2.3 Odraz a lom na opticky hustším prostředí ($\boldsymbol{n1} < \boldsymbol{n2}$) ... 54
3.2.4 Odraz a lom na opticky řidším prostředí ($\boldsymbol{n1} > \boldsymbol{n2}$) ... 56
3.2.5 Úplný (totální) odraz ... 57
3.3 Výkonové koeficienty odrazu a lomu ... 59
Poznámka P3.1 – Podmínka spojitosti tečných složek elektrického pole na rozhraní ... 62
Poznámka P3.2 - Alternativní výrazy pro $\boldsymbol{rs}$ a $\boldsymbol{rp}$, Brewsterův úhel, Stokesovy vztahy ... 62
4. Interference (část 1) – skládání monochromatických vln stejné frekvence ... 65
4.1 Dvousvazková interference rovinných vln ... 68
4.1.1 Dvousvazková interference vln $\boldsymbol{k1} \parallel \boldsymbol{k2}$ ... 71
4.1.2 Dvousvazková interference vln $\boldsymbol{k1} \nparallel \boldsymbol{k2}$ ... 80
4.1.3 Interferenční proužky stejné tloušťky ... 83
4.2 Interference mnoha vln s rovnoběžnými vlnovými vektory ... 85

4.2.1 Interference mnoha vln s rovnoběžnými vlnovými vektory, stejnými amplitudami a stejnými fázovými rozdíly ... 85
4.2.2 Interference nekonečně mnoha vln s rovnoběžnými vlnovými vektory, různými amplitudami a stejnými fázovými rozdíly – interference na planparalelní desce ... 87
4.2.3 Fabryův-Pérotův interferometr ... 92
5. Interference (část 2) - skládání vln různých frekvencí ... 97
5.1 Skládání dvou vln různých frekvencí ... 97
5.1.1 Fázová a grupová rychlost v disperzním prostředí ... 99
5.1.2 Intenzita ... 101
5.2 Skládání mnoha rovinných vln s různými frekvencemi a stejným směrem vlnových vektorů ... 103
5.2.1 Spojité spektrální hustoty - jeden pulz ... 104
6. Difrakce (skalární popis) ... 107
6.1 Aproximace difrakčního integrálu ... 109
6.2 Výpočet difrakčního integrálu ... 112
6.2.1 Analytický výpočet ... 112
6.2.3 Babinetův princip ... 113
6.2.4 Difrakce na hraně (Fresnelova aproximace) ... 114
6.2.5 Difrakce na štěrbině (Fresnelova aproximace) ... 115
6.2.6 Difrakce na obdélníkové apertuře ... 116
6.2.7 Difrakce na kruhové apertuře ... 119
6.3 Zobrazení Fraunhoferova difrakčního obrazce ... 122
6.4 Rayleighovo kritérium ... 123
6.5 Spektrální rozklad světla při difrakci ... 126
6.6 Amplitudová difrakční mřížka ve Fraunhoferově aproximaci ... 126
6.7 Holografie ... 135
7. Koherence ... 141
7.1 Podélná (časová) koherence ... 146
7.1.1 Model fázových skoků ... 147
7.1.2 Koherenční čas a koherenční délka ... 151
7.2 Prostorová koherence ... 152
7.2.1 Jeden bodový zdroj světla ... 154
7.2.2 Prostorová závislost stupně koherence záření z navzájem nekoherentních bodových zdrojů ... 155
8. Geometrická (paprsková) optika ... 160
8.1 Pojem paprsek ... 160
8.1.1 Eikonál ... 160
8.1.2 Aproximace velmi malé vlnové délky ... 162

8.1.3 Eikonálová rovnice ... 163
8.1.4 Paprsková rovnice ... 164
8.1.5 Tok hustoty výkonu ... 166
8.1.6 Lagrangeův integrální invariant ... 167
8.1.7 Fermatův princip ... 168
8.2. Optické zobrazení v paraxiální aproximaci ... 174
8.2.1 Kolineární (projektivní) transformace ... 177
8.2.2 Paraxiální zobrazování kulovými plochami ... 179
8.3 Důležité optické soustavy ... 197
8.3.1 Oko ... 197
8.3.2 Lupa ... 199
8.3.3 Mikroskop ... 201
8.3.4 Dalekohled (teleskop) ... 203
8.3.5 Fotoaparát ... 206
9. Základy vláknové optiky ... 220
10. Anizotropní neabsorbující prostředí – lineární dvojlom ... 225
10.1. Základní popis anizotropního prostředí ... 225
10.2 Fresnelova rovnice ... 228
10.3 Lom světla na rozhraní s anizotropním jednoosým prostředím ... 237
10.4 Použití dvojlomných látek ... 239
10.4.1 Krystalový polarizátor ... 239
10.4.2 Fázová destička ... 242
10.4.3 Kompenzátor ... 243
10.5 Popis šíření světla v anizotropním prostředí pomocí indexového elipsoidu (indikatrix) ... 244
11. Nelineární optika ... 247
11.1 Nelineární optické jevy druhého řádu ... 248
11.2 Nelineární optické jevy třetího řádu ... 250
12. Absorpce a index lomu – interakce světla s látkou ... 253
12.1 Lorentzův model odezvy dielektrika ... 258
12.2 Drudeův model – odezva vodivého prostředí na elektromagnetickou vlnu ... 266
13. Záření černého tělesa, fotoelektrický jev ... 271
13.1 Záření černého tělesa ... 271
13.2 Vnější fotoelektrický jev ... 277
13.3 Vlny spojené s částicemi ... 278
Obsah ... 279
Přehled citací ... 282

# Přehled citací

[1] P.Malý, Optika, 2. vydání, Karolinum 2013, str. 56

[2] P.Malý, Optika, 2.vydání, Karolinum 2013, str.117.

[3] P.Malý, Optika, 2.vydání, Karolinum 2013, str.322.

[4] P.Malý, Optika, 2.vydání, Karolinum 2013, str.238

[5] P.Malý, Optika, 2.vydání, Karolinum 2013, str.309

[6] P.Malý, Optika, 2.vydání, Karolinum 2013, str.313

[7] K. Simonyi, Cultural History of Physics, CRC Press, 2012, str. 437

# Rejstřík


Abbeův invariant, 188
absorpce, 253
absorpční koeficient, 253
amplitudová propustnost, 136
automodulace fáze, 250
Billetova dvojčočka. dvojčočka Billetova
Brewsterův úhel. viz úhel, Brewsterův
Cachyova disperzní formule, 265
camera obscura, 206
černé těleso, 272
dalekohled, 203
  Galileův, 203
  Hubbleův, 173
  Keplerův, 203
delekohled
  Ritcheyův-Chrétienův, 173
dělení
  amplitudy, 66
  vlnoplochy, 66
dělič svazku, 66
Descartova plocha. *viz* plocha Descartova
difrakce, 107
  Frauenhoferova, 111
  Fresnelova, 111
  **na hraně**, 114
  na kruhové apertuře, Fraunhoferova, 120
  na kruhové apertuře, Fresnelova, 119
  **na N aperturách**, 139
  na obdélníkové apertuře, Fraunhoferova, 117
  na obdélníkové apertuře, Fresnelova, 116
  **na štěrbině, Fresnelova**, 115
  **spektrální rozklad**, 126
difrakční integrál
  Frauenhoferova aproximace, 109, 110
  Fresnelova aproximace, 109
difrakční mřížka
  **amplitudová**, 126
difrakční obrazec, 108
dichroismus
  lineární, 35
dipól Hertzův, 20
disperze
  anomální, 101, 265
  normální, 100, 263
disperzní vztah, 99
dvojčočka
  Billetova, 66
dvojlom
  kruhový, 225
  lineární, 225
eikonál, 160
energie vlny, 16
evanescentní vlna. viz vlna evanescentní
extinkční koeficient, 253
fáze vlny, 8
fázová destička, 37, 39, 242
  čtvrtvlnová, 40
  Jonesova matice, 40
  polovlnová, 43
fotoaparát, 206
fotoelektrický jev, 277
Fourierova
  transformace, 13
frekvence
  plazmová, 266
Fresnelovy vztahy, 50
  **polarizace *p***, 52
  **polarizace *s***, 51
Fresnelův dvojhranol, 66
Fresnelův koeficient
  odrazu, amplitudový, 56
  odrazu, výkonový, 61
  transmise, amplitudový, 56
  transmise, výkonový, 61
funkce
  Airyova, 89
  korelační, 141
gaussovský pulz, 104
generace
  druhé harmonické, 248
  třetí harmonické, 250
hlavní body, 179
hloubka
  ostrosti, 176
holografie, 135
hologram
  reflexní, 138
  transmisní, 138
hustota
  elektrické energie, 65
index lomu, 14
  mimořádný, 230
  řádný, 230

indikatrix, 244
intenzita vlny, 19
interference, 65
  dvousvazková, 68, 76, 80
  mnoha vln, 85
  na planparalelní desce, 94
  skládání vln různých frekvencí, 97
interferenční kroužky
  stejného sklonu, 75, 78, 90
interferenční obrazec
  delokalizovaný, 82
  lokalizovaný, 65
  virtuální, 66
interferenční proužky
  Fizeauovy, 83
  stejné tloušťky, 83
interferrnční obrazec
  delokalizozvaný, 65
interferometr
  Fabryův-Perotův, 92
  Michelsonův, 72, 150
  stelární Michelsonův, 158
jemnost, 89
Jonesova matice, 31
Jonesův vektor, 31
kaustická plocha, 174
kmitosměr polarizátoru, 36
koherence, 141
  časová, 144, 146
  podélná, 143
  prostorová, 144, 152
  příčná, 145, 152
koherenční čas, 151
koherenční délka, 151
kolineární transformace, 175
kompenzátor, 243
  Babinetův, 243
  Soleilův-Babinetův, 243
komplexní stupeň koherence, 150
konjugované body, 175
k-plocha, 232
kritérium
  Rayleighovo, 123, 207
kritický úhel. *viz* úhel, kritický
kroužky
  stejného sklonu, 75
kruhový nekoherentní zdroj, 157
krystal
  kladný, 233
  záporný, 233
kulová vlna, 20
kvazimonochromatické záření, 155
Lagrangeův integrální invariant, 167
lineární disperze, 133
Llodovo zrcadlo, 66
lom
  na kulové ploše, 185
Lummerova-Gehrckova deska, 92
lupa, 199
Malusův zákon. viz zákon, Malusův
materiál
  dvouosý, 229
  jednoosý, 229
maticový
  **f**ormalizmus, 181
matnice, 108
Maxwellovy rovnice. viz viz rovnice Maxwellovy
meridiální rovina, 179
mikroskop, 201
model
  Drudeův, 253, 266
  Lorentzův, 253, 258
numerická apertura, 125, 203
obrazec
  interferenční, virtuální, 75
ohnisko
  obrazové, 179
  předmětové, 179
ohnisková vzdálenost
  obrazová, 180
  předmětová, 180
oko, 197
okulár, 201
optická dráha, 160
optické usměrnění, 248
paprsek, 160
paraxiální aproximace, 109
Planckova konstanta, 276
plocha
  aplanatická, 172
  normálová, 232
podmínka sfázování, 248
pokus
  Youngův, 153
polarizace
  "*s*"-senkrecht, 50
  vlny, 25
polarizace "*p*" - parallel, 50
polarizační elipsa, 26
  elipticita, 27
  polooosa, 27
  úhel natočení, 27
polarizátor, 37, 239

Glan-Foucaltův, 241
Jonesova matice, 38
Nicolův, 241
Sénarmontův, 240
Wollastonův, 240
polarizátor hranol
Rochonův, 240
polarizovaná vlna
eliptická, levotočivá, 29
eliptická, pravotočivá, 29
pole
elektrické, 4
zřídlové, 4
poledníková rovina, 179
Possonova skvrna, 114
Poyntingův vektor
pravděpodobnost přechodu, 262
princip
Babinetův, 113
Fermatův, 168, 169
prostor
obrazový, 177
předmětový, 177
prostředí
homogenní, 12
izotropní, 12
nemagnetické, 10
spojité, 11
proud
Maxwellův, posuvný, 11
volných nosičů, 11
přenosová matice, 181
tenké čočky, 189
zobrazení, 186
příčné zvětšení, 179
reflektance, 271
rovina
rozhraní, 45
rovina dopadu, 47
rovina hlavního řezu, 233
rovnice
eikonálu, 163, 210
Fresnelova, 228
Helmholtzova, 16
Lorentzovy, 10
mřížková, 130
paprsková, 164, 210
Sellmeierova, 265
rovnice kontinuity, 5
rovnice Maxwellovy, 4
rovnice vlnová, 6
rozlišení, 176
rychlost
fázová, 13, 98
grupová, 98
paprsková, 234
samofokuzace, 250
síla
Lorentzova, 5
oscilátoru, 261
směrový faktor, 109
Snellův zákon. viz zákon lomu Snellův
Snellův zákon lomu. *viz* zákon lomu
spektrální hustota záře, 273
spektrální rozlišení, 133
susceptibilta, 12
světelnost, 176
světlo
částečně polarizované, 24
lineárně polarizované, 24
nepolarizované, 24
polarizované, 24
polarizované, kruhově, 34
polarizované, lineárně horizontálně, 33
tangenciální rovina, 179
tlak světelného záření, 19
totální odraz. *viz* odraz totální
úhel
dopadu, 48
lomu, 48
odrazu, 48
úhel odrazu, 48
úhlová disperze, 133
úhlové zvětšení, 180
uzlové body, 180
variace optické dráhy, 169
vektor
polarizace, 247
Poyntingův, 18, 166, 227
Poyntingův, 236
vlnový, 8
viditelnost interferenčních proužků, 69
vinětace, 90
vlna
homogenní, 3
mimořádná, 232
netlumená, 3
polarizovaná, 3
rovinná, 8
rovinná, homogenní, 14
řádná, 232
vlnovod, 220
vlnový vektor
komplexní, 254

volný spektrální interval, 133
výkonová odrazivost, 91
výkonová propustnost, 91
zákon
  Lambertův-Beerův, 254
  lomu, 48
  odrazu, 48
  odrazu a lomu, 45
  Rayleigh-Jeansův, 275
  Stefanův-Boltzmannův, 274
  Wienův, 274
záření
  stacionární, 147
záření černého tělesa, 271
zobrazovací rovnice
  Gaussovy, 178
  Newtonovy, 177
zobrazovací soustava
  dioptrická, 176
  katodioptrická, 176
  katoptrická, 176
zorné pole, 176
zrcadlo
  eliptické, 173
  parabolické, 173
zvětšení
  podélné, 194
  příčné, 194
  úhlové, 195