# 6. Difrakce (skalární popis)

Difrakcí se nazývá odchýlení světla od přímočarého šíření (ohyb) způsobené fyzickou překážkou. Z fyzikálního hlediska se jedná o jev interference. V řadě kapitol tohoto kurzu respektujeme vektorový charakter elektromagnetického pole a za základní východisko bereme Maxwellovy rovnice. S ohledem na obrovskou složitost popisu ohybových jevů (difrakce) je obvyklé v učebnicích postupovat spíše v souladu s historickým vývojem a uvádět skalární popis ohybových jevů v několika aproximacích. Prezentovaná témata, úlohy a příklady pak zpravidla odrážejí úspěchy teorie difrakce z první čtvrtiny 19. století spočívající především v pracích Fresnelových a Fraunhoferových, tj. z doby před vznikem elektromagnetické teorie (Maxwellovy rovnice 1865). Naše pojednání tedy **nebude** vycházet z elektromagnetické teorie, ale z Fresnelových myšlenek inspirovaných Huygensem. O složitosti problematiky teorie difrakce svědčí zájem fyziků o základní použitelné principy hlavně v 2. polovině 19. století, ale vývoj pokračoval i ve století 20. Vedle toho se rozvíjely i praktické aplikace a technologie přípravy vhodných difrakčních objektů pro tyto aplikace. Stručné poznámky k historii jsou v **Dodatku 6.1.** Difrakční jevy mají důsledky pro systémy pracující s vlněním obecně, v optice pak s vlastnostmi zobrazovacích soustav, s optickým zpracováním dat, optickou spektrometrií, holografií, mikroskopií apod.

V tomto textu se nebudeme zabývat difrakcí na (plnohodnotně) trojrozměrných objektech, ale spokojíme se s dvojrozměrným zjednodušením, jako je difrakce na tenké rovinné překážce. Vyjdeme ze skalárního popisu difrakce ve tvaru difrakčního integrálu. Zde uvedené aproximace pro popis difrakčních jevů vychází z předpokladů, že:

1. skalární teorie ignoruje vektorový charakter elektromagnetického pole;
2. pole je monochromatické s časovou závislostí $e^{-i\omega t}$; pro pole platí skalární Helmholtzova rovnice;
3. difraktující objekty (překážky přímočarého šíření vln, nepropustné stínítko s otvorem – apertura, či naopak překážka vyplňující jen část volného prostoru) jsou rovinné, dvoudimenzionální;
4. je uvažována difrakce na objektech (překážkách nebo otvorech v překážkách) podstatně větších než vlnová délka záření;
5. pole v rovině apertury je stejné, jako kdyby v této rovině stínítko nebylo; pole v otvoru je totožné s polem nabíhající vlny;
6. místo pozorování je od difraktujícího objektu v podstatně větší vzdálenosti než vlnová délka záření;
7. materiál překážky je dokonale „černý“, tzn. překážka záření úplně absorbuje, nic neodráží, ani neovlivňuje pole ve své rovině; z hlediska elektromagnetické teorie je to velmi problematický předpoklad.

Další omezení se objevují v souvislosti s aproximacemi, které umožňují provést výpočty. Pro praktické aplikace však je mnohdy důležitý případ difrakce na objektech s rozměry srovnatelnými s vlnovou délkou záření. S malými rozměry difraktujících apertur i neprůhledných objektů (porušení předpokladu 4) se do rozporu s realitou dostávají hlavně body 1, 5 a 7. Přesnější popisy ukazují, že pole v rovině apertury se od pole nabíhající vlny liší hlavně

u okrajů a směrem ke středu apertury se odchylky významně zmenšují na škále několika vlnových délek. Přitom jsou důležité optické parametry materiálu stínítka pro danou frekvenci $\omega$. Přes uvedené předpoklady, které vypadají problematicky, Fresnelův přístup byl velmi úspěšný při vysvětlování pozorovaných difrakčních obrazců.

Zaveďme následující značení veličin.

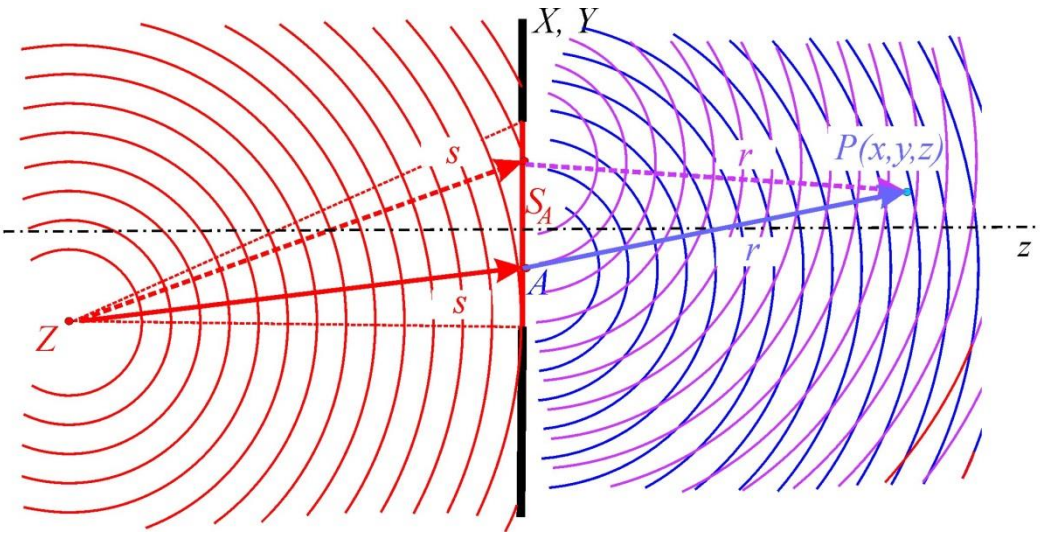
- $E(x,y,z)$ **skalární komplexní** veličina jako funkce polohy reprezentuje jakousi skalární obdobu komplexní amplitudy elektrického pole; časová závislost je $E(x,y,z,t) = E(x,y,z)\exp(-i\omega t)$. V jiných textech je též nazývána poněkud mlhavě „světelný vzruch, rozruch“, angl. „light disturbance“ nebo jinde jako vlnová funkce $\psi(x,y,z,t)$. Zde budeme užívat též „pole.“ V difrakčních vztazích je zvykem nevypisovat časové závislosti polí (členy $\exp(-i\omega t)$), protože předpokládáme monochromatické vlny stejné frekvence.
- Skalární kulová (tj. s kulovými vlnoplochami[1]) a navíc kulově symetrická vlna vybíhající z obecného bodu $Z$ je $E(x,y,z) = \frac{E_{0Z}}{s}\exp(iks)$, kde skalární veličina $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ a vzdálenost $s = \sqrt{(x-x_Z)^2 + (y-y_Z)^2 + (z-z_Z)^2}$, $E_{0Z}$ je amplituda pro $s = 1$. Poznamenejme, že **neexistuje** elektromagnetická (vektorová, alespoň částečně příčná) vlna s kulovou symetrií amplitudy.
- Příspěvek sekundárních vlnek k $E(x,y,z)$ od elementu integrační plochy $dS$, který se nachází v místě $(X,Y,Z)$, kde je rozruch $E(X,Y,Z)$, je v různých modelech poněkud rozdílný. Jako příklady jmenujme:
  - ✓ kulová, kulově symetrická sekundární vlnka $dE(x,y,z) = E(X,Y,Z)\frac{\exp(ikr)}{r}\,dS$, kde $r = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}$, viz vztah 6.1;
  - ✓ aproximace kulové vlny vlnou parabolickou (Fresnelova aproximace 6.4);
  - ✓ vztahy zahrnující směrové faktory (**Dodatek 6.2**), kdy je pole v „difrakčním“ prostoru konstruováno složením „kulových vlnek“ s deformovanou plochou konstantní amplitudy $dE(x,y,z) = \frac{-i}{\lambda}\,E(X,Y,Z)\frac{\exp(ikr)}{r}K(\vartheta)\,dS$, např.:
    - Fresnelův – Kirchhoffův integrál;
    - 2 typy integrálu Rayleighova – Sommerfeldova.
- Slovem „paprsek“ označujeme normálu k vlnoploše.
- Jako relativní intenzitu světla budeme brát $I(x,y,z) = E(x,y,z)E^*(x,y,z)$. $I_0$ bude obvykle označovat maximální hodnotu $I$ v daném **difrakčním obrazci** (angl. pattern), zpravidla v rovinném řezu difraktovaného pole. Intenzitu světla zaznamenáme detektorem záření nebo subjektivně pozorujeme rozptyl záření na matném povrchu (zeď, papír, zdrsněné matné sklo), který dále budeme nazývat **matnice.**

[1] Vlnoplochou rozumíme plochu konstantní fáze. Jako kulovou vlnu označujeme vlnu s kulovou vlnoplochou. Kulově symetrická vlna má kulové navíc i plochy konstantní amplitudy. Nejjednodušší kulová (co do tvaru vlnoploch) vektorová elektromagnetická vlna je vyzařována Hertzovým dipólem a není kulově symetrická.

V tomto textu se omezíme na skalární popis difrakčních jevů v paraxiální aproximaci bez zahrnutí směrových faktorů do výpočtů. Budeme tedy nejčastěji vycházet z nejjednoduššího tvaru difrakčního integrálu

$$E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda}\iint_{S_A} E(X,Y,0)\frac{e^{ikr}}{r}\ dS_A, \tag{6.1}$$

který popisuje skládání elementárních kulových vln vycházejících z otvoru určeného aperturou $S_A$ v rovině $z = 0$. K intuitivnímu zavedení faktoru $\frac{-i}{\lambda}$ a k zavedení směrového faktoru $\cos\vartheta$ přivedla Fresnela úloha popsat pomocí difrakce šíření rovinné vlny volným prostorem (**Dodatek 6.3**)




Obr. 6.1 Uspořádání, ve kterém integrace (rovnice 6.1) probíhá přes rovinnou plochu apertury $S_A$. Zakresleny jsou pouze dvě sady difraktovaných vln z nekonečně mnoha. Bod apertury $A$ má souřadnice $(X, Y, 0)$. V tomto případě bodový zdroj vlnění $Z$ vytváří v obecném místě apertury $A$ pole $E(X,Y,0) = E_{0Z}\frac{e^{iks}}{s}$. Vzdálenost $s$ závisí na poloze bodu apertury $A$. Zakreslen je speciální případ, kdy body $Z, A, P$ leží v jedné rovině, což není obecný případ. Protože budeme uvažovat zpravidla paraxiální aproximaci, nezakreslujeme žádné úhlové parametry pro směrový faktor.

## 6.1 Aproximace difrakčního integrálu

Výpočty difrakčních integrálů jsou obtížné. Zde si všimneme dvou aproximací – **Fresnelovy aproximace** a **Fraunhoferovy proximace**. Obě jsou paraxiální se základním předpokladem, že zdroj se nachází blízko normály k rovině apertury (osa $z$) a též bod pozorování $x, y, z$ je blízko osy $z$.

Ve **Fresnelově aproximaci** difrakčního integrálu studujeme difrakci záření jen v úzkém intervalu úhlů od optické osy. Proto ve jmenovateli integrandu položíme $r = z$. V exponentu v čitateli nelze provést jednoduchou záměnu $z$ za $r$, protože člen $e^{ikr}$ se mění (osciluje) velmi rychle. Fresnelova aproximace spočívá v aplikaci Taylorova rozvoje a nahrazení kulové vlny přiblížením vlnami parabolickými

$$r = z\sqrt{1 + \frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{z^2}} \cong z\left(1 + \frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{2z^2}\right) \tag{6.2}$$

a pak

$$\frac{e^{ikr}}{r} \cong e^{ikz}\, e^{\frac{ik}{2z}[(x-X)^2+(y-Y)^2]} = \frac{1}{z} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}}\, e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}}\, e^{-ik\frac{(xX+yY)}{z}}. \tag{6.3}$$

Pro rozruch v místě $x, y, z$ dostaneme

$$E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \int_{S_A} E(X,Y,0) e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}}\, e^{-ik\frac{(xX+yY)}{z}}\, dXdY. \tag{6.4}$$

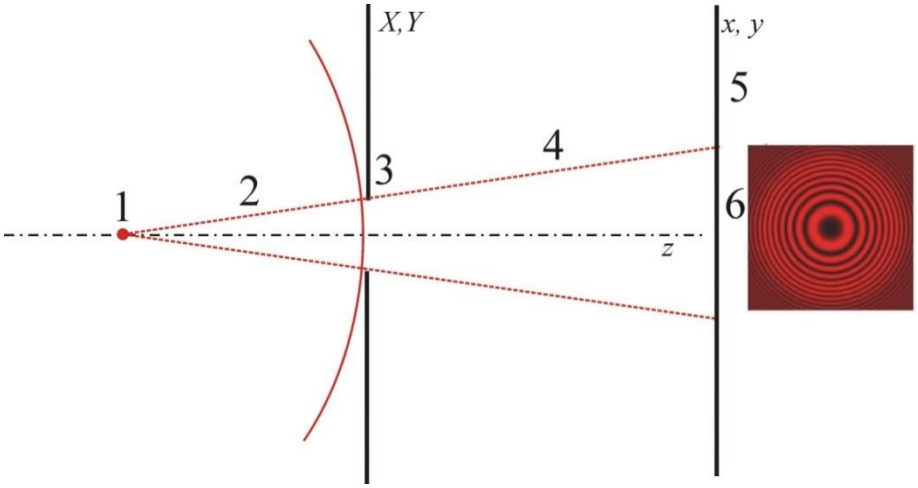
Fresnelova aproximace 6.4 difrakčního integrálu 6.1 platí za podmínky

$$\frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{z^2} \ll 1, \tag{6.5}$$

tedy sledujeme difrakci na malých otvorech v nepropustné překážce v dostatečně velké vzdálenosti $z \gg \lambda$. Přitom rozměry otvorů by měly být podstatně větší než vlnová délka.

Tato aproximace se též používá v modelech difrakce na dlouhých, úzkých otvorech (štěrbina), kdy se zajímáme právě o řez difrakčním obrazcem ve směru malého rozměru otvoru a neuvažujeme „nezajímavou“ difrakci ve směru velkého otvoru. Podmínka 6.5 se pak redukuje v tomto „jednodimenzionálním“ modelu na

$$x - X \ll z, \tag{6.5}$$




Obr. 6.2 Základní geometrické uspořádání pro Fresnelovu difrakci na kruhovém otvoru.

1 malý, „bodový“ zdroj záření
2 oblast šíření kulové vlny ze zdroje 1
3 pro světlo nepropustná překážka s otvorem (apertura)
4 oblast šíření a interference sekundárních vlnek
5 matnice pro pozorování rovinného řezu rozložení intenzit světla
6 oblast osvětlení matnice podle pravidel přímočarého šíření světla.
Obrázek vpravo ukazuje Fresnelovu difrakci na kruhovém otvoru pro určitou polohu $z$. Se změnou $z$ intenzita ve středu obrazce osciluje a při přibližování matnice k apertuře ze středu vybíhají další difrakční kroužky.

Další aproximaci pro difrakci na malých otvorech provedl Fraunhofer zanedbáním členu $e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}}$.

$$E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \iint_{aper} E(X,Y,0)\, e^{-ik\frac{(xX+yY)}{z}}\, dXdY \tag{6.6}$$

Použitelnost této aproximace záleží na vzájemném poměru velikosti apertury a vzdálenosti, ve které je pozorován difrakční obraz. Tato aproximace se rovněž nazývá aproximací vzdáleného pole. **Fraunhoferova aproximace** je použitelná pro vzdálenosti místa pozorování $z$ splňující podmínku

$$e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}} \cong 1, \quad z \gg z_{MEZ} = \frac{k}{8}(\text{max. rozměr otvoru})^2 \tag{6.7}$$

Např. v případě kruhového otvoru je $X^2 + Y^2 = R^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2$, kde $R$ je poloměr a $D$ je průměr otvoru, dostaneme

$$2z \gg k\left(\frac{D}{2}\right)^2, \tag{6.8}$$

$$z \gg z_{MEZ} \cong \frac{2\pi}{\lambda}\frac{D^2}{8} \cong 0{,}8\ \frac{D^2}{\lambda}.$$

Kvadratická závislost minimální vzdálenosti místa pozorování od difraktujícího otvoru na rozměrech otvoru má praktickou důležitost pro použitelnost Fraunhoferovy aproximace. Pro představu uveďme hodnoty $z_{MEZ}$ pro kruhové otvory při vlnové délce 500 nm:

| průměr apertury | $z_{MEZ}$ |
|---|---|
| 1 mm | 160 cm |
| 1 cm | 160 m |
| 1 dm | 16 km |
| 1 m | 1600 km |

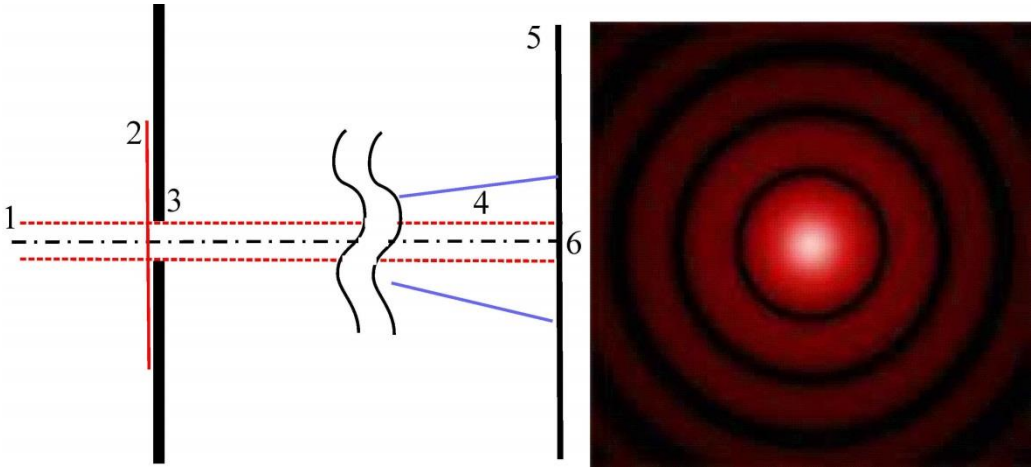
Alternativní kritéria pro použitelnost Fraunhoferovy aproximace pro kruhový otvor:

a) celá apertura je vyplněna z pohledu bodu na ose kruhového otvoru jedinou Fresnelovou zónou (viz. kapitola 6.3.1), $z > \frac{D^2}{4\lambda} = 0{,}25\ \frac{D^2}{\lambda}$;

b) první nulový bod difrakčního obrazce je v oblasti geometrického stínu $\frac{kD}{2}\frac{\varrho}{z} = 1{,}22\pi$, $z > 0{,}4\frac{D^2}{\lambda}$. (**Dodatek 6.4**).

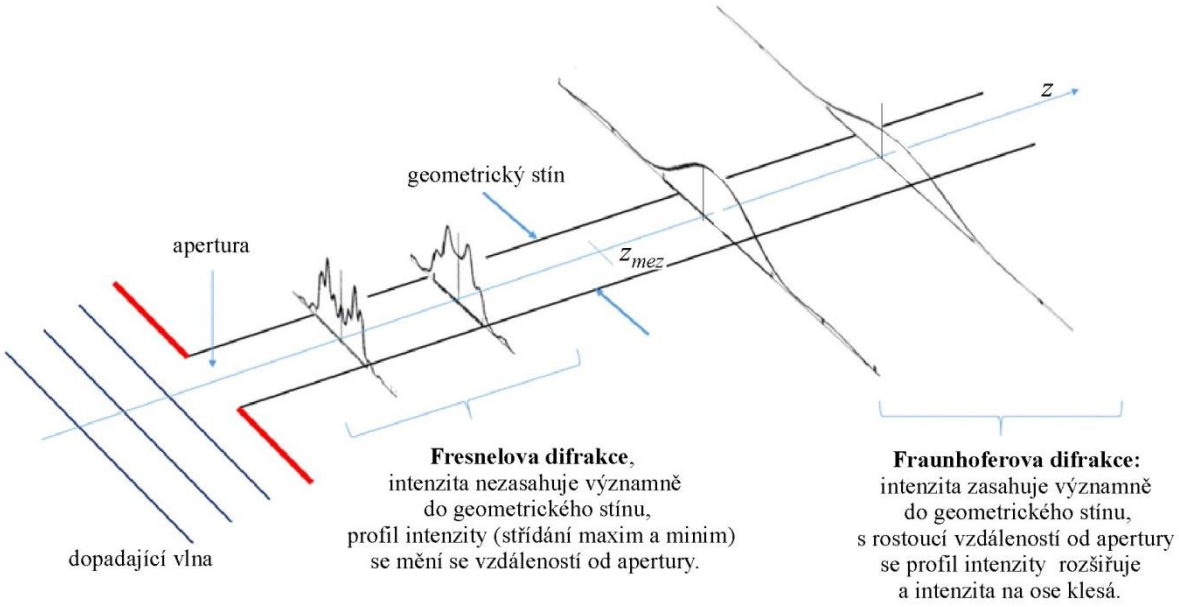
Jak uvidíme, lze přesto Fraunhoferovu aproximaci použít pro řadu praktických aplikací, např. pro odhad mezní rozlišovací schopnosti zobrazovacích optických přístrojů difrakčními jevy. Je to umožněno využitím optických prvků (čočky, zrcadla) k „přitažení“ vzdálených „míst pozorování“ do ohniskové roviny ($z \approx \infty \ \rightarrow z = f$).

V užším slova smyslu bývají jako „Fresnelova difrakce“ označovány případy $\lambda \ll z < z_{MEZ}$ (při dopadu rovinné vlny nebo málo divergující kulové vlny na matnici – zdroj dostatečně daleko) a jako „Fraunhoferova difrakce“ případy $z_{MEZ} < z$ při dopadu rovinné vlny. V mnoha běžných situacích jsou mezi výsledky obou aproximací výrazné kvalitativní odlišnosti. Zatímco Fresnelovy difrakční obrazce mají významnou intenzitu hlavně v oblasti osvětlené dle pravidel geometrické optiky a na ose může docházet k oscilacím intenzit se změnou souřadnice $z$, pro Fraunhoferovy obrazce je typické úhlové rozbíhání s rostoucím $z$ za hranice geometrického stínu, maximální intenzita ve směru vlnového vektoru dopadající vlny a monotónní závislost intenzit na této ose při změně $z$ (obr. 6.4).




Obr.6.3 Základní geometrické uspořádání pro Fraunhoferovu difrakci na otvoru. V pravé části Fraunhoferův obrazec difrakce na kruhovém otvoru:

1 dopadající rovinná vlna,
2 rovinná vlnoplocha dopadající na překážku
3 pro světlo nepropustná překážka s otvorem (apertura)
4 oblast šíření a interference huygensovských elementárních vlnek
5 velmi vzdálená matnice pro pozorování rovinného řezu rozložení intenzit světla
6 oblast osvětlení matnice podle pravidel přímočarého šíření světla




Obr. 6.4 Schématické zobrazení vývoje profilu difrakčního obrazce se vzdáleností od difrakční apertury ve Fresnelově a Fraunhoferově aproximaci

## 6.2 Babinetův princip

V případě, že apertura nebo překážka, na které dochází k difrakci, má složitý tvar, je možné při řešení difrakčního integrálu (rovnice 6.1) využít principu superpozice platného pro rozruch $E$, a integrál rozdělit na dva či více jednodušších integrálů.

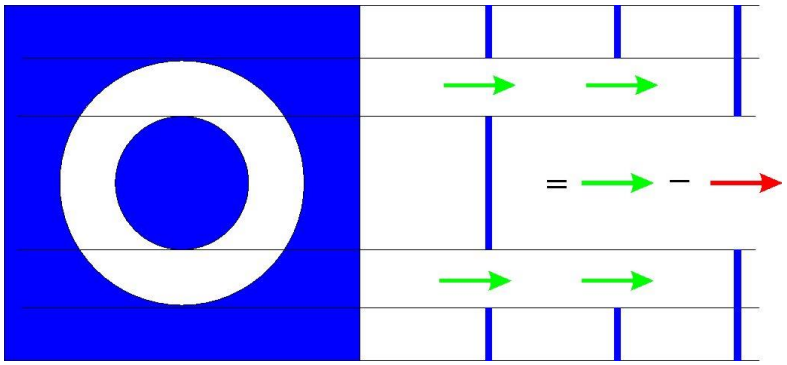
$$E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda}\iint_{S_A} E(X,Y,0)\frac{e^{ikr}}{r}\ dS = \frac{-i}{\lambda}\sum_j \iint_{S_j} E(X,Y,0)\frac{e^{ikr}}{r},.$$

kde pro plochu apertury $S_A$ platí $S_A = \sum_j S_j$. Přitom pro plochy ve stínítku propustné můžeme brát v součtu se znaménkem + a plochy ve stínítku nepropustné můžeme brát se znaménkem $-$. Např. máme-li vypočítat průběh $E$ za mezikružím v nepropustném stínítku (obr. 6.5), můžeme psát

$$E_{velký\ kruhový\ otvor} = E_{mezikruží} + E_{malý\ \ kruhový\ otvor}$$

a tedy

$$E_{mezikruží} = E_{velký\ kruhový\ otvor} - E_{malý\ \ kruhový\ otvor}.$$

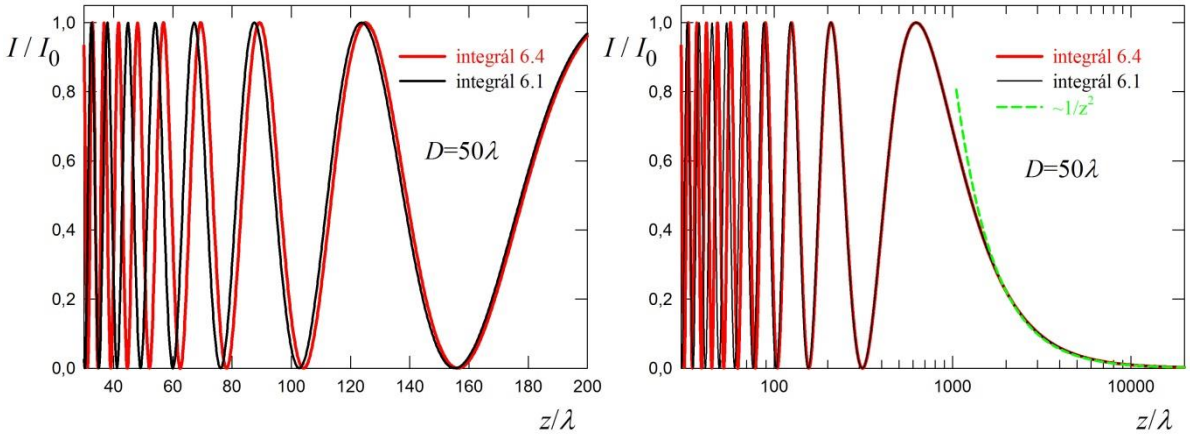


Obr. 6.5 Babinetův princip – příklad aplikace principu na složitější aperturu: elektrické pole za aperturou tvořenou mezikružím v nepropustném stínítku lze spočítat jako rozdíl příspěvků od odpovídajících kruhových apertur.

Princip superpozice pro elektrická pole aplikovaný na výpočet difrakčního integrálu se nazývá **Babinetův princip.**

## 6.3 Výpočet difrakčního integrálu

Analytický výpočet difrakčního integrálu (6.1) i jeho Fresnelovy aproximace (6.4) je jednoduchý jen pro některé případy. Mezi ně patří průběh intenzity elektrického pole na přímce procházející kolmo středem kruhového otvoru o průměru $D$(osa apertury), na který dopadá kolmo rovinná vlna. V **Dodatku 6.5** jsou uvedeny 2 verze aproximace v oblasti Fresnelovy difrakce a Fraunhoferova aproximace, vše bez zahrnutí směrového faktoru. V oblasti Fresnelovy aproximace difrakce na kruhovém otvoru osciluje intenzita na ose otvoru mezi nulou a maximem $I_0$. V oblasti Fraunhoferovy aproximace je na ose maximum, které slábne $\propto {}^{1}/_{z^2}$.

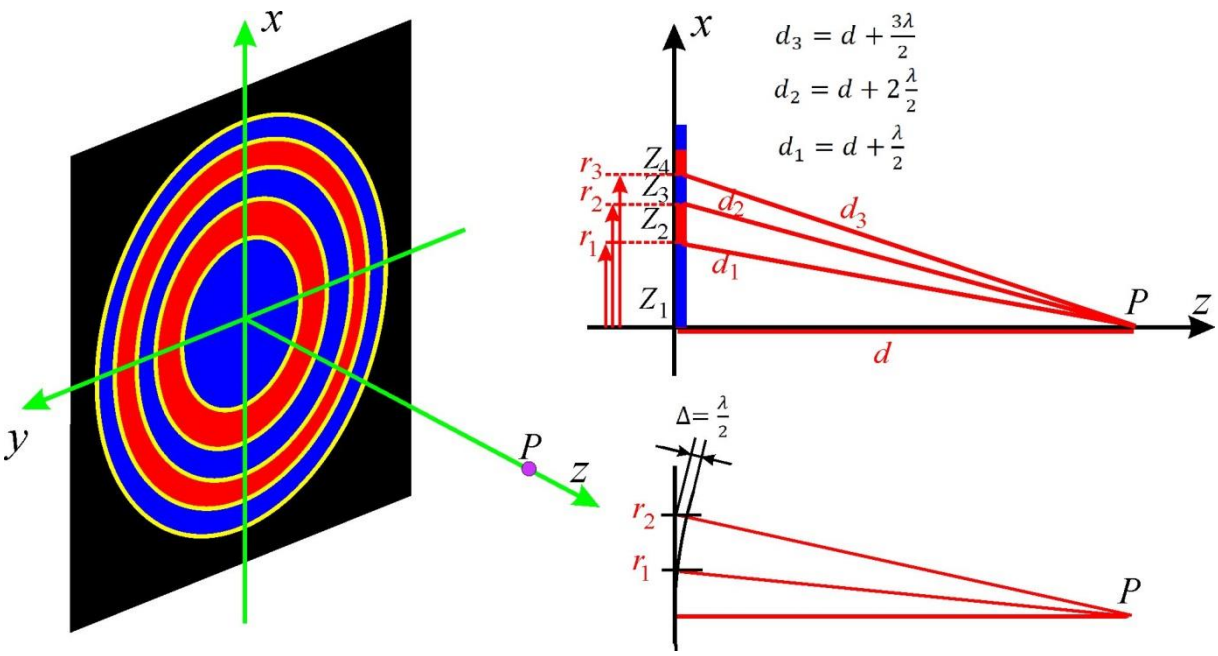



Obr.6.6 Intenzita difrakčního obrazu na ose kruhové apertury (výpočty provedeny v **Dodatku 6.5**, vše bez započtení směrového faktoru). V levé části (menší vzdálenost od apertury) jsou patrné odchylky ve výsledcích výpočtu integrálů podle Fresnelovy aproximace (vztah 6.4) a výpočtu integrálu 6.1. Na ose se tedy v oblasti Fresnelovy difrakce střídají s rostoucí vzdáleností od apertury maxima a minima intenzity (světlé a tmavé body). V oblasti Fraunhoferovy aproximace (pravá část obrázku) je na ose apertury světlý bod, jehož intenzita postupně klesá jako $\propto {}^{1}/_{z^2}$.

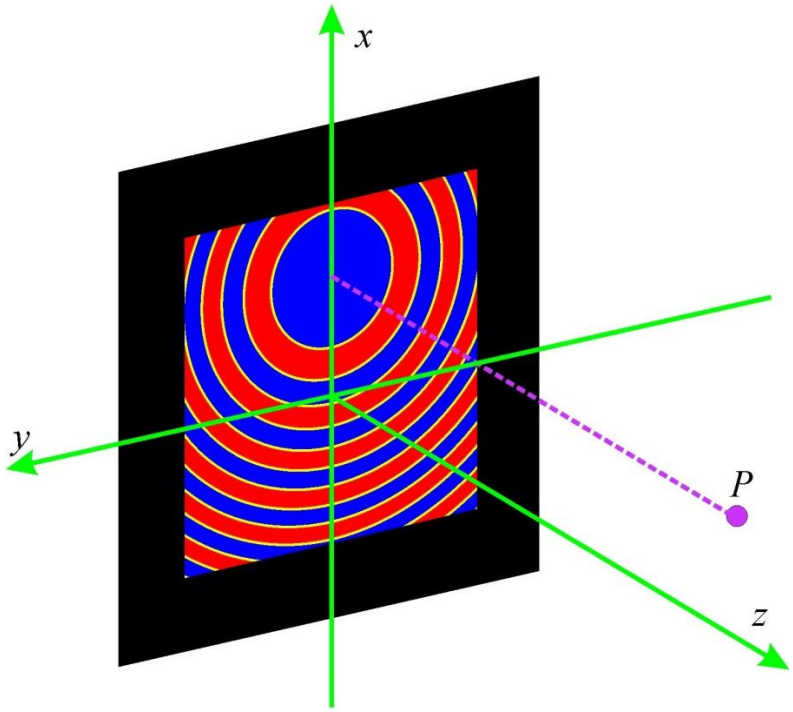
Dnes je integrál a následně rozložení intenzity v rovině pozorování možné spočítat numericky i pro složité apertury. V době, kdy Fresnel svou aproximaci formuloval, však numerické řešení difrakce nebylo technicky možné. Fresnel proto navrhnul přibližnou metodu výpočtu pomocí tzv. Fresnelových zón. V další části tuto metodu stručně shrneme, a to zejména proto, že její základní myšlenka se dodnes využívá při konstrukci optických prvků. Dále se budeme zabývat difrakcí na základních typech apertur.

### 6.3.1 Přibližná metoda výpočtu – Fresnelovy zóny

Fresnel navrhl postup, jak přibližně spočítat difrakční integrál. Vlnoplocha v difrakční apertuře se přitom rozdělí na tzv. Fresnelovy polovlnové zóny. Fresnelova zóna je část integrační plochy, ze které sekundární vlnky dospějí do místa pozorování s fázovými rozdíly menšími než $\pi$. Fresnelovy zóny jsou obvykle vymezovány na **primární vlnoploše**, na které kmitají „sekundární zdroje“ ve fázi. Pak je rozdíl fází jednoduše převeditelný na dráhový rozdíl, který musí být menší než $\lambda/2$, aby sekundární vlny interferovaly konstruktivně. Výpočet integrálu se pak nahradí podle Babinetova principu součtem příspěvků od jednotlivých zón. Difrakční obraz v rovině pozorování je důsledkem složení všech sekundárních vlnoploch z různých zón.




Obr. 6.7 Fresnelovy zóny pro případ, že na kruhovou aperturu dopadá zleva kolmo rovinná vlna. Plocha apertury je tedy zároveň vlnoplochou. Plocha apertury je z hlediska bodu pozorování *P* (v obrázku ležícího na ose apertury) rozdělena na polovlnové zóny, tedy na oblasti, z nichž sekundární vlny generované podle Huygensova - Fresnelova principu dopadají do bodu *P* s dráhovým rozdílem menším než $\frac{\lambda}{2}$ a skládají se tedy konstruktivně.




Obr. 6.8 Fresnelovy zóny pro případ, že na čtvercovou aperturu dopadá zleva kolmo rovinná vlna a bod pozorování $P$ leží mimo osu apertury.

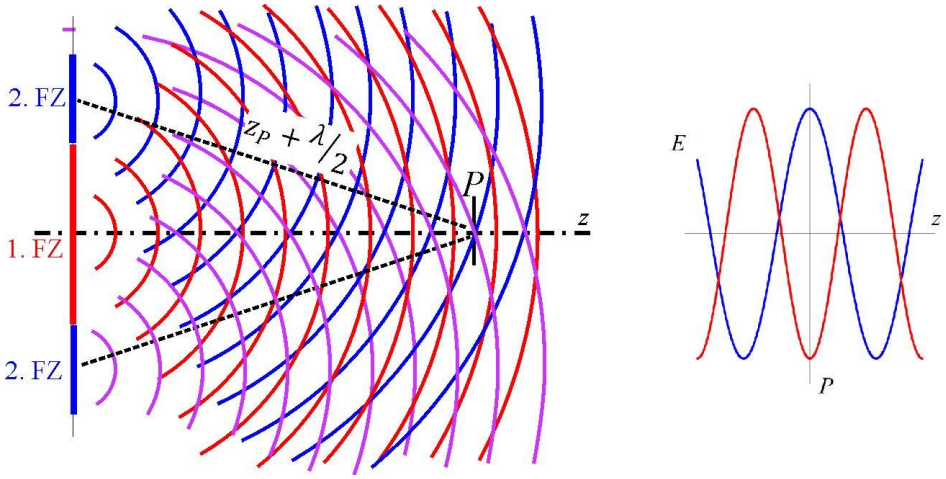
Pro vysvětlení principu metody budeme předpokládat, že na aperturu dopadá **rovinná vlna**. Nechť bod $P$ je v rovině pozorování ležící na ose difrakční apertury, $d$ je vzdálenost středu apertury od $P$. Kolem bodu $P$ zkonstruujeme kulové plochy o poloměru $d + m\frac{\lambda}{2}$, jejichž průsečnicemi s plochou apertury jsou kružnice o poloměru

$$r_m = \sqrt{\left(d + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - d^2}. \tag{6.9}$$

Kruh o poloměru $r_1$ se nazývá 1. Fresnelova zóna. Mezikruží mezi kružnicemi o poloměrech $r_2$ a $r_1$ se nazývá 2. Fresnelova zóna, mezikruží mezi kružnicemi o poloměrech $r_m$ a $r_{m-1}$ se nazývá $m$-tá Fresnelova zóna

Popišme nejprve skládání sekundárních vlnek vycházejících z plochy 1. Fresnelovy zóny. S narůstající vzdáleností zdroje sekundárních vlnek od středu apertury 0 (a tedy i středu 1. Fresnelovy zóny) ke kraji 1. zóny - $r_1$ narůstá dráhový rozdíl (od 0 do $\frac{\lambda}{2}$) a tedy i fázový rozdíl (od 0 do $\pi$) k bodu pozorování $P$. Sekundární vlnky vycházející z 1. Fresnelovy zóny se tedy skládají v bodě $P$. Součet vlnky emitované v bodě $r = 0$ s vlnkami emitovanými z bodů z intervalu $(0, r_1)$ s rostoucí vzdáleností druhého zdroje od středu zóny postupně díky narůstajícímu dráhovému a tím i fázovému rozdílu klesá. V případě, že 2. vlnka je emitována

ze zdroje na kraji 1.zóny ($r = r_1$), setkají se obě vlnky s fázovým rozdílem $\pi$ (v protifázi). Pokud by měly obě vlnky stejnou amplitudu, byl by výsledek součtu nulový. Vlnky vycházející z 2. Fresnelovy zóny mají postupně narůstající vzájemné dráhové rozdíly mezi $\frac{\lambda}{2}$ a $\lambda$ a fázové rozdíly oproti vlně vycházející ze středu 1. zóny mezi $\pi$ a $2\pi$. Výsledkem složení je v tomto případě pole s opačným znaménkem, než jaké vzniklo složením vlnek z 1. zóny. V případě dalších Fresnelových zón se tato situace periodicky opakuje.




Obr. 6.9 Vlnoplochy vlnek vycházejících ze středu 1. Fresnelovy zóny a z 2. Fresnelovy zóny definované vzhledem k bodu $P$. Zakresleny jsou vlnoplochy o fázi $2\pi m$. V bodě $P$ se vlnky setkávají v protifázi (modrá maxima leží uprostřed mezi červenými maximy) a interferují destruktivně.

Zaměřme se nyní na to, jak se skládají vlnoplochy vycházející ze sousedních zón. Situaci popíšeme na příkladu 1. a 2. zóny. Vezmeme-li nějaký bod z 1. Fresnelovy zóny ($Z_1$), existuje k němu takový bod z 2. Fresnelovy zóny ($Z_2$), že vlnoplocha, která z něj dospěje do bodu $P$, je vůči vlnoploše vycházející z bodu $Z_1$ fázově posunutá o $\pi$. Příspěvek vlnoplochy z bodu $Z_1$ k elektrickému poli v bodě $P$ je

$$E(Z_1, P) = \frac{A}{r_{z1}} e^{ikr_{Z1}},$$

kde $A$ je úměrná amplitudě dopadající rovinné vlny v difrakční apertuře. Příspěvek vlnoplochy vycházející z bodu $Z_2$ je

$$E(Z_2, P) = \frac{A}{r_{z2}} e^{i(kr_{Z1}+\pi)} = -\frac{A}{r_{z2}} e^{ikr_{Z1}}.$$

Oba příspěvky mají tedy opačné znaménko a vzájemně se při skládání odečítají. Vzhledem k tomu, že amplitudy sekundárních vln se liší v důsledku poklesu s narůstající vzdáleností od místa v apertuře k bodu pozorování ($r_{z2} > r_{z1}$), je vzájemné odečtení obou příspěvků pouze přibližné. Při rigorózním výpočtu difrakčního integrálu bychom navíc museli vzít v úvahu

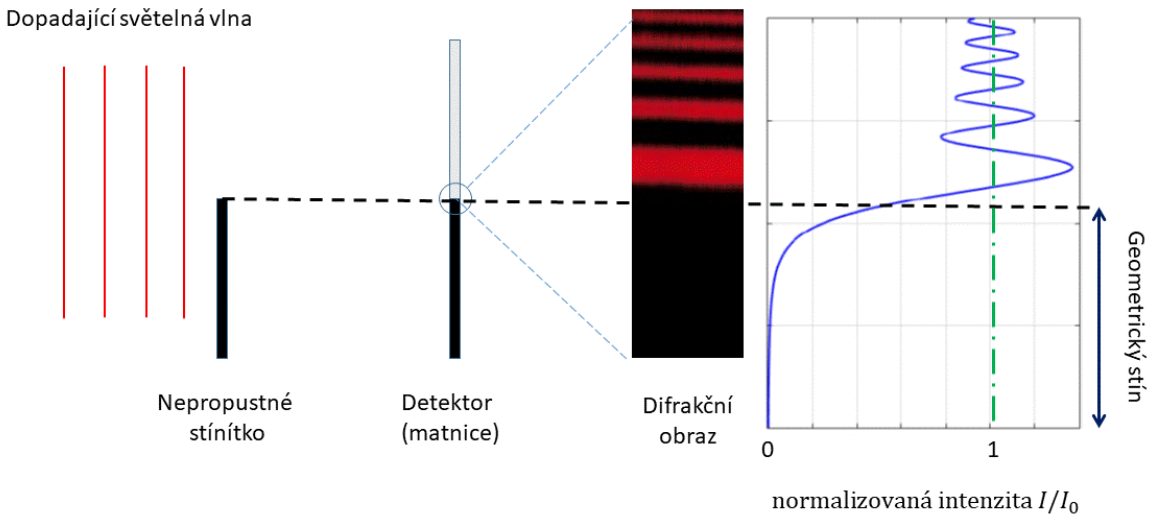
měnící se směrový faktor, který rovněž přispívá k rozdílu obou příspěvků. Při započtení všech bodů apertury a následném výpočtu hustoty elektrické energie má dále vliv plocha Fresnelových zón, která s rostoucím $m$ roste.

Celkově lze říci, že příspěvky sudých zón se vzájemně sčítají (vlny se skládají konstruktivně), a stejně i příspěvky lichých zón. Příspěvky od součtu sudých zón se součtem lichých zón vzájemně odečítají a dochází k destruktivní interferenci. Vzhledem k diskutovaným změnám amplitud, směrového faktoru a ploch zón je celkový součet odpovídající přibližnému řešení difrakčního integrálu nenulový i v případě stejného počtu sudých a lichých zón

**Fresnelovy zónové desky** představují optické prvky, ve kterých jsou některé (např. sudé) Fresnelovy zóny skutečně fyzicky zakryty a obrazec v difrakčním prostoru je vytvářen sčítáním pouze vln vycházejících z odkrytých zón. Tyto zónové desky mají např. fokusační vlastnosti a mohou nahradit čočky. Blíže bude problematika zónových desek diskutována v **Dodatku 6.6**.

## 6.3.2 Difrakce na hraně (Fresnelova aproximace)

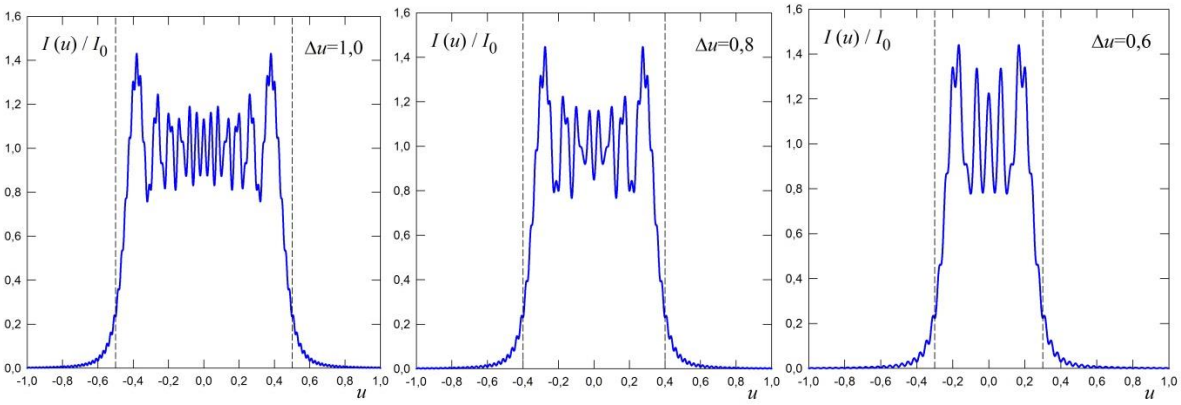
V případě difrakce na hraně je výsledkem výpočtu ve Fresnelově aproximaci oscilace intenzity difrakčního obrazce v rovině pozorování. První maximum s největší intenzitou se nachází v oblasti těsně nad hranou. Dále lze pozorovat střídání minim a maxim s postupně klesající intenzitou. Podrobněji je pojednáno v **Dodatku 6.7.** Výpočet ve Fraunhoferově aproximaci nelze provést, protože nejsou splněny její předpoklady (aperturu tvoří polorovina s nekonečnou plochou – rovnice 6.7).




Obr. 6. 10 Fresnelova difrakce na hraně

### 6.3.3 Difrakce na štěrbině ( Fresnelova aproximace)

Příklad rozložení intenzity světla na matnici pro případ štěrbiny ve Fresnelově aproximaci je uveden na obr. 6.11. Se změnou šířky štěrbiny (nebo vzdálenosti místa pozorování od štěrbiny) se na ose interferenčního obrazce střídají lokální maxima a minima intenzity. Podrobněji je výpočet difrakce na štěrbině uveden v **Dodatku 8.**

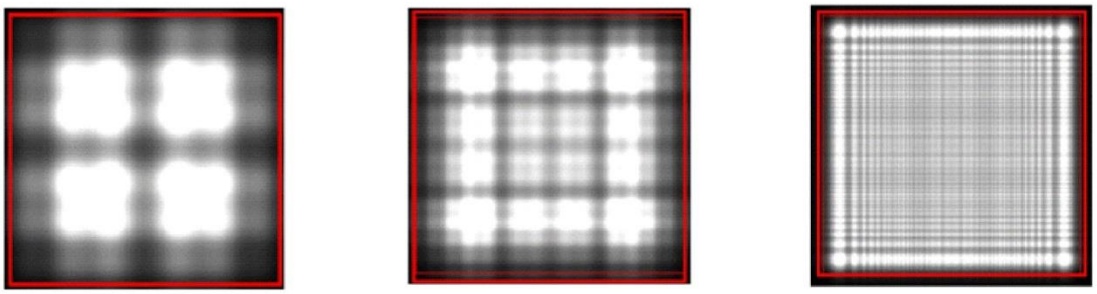



Obr. 6.11 Příklad výpočtu rozložení intenzity v obrazci Fresnelovy difrakce na štěrbině. Na rozdíl od Fresnelovy difrakce na jednoduché hraně jsou v případě difrakce na štěrbině (dvojici hran) malé oscilace intenzity i v oblasti geometrického stínu. Bezrozměrný parametr $u$ souvisí se vzájemnou polohou hran štěrbiny $X_1, X_2$ a místa pozorování $P(0,0,z)$. Šířka štěrbiny je $X_2 - X_1 = \Delta u \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}$.

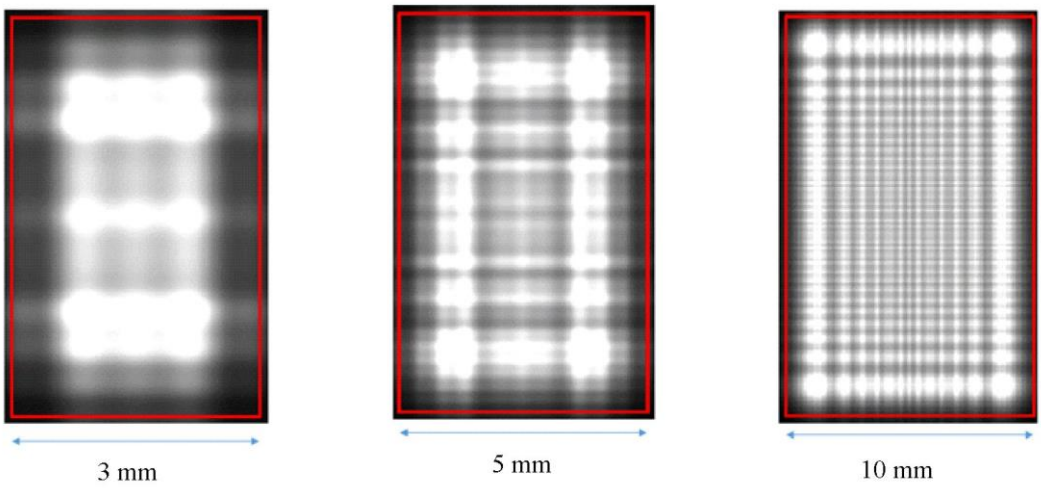
### 6.3.4 Difrakce na obdélníkové apertuře

#### 6.3.4.1 Difrakce na obdélníkové apertuře ve Fresnelově aproximaci

Difrakce na obdélníkové apertuře ve Fresnelově aproximaci je charakterizována střídáním maxim a minim intenzity na matnici. Počet pozorovatelných maxim a minim v oblasti vysoké intenzity (mimo oblast geometrického stínu) narůstá s rozměrem apertury. Příklady difrakčních obrazců pro čtvercovou a obdélníkovou apertury jsou zobrazeny na obr. 6.12 a 6.13 pro případ světla o vlnové délce 510nm a vzdálenost matnice od difrakční apertury 4 metry.



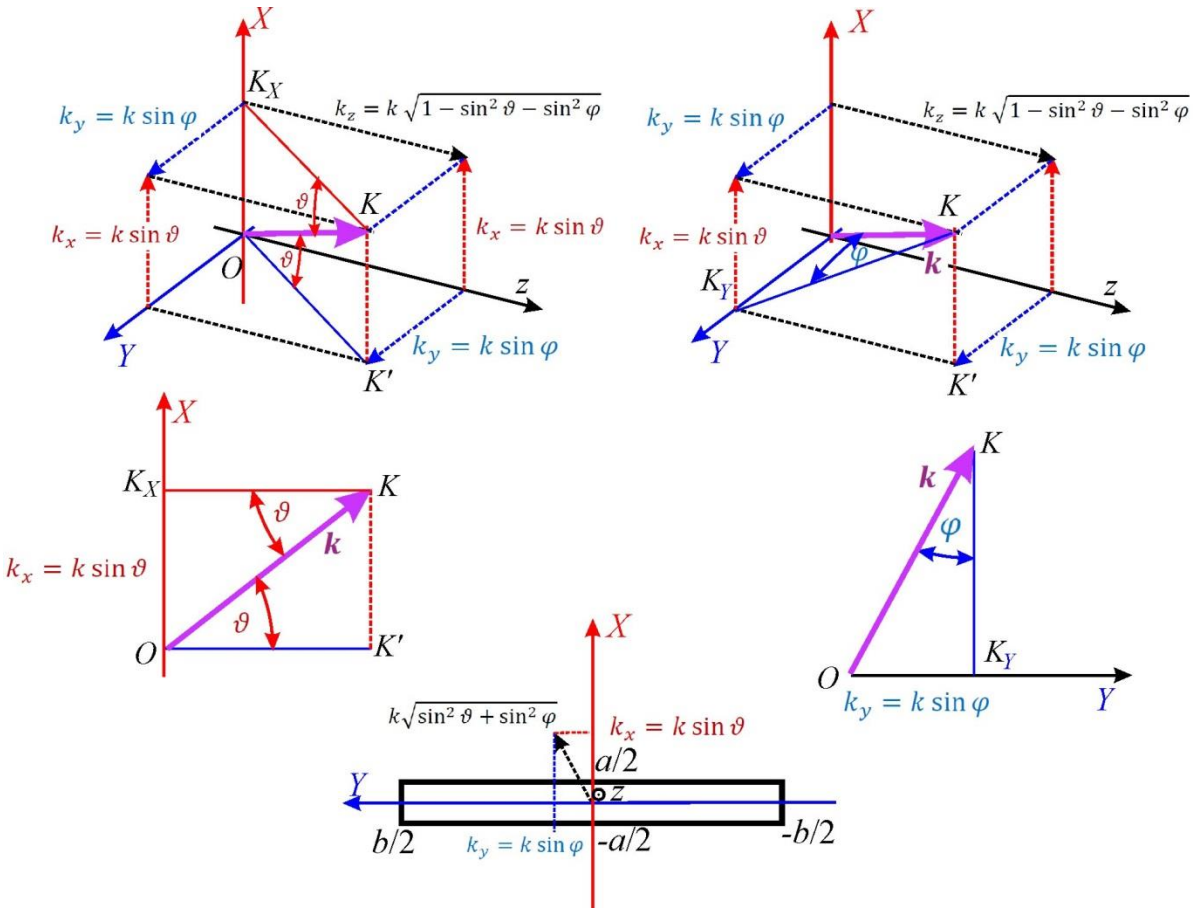

Obr. 6.12 Fresnelova difrakce na čtvercové apertuře. Vlnová délka světla 510nm, vzdálenost matnice od difrakční apertury 4 metry. Vně čtverce s červeným obvodem je oblast geometrického stínu, ve které je intenzita interferenčního obrazce sice nenulová, ale relativně velmi slabá. Zobrazena černobíle oblast vysoké intenzity.
https://www.falstad.com/diffraction/




Obr. 6.13 Fresnelova difrakce na obdélníkové apertuře. Vlnová délka světla 510 nm, vzdálenost matnice od difrakční apertury 4 m Zobrazeno černobíle.
https://www.falstad.com/diffraction

### 6.3.4.2 Difrakce na obdélníkové apertuře ve Fraunhoferově aproximaci

Vyšetříme nyní případ difrakce na obdélníkové apertuře o stranách $a, b$ ve Fraunhoferově aproximaci. Geometrie difrakce a rozklad vlnového vektoru difraktované vlny jsou zobrazeny na obr. 6.14.




Obr. 6.14 Obdélníková apertura s vyznačenými průměty vlnového vektoru jedné rovinné komponenty difraktovaného pole. $k_x = k \sin\vartheta$ je průmět do osy $X$ a $k_y = k \sin\varphi$ průmět do osy $Y$. $z$-ová složka vlnového vektoru je $k_z = k\sqrt{1-\sin^2\vartheta-\sin^2\varphi}$. Pohled proti směru šíření $z$. Pozor, tato definice úhlů je **odlišná** od obvyklé definice ve sférické souřadné soustavě.

Dále pro jednoduchost nejprve předpokládejme, že na aperturu dopadá **rovinná vlna kolmo.** V tomto případě jsou amplituda i fáze elektrického pole v apertuře konstantní $E(X,Y,0) = E_0$ (jak dříve poznamenáno, časové závislosti nejsou vypisovány).

Za těchto předpokladů dostáváme difrakční integrál ve Fraunhoferově paraxiální aproximaci ve tvaru

$$E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} E_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikX\frac{x}{z}}\, dX \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikY\frac{y}{z}}\, dY, \qquad (6.10)$$

přičemž

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikX\frac{x}{z}}\,dX = -\frac{z}{ikx}\left(e^{-i\frac{ka}{2z}x} - e^{i\frac{ka}{2z}x}\right) = \frac{2iz}{ikx}\sin\frac{akx}{2z} = \frac{2za}{akx}\sin\frac{akx}{2z} =$$

$$= a\frac{\sin\frac{akx}{2z}}{\frac{akx}{2z}} = a\frac{\sin u_{pa}}{u_{pa}}, \tag{6.11}$$

kde jsme zavedli hodnotu parametru $u$ pro paraxiální aproximaci jako $u_{pa}$

$$u_{pa} = \frac{ak}{2}\frac{x}{z} = \frac{a\pi}{\lambda}\frac{x}{z}. \tag{6.12}$$

Funkce $\frac{\sin u}{u}$ má hlavní maximum $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$ pro $u = 0$ a první nulový bod v bodě $u = \pi$, kterému odpovídá v paraxiální aproximaci souřadnice $x_{01} \cong \frac{2z\pi}{ka} = \frac{\lambda z}{a}$.

Integrál ve směru *y* vypočteme stejným způsobem a dostaneme

$$\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ikY\frac{y}{z}}\,dY = b\frac{\sin v_{pa}}{v_{pa}}, \qquad v_{pa} = \frac{b\pi y}{\lambda z}. \tag{6.13}$$

a první nulový bod pro $y_{01} \cong \frac{\lambda z}{b}$.

V případě Fraunhoferovy difrakce na obdélníkové apertuře dostaneme pro intenzitu světla ve směru $\vartheta, \varphi$ ve vzdálenosti $z$ od difrakční apertury v paraxiální aproximaci na kolmé matnici

$$I = E(x,y,z)\,E^*(x,y,z) = E_0^2a^2b^2\left(-\frac{i}{\lambda}\right)\left(\frac{i}{\lambda}\right)\frac{1}{z^2}\left(\frac{\sin u_{pa}}{u_{pa}}\right)^2\left(\frac{\sin v_{pa}}{v_{pa}}\right)^2$$

$$= \tag{6.14}$$

$$= I_0(a,b,z)\left(\frac{\sin u_{pa}}{u_{pa}}\right)^2\left(\frac{\sin v_{pa}}{v_{pa}}\right)^2,$$

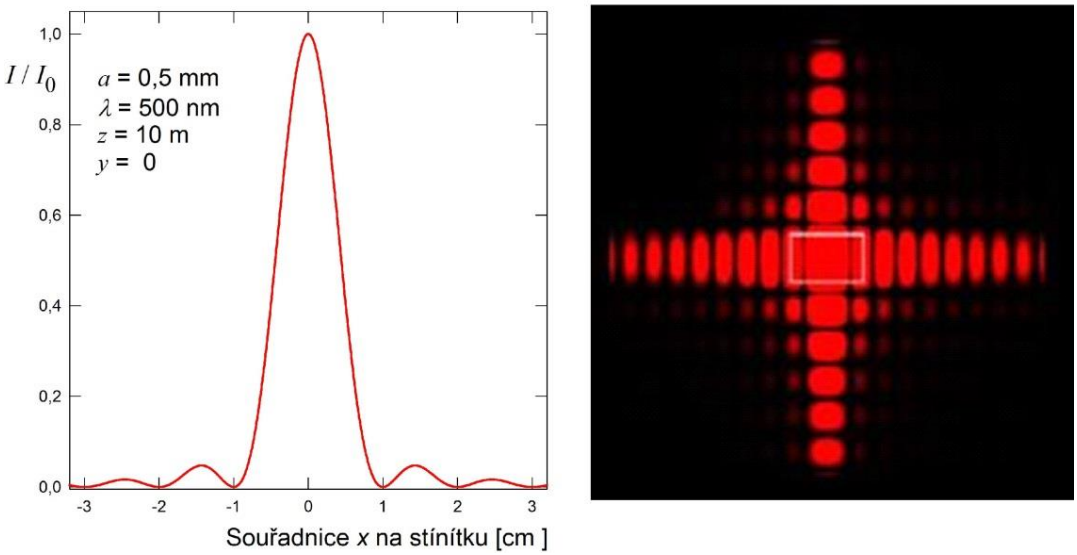
$$u_{pa} \cong \frac{a\pi}{\lambda}\frac{x}{z}, \qquad v_{pa} \cong \frac{b\pi}{\lambda}\frac{y}{z},$$

kde $I_0(a,b,z)$ je maximální intenzita v tomto difrakčním obrazci pro $u = v = 0$.

Pro průběh intenzity světla **podél os** $x$ a $y$ po difrakci na obdélníkové apertuře o stranách $a, b$ při kolmém dopadu pak dostaneme

$$I(x,0,z) \propto \frac{1}{z^2}\frac{\sin^2 u}{u^2}, \qquad x = z\tan\vartheta, \tag{6.15}$$

$$I(0, y, z) \propto \frac{1}{z^2} \frac{\sin^2 v}{v^2}, \qquad y = z \tan \varphi.$$

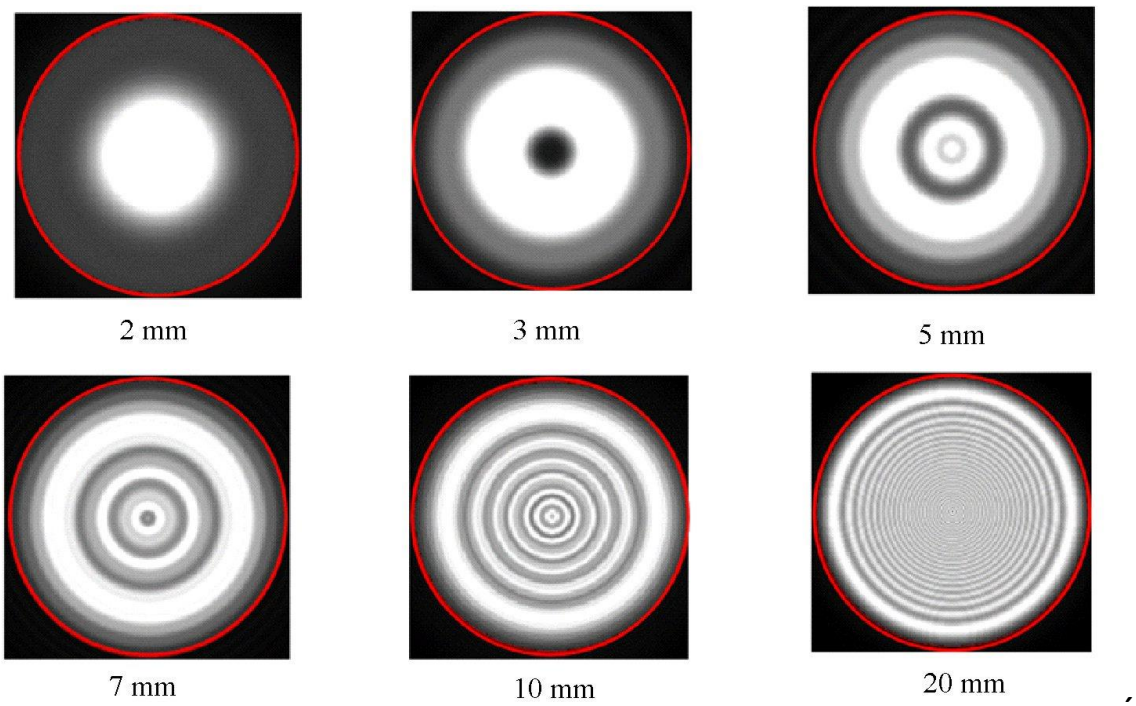



Obr 6.15 Příklad rozložení intenzity světla na matnici při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru. Vlevo rozložení intenzity pro $y = 0$. Vpravo difrakční obrazec. Hodnoty v levé části obrázku odpovídají apertuře o straně $a = 0{,}5$ mm a vzdálenosti matnice od apertury 10 m při vlnové délce 500 nm. Použití Fraunhoferovy aproximace je oprávněné. Bílý obdélník v difrakčním obrazci vyznačuje studovanou obdélníkovou aperturu.

## 6.3.5 Difrakce na kruhové apertuře

### 6.3.5.1 Difrakce na kruhové apertuře ve Fresnelově aproximaci

Výpočet hustoty elektrické energie na ose apertury podle integrálu 6.1 a podle Fresnelovy aproximace 6.4 (tj. v obou případech bez zahrnutí směrových faktorů) je uveden v **Dodatku 6.5.** Difrakční obrazec v rovině pozorování kolmo na směr šíření rovinné vlny dopadající na kruhovou difrakční aperturu ve Fresnelově aproximaci je zobrazen na obr. 6.2. Uvnitř válce vymezujícího geometrický stín apertury se střídají maxima a minima difrakčních kroužků. Intenzita difrakčních oscilací v oblasti geometrického stínu je při Fresnelově difrakci velmi malá.




Obr 6.16 Spočtený difrakční obrazec Fresnelovy difrakce na kruhových otvorech na matnici vzdálené 4 m od stínítka, vlnová délka světla 515 nm (zobrazeno černobíle). Vně červeného kruhu se nachází oblast geometrického stínu, kde je intenzita oscilací difrakčního obrazce sice nenulová, ale mnohem menší než ve znázorněné oblasti.
https://www.falstad.com/diffraction

### 6.3.5.2 Difrakce na kruhové apertuře ve Fraunhoferově aproximaci

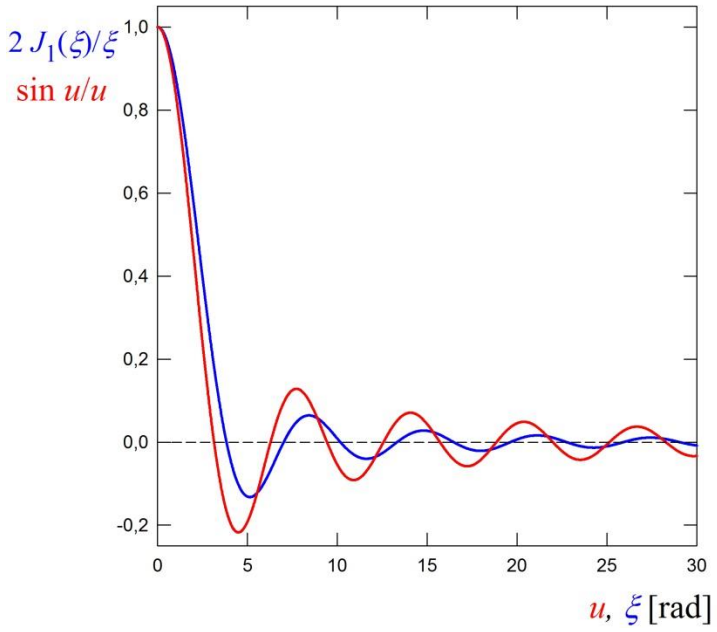
Podobným postupem jako při výpočtu Frauenhoferovy difrakce na obdélníkové apertuře lze dospět k rozložení hustoty elektrické energie (intenzity světla) difrakce na kruhové apertuře. Matematicky je postup komplikovanější, protože výpočet integrálu vede na vztah obsahující Besselovu funkci [P.Malý, Optika, 2.vydání, kap. 8.1.3, str.117]. Ve Fraunhoferově aproximaci dostaneme pro kolmý dopad rovinné vlny na kruhovou aperturu

$$I(\rho,z) = I_0\left(\frac{2\,J_1(\xi)}{\xi}\right)^2 \propto E_0^2\left(\frac{\pi D^2}{4\lambda z}\right)^2\left(\frac{2\,J_1(\xi)}{\xi}\right)^2,$$

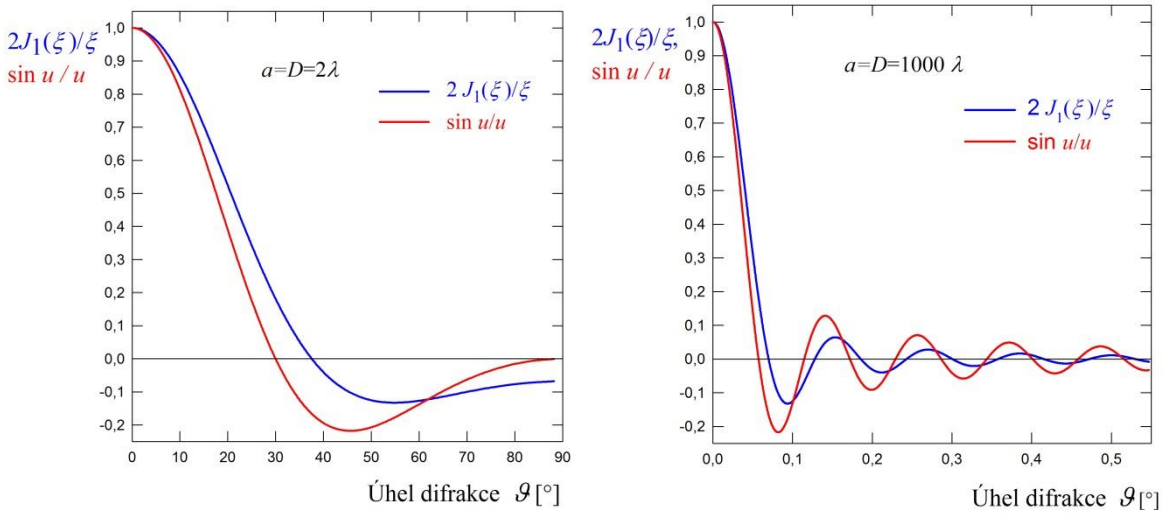
$$\xi = \frac{kD}{2}\sin\vartheta = \frac{\pi D}{\lambda}\sin\vartheta\,, \tag{6.16}$$

$$\xi \cong \frac{kD}{2}\,\frac{\varrho}{z} = \frac{\pi D\rho}{\lambda z} \quad \text{pro paraxiální aproximaci,}$$

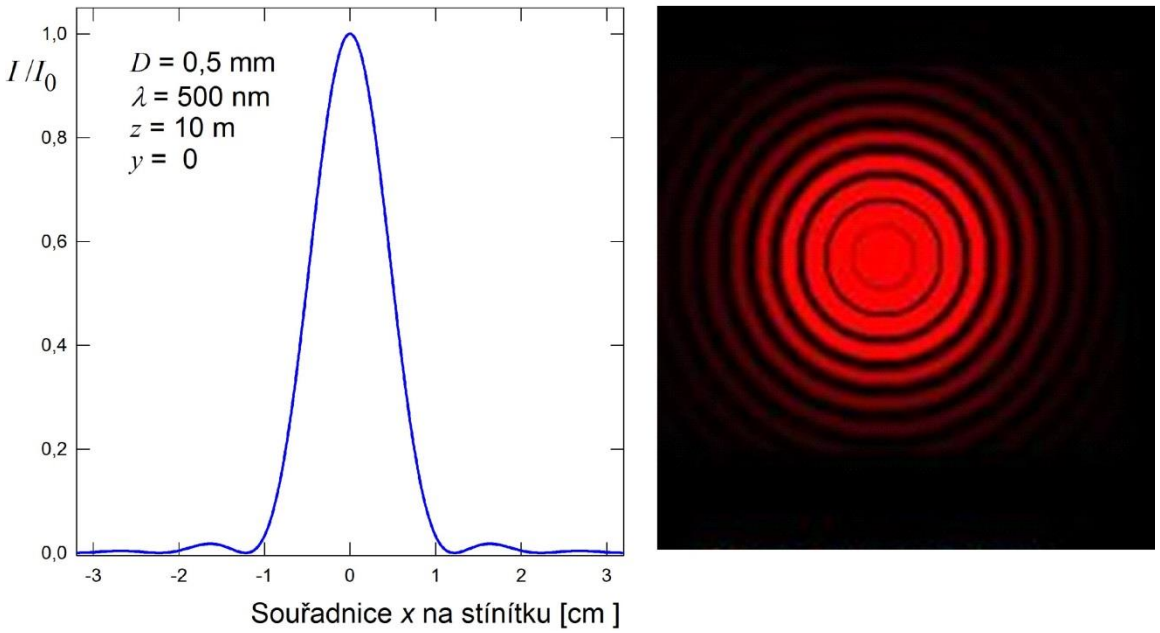
kde $J_1(\xi)$ je Besselova funkce 1. druhu, $D$ je průměr apertury a $\varrho$ je polární souřadnice reprezentující vzdálenost od osy $z$ v rovině $xy$. Prvního nulového bodu funkce intenzity dosahuje při $\xi = 1.22\pi$.




Obr. 6.17 Grafy funkcí $\frac{2\,J_1(\xi)}{\xi}$ a $\frac{\sin u}{u}$. Obě funkce jsou symetrické $f(-u) = f(u)$.




Obr. 6.18 Porovnání závislostí funkcí $\frac{\sin u}{u}(\vartheta)$ a $\frac{2J_1(\xi)}{\xi}(\vartheta)$ pro $a = D = 2\lambda$ a $1000\lambda$ a vše je pro kolmý dopad $\theta_i = \varphi_i = 0$. Upozorněme na velký rozdíl ve škálách úhlu $\vartheta$. Grafy ukazují závislosti funkcí vysoko nad rámec dosud diskutované paraxiální aproximace. Difrakce v obecném úhlu je diskutována dále (viz text k rovnici 6.17).

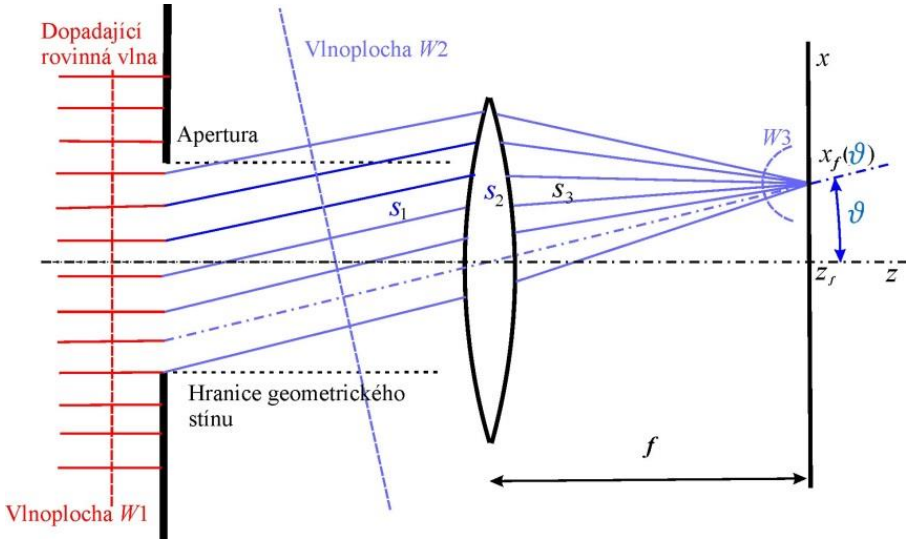



Obr. 6.19 Normované rozložení intenzity difraktovaného světla při Fraunhoferově difrakci na kruhovém otvoru průměru $D = 0{,}5$ mm a s dalšími uvedenými parametry.

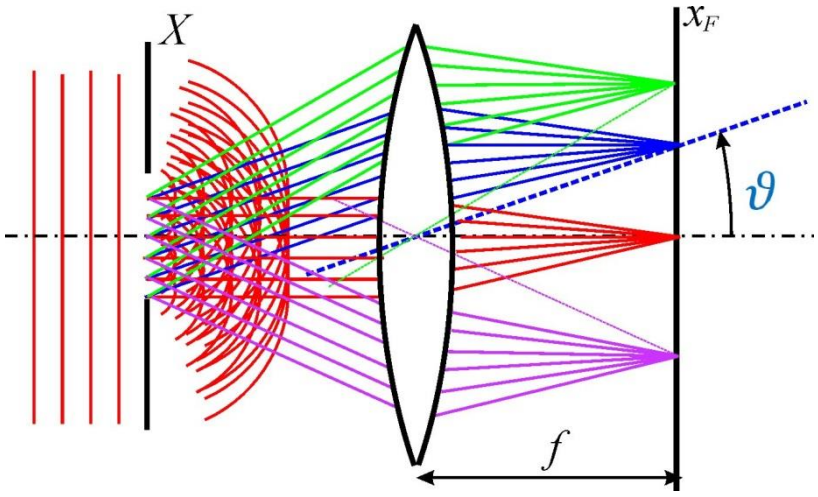
## 6.4 Zobrazení Fraunhoferova difrakčního obrazce

Jak bylo dříve uvedeno, v případě Fraunhoferovy difrakce na obdélníkové apertuře dostaneme pro intenzitu světla na matnici ve směrech $x, y$ (úhly $\vartheta, \varphi$) ve vzdálenosti $z$ od difrakční apertury v paraxiální aproximaci vztahy 6.14 a 6.15.

Pro konstantní $u \propto \frac{x}{z}$ se s rostoucím $z$ rozměr difrakčního obrazce zvětšuje, ale zároveň rychle klesá intenzita $I \propto \frac{1}{z^2}$. V realistických rozměrech (v rámci velké místnosti) lze Fraunhoferovu difrakci předvádět na otvorech o maximálních rozměrech několika málo mm. Slábnutí intenzity interferenčního obrazce se vzdáleností lze zabránit použitím zobrazovací soustavy (např. spojné čočky), čímž zároveň přiblížíme Fraunhoferův difrakční obrazec z velkých vzdáleností do přijatelných měřítek. Při použití spojné čočky se struktura velmi vzdáleného obrazce vyhovujícího podmínce Fraunhoferovy difrakce objeví v ohniskové rovině. Podíl $\frac{x}{z} = \tan\vartheta$ se ve výrazu 6.15 nahradí podílem $\frac{x_f}{f}$ (obr. 6.20). Při kolmém dopadu $(\Theta_i = \varphi_i = 0)$ leží absolutní maximum v $x_f = y_f = 0$.




Obr. 6.20 Základní geometrické uspořádání pro Fraunhoferovu difrakci při kolmém dopadu rovinné vlny s použitím zobrazovacího prvku (spojné čočky). $W1$ znázorňuje vlnoplochu dopadající vlny, vlnoplocha $W2$ se vztahuje k jedné z ∞ mnoha komponent difraktovaného pole. Optická dráha mezi $W2$ a $W3$ je $s_1 + n_{čočka}s_2 + s_3$ je pro všechny paprsky této komponenty stejná (podmínka zobrazení).




Obr. 6.21 Modelové znázornění získání **Fraunhoferova** difrakčního obrazce v ohnisku fokusační zobrazovací soustavy (čočky).

Z nekonečného množství komponent rovinných vln tvořících nekonečný počet elementárních kulových vln jsou zobrazeny čtyři. Rovinná vlna je charakterizována směrem svého vlnového vektoru $\boldsymbol{k}$. Zobrazení fokusační optikou přiřadí každému směru $\boldsymbol{k}$ bod $x_F, y_F$ v ohniskové rovině. Intenzita v místě $x_F, y_F$ je úměrná intenzitě příslušné rovinné vlny v prostoru za aperturou Jinak řečeno, zobrazovací soustava provede **analogovou fourierovskou analýzu** pole za aperturou, tj. intenzita v jednotlivých bodech ohniskové roviny je určena váhou

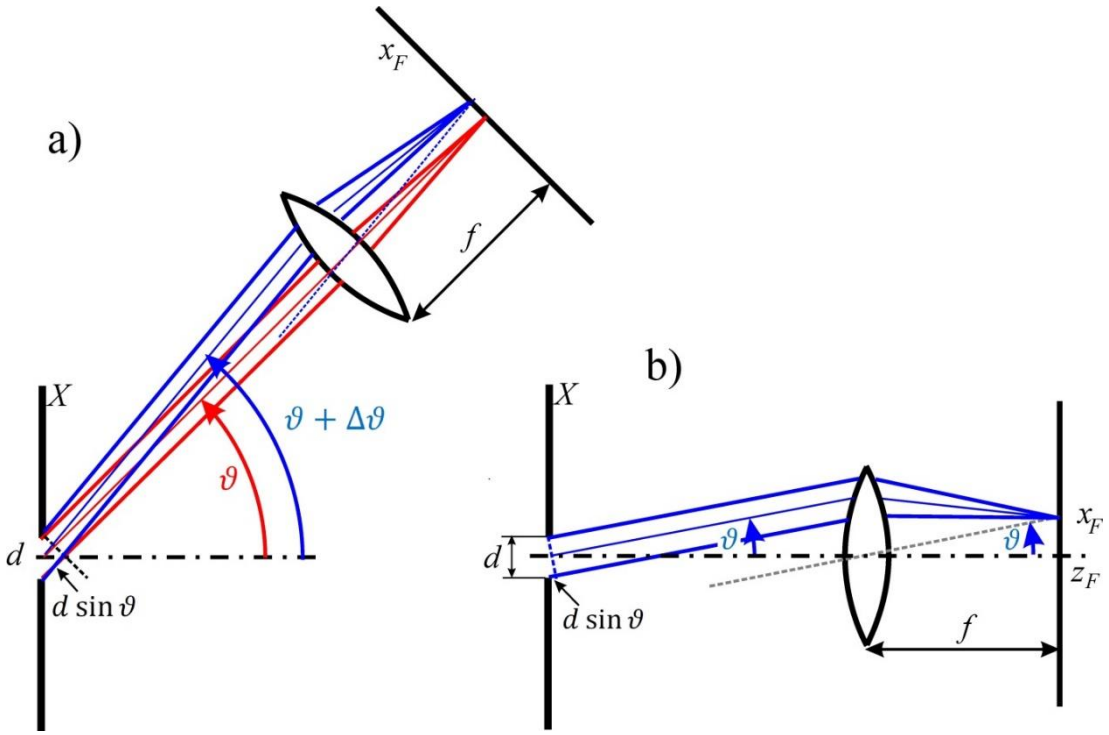
příspěvku rovinné vlny příslušného směru vlnového vektoru k poli za aperturou. Obrazce v ohniskové rovině jsou rozmazány v důsledku omezení svazků rozměrem apertury zobrazovací soustavy (na obr. nezakresleno). Základní informace o analogové prostorové Fourierově transformaci lze získat v kapitole 9 „Princip fourierovské optiky“ v učebnici Petr Malý, Optika.

Značnou komplikací jsou omezené rozměry fokusační soustavy, takže fourierovská analýza je poněkud neúplná. Jestliže nás zajímají komponenty ve směrech odlišných, musíme zvolit jinou polohu fokusační soustavy. Schéma pro směry v aproximaci malých úhlů kolem osy a v obecném směru je zobrazeno obr. 6.22.

Z hlediska použití uvedených vztahů pro větší úhly difrakce $\vartheta, \varphi$ je možno použít jinou, obecnější aproximaci než 6.4, totiž provést **Taylorův rozvoj** podle malých rozměrů apertury **kolem jiného směru** než je normála k rovině apertury. To vede k úpravě popisu směrů

$$\frac{x}{z} \to \sin\vartheta, \qquad \frac{y}{z} \to \sin\varphi,$$
$$u \cong \frac{ak}{2}\sin\vartheta = \frac{a\pi}{\lambda}\sin\vartheta, \qquad v \cong \frac{bk}{2}\sin\varphi = \frac{b\pi}{\lambda}\sin\varphi. \tag{6.17}$$

V paraxiální aproximaci malých úhlů tedy užíváme $\frac{x}{z} = \tan\vartheta \cong \sin\vartheta \cong \vartheta$ a $\frac{y}{z} = \tan\varphi \cong \sin\varphi \cong \varphi$, zatímco v případě větších úhlů difrakce (např. při difrakci na optických mřížkách užíváme rovnici 6.17.



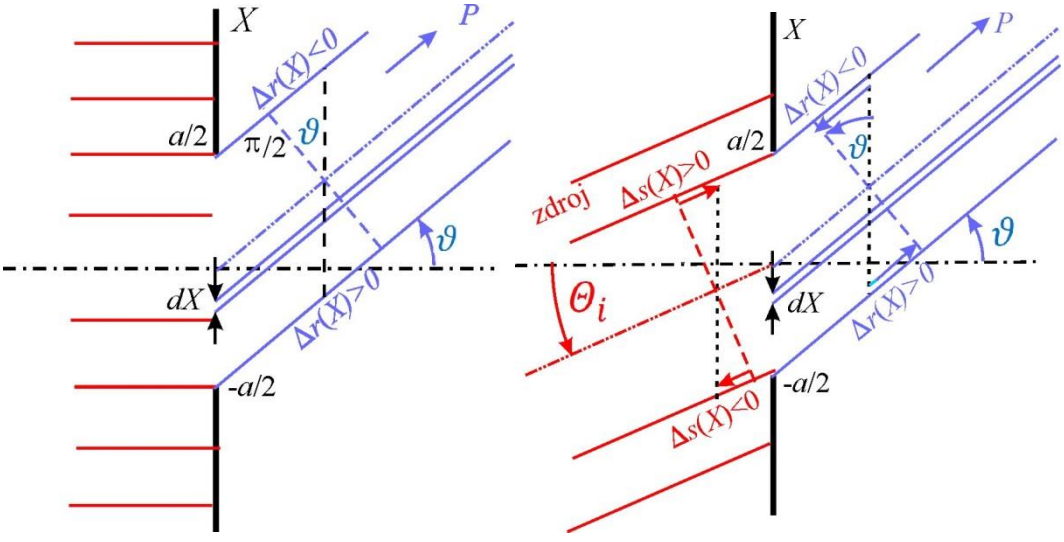

Obr. 6.22 Schéma popisu směrů v obecném směru a v aproximaci malých úhlů

Šikmý dopad charakterizujme úhly $\Theta_i, \varphi_i$ tedy směr vlnového vektoru dopadající vlny $\boldsymbol{k}_i = k\left(\sin\Theta_i\,, \sin\varphi_i\,, \sqrt{1-\sin^2\Theta_i - \sin^2\varphi_i}\right)$ a úhly $\vartheta$ a $\varphi$ směry difraktované vlny $\boldsymbol{k}_d = k\left(\sin\vartheta\,, \sin\varphi\,, \sqrt{1-\sin^2\vartheta - \sin^2\varphi}\right)$, což je pro difraktovanou vlnu zobrazeno na obr. 6.14. Pro názornost a jednoduchost se zajímejme jen o šikmý dopad ve směru $x$ ($\Theta_i \neq 0,\ \varphi_i = 0$) a jen o složku difraktovaného pole $\boldsymbol{k}_d = k(\sin\vartheta\,, 0, \cos\vartheta), \varphi = 0$, což je vhodné zejména pro $a \ll b$. Názorný náhled může poskytnout obr. 6.23. Úhly $\Theta_i$ a $\vartheta$ popisující směry šíření dopadající a difraktované vlny v rovině $xz$ vzhledem k ose $z$ budeme uvažovat v intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$.

Zavedeme **znaménkovou konvenci**.

- Pokud jsou úhly $\Theta_i$ a $\vartheta$ na opačných stranách normály k ose otvoru $z$, jsou oba úhly kladné.
- Pokud jsou oba úhly na jedné straně normály, považujeme úhel $\vartheta$ za záporný.

Při této znaménkové konvenci je úhel $\Theta_i$ na obr. 6.23 kladný. Dráhové rozdíly budeme vztahovat k paprskům, které procházejí středem apertury. Pro kladná $X$ vychází pro paprsky procházející horní částí apertury dráhový rozdíl $\Delta s(X) = X\sin\Theta_i$ kladný. Pro záporná $X$ (dolní část apertury) je uvedený dráhový rozdíl záporný. Naopak dráhový rozdíl pro difraktovaný paprsek v naznačeném směru $\vartheta$ pro $X$ z horní části apertury záporný, $\Delta r(X) = -X\sin\vartheta$. Pro $X$ z dolní části apertury je dráhový rozdíl vůči paprsku procházejícímu středem apertury kladný.Pole dopadající vlny $E(x, y, z < 0) = E_0 \exp[ik(x\sin\Theta_i + z\cos\Theta_i)]$ je v rovině apertury $E(X, Y, 0) = E_0 \exp(ikX\sin\Theta_i)$. Názorně to lze interpretovat jako různé vzdálenosti od zdroje vlny (pro rovinnou vlnu od bodů vlnoplochy) k různým místům apertury.




Obr.6.23 Modelový obrázek k Fraunhoferově difrakci rovinné vlny na štěrbině šířky $a$. Vlevo kolmý dopad, vpravo dopad pod úhlem $\Theta_i$. $s$ je vzdálenost od zdroje vlny, $r$ je vzdálenost k místu pozorování. $\Delta s(X) > 0$ znamená, že dráha $s$ od zdroje k apertuře je pro paprsek procházející bodem apertury $X$ delší než pro „střední“ paprsek, tedy tato část dopadající vlny dospěje do apertury později. $\Delta r(X) > 0$ znamená, že dráha od apertury k místu pozorování $P$ je delší a tato část difraktované vlny dospěje do $P$ později.

Příspěvek té části vlny, která prochází místy apertury o souřadnici $X$ z aperturní plošky $dS_A = b\,dX$ k poli v místě $P$ můžeme napsat jako

$$dE(P) \propto \frac{-i}{\lambda} E(X) \frac{e^{ikr}}{r_0}\, dS_A \cong \frac{-i}{\lambda} E_0\, e^{ikX \sin \Theta_i}\, \frac{e^{ikr}}{r_0}\, b\, dX =$$

$$= \frac{-iE_0}{\lambda r_0} b\; e^{ikX \sin \Theta_i} e^{ikr_0} e^{ik\Delta r(X)} dX = \frac{-iE_0}{\lambda r_0} b\, e^{ikr_0}\, e^{ikX(\sin \Theta_i - \sin \vartheta)}\, dX$$

$r_0$ je vzdálenost místa pozorování $P(x, 0, z)$ od středu apertury, $\Delta s(X)$ je již zahrnuto v poli dopadající vlny $E_{0A}\, e^{ikX \sin \Theta_i}$.

Následuje integrace shodná s dříve provedenou a dostaneme

$$E(P) \cong \int_{-a/2}^{a/2} dE(P) = \frac{-iE_0}{\lambda r_0} ab\, e^{ikr_0}\, \frac{\sin\left[\frac{ak}{2}(\sin \vartheta - \sin \Theta_i)\right]}{\frac{ak}{2}(\sin \vartheta - \sin \Theta_i)}. \qquad (6.18)$$

Tak pro parametr $u$ pro tento šikmý dopad vlny ($\varphi_i = 0$) na aperturu a pro zkoumání řezu difrakčního pole v rovině $y = 0$ můžeme vzít

$$u = \frac{ak}{2}(\sin \vartheta - \sin \Theta_i) = \frac{a\pi}{\lambda}\, (\sin \vartheta - \sin \Theta_i), \qquad v \cong 0 \qquad (6.19)$$

a podobně bychom postupovali i případě $\varphi_i \neq 0,\ \Theta_i = 0$ a ve složitějším obecném případu $\theta_i \neq 0, \varphi_i \neq 0$. Poloha absolutního difrakčního maxima ve Fraunhoferově difrakci ($u = 0, v = 0$) je určena úhly $\vartheta = \Theta_i, \varphi = \varphi_i$.

Obr. 6.23 je typ schématických obrázků, které jsou běžně prezentovány k vysvětlení dráhových rozdílů mezi paprsky. Ale je možno je považovat bez vysvětlení za poněkud matoucí. To plyne z toho, že kreslené rovinné vlny (symbolizované rovnoběžnými paprsky) zachycují jen nepatrnou část skutečnosti: z ∞ mnoha rovinných vln kreslíme jednu (nanejvýš několik málo) a jen její malou část.

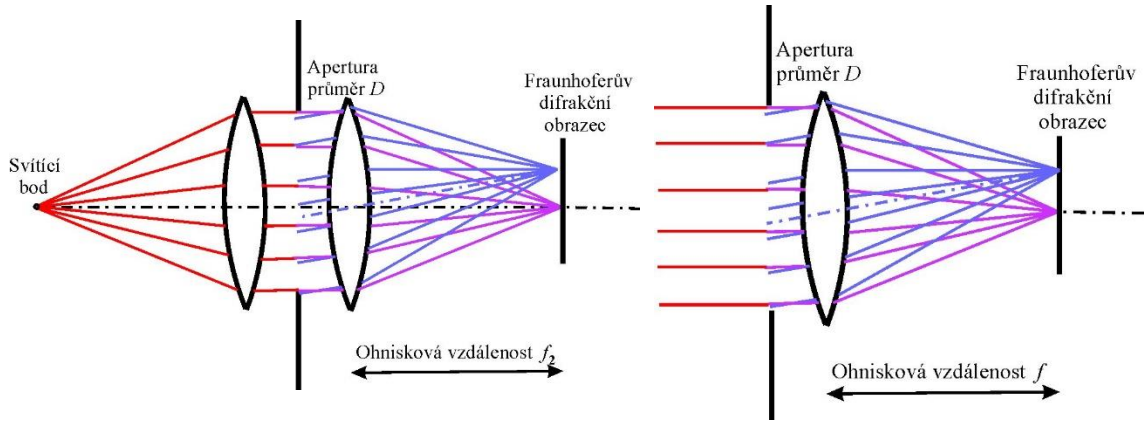
- Obrázek navozuje dojem, že k rozšiřování svazku typickému pro Fraunhoferovu difrakci dochází hned za otvorem, což ve skutečnosti nenastává. Pro $z < z_{MEZ}$ nastává v principu Fresnelova difrakce, která je typická tím, že intenzita světla významným způsobem nevstupuje do geometrického stínu a rozložení intenzit v rovinách konstantních $z$ je kvalitativně jiné než pro Fraunhoferovu difrakci.
- Další klamný dojem souvisí s tím, že rovinná vlna (tj. komponenta rozkladu difraktovaného pole na rovinné vlny) je kreslena jako prostorově omezený svazek šířky otvoru. Ve smyslu Fourierova rozkladu jsou však tyto komponenty homogenní rovinné vlny teoreticky ve směru kolmém k jejich vlnovému vektoru neomezené a prostorová omezenost celkového pole (zvlášť patrná v oblasti Fresnelovy difrakce) je důsledkem jejich destruktivního skládání, tj. v oblasti Fresnelovy difrakce v prostoru geometrického stínu se rovinné vlny – Fourierovy komponenty – velice efektivně vyruší.

- Obrázek by mohl vyvolávat intuitivní chybnou představu, že čím širší otvor, tím širší Fraunhoferův obrazec. Opak je pravdou: rozbíhavost difrakčního obrazce je veliká pro úzké otvory.

## 6.5 Rayleighovo kritérium rozlišitelnosti obrazů dvou bodů

Vzhledem k tomu, že každý bod předmětu při zobrazení přes difrakční aperturu vytváří na matnici difrakční obraz, vzniká otázka, jaké jsou limitující podmínky pro to, aby obraz dvou bodů předmětu bylo možné odlišit. Zde se věnujme jednoduchému modelu, který zohledňuje difrakční jevy vyvolané konečnými rozměry zobrazovací soustavy, a to s použitím vztahů pro Fraunhoferovu difrakci.

Jak je z tabulky ukazující potřebné vzdálenosti pro aplikaci Fraunhoferovy aproximace zřejmé, jsou vzdálenosti pozorovacího místa při průměrech obvyklých zobrazovacích soustav veliké. Přesto je tato aproximace pro tento účel použitelná, což ukazuje následný modelový obrázek 6.24a: kulové vlny z malinkého („bodového“) zdroje vstupují do zobrazovacího systému, v jehož části postupují jako rovinné (první požadavek na Fraunhoferovu aproximaci, jak jsme ji uvedli dříve). V této části jsou prostorově omezeny kruhovou aperturní clonou průměru $D$. Další část zobrazovací soustavy provede fokusaci do příslušné ohniskové roviny, kde můžeme pozorovat difrakční obrazec. V případě velmi vzdáleného zdroje, kterým může být např. hvězda, dopadá na aperturu rovinná vlna. Dochází k difrakci a difraktované vlny jsou zobrazeny spojnou čočkou, v jejíž ohniskové rovině vzniká Frauenhoferův difrakční obrazec.




a) b)

Obr. 6.24 Model zobrazení monochromaticky svítícího bodu ideální optickou soustavou při aperturní cloně průměru $D$ – a) blízký bod, kulová vlna je před dopadem na aperturu kolimována čočkou na rovinnou vlnu (rovnoběžné paprsky). $f_2$ je ohnisková vzdálenost 2. části zobrazovací soustavy. b)velmi vzdálený bod, na aperturu dopadá rovinná vlna

Podmínka dobré rozlišitelnosti samozřejmě závisí na naší volbě, tedy na tom, jak velkou míru překryvu difrakčních obrazů dvou bodů předmětu považujeme za přijatelnou. Velmi často používaným kritériem rozlišitelnosti je Rayleighovo kritérium, které definuje rozlišitelnost

pomocí minimálního rozlišitelného úhlu difraktovaných paprsků. Obrazy dvou bodových zdrojů monochromatického světla $A$ a $B$ při zobrazení přes difrakční aperturu jsou prostorově rozlišitelné tehdy, jestliže hlavní maximum difrakčního obrazu bodu $A$ je shodné s prvním minimem difrakčního obrazu bodu $B$.

Pro důležitý případ teleskopu, kdy jsou zobrazované objekty velmi daleko ($z_{A,B} \to \infty$), a pro kruhové apertury nastává první nulový bod v difrakčním obrazci pro $\Delta\xi = 1{,}22\,\pi$, V tomto případě obraz vzniká v ohniskové rovině $z_{OBRAZ} \cong f$. V paraxiální aproximaci můžeme vlny dopadající na zobrazovací systém považovat za rovinné a můžeme použít výsledku pro difrakci rovinné vlny na kruhovém otvoru. Ze vztahu

$$\Delta\xi = 1{,}22\,\pi = \frac{\pi D \rho_1}{\lambda f}$$

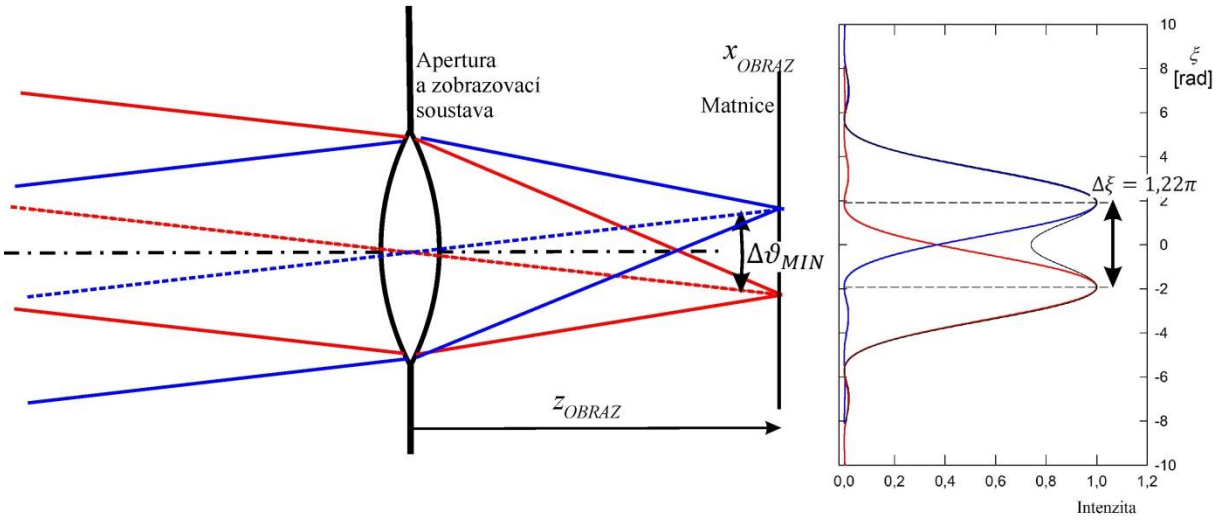
plyne pro poloměr první kružnice o nulové intenzitě světla

$$\rho_1 = \frac{1.22\lambda f}{D}$$

a příslušný úhel

$$\Delta\vartheta_{MIN} = \frac{\rho_1}{f} = \frac{\Delta x_{OBRAZ}}{z_{OBRAZ}} = \frac{\Delta x_{OBRAZ}}{f} \cong 1{,}22\,\frac{\lambda}{D} \qquad (6.20)$$

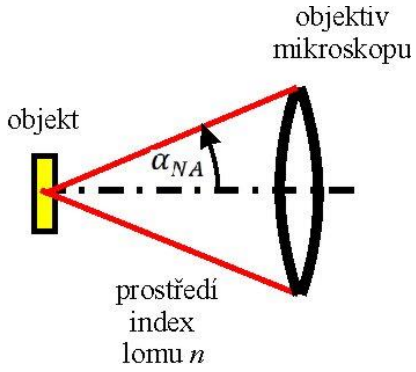
Ve většině praktických případů představuje průměr apertury dalekohledu zároveň průměr vstupní čočky (nebo primárního zrcadla) zobrazovací soustavy dalekohledu.




Obr. 6.25 Rozlišení obrazů 2 vzdálených svítících objektů (hvězd) podle Rayleighova kritéria rozlišitelnosti dvou difrakčních obrazců pro osově symetrickou zobrazovací soustavu. V pravé části obrázku jsou červeně a modře zakresleny příspěvky k intenzitě světla od jednotlivých svítících bodů a černá křivka představuje jejich součet. Pro prosté sčítání intenzit světla je předpokladem vzájemná nekoherence záření obou bodů.

Ze vztahu 6.20 plyne, že minimální rozlišitelný úhel je tím menší, čím větší je typický rozměr apertury. To platí nejen pro dalekohled s kruhovou symetrií, ale obecněji, např. i pro hranatou čtvercovou aperturu apod. a čím menší je vlnová délka záření. Nejlepšího prostorového rozlišení (nejmenšího difrakčního rozmazání) dosáhneme, použijeme-li optiku s velkým průměrem objektivu Extrémní hodnoty průměrů apertur zobrazovacích soustav se užívají v astronomii. Např. Hubbleův teleskop má průměr 2,4 m. Velké pozemní astronomické dalekohledy mají objektivy o průměrech kolem 10 m a plánují se složené objektivy o podstatně větší efektivní ploše.

Při mikroskopickém zobrazení je nutno pracovat s optickými soustavami malých ohniskových vzdáleností při malých $z_{A,B}$. V těchto případech je pro dobré rozlišení důležitý parametr zvaný numerická apertura $n \sin \alpha_{NA}$, kde $n$ je index lomu prostředí mezi preparátem (pozorovaným objektem) a objektivem, $\alpha_{NA}$ je úhel mezi středním a krajním paprskem vycházejícím z bodu na pozorovaném objektu a vstupujícím do objektivu. Opět platí, že lepší prostorové rozlišení dosáhneme s větším průměrem svazku (větší úhel $\alpha_{NA}$) v optickém systému, tedy s větší numerickou aperturou. Navíc může být výhodné použít světlo co nejkratších vlnových délek.



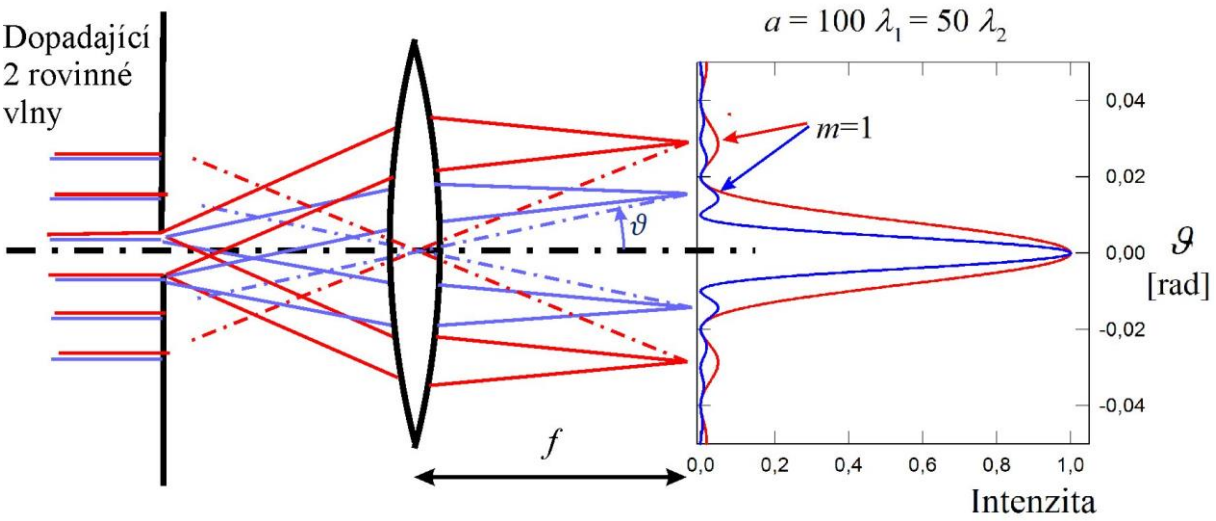

Obr. 6.26 Numerická apertura objektivu mikroskopu

Difrakční jevy ovšem nejsou jediným mechanismem omezujícím prostorové rozlišení. Naše úvahy platí pro soustavy s patřičně omezenými jinými vadami zobrazení.

Vztahu 6.20 využívá i elektronová mikroskopie, kdy je kvantově mechanická vlnová délka elektronu $\lambda = \frac{h}{p}$, kde $h$ je Planckova konstanta a $p$ je hybnost elektronu. Např. elektronům s energií 1 keV odpovídá vlnová délka $\lambda = 3{,}6 \times 10^{-10}$m. Proto je minimální rozlišitelný úhel o 3 řády menší než v případě použití viditelného optického záření.

## 6.6 Spektrální rozklad světla při difrakci

Rozložení intenzity světla v rovině pozorování (vztah 6.16) je funkcí vlnové délky difraktovaného záření. Dopadá-li na difrakční aperturu světlo z určitého intervalu vlnových délek, je výsledný difrakční obrazec složen z difrakčních obrazců pro jednotlivé vlnové délky a lze proto pozorovat různé barevné efekty. Příklad pro dvě různé vlnové délky při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru je zobrazen na obr. 6.27.




Obr. 6.27 Schématické znázornění Fraunhoferovy difrakce na obdélníkové apertuře (štěrbině) šířky $a$ v řezu $y = 0$ s fokusační čočkou. Vlnové délky kolmo dopadajících rovinných vln jsou $\lambda_1 = {}^{a}/_{100}$ a $\lambda_2 = {}^{a}/_{50}$. Úhel $\vartheta$ je v obrázku zveličen. Pro první vedlejší maximum difrakce na 1 štěrbině je pro uvedené hodnoty $\vartheta_{\lambda 1, m_{1st}=1} \cong 0{,}0143$ rad $\cong 0{,}82°$ a $\vartheta_{\lambda 2, m_{1st}=1} \cong 0{,}0286$ rad $\cong 1{,}64°$. Červená $(\lambda_2)$ a modrá $(\lambda_1)$ barva v tomto obrázku (na rozdíl od předchozích obrázků) reprezentuji různé vlnové délky světla.

## 6.7 Amplitudová difrakční mřížka ve Fraunhoferově aproximaci

Jako modelového zástupce různých typů difrakčních mřížek uveďme model **rovinné amplitudové** mřížky. Budeme se zajímat o rozložení intenzity světla na matnici či v rovině detektorů po průchodu rovinné vlny difrakční mřížkou ve Fraunhoferově aproximaci, kdy dochází k optimálnímu oddělení vln s různými vlnovými délkami. Vzhledem k rozměrům běžných spektroskopických mřížek (cm až dm) je při jejich funkční aplikaci s použitím Fraunhoferovy aproximace nutné použít fokusační optiku.

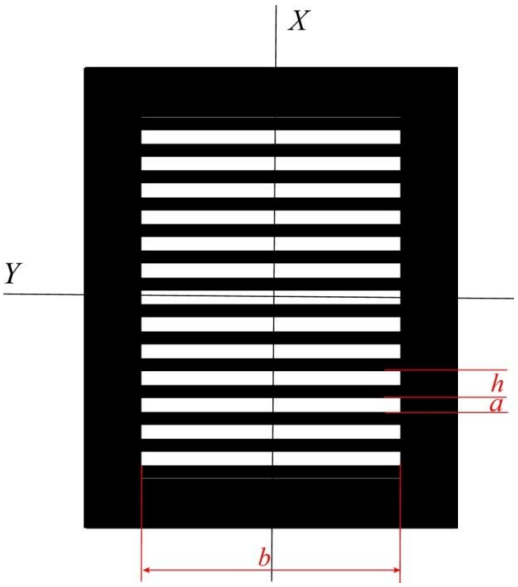
Štěrbiny jsou charakterizovány svými rozměry a propustností pro záření, právě tak příčky mezi štěrbinami. V našem modelu amplitudové mřížky je základní opakující se motiv propustnosti štěrbiny $T_G$

$$T_G = 1 \text{ pro } X \in \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \qquad T_G = 0 \text{ pro } X \in \left(\frac{a}{2}, h - \frac{a}{2}\right).$$

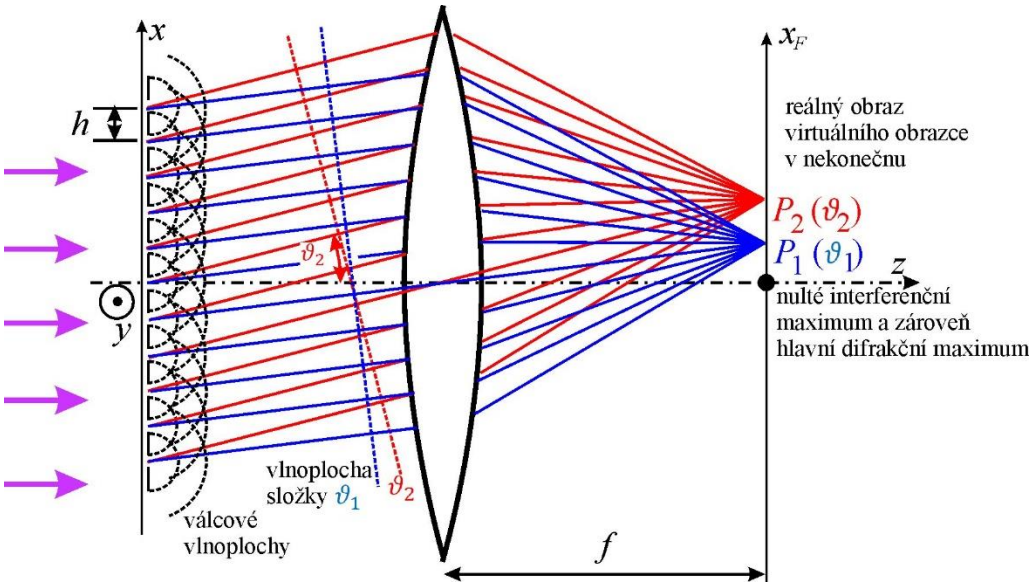
Pro popis difrakční mřížky v uspořádání na průchod předpokládáme, že se skládá z řady identických obdélníkových otvorů s velikostí hran $a$ a $b$, přičemž obvykle $a \ll b$. Nechť jsou obdélníkové štěrbiny umístěny v polohách symetricky kolem $X = 0$

$$X_n = \left(n - \frac{N+1}{2}\right)h, \qquad Y_n = 0, \qquad n = 1 \text{ až } N.$$

kde $N$ je celkový (lichý) počet štěrbin a $h$ vzdálenost sousedních štěrbin ve směru $X$. První štěrbina má souřadnici $X_1 = \frac{1-N}{2}h < 0$, prostřední $X_{\frac{N+1}{2}} = 0$ a poslední $X_N = \frac{N-1}{2} > 0$ .




Obr. 6.28 Amplitudová mřížka na průchod tvořená periodicky umístěnými obdélníkovými štěrbinami v neprůhledném stínítku




Obr. 6.29 Virtuální interferenční obrazec $N$ rovinných vln v nekonečnu je složen z rovinných komponent charakterizovaných úhlem $\vartheta$. Tento obrazec si můžeme „přitáhnout“ do ohniskové roviny fokusační optiky. Předpokládáme, že na mřížku dopadá rovinná vlna s vlnovým vektorem rovnoběžným s osou $z$ (úhel dopadu $\Theta_i = 0$), takže pole ve všech štěrbinách kmitají ve fázi. Intenzita v ohniskové rovině je určena úhlem $\vartheta$. Nulté interferenční maximum je na ose $z$, $x_F = 0$ pro všechny vlnové délky. Je možná např. situace, že pro některou vlnovou délku je v $P_1$ interferenční minimum a v $P_2$ první hlavní interferenční maximum.

Vzhledem k typickým rozměrům štěrbin šířka $a \ll$ délka $b$ je výsledkem difrakce na jedné štěrbině válcová vlna. Budeme používat pouze výsledek difrakce v rámci dvourozměrného modelu v rovině $y = 0$.

Jak je ukázáno v **Dodatku 6.9**, lze difraktované pole ve Fraunhoferově aproximaci vzniklé superpozicí difrakčních příspěvků od $N$ totožných apertur umístěných v aperturní rovině v místech $(X_n, Y_n, 0)$ popsat jako součin dvou členů

$$E(x,y,z) \cong \sum_{n=1}^{N} e^{-ik\frac{xX_n+yY_n}{z}} \times \\ \times \left\{ \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY\, E(X,Y,0) e^{-ik\frac{xX+yY}{z}} \right\} = N\, F_N\, f_1 \tag{6.21}$$

kde

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{-ikX_n \frac{x}{z}}$$

Při výpočtu difrakce na souboru identických difrakčních apertur tedy stačí vypočítat difrakční obrazec jedné apertury $f_1$ (výraz ve složené závorce) a tento výsledek vynásobit sumou přes všechny apertury $F_N$ (výraz pro interferenci $N$ rovinných vln před složenou závorkou). To je prakticky velmi důležitý výsledek rozdělující úlohu na dvě poměrně nezávislé části:

- na určení difrakce od 1 štěrbiny $f_1$ (tedy složitý integrační úkol s mnohými aproximacemi), kterou nemusíme znát dostatečně přesně; např. reálně používané mřížky pro spektroskopické účely obvykle nesplňují dříve uvedené předpoklady Fraunhoferovy difrakce a už vůbec ne skalární popis;
- na poměrně jednoduchou úlohu součtu konečného počtu rovinných vln (členů v součtu $NF_N$, interferenční část úlohy).

Právě z tohoto interferenčního součtu rovinných vln $F_N$ lze odvodit zákonitosti, které nejsou vázány na konkrétní funkci $f_1$. Patří sem velmi důležitá mřížková rovnice pro difrakční mřížky a z ní plynoucí některé vlastnosti těchto mřížek.

Pro „interferenční“ součet příspěvků rovinných vln dostaneme v paraxiální aproximaci

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{-ikX_n \frac{x}{z}} = \frac{1}{N} e^{ikh\frac{N+1}{2}\frac{x}{z}} \times \sum_{n=1}^{N} e^{-ikhn\frac{x}{z}},$$

$$\eta = \frac{hk}{2}\frac{x}{z}.$$

Reálné mřížky nepracují v podmínkách paraxiální aproximace. V exponenciálních funkcích můžeme pro kolmý dopad zavést obecnější $\eta = \frac{hk}{2}\sin\vartheta$, podobně jako jsme provedli při odvozování vztahu pro směrovou závislost difrakční intenzity ve vztahu 6.14.

S použitím vzorce pro součet geometrické řady $s_N = a_1 \frac{q^N - 1}{q-1}$, kam dosadíme $a_1 = e^{-2i\eta}$ a $q = e^{-2i\eta}$, dostaneme

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-2i\eta X_n} = e^{i\eta(N+1)}\, e^{-2i\eta}\ \frac{e^{-2i\eta N} - 1}{e^{-2i\eta} - 1} =$$

$$= e^{-i\eta} e^{iN\eta} \frac{e^{-2i\eta N} - 1}{e^{-2i\eta} - 1} = \frac{e^{-iN\eta} - e^{iN\eta}}{e^{-i\eta} - e^{i\eta}} = N\ \frac{\sin(N\eta)}{N\sin(\eta)}$$

S využitím vztahu pro difrakci na jedné obdélníkové apertuře (vztah 6.14) dostáváme pro intenzitu Fraunhoferovy difrakce na difrakční mřížce

$$I(x,0,z) \cong I_0 \left(\frac{\sin N\eta}{N\ \sin\eta}\right)^2 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 =$$

$$= I_0\ F_N^2(N,h,k,\Theta_i,\varphi_i,\vartheta,\varphi) \times\ f_1^2(a,k,\Theta_i,\varphi_i,\vartheta,\varphi), \qquad (6.22)$$

$$\eta\ = \frac{hk}{2}\sin\vartheta, \quad u = \frac{ak}{2}\sin\vartheta, \quad v = \frac{bk}{2}\sin\varphi$$

s tím, že v našem modelu nyní uvažujeme pouze případ $\Theta_i = 0,\ \ \varphi_i = \varphi = 0$, tj. kolmý dopad rovinné vlny na rovinu mřížky. Znovu připomeňme, že $h$ je vzdálenost mezi štěrbinami a $a$ je šířka štěrbiny.

Tento výraz představuje intenzitu světla v bodě prostoru $(x,0,z)$ po difrakci rovinné monochromatické vlny na difrakční mřížce skládající se z $N$ identických obdélníkových štěrbin o rozměrech $a \times b$ vzdálených o $h$ vypočtený ve Fraunhoferově aproximaci, tedy pro hodně veliká $z$. Připomeňme, že $I_0$ užíváme pro maximální intenzitu v daném difrakčním obrazci. Pro náš výklad je podstatný difrakční obrazec ve směru $x$ a pro $y \approx 0$, což je spojeno s podmínkou $b \gg a$. Pak poslední člen $\to 1$ a rozložení intenzity i do směrů, které nesplňují paraxiální aproximaci, můžeme v tomto modelu popsat

$$I(x,0,z) \cong\ I_0\ \left(\frac{\sin N\eta}{N\sin\eta}\right)^2 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \qquad (6.23)$$

Výsledná intenzita je tedy pro dosud uvažovaný případ kolmého dopadu rovinné vlny na mřížku součinem funkce popisující efekt **interference konečného počtu svazků** směřujících od mřížky do daného směru $F_N(\vartheta,\varphi)$ ($N$ periodicky umístěných identických apertur) a funkce **difrakce od jednotlivé apertury** $f_1(\vartheta,\varphi)$.

Vlastnosti funkcí $F_N$ a z nich plynoucí veličiny důležité pro spektroskopii jsou předmětem **Dodatku 6.10**. Zde některé hlavní výsledky:

Funkce $\frac{\sin^2(N\eta)}{N^2\sin^2(\eta)}$ je periodická funkce fázového rozdílu „sousedních“ rovinných vln $2\eta$ s periodou $\Delta\eta = \pi$. Její **hlavní maxima** nastávají při nulovém jmenovateli a s použitím l'Hospitalova derivačního pravidla je

$$\lim_{\eta\to m\pi} \frac{\sin^2(N\eta)}{N^2\sin^2(\eta)} = 1.$$

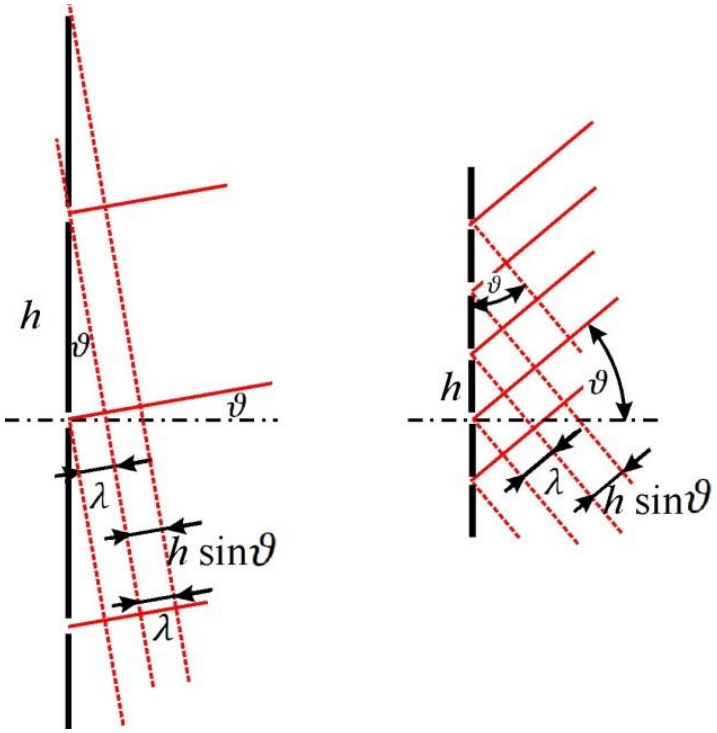
**Nulové body** této funkce jsou

$$\sin N\eta = 0, \qquad \text{přičemž} \quad \sin\eta \neq 0,$$

$$\eta = \pi\, {}^{p}/_{N}, \qquad \eta \neq m\pi, \quad p, m \text{ celá čísla}, \quad {}^{p}/_{N} \text{ číslo necelé.}$$

$$\vartheta_{MAX\,m} = \arcsin\frac{m\lambda}{h},$$

kde do směru $\vartheta_{MAX\,m}$ směřuje hlavní interferenční maximum řádu $m$.



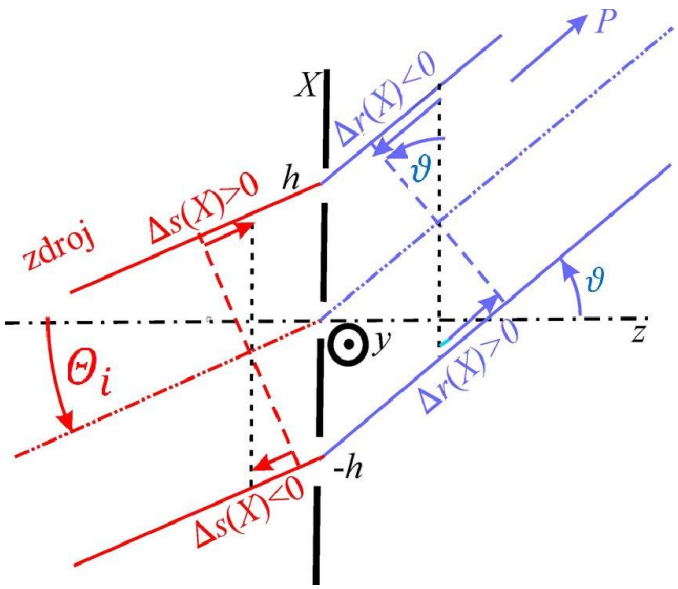

Obr 6.30 Souvislost mezi úhlem $\vartheta_{MAX\,1}$ a vzdáleností štěrbin. Pro velká $h$ je dosaženo podmínky maxima pro $m = 1$ při menších úhlech $\vartheta$ než pro malá $h$.

Pro **šikmý dopad rovinné vlny** $E(x, y, z < 0) = E_0 \exp[ik(x\sin\Theta_i + z\cos\Theta_i)]$ na mřížku s periodou $h$ dostaneme podobně jako v případě difrakce na jedné štěrbině šířky $a$ (srovnej se vztahem 6.19 pro $u$)

$$\eta = \frac{h\pi}{\lambda}\,(\sin\vartheta - \sin\Theta_i), \tag{6.24}$$

což lze názorně ukázat na obr. 6.31.

Rozdíl drah pro paprsky mezi štěrbinou $n$ a štěrbinou $n+1$ je $\Delta s(n) + \Delta r(n) - \Delta s(n+1) - \Delta r(n+1) = h \sin\vartheta - h \sin\Theta_i$, což způsobí fázový posuv mezi příspěvky sousedních štěrbin $hk(\sin\vartheta - \sin\theta_i) = 2\eta$. V obr. 6.31 pro kladné úhly $\Theta_i, \vartheta$ je $\Delta s(\Delta X > 0) > 0$ a $\Delta r(\Delta X > 0) < 0$.




Obr. 6.31 Dráhové rozdíly pro příspěvky do součtu $F_N$ od sousedních štěrbin. Čárkované úsečky kolmé na směr vlnových vektorů představují část vlnoploch. Naznačené úhly $\Theta_i$ a $\vartheta$ se odečítají od normály k rovině mřížky a v obrázku jsou kladné (proti směru hodinových ručiček při pohledu proti směru kladné osy y).

K obr. 6.31 lze připojit podobný komentář jako k obrázku 6.23.

Hlavní maxima funkce $F_N(\eta)$ nastávají pro $\eta = m\pi$, tj. $\eta_m = \frac{h\pi}{\lambda_m}(\sin\vartheta_m - \sin\Theta_i)$, tedy

$$\sin\vartheta_m - \sin\Theta_i = \frac{\lambda_m}{h}\, m, \tag{6.25}$$

což je vztah nazývaný **mřížková rovnice** a znamená, že při dopadu rovinné vlny vlnové délky $\lambda_m$ pod úhlem $\Theta_i$ nastane ve směru difrakce $\vartheta_m$ interferenční maximum intenzity řádu $m$. Speciálně pro nultý řád je $\vartheta_m = \Theta_i$, což znamená, že vlna řádu 0 pokračuje za mřížkou v původním směru.

Dohodněme se, že celá čísla $m$ budou kladná, pokud $\sin\vartheta_m > \sin\Theta_i$ (včetně znamének úhlů)[2]. Je zřejmé, že takových směrů $\vartheta_m$ je konečný počet a pro $\lambda > 2h > 2a$ žádné maximum

[2] Tato úmluva není jediná a standardní. Existují i jiné úmluvy, např.: úhel $\vartheta_m$ je vždy kladný a znaménko úhlu $\Theta_i$ bereme podle průmětu do roviny apertury. Pokud má vlnový vektor dopadající vlny stejné znaménko průmětu $k_{i\,x}$ jako $k_{m\,x}$, je i znaménko úhlu dopadu $\Theta_i$ kladné. Případně v jiné úmluvě úplně naopak.

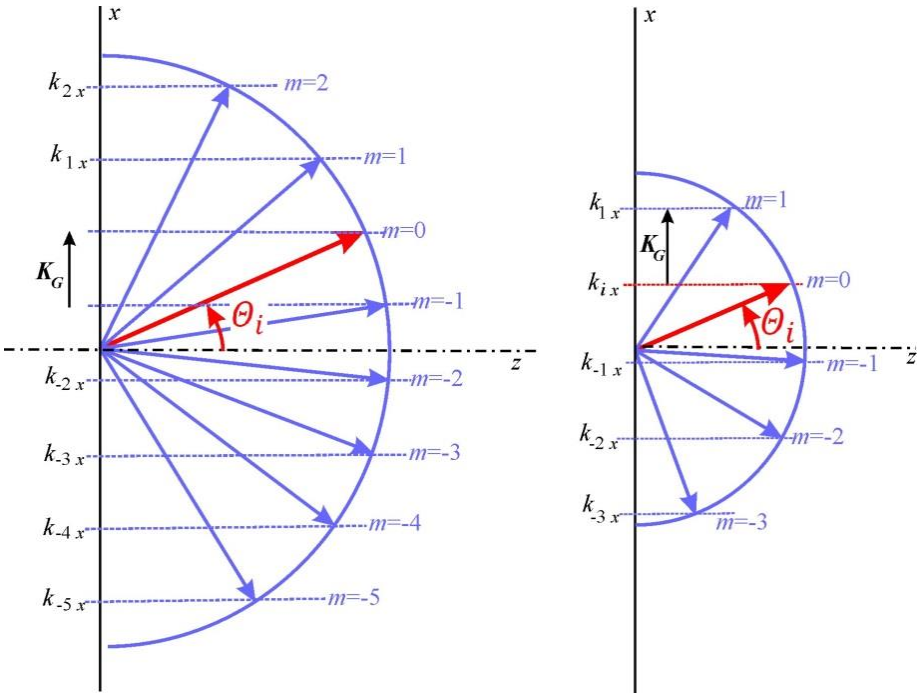
$m \neq 0$ v podobě rovinné vlny prošlé mřížkou (a šířící se volně prostorem) se neobjeví. Takový případ je ovšem již daleko mimo předpoklady našeho modelu.

Přepišme mřížkovou rovnici pomocí vlnových vektorů (vynásobíme rovnici 6.25 výrazem $\frac{2\pi}{\lambda_m}$

$$\frac{2\pi}{\lambda_m}\sin\vartheta_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}\sin\Theta_i + \frac{2\pi}{h}m, \tag{6.26}$$

$$k_{mx} = k_{ix} + mK_{Gx}, \quad \boldsymbol{K}_G = \left(\frac{2\pi}{h}, 0, 0\right),$$

kde $k_{mx} = k\sin\vartheta_m$ je $x$-ová souřadnice vlnového vektoru difraktované vlny řádu $m$. $k_{ix} = k\sin\Theta_i$ je $x$-ová souřadnice vlnového vektoru dopadající vlny a $\boldsymbol{K}_G$ je vlnový vektor, který můžeme přiřadit k periodicitě mřížky $h$ (zde pouze periodicita ve směru osy $x$).




Obr. 6.32 Grafické znázornění mřížkové rovnice pomocí vlnových vektorů dopadající a difraktovaných vln. Nakreslená situace odpovídá velikému množství difraktujících štěrbin ($N \to \infty$, velmi úzká interferenční maxima), úhlu dopadu rovinné vlny $\Theta_i = 22°$ a $\varphi_i = \varphi = 0$. Připomeňme, že periodicita mřížky je popsána vektorem $\boldsymbol{K}_G = \left(\frac{2\pi}{h}, 0, 0\right)$.
V levé části obrázku je vlnová délka $\lambda = 0{,}25h$ a do dalekého pole se jako téměř rovinné vlny mohou šířit dvě vlny s kladnými indexy $m = 1$ a 2 a pět vln se zápornými indexy $m = -1$ až $-5$. Pro vyšší indexy $m$ je $\sqrt{1-\sin^2\vartheta_m}$ číslo imaginární a příslušné módy se šíří pouze těsně u roviny mříže jako evanescentní. V pravé části obrázku je nákres pro větší vlnovou délku $\lambda = 0{,}42h$ (kratší vlnový vektor) a do dalekého pole se může šířit jediná vlna s kladným indexem $m = 1$ a tři vlny se zápornými indexy.

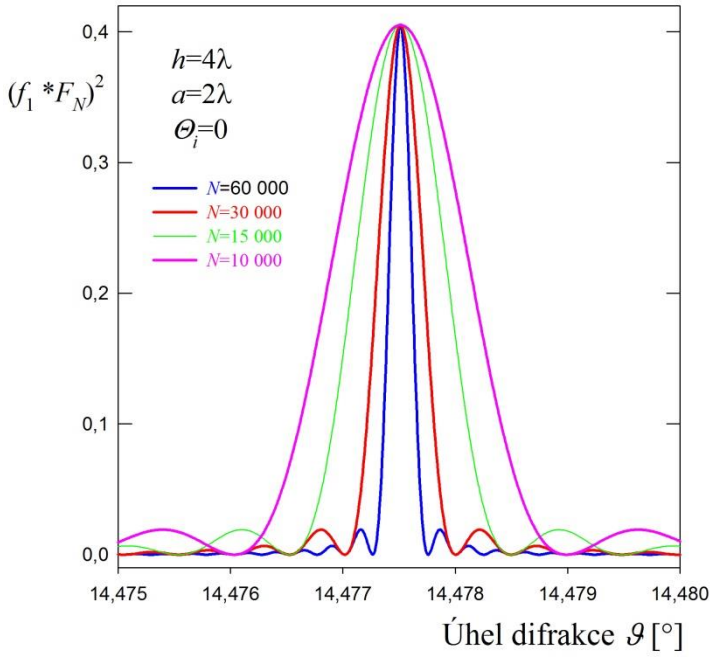
Modelový průběh intenzit světla při difrakci na difrakční mřížce vychází ze vztahů 6.23 použitých pro normovanou intenzitu pro kolmý dopad:

$$f_1(\vartheta) = \frac{\sin u}{u}, \qquad u = \frac{a\pi}{\lambda}\sin\vartheta,$$

$$F_N(\vartheta) = \frac{\sin N\eta}{N\sin\eta}, \qquad \eta = \frac{h\pi}{\lambda}\sin\vartheta,$$

$$I(\vartheta) = I_{MAX}\, f_1^2(\vartheta)\, F_N^2(\vartheta).$$

Průběh intenzity pro difrakci na jednotlivé štěrbině představuje obálku výsledné difrakční intenzity.. V **Dodatku 6.10** si podrobněji všimněme maxim funkce $F_N$ která dále budeme nazývat **interferenční maxima** na rozdíl od **difrakčních maxim** funkce $f_1(\vartheta)$. S rostoucím $N$ se hlavní interferenční maxima funkce $F_N$ zužují a vedlejší interferenční maxima se zmenšují. Při použití velkého $N$ dochází k významnému zúžení hlavních interferenčních maxim, čehož lze využít při spektrálním rozkladu světla, protože **poloha hlavních interferenčních maxim $F_N$ ($m \neq 0$) závisí na vlnové délce světla**. Při současném ozáření difrakční mřížky světlem s několika vlnovými délkami pak tato interferenční maxima vznikají v různých místech. Ze spektroskopického hlediska je důležité, jak malý rozdíl vlnových délek lze danou difrakční mřížkou rozlišit.



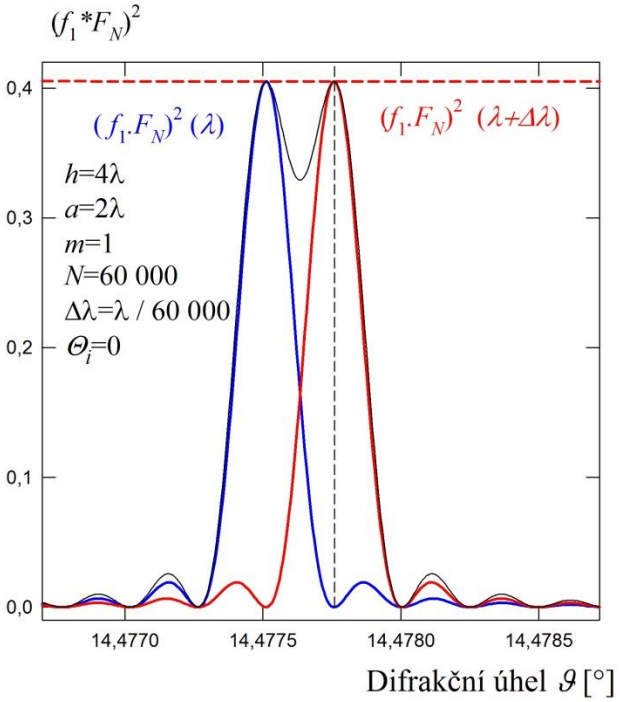

Obr. 6.33 Modelová závislost normované intenzity difraktované vlny $(f_1 F_N)^2$ v okolí 1. hlavního maxima $m = 1$ pro mřížky s počtem štěrbin $N =$ 60 000, 30 000, 15 000 a 10 000.

S vlastnostmi funkcí $F_N$ je spojeno několik veličin.

Limita rozlišovací schopnosti

$$R_{Dm} = \left|\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda}\right| = Nm, \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda, \tag{6.27}$$

kde $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ je nejmenší rozlišitelný rozdíl vlnových délek odpovídající maximům dvou spektrálních čar, které lze rozlišit. V tomto modelu je **rozlišovací schopnost úměrná součinu celkového počtu ozářených štěrbin a řádu maxima interferenční funkce $F_N$.**




Obr. 6.34 Normovaná intenzita $(f_1 F_N)^2$ pro dvě vlnové délky $\lambda$ a $\lambda + \Delta\lambda$ stejných intenzit. Černá křivka je součet intenzit pro obě vlnové délky.

K popisu míry odklonu difrakčním prvkem v závislosti na vlnové délce dopadajícího záření se zavádí veličina nazývaná **úhlová disperze**

$$D_\vartheta = \left.\frac{d\vartheta}{d\lambda}\right|_{\Theta_i = konst} = \frac{m}{h\cos\vartheta} \tag{6.28}$$

a **lineární disperze** ve spojení mřížky a fokusační optiky s ohniskovou vzdáleností $f_{FO}$

$$\frac{dx_f}{d\lambda} = f_{FO}\frac{d\vartheta_m}{d\lambda} = f_{FO} D_{\vartheta m} \tag{6.29}$$

**Volný spektrální interval** je definován jako interval vlnových délek, pro které se difrakční obraz předmětu (např. vstupní štěrbina ve spektrometru) na výstupní štěrbině spektrometru nebo na detektoru pro daný řád $m$ nepřekrývá s obrazem předmětu vedlejšího maxima $(m+1)$. Pozorujeme-li spektrum záření, ve kterém jsou vlnové délky z intervalu $\langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$

můžeme spektrum dobře zaznamenat, pokud difrakční úhel paprsku s vlnovou délkou $\lambda_2$ difraktovaného v $m$-tém řádu nepřesáhne difrakční úhel paprsku s vlnovou délkou $\lambda_1$ difraktovaného v řádu $m+1$. Pro hraniční difrakční úhel $\vartheta_{Fsm}$ pak z mřížkové rovnice platí

$$h\,(\sin\vartheta_{Fsm} - \sin\Theta_i) = m\,\lambda_2 = (m+1)\,\lambda_1 \tag{6.30}$$

Volný interval vlnových délek definujeme pro $m$-tý řád jako

$$F_{sm} = \lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{m+1}{m} - 1\right)\lambda_1 = \frac{\lambda_1}{m} \tag{6.31}$$

S rostoucím řádem difrakce $m$ se volný spektrální interval zmenšuje.

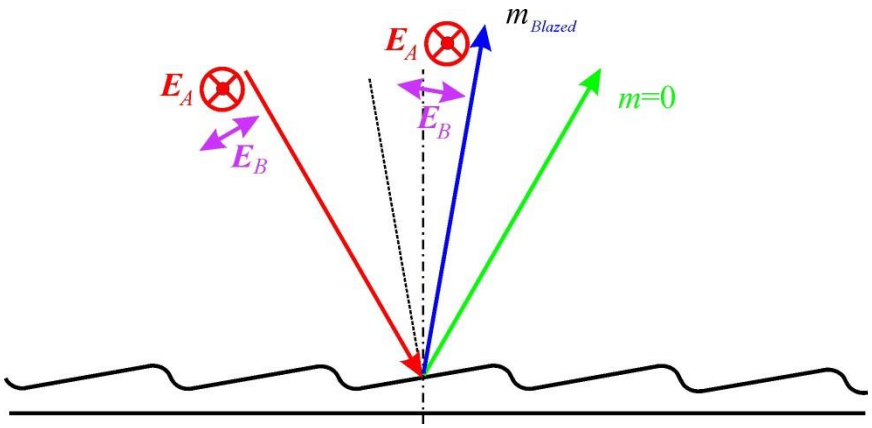
Typické spektroskopické difrakční mřížky nejsou typu amplitudových mřížek, ale veličina, která se periodicky mění je **fáze** vlnek, odražených od velmi úzkých „zrcátek“. Jedná se o mřížky na odraz s povrchovým reliéfem. viz **Dodatek 6.11.**

Spektrometrické mřížky do běžných laboratorních přístrojů pro viditelnou oblast spektra mají hustotu těchto reflexních plošek 600 až 2400 $mm^{-1}$ a celkový rozměr několik cm. Dostáváme se tak k počtu $N$ několik tisíc až 100 000. Rozměr „aktivní oblasti“ mřížky je $Nh$ a předpokládáme, že všechny štěrbiny jsou shodně osvětleny.

### *Difrakce s uvážením vektorového charakteru záření*

Popis vektorové difrakce je podstatně složitější než výše uvedený skalární popis a zpravidla je v jednotlivých případech prováděn jen v numerických modelech. Velmi důležitou roli hrají vedle polarizace difraktovaného záření i materiálové vlastnosti látek, z nichž jsou stínítka s aperturami zhotoveny. Tak např. výsledkem skalárního modelu difrakce na kruhovém otvoru je osově symetrický obrazec (rozložení intenzity). V případě difrakce lineárně polarizované vlny již rozložení intenzity v difrakčním obrazci ve vektorovém modelu **není osově symetrické.**

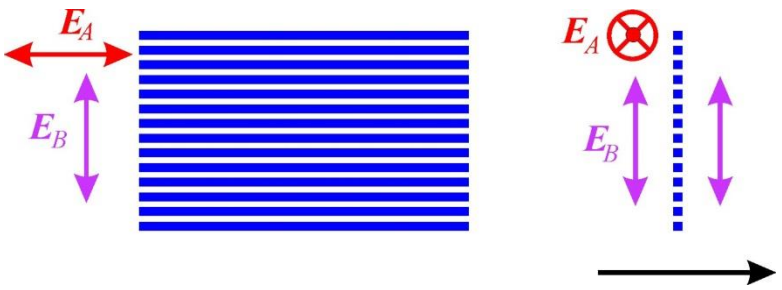
Důležitou úlohou, pro kterou skalární teorie neposkytuje (ani nemůže) adekvátní popis, je směrová závislost difrakční účinnosti **mřížek na odraz s povrchovým reliéfem**. Povrch těchto mřížek pro viditelnou oblast je zpravidla hliníkový. Vzhledem ke geometrii povrchu mřížky a dopadající vlny lze očekávat (a skutečně tomu tak je) závislost na polarizaci dopadající vlny. Výsledky vektorových modelů a skutečných vlastností mřížek to potvrzují.




Obr. 6.35 Znázornění principu reliéfové mřížky na odraz. Čerchovaná čára představuje kolmici k rovině mřížky, čárkovaná čára kolmici k rovině vrypu. Směr nultého řádu ($m = 0$) je symetrický ke směru dopadající vlny podle normály k rovině mřížky, zatímco směr pro maximální účinnost difrakce ($m_{Blazed}$) je k dopadající vlně symetrický kolem kolmice k rovině vrypu. Podmínky na rozhraní pro záření s elektrickým polem plně rovnoběžným s rovinou vrypů $E_A$ jsou jiné než pro $E_B$, které má komponenty kolmé na rovinu vrypu i komponenty rovnoběžné s rovinou vrypu.

Účinnosti, s jakými je dopadající zářivý výkon rozdělen do jednotlivých směrů, je opět dán součinem interferenčního členu $F_{N,}$ pro který stále platí mřížková rovnice, a difrakčního členu $f_1$. Maximum v úhlové závislosti $f_1(\vartheta)$ ale nyní nesměřuje do nultého maxima, nýbrž do směru určeného sklonem podstatných částí reflexních plošek vrypů. Nejlepší účinnosti je dosaženo pro tu vlnovou délku $\lambda_{Blazed}$, pro kterou se shoduje směr některého z hlavních interferenčních maxim $F_{Nm}(\lambda, \vartheta)$ a směr difrakčního maxima určeného sklonem vrypů. Zatímco směry interferenčních maxim $F_{Nm}(\lambda, \vartheta)$ s polarizací záření nesouvisí, úhlové závislosti $f_1(\vartheta)$ jsou polarizačně závislé, což především souvisí s charakterem hraničních podmínek na rozhraní mezi okolním prostředím a kovovým povrchem mřížky, zpravidla povrch je hliníkový. Zejména v krátkovlnové oblasti $\lambda < \lambda_{Blazed}$ bývají rozdíly mezi polarizacemi dosti markantní.

Aplikačně zajímavé jsou **mřížkové polarizátory**, v nichž je mřížka na průchod realizována dobře vodivými proužky. Na povrchu takového materiálu je tečná složka elektrického pole kompenzována elektrickými proudy tak, že je tato složka nulová. Takže do úzké štěrbiny mezi proužky (rozměry řádu $\lambda$) tyto indukované proudy „nevpustí“ záření o polarizaci s elektrickým polem rovnoběžným s těmito proužky, zatímco polarizaci kolmou tato mříž propouští.




Obr. 6.36 Princip mřížkového polarizátoru. Mřížka (i v nultém řádu) propouští záření s elektrickým vektorem kolmým na vodivé pásky a nepropouští záření s elektrickým vektorem rovnoběžným s pásky.

# Dodatky ke kapitole 6

## Dodatek 6.1 Poznámky k historii názorů na difrakci

Pojem difrakce světla zavedl italský vědec Francesco Grimaldi pro odchylky šíření světla od přímočarého, tzv. **ohyb světla** (posmrtná publikace 1665); latinská předpona dis- (opak, negace) a frangere (lámat). Grimaldi tak označil změnu směru šíření světla, která není způsobena lomem v důsledku různých indexů lomu prostředí. V témže století rozvinul Christiaan Huygens intuitivní vlnový popis světla na základě analogie některých optických jevů s mechanickým vlněním. S tím související poučka je známá jako Huygensův princip: „V každém okamžiku lze každý bod na čele šířící se vlny chápat jako nový zdroj vlnění (sekundárních vlnek)." 2. část principu: „Nový tvar čela vlny v čase o malý okamžik pozdějším lze pak určit jako vnější obálku vln, šířících se z těchto zdrojů." Na základě uvedeného principu mohl Huygens odvodit zákony odrazu a lomu.

Vlnový popis světla se však v období 17. a 18. století příliš neprosadil, protože narážel na autoritu Isaaca Newtona, který zastával částicovou teorii světla (světlo je tvořeno proudem malých částic - korpuskulí). Korpuskulární hypotéza převládala až do počátku 19. století, kdy Thomas Young provedl dvojštěrbinový experiment (1807) objasněný hypotézou o vlnové podstatě světla. Vlnová hypotéza byla velmi významně podpořena právě pracemi Augustina Fresnela o difrakci světla. Jedním z velmi známých efektů je tzv. Poissonova světlá skvrnka (též Aragova skvrnka, nejpoctivěji Fresnelova – Aragova – Poissonova stopa) na ose za neprůhledným kruhovým stínítkem hluboko v geometrickém stínu. Její existenci spočetl na základě Fresnelovy teorie Siméon Poisson (původně velký odpůrce vlnové teorie; výpočty prováděl, aby Fresnelovu teorii vyvrátil) a posléze skutečně pozoroval François Arago (1819). Teprve tehdy se vlnová hypotéza stala obecně uznávanou.

Augustin Fresnel (inspirován Hyugensovým principem) matematicky formuloval difrakční úlohu jako plošný **Fresnelův integrál**. Jde o složení nekonečně mnoha sekundárních kulových vln v místě pozorování, které se šíří z bodů v ploše nezastíněné překážkou, např. v ploše otvoru (apertuře). V této formulaci se vytrácela důležitost pojmu vlnoplocha v Huygensově pojetí. Ve Fresnelově pojetí bylo počítáno pole v nějakém bodě a nebyla počítána žádná vlnoplocha jako obálka vln. Taktéž integrační plocha nemusela být vlnoplocha, ale zpravidla integrační plochou se stává plocha apertury, která nemusí být vlnoplochou. Fresnel se zabýval jednak metodami zjednodušení a konkrétních výpočtů na základě „svého" integrálu (**Fresnelova aproximace),** jednak využitím názorné pomůcky při diskuzi o difrakčních jevech zvané **Fresnelovy zóny**. To jsou oblasti na primární vlnoploše, ze kterých dospějí sekundární vlny do místa pozorování s menším dráhovým rozdílem než je $\lambda/2$, tedy se v místě pozorování skládají konstruktivně.

Thomas Young naproti tomu zastával názor, že právě **okraje apertury** jsou pro vznik difrakčních jevů důležité, ale tuto myšlenku se tehdy nepodařilo matematicky rozpracovat. Tato představa čekala na úspěšné zpracování až na přelom 19. a 20. století.

Další významné zjednodušení výpočtu Fresnelova difrakčního integrálu provedl Joseph Fraunhofer, ovšem za dosti razantního omezení podmínek použitelnosti (**Fraunhoferova aproximace**) na dostatečně vzdálená místa pozorování.

Významným počinem bylo uvedení difrakčního integrálu do souvislosti se skalární vlnovou teorií v poslední čtvrtině 19. století. Teorie z poslední čtvrtiny 19. století (Kirchhoff, Sommerfeld, Rayleigh) již Huygensův princip vůbec nepotřebují, ale vycházejí z vlastností řešení Helmholtzovy skalární vlnové rovnice. Tak Gustav Kirchhoff v roce 1882 doplnil právě na základě Helmholtzovy skalární rovnice do Fresnelova integrálu jistý tvar směrového faktoru, viz Dodatek 2.

Dalším matematicky lépe zdůvodněným skalárním popisem byla teorie Sommerfeldova (speciální případ dopadající kulové vlny) zobecněná Rayleighem (1891), která modifikovala problematické předpoklady Kirchhoffova odvození, modifikovala tvar směrového faktoru a rozšiřovala oblast použitelnosti aproximací např. do prostoru blíže překážky šíření světla. Příslušné vztahy jsou označovány jako **Rayleighovy – Sommerfeldovy** difrakční integrály.

Koncem 19. století a v prvních desetiletích 20. století znovu ožila Youngova myšlenka, že pole za aperturou vzniká složením pole dopadající vlny procházející aperturou mimo oblast geometrického stínu beze změny a pole vznikajícího od zdrojů na okrajích apertury buzených dopadajícím zářením. Touto představou se zabývali Gian Maggi (1888) a Wojciech (= Adalbert) Rubinowicz (1917). Byla ukázána ekvivalence popisu pomocí **plošných** difrakčních integrálů a popisu pomocí **křivkových** integrálů přes křivky tuto plochu obklopující. Zjednodušení výpočtů to však nepřineslo.

Za počátek éry **vektorového popisu** difrakčních jevů můžeme pokládat popis difrakce v modelu rovinné vlny dopadající na hranu tvořenou polorovinou nekonečně tenkého ideálního vodiče, který v roce 1896 publikoval Sommerfeld při korektním zahrnutím Maxwellových rovnic a hraničních podmínek na ideálně vodivém tělese. Bez vektorového popisu se neobejdou např. realističtější výpočty vlastností optických mřížek pro spektroskopii ve 20. století, které byly započaty Rayleighem .

***Aplikace v optické spektroskopii***

Spektrální rozklad světla na přírodní difrakční mřížce (ptačí peří) popsal (ale nevysvětlil) James Gregory (1673). První v literatuře zmiňovaná mřížka byla vyrobena Davidem Rittenhousem (1785) napnutím vlasů do závitu šroubů (50 vlasů na 12 mm). Skutečný rozvoj difrakčních mřížek je spojen se jménem Josepha Fraunhofera. Ten rovněž začínal s drátky nataženými mezi závity 2 šroubů (1813), ale na počátku 20. let 19. století již zhotovoval mřížky jako štěrbiny ve zlaté vrstvě na skleněné podložce na rycím stroji. Tyto mřížky užíval k vlastním spektrometrickým měřením.

Z hlediska praktické spektroskopie byla velmi důležitá 2. polovina 19. století, kdy započal rozvoj technologie výroby rytých spektroskopických mřížek na odraz s povrchovým reliéfem a posléze docházelo ke stále rostoucímu významu mřížkových spektrometrů na úkor hranolových přístrojů.

V 60. letech 19. st. byly již difrakční mřížky komerčně dostupné. Např. německý mechanik Friedrich Nobert (1806 – 1881) jimi od 60. let zásoboval přední světové spektroskopisty, v Americe pak byli významnými dodavateli Lewis Morris Rutherfurd (1816 – 1892) a William Rogers (1804 – 1882).

Za „otce moderních difrakčních mřížek" je označován Henry Rowland. Jeho mřížky do té doby nevídaných kvalit byly i velké (19 cm), ryl mřížky i do konkávních podložek (spojení funkce difrakční mřížky a zobrazovacího prvku – konkávního zrcadla). Parametry Rowlandových mřížek překonal (co do velikosti 25 cm i kvality) Albert Michelson použitím interference světla při řízení rycího stroje. Péči o Rowlandovy rycí stroje převzal Robert Wood, stále je zdokonaloval a pro světové spektroskopické laboratoře a pro astronomii zhotovil mnoho kvalitních mřížek. Henry Joseph Grayson na rycím stroji vlastní výroby (1899) dosáhl hustoty asi 4 700 čar/mm. Upravený rycí stroj A. Michelsona produkoval ještě v 50. letech komerční mřížky. Značným pokrokem v hromadné produkci mřížek byla technologie replik, kdy z jedné ryté mřížky bylo možno tímto procesem zhotovit několik "kopií," leckdy i lepších vlastností než původní originál.

Počátkem 20. století byly podrobněji studovány vlastnosti mřížek na odraz, včetně polarizačních vlastností a anomálií v intenzitě difraktovaného světla (R.W. Wood, Lord Rayleigh a další).

Myšlenka na vytváření difrakčních mřížek pomocí interference svazků monochromatického záření se objevila též počátkem 20. století. Za pomoci fotografické techniky vyrobil mřížky Aimé Cotton (1901). Touto myšlenkou se ve 20. letech zabýval i Albert Michelson (1927). Ale až ve druhé polovině 20. století došlo k velmi úspěšné kombinaci laserové techniky a technologií převzatých z polovodičové výroby k výrobě leptaných mřížek s povrchovým reliéfem, které dnes tvoří nejvýznamnější část komerční produkce spektroskopických mřížek.

Koncem 20. století a zejména v posledních letech se stále více používají objemové difrakční mřížky, kdy periodická struktura modulace indexu lomu je vytvořena v objemovém materiálu opět s využitím interference laserových svazků. Tento typ mřížek lze používat v transmisním i reflexním uspořádání, aniž by transmisní mřížky trpěly neduhy amplitudových mřížek. Tyto struktury umožnily návrat i k transmisní geometrii při použití ve spektrometrech, která je přece jen konstrukčně pohodlnější. Dalším typem spektrometrických mřížek použitelných v transmisní geometrii jsou hluboce leptané mřížky.

### *Holografie*

Historie holografie je podstatně kratší než spektroskopie. Základní princip holografie spočívá v rekonstrukci obrazu nějakého předmětu („scény") pomocí **difrakce záření na hologramu**, který byl předtím připraven pomocí interference záření vycházejícího ze „scény" a referenčního záření. V nejjednodušším případě laserové záření jednak osvětluje scénu a jednak slouží i jako referenční záření. Teoretické základy holografie vypracoval Dennis Gabor v roce 1947 při práci na zlepšení rozlišovací schopnosti elektronových mikroskopů. Skutečný rozvoj nastal až po objevení laserů (1960). Již záhy potom byl zhotoven první laserový transmisní hologram (1962 Emmett Leith a Juris Upatnieks) a v témže roce byl připraven i reflexní hologram poskytující zobrazení pozorovatelné při širokospektrálním osvětlení (kombinace principů holografie a

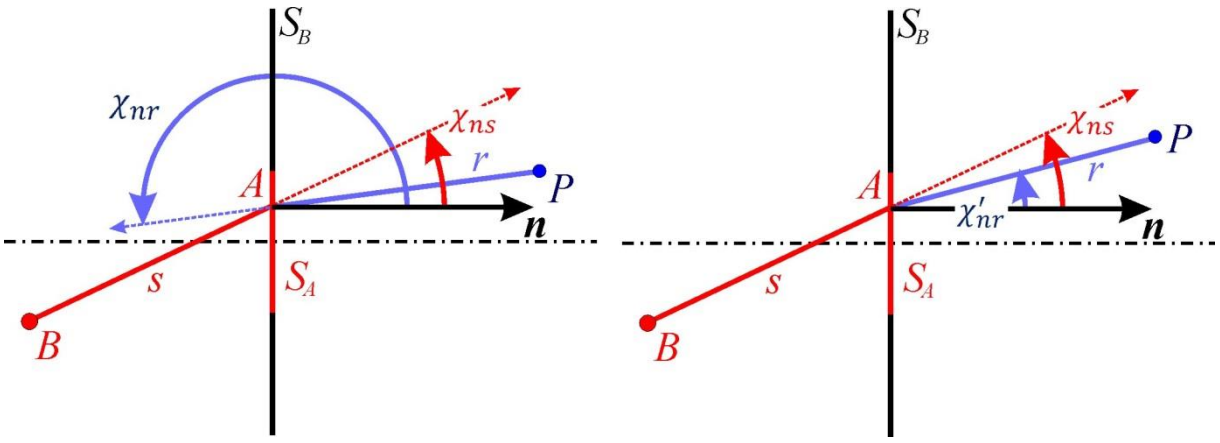
barevné fotografie (Yuri Demisyuk). Transmisní hologram použitelný pro pozorování v širokospektrálním světle je spojen se jménem Stephen Benton (1968).

## Dodatek 6.2 Směrový faktor

Na obr. 6.37 jsou znázorněny úhly podstatné pro zavedení směrového faktoru v difrakčních integrálech. Úhly $\chi_{ns}(x_B, y_B, z_B,\ X, Y)$ a $\chi_{nr}(\ X, Y,\ x, y, z)$ jsou určeny vzájemnou polohou zdroje vlny $B$, místa $A$ na integrační ploše $S_A$ i místa pozorování $P$, ve kterém se má spočítat rozruch $E$ přes difrakční integrál 6.1 doplněný o směrový faktor $K$

$$E(x, y, z) \cong \frac{-i}{\lambda} \iint_{S_A} E(X, Y, 0) \frac{e^{ikr}}{r} K(\chi_{ns}, \chi_{nr})\ dS_{A.},$$

Pole v prostoru, kde zkoumáme difrakci, je tak konstruováno z „kulových" vln s deformovaným rozložením amplitudy $\frac{e^{ikr}}{r}\ K(\chi_{ns}, \chi_{nr})$, které obecně nesplňují vlnovou rovnici.




Obr. 6.37 Uspořádání, ve kterém integrace probíhá přes rovinnou plochu apertury $S_A$. Bod apertury $A$ má souřadnice $(X, Y, 0)$. V tomto případě bodový zdroj vlnění v místě $B$ vytváří pole v místě apertury $E(X, Y, 0) = E_{0B} \frac{e^{iks}}{s}$. Zakreslen je speciální případ, kdy body $B, A, P$ leží v jedné rovině, což v obecném případě být nemusí.
Vlevo je naznačen význam úhlu $\chi_{ns}$ jako úhlu mezi normálou k integrační ploše $\boldsymbol{n}$ a orientovanou polopřímkou $\overrightarrow{BA}$ a úhlu $\chi_{nr}$ jako úhlu mezi normálou $\boldsymbol{n}$ a polopřímkou $\overrightarrow{PA}$. Tato volba má blízko ke způsobu odvození Kirchhoffova integrálu. Vpravo je nakreslena alternativní definice úhlu $\chi'_{nr}$ jako úhlu mezi $\boldsymbol{n}$ a $\overrightarrow{AP}$. V literatuře se lze setkat i s opačnou definicí normálového vektoru $\boldsymbol{n'} = -\boldsymbol{n}$.

| | | |
|---|---|---|
| *a*) | $K(\chi) = 1$ | paraxiální aproximace |
| *b*) | $K(\chi_{ns}, \chi_{nr}) = \frac{\cos\chi_{ns} - \cos\chi_{nr}}{2}$ | Kirchhoffův difrakční integrál, varianty se liší definicí úhlů $\chi$ |
| | $K(\chi_{ns}, \chi'_{nr}) = \frac{\cos\chi_{ns} + \cos\chi'_{nr}}{2}$ | |
| *c*) | $K(0, \chi_{nr}) = \frac{1 + \cos\chi_{nr}}{2}$ <br> $\chi_{nr} \in \langle -\pi, \pi \rangle,$ | zvláštní případy Kirchhoffova integrálu |
| *d*) | $K(\chi_{nr}) = \cos\chi_{nr}$ pro $\chi_{nr} \in \langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ <br> $K(\chi_{nr}) = 0$ pro $\chi_{nr} \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$ | Rayleighova – Sommerfeldova formulace I |
| *e*) | $K(\chi_{ns}) = \cos\chi_{ns}$ pro $\chi_{ns} \in \langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ <br> $K(\chi_{ns}) = 0$ pro $\chi_{ns} \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$ | Rayleighova – Sommerfeldova formulace II |

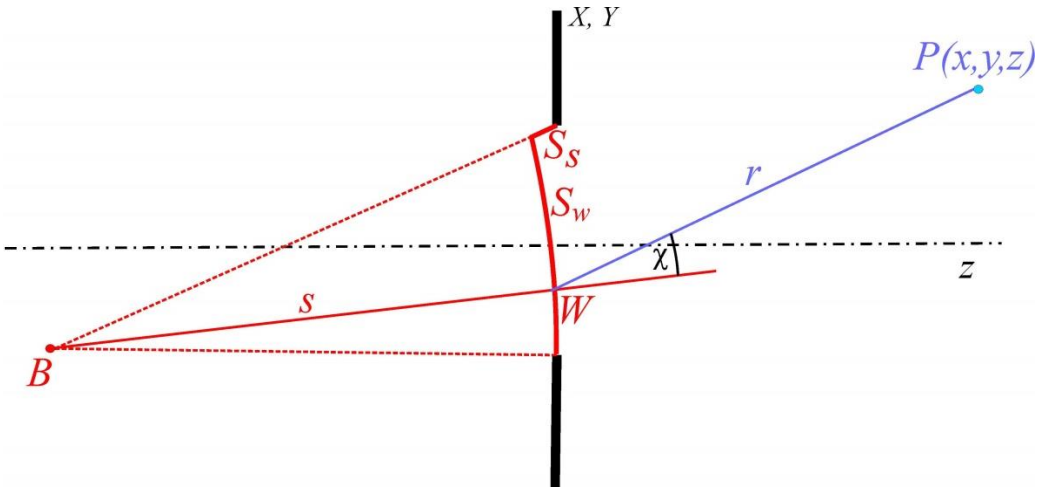
Případy $b$), $c$) byly odvozeny pro okrajovou podmínku, že $E = 0$ a zároveň $\frac{\partial E}{\partial n} = 0$ těsně za neprůhlednou částí rovinného stínítka (tedy všude vyjma apertury). Přesně matematicky vzato, současné splnění těchto podmínek implikuje nulové pole v celém „difrakčním“ prostoru, kde nás intenzita záření zajímá. Tyto předpoklady jsou tedy nerealistické.
Případ $d$) byl odvozen pro $E = 0$ těsně za neprůhlednou částí rovinného stínítka a též pouze pro rovinnou integrační plochu apertury, tedy např. nikoli pro integrační plochu přes kulovou vlnoplochu.
Případ $e$) byl odvozen pro předpoklad $\frac{\partial E}{\partial n} = 0$ těsně za neprůhlednou částí rovinného stínítka; ostatní podmínky stejné jako pro *d*).
Všechny uvedené integrály jsou aproximacemi odvozených výrazů pro dostatečně velké vzdálenosti $ks \gg 1$ a $kr \gg 1$.

Často uváděný tvar **Fresnelova - Kirchhoffova difrakčního integrálu** (*c*) je formulován pro speciální případ dopadající kulové vlnu, jejíž zdroj se nachází v dostatečně veliké vzdálenosti od překážky a rovněž místo pozorování $P(x, y, z)$ je od překážky daleko. Výsledek je možno napsat jako **integrál přes část vlnoplochy** (obr. 6.38)

$$E(x, y, z) \cong \frac{-iE_{0A}}{\lambda} \int_{S_w} \frac{e^{iks}}{s} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1 + \cos\chi}{2}\, dS_w,$$

kde $\frac{E_{0A}\, e^{iks}}{s}$ je dopadající kulová vlna, $S_w$ je plocha **vlnoplochy** přispívající k poli v místě $P(x, y, z)$. Vzdálenosti $s, r$ a úhly $\chi$ jsou naznačeny na obrázku 6.38 a jsou funkcemi polohy bodu na integrační ploše $S_w$. Za podmínek dopadu blízkých kolmému dopadu rovinné vlny mizí

příspěvky od plošek $S_S$ a úhel $\chi$ je možno brát jako úhel mezi normálou k rovině apertury a spojnicí mezi bodem apertury a místem pozorování, obr. 6.38.



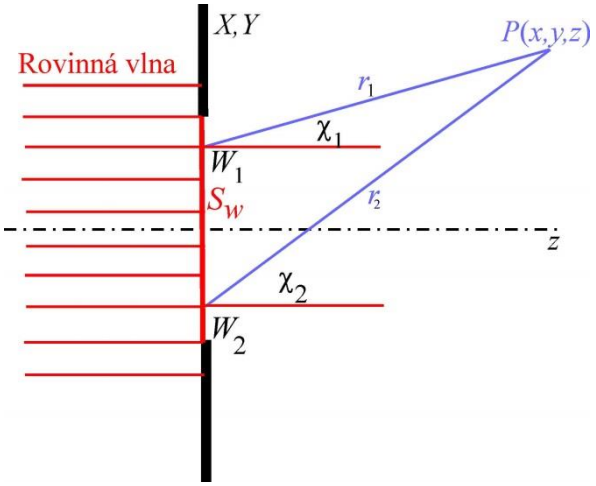

Obr. 6.38 Parametry vystupující ve tvaru Fresnelova – Kirchhoffova integrálu, kdy je částí integrační plochy část vlnoplochy. $B$ je zdroj kulové vlny, $W$ je obecný bod na kulové vlnoploše o poloměru $s$ poblíž aperturní roviny ($W$ nemusí ležet v apertuře), $P$ je místo pozorování, $r$ je vzdálenost bodu $P$ od bodu $W$. $S_w$ je část kulové vlnoplochy přispívající do integrálu, $S_s$ je malá rozdílová plocha mezi aperturou a kulovou vlnoplochou. $\chi$ je úhel, který svírají polopřímky $BW$ a $WP$. Protože $S_w$ je vlnoplocha, je $BW$ normálou k integrační ploše a tedy $\chi_{ns} = 0$ a $\chi = \pi - \chi_{nr}$. Pak je směrový faktor $K(\chi) = \frac{\cos\chi_{ns} - \cos\chi_{nr}}{2} = \frac{1+\cos\chi}{2}$, což je často uváděný vztah.

Pro velká $s$ (velmi vzdálený zdroj, „téměř rovinná vlna“ nebo rovinná vlna) dopadající na rovinu apertury ze směru charakterizovaném úhly $\theta_i, \varphi_i$ dostaneme pro difrakční integrál aproximaci

$$E(x,y,z) \cong \frac{-i}{\lambda} \int_{S_A} E(X,Y,0) \frac{e^{ikr}}{r} K(\chi)\, dXdY,$$

$$E(X,Y,0) = E_0\, e^{ik(X\sin\theta_i + Y\sin\varphi_i)}$$

kde integrujeme přes plochu otvoru ve stínítku (aperturu) $S_A$.

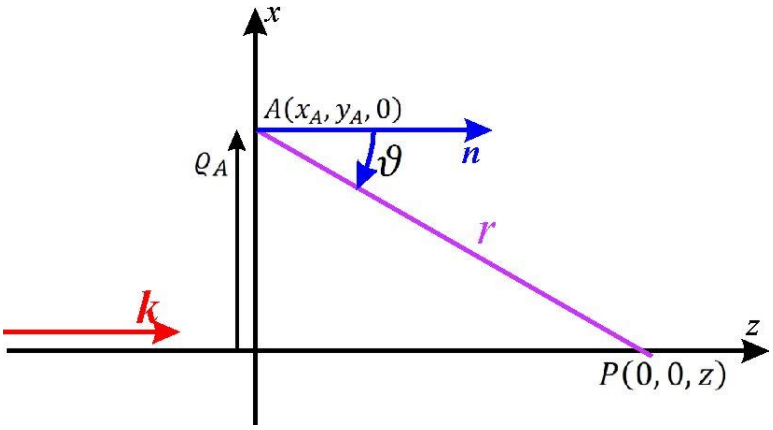



Obr. 6.39 Význam parametrů vzdálenosti $r(X,Y,x,y,z)$ a úhlů $\chi(X,Y,x,y,z)$ pro difrakční integrál pro rovinnou dopadající kolmo na rovinu apertury, $\theta_i = \varphi_i = 0$. Nakresleno pro 2 obecné body $W_1$ a $W_2$ na vlnoploše $S_w \equiv S_A$ v rovině apertury.

Geometrické parametry $r, \chi$ jsou funkcemi souřadnic $X, Y, x, y, z$. Pro kolmo dopadající rovinnou vlnu má pole v apertuře konstantní amplitudu $E(X, Y, 0) = E_0$.

## Dodatek 6.3 Šíření rovinné vlny volným prostorem

Příkladem spočitatelné limity difrakčního integrálu se zahrnutím směrového faktoru $\cos\vartheta$ je úloha šíření rovinné vlny prázdným prostorem bez překážek. Tato úloha má značný historický význam, protože vedla Fresnela k intuitivnímu zavedení předintegrálního fázového členu $\frac{-ik}{2\pi} = \frac{-i}{\lambda}$ a směrového faktoru $\cos\vartheta$, plně v souladu s mnohem později odvozeným integrálem Rayleigho a Sommerfelda.




Obr. 6.40 Geometrické uspořádání k výpočtu difrakčního integrálu šíření rovinné vlny volným prostorem. Na obrázku je řez $y_A = 0$, úloha je osově symetrická kolem osy $z$.

„Dopadající“ vlna je rovinná a v místě „apertury“ je homogenní rozložení pole $E(X,Y,0)=1$. V celé rovině $z=0$ není žádná překážka. Bod $P(0,0,z)$ považujme za pevný, zatímco bod $A(X,Y,0)$ probíhá celou rovinu $z=0$. Vzruch v místě „pozorování“ $P$ je

$$E(P)=\frac{-ik}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikr}}{r}\cos\vartheta\,dx_A\,dy_A=\frac{-ik}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{z}{r}\,dx_A\,dy_A.$$

Tento integrál obsahuje směrový faktor $\cos\vartheta$ a není aproximován ani Fresnelovým ani Fraunhoferovým přiblížením. Zavedením polárních souřadnic v rovině $z=0$, $x_A=\varrho_A\cos\varphi_A$, $y_A=\varrho_A\sin\varphi_A$ dostaneme

$$E(P)=\frac{-ikz}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r^2}\,d\varphi_A\right]\varrho_A\,d\varrho_A=-ikz\int_0^{\infty}\frac{e^{ikr}}{r^2}\,\varrho_A\,d\varrho_A.$$

Protože $z$ je konstanta a $r^2=\varrho_A^2+z^2$, je $2r\,dr=2\,\varrho_A\,d\varrho_A$ a protože nejmenší možné $r$ určuje poloha bodu $P$, tj. $z$, je

$$E(P)=-ikz\int_z^{\infty}\frac{e^{ikr}}{r^2}\,r\,dr=-ikz\int_z^{\infty}\frac{e^{ikr}}{r}\,dr.$$

Tento integrál patří ke speciálním funkcím, které se nazývají integrální sinus $\mathrm{Si}(x)$ a integrální kosinus $\mathrm{Ci}(x)$ a jsou zavedeny pro $x>0$ jako

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt,\quad \mathrm{Ci}(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{t}\,dt.$$

Po substituci $t=kr$

$$E(P)=-ikz\int_z^{\infty}\frac{e^{ikr}}{r}\,dr=-ikz\int_{kz}^{\infty}\frac{e^{it}}{t}k\frac{dt}{k}=$$

$$=-ikz\left(\int_{kz}^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt+i\int_{kz}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)=$$

$$=-ikz\left(\int_0^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt-\int_0^{kz}\frac{\cos t}{t}\,dt+i\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt-i\int_0^{kz}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)=$$

$$=-ikz\,[\mathrm{Ci}(\infty)-\mathrm{Ci}(kz)+i\mathrm{Si}(\infty)-i\mathrm{Si}(kz)].$$

Asymptotické přiblížení pro $x>2\pi$ je

$$\mathrm{Si}(x)\cong\frac{\pi}{2}-\frac{\cos x}{x},\quad \mathrm{Ci}(x)\cong\frac{\sin x}{x}.$$

$$E(P) \cong -ikz\left(0 - \frac{\sin kz}{kz} + i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2} + i\frac{\cos kz}{kz}\right) = kz\left(\frac{\cos kz}{kz} + i\frac{\sin kz}{kz}\right) =$$

$$= e^{ikz},$$

což je rovinná vlna šířící se volným prostorem s vlnovým vektorem ve směru osy $z$.

## Dodatek 6.4 Použitelnost Fraunhoferovy aproximace

Alternativní kritéria pro použitelnost Fraunhoferovy aproximace pro kruhový otvor:

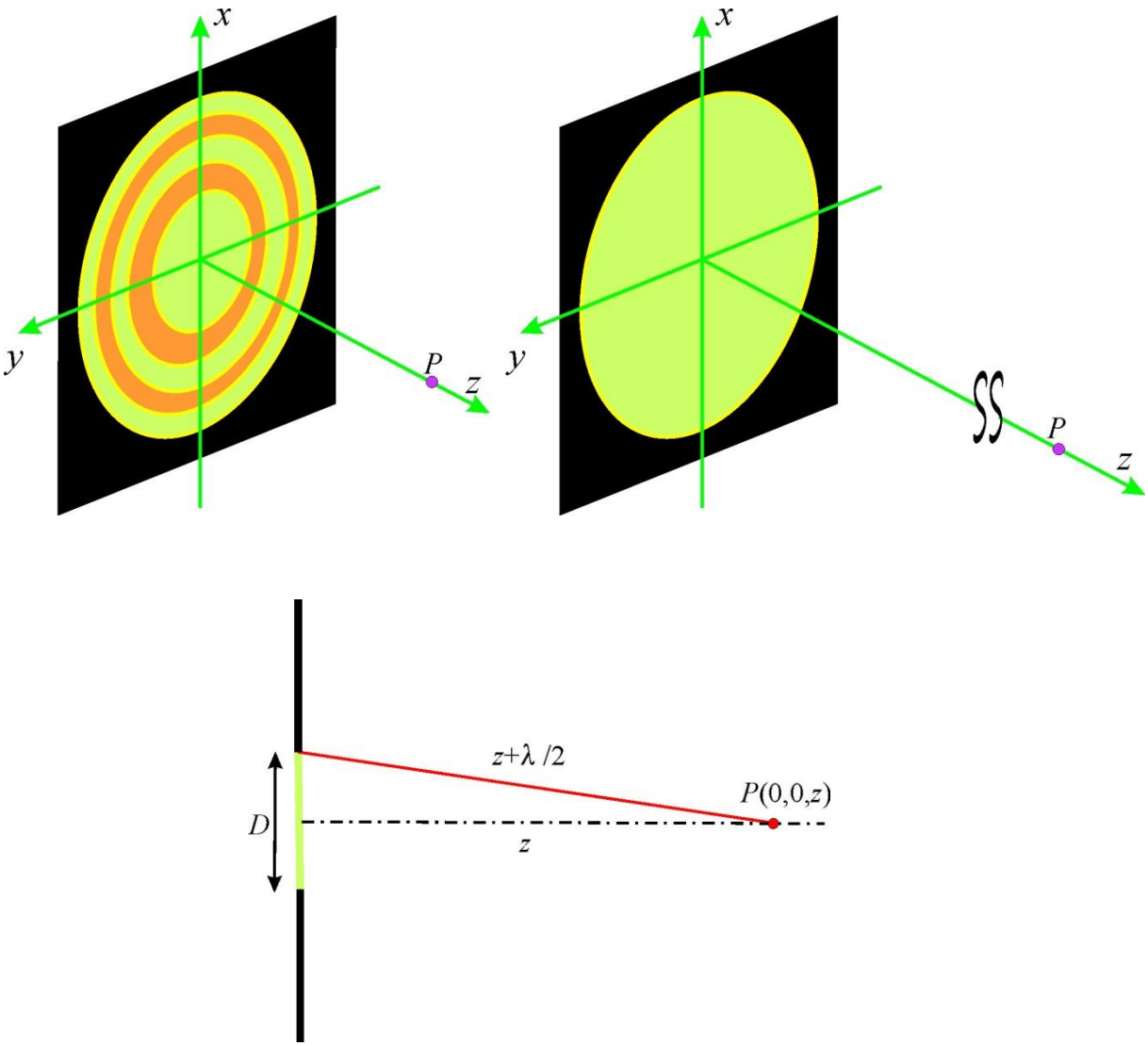
a) Celá apertura je vyplněna z pohledu bodu na ose kruhového otvoru jedinou Fresnelovou zónou $z > \frac{D^2}{4\lambda} = 0{,}25\ \frac{D^2}{\lambda}$; pro větší vzdálenosti již nedochází k oscilacím intenzity na ose s růstem $z$, které jsou typické pro Fresnelovu difrakci.

Fresnelova zóna je část integrační plochy, ze které sekundární vlnky dospějí do místa pozorování s fázovými rozdíly menšími než $\pi$. Fresnelovy zóny jsou obvykle vymezovány na primární vlnoploše, na které kmitají „sekundární zdroje“ ve fázi. Pak je rozdíl fází jednoduše převeditelný na dráhový rozdíl, který musí být menší než $\lambda/2$. Pro případ rovinné vlny dopadající kolmo na aperturu a místo pozorování $(0, 0, z)$ dostáváme podmínku pro poloměr středové Fresnelovy zóny $r_1$

$$r_1^2 + z^2 = \left(z + \frac{\lambda}{2}\right)^2, \qquad z \cong \frac{r_1^2}{\lambda}.$$

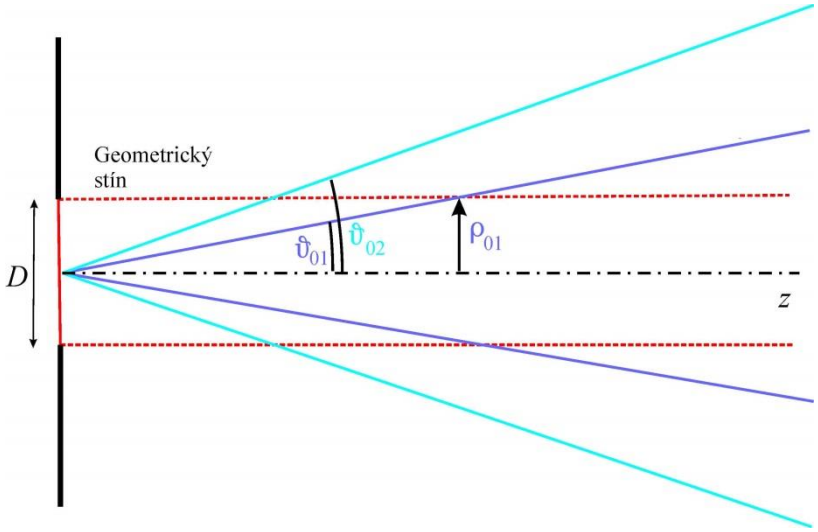
Ztotožníme-li rozměr středové Fresnelovy zóny s rozměrem kruhové apertury ($r_1 = \frac{D}{2}$), dostaneme pro minimální vzdálenost místa pozorování od apertury

$$z > z_{MIN} = \frac{1}{4}\frac{D^2}{\lambda}.$$




Obr. 6.41 K určení rozměru středové Fresnelovy zóny. Máme-li kruhovou aperturu o průměru $D$ a bod pozorování $P$ ležící na ose apertury v místě $z < z_{MIN}$ bližším k apertuře než je mezní vzdálenost pro platnost Frauenhoferovy aproximace, vyplňuje aperturu více Fresnelových zón. S rostoucím $z$ se poloměry Fresnelových zón zvětšují, až dosáhneme bodu, kdy celou aperturu vyplňuje 1. Fresnelova zóna. V tuto chvíli se všechny elementární kulové vlny vycházející z apertury skládají konstruktivně. S dalším růstem $z$ se poloměr 1.zóny dále zvětšuje, skládání vln je nadále konstruktivní. Na ose $z$ je stále maximum intenzity (oblast Frauenhoferovy aproximace), ale intenzita v maximu s rostoucím $z$ slábne jako $1/z^2$.

Dalším alternativním postupem pro stanovení kritéria platnosti Frauenhoferovy aproximace difrakčního integrálu je vyjít z podmínky, že 1. nulový bod Frauenhoferova difrakčního obrazce kruhového otvoru musí ležet v oblasti geometrického stínu. Poloměr výskytu prvního nulového bodu je dán vztahem $\frac{kD}{2}\frac{\varrho_{01}}{z} = 1{,}22\pi$. Minimální $z$ určíme z podmínky $\rho_{01} = D/2$, $z > 0{,}41\frac{D^2}{\lambda}$. (obr. 6.42).




Obr. 6.42 Schéma kritéria pro použitelnost Fraunhoferovy difrakce na kruhovém otvoru na základě polohy 1. nulového bodu intenzity difrakčního obrazce kruhového otvoru. Červená čárkovaná čára odděluje oblast geometrického stínu a „světla“, $\vartheta_{01}$ určuje rozbíhání prvního nulového bodu Fraunhoferova obrazce, $\vartheta_{02}$ ukazuje rozbíhání druhého nulového bodu. Obrázek není v měřítku, musí být $z(\rho_{01}) \gg D$.

## Dodatek 6.5 – výpočet difrakčních integrálů na ose kruhové apertury a na ose kruhového stínítka

### Difrakce na ose kruhové apertury - výpočet z difrakčního integrálu 6.1

Mezi jednoduché případy analytického výpočtu difrakčního integrálu patří průběh intenzity elektrického pole na přímce procházející kolmo středem kruhového otvoru o průměru $D$ (osa apertury), na který dopadá kolmo rovinná vlna. Budeme proto předpokládat, že elektrické pole uvnitř apertury je konstantní $E(X,Y,0) = E_0$ a dále budeme předpokládat směrový faktor $K(\delta) = 1$.

Rovnici 6.4 pro osu otvoru ($x = y = 0,\ z > 0$) umístěného v poloze $z = 0$ můžeme psát

$$E(0,0,z) \cong \frac{-i}{\lambda} \int_S E_0 \frac{e^{ikr}}{r}\ dS,$$

$$E(0,0,z) \cong \frac{-i}{\lambda} \int_S E_0 \frac{e^{ik\sqrt{X^2+Y^2+z^2}}}{\sqrt{X^2+Y^2+z^2}}\ dXdY,$$

kdy jsme uvážili, že v našem případě (zajímá nás průběh $E(0,0,z)$ na ose $x = y = 0$) platí

$$(x-X)^2 + (y-X)^2 + (z-Z)^2 = X^2+Y^2+z^2.$$

Zavedeme polární souřadnice

$$X = \rho\cos\varphi,\ \ Y = \rho\sin\varphi,$$

ve kterých je

$$E(0,0,z) = \frac{-i}{\lambda}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{D}{2}} E_0\frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Zavedeme substituci $\xi = \sqrt{\rho^2+z^2},\ d\xi = \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ a dostaneme

$$E(0,0,z) = \frac{-2\pi i E_0}{\lambda}\int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{ik\xi}d\xi,$$

kde integrační meze jsou $\xi_1 = z, \xi_2 = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2}$.

$$E(0,0,z) = \frac{iE_0 2\pi}{\lambda}\,\frac{e^{ikz} - e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+z^2}}}{ik} = E_0\left(e^{ikz} - e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+z^2}}\right).$$

Hustota elektrické energie je úměrná součinu $E(0,0,z)\,E^*(0,0,z)$, takže nakonec dostáváme

$$I(0,0,z) \propto E(0,0,z).E^*(0,0,z) =$$

$$= |E_0|^2\left(e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+z^2}} - e^{ikz}\right).\left(e^{-ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+z^2}} - e^{-ikz}\right) =$$

$$= 2|E_0|^2\left\{1 - \cos\left[k\left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2} - z\right)\right]\right\}.$$

Dostáváme tedy, že průběh hustoty elektrické energie na ose kruhové apertury v oblasti blízké za aperturou je periodická funkce oscilující mezi hodnotami 0 a $4|E_0|^2$. Pro velká $z$ je

$$\lim_{z\to\infty}\left\{1 - \cos\left[k\left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2} - z\right)\right] = 0\right\}$$

a intenzita $I(0,0,z)$ se blíží k nule.

S využitím Babinetova principu můžeme nyní snadno vypočítat průběh $E(0,0,z)$ za kruhovou překážkou o průměru $D$. Uvážíme, že elektrické pole odpovídajícímu volnému šíření vlny bez překážky je součtem polí od kruhové apertury a kruhového stínítka

$$E_{volný\ prostor} = E_{kruhový\ otvor} + E_{kruhové\ stínítko}$$

$$E_{kruhové\ stínítko} = E_{volný\ prostor} - E_{kruhový\ otvor}$$

S využitím Babinetova principu. dostaneme

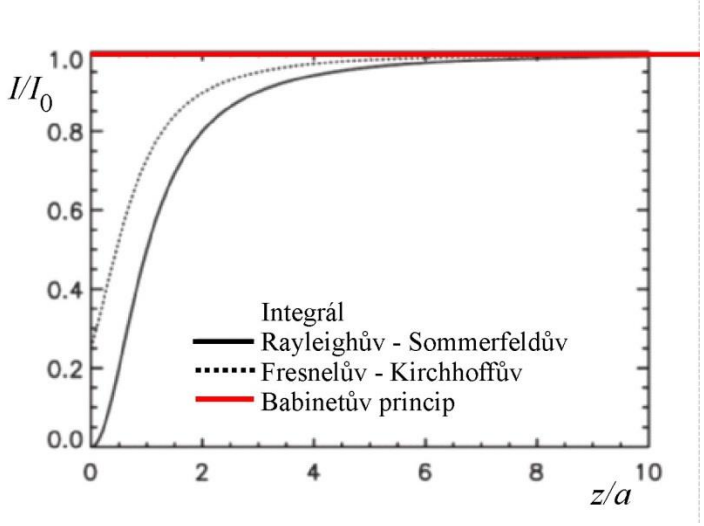
$$E_{kruhové\ stínítko} = E_0 e^{ikz} - E_0 \left( e^{ikz} - e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2}} \right) = E_0 e^{ik\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + z^2}}.$$

Hustota elektrické energie za kruhovým stínítkem pak je

$$I(0,0,z) \sim E(0,0,z).E^*(0,0,z) = |E_0|^2$$

Intenzita vlny na ose za kruhovým stínítkem **je v této aproximaci** konstantní. Měření intenzity za kruhovým stínítkem mělo velký historický význam při diskusi o podstatě světla. Na základě soutěže vypsané francouzskou akademií věd podal A.J. Fresnel práci podporující vlnovou teorii světla. Člen komise, F. Poisson, který byl zastáncem částicové teorie, namítal, že pokud by vlnová teorie byla správná, musela by být na ose za kruhovým stínítkem pozorována světlá skvrna. Na základě komisí iniciovaného přesného měření byla světlá skvrna skutečně objevena (D.F.J. Arago). To znamenalo silnou podporu vlnové teorii a A.J. Fresnel získal cenu akademie věd. Poněkud paradoxně se v literatuře tato skvrna zpravidla nazývá Poissonova.

S přiblížením místa pozorování k ose neprůhledného kruhového terčíku na vzdálenost srovnatelnou s průměrem terčíku Poissonava skvrna slábne, což výše uvedený model neobsahuje, a to z důvodu zanedbání směrového faktoru.




Obr 6.43 Relativní intenzita Poissonovy skvrny v závislosti na poměru vzdálenosti $z$ od nepropustného kruhového terčíku k poloměru terčíku $a$. Je vidět, že výsledná intenzita je přibližně stejná (jako kdyby tam nepropustný terčík nebyl) pro všechny tři modely pro vzdálenosti $z > 5a$. Červeně je vyznačen konstantní průběh výše odvozený z Babinetova principu s použitím výpočtu difrakce na kruhovém otvoru s konstantním směrovým faktorem 1. Závislosti pro R-S a F-K integrál jsou podle R.L. Lucke: Rayleigh – Sommerfeld Diffraction vs Fresnel – Kirchhoff, Fourier Propagation, and Poisson's Spot, Naval Research Laboratory NRL/FR/, 7218-04-10,101, December 2004.

## Difrakce na ose kruhové apertury ve Fresnelově aproximaci pro kolmo dopadající rovinnou vlnu

Nejprve provedeme výpočet intenzity na ose apertury $E(0,0,z)$ ve Fresnelově aproximaci (skládání parabolických vln, rovnice 6.4).

$$E(0,0,z) \cong \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} \int_{S_A} E_0 e^{ik\frac{(X^2+Y^2)}{2z}} \, dX dY.$$

Pro popis plochy kruhové apertury opět použijeme polární souřadnice a po dosazení dostaneme Fresnelovu aproximaci ve tvaru

$$E(0,0,z) \cong \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} e^{ik\frac{\rho^2}{2z}} \rho \, d\rho \, d\varphi$$

Zavedením substituce

$$\rho^2 = \xi, \qquad 2\rho \, d\rho = d\xi$$

převedeme integrál na

$$E(0,0,z) \cong \frac{-2\pi i}{\lambda z} e^{ikz} E_0 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{D^2}{4}} e^{ik\frac{\xi}{2z}} \, d\xi =$$

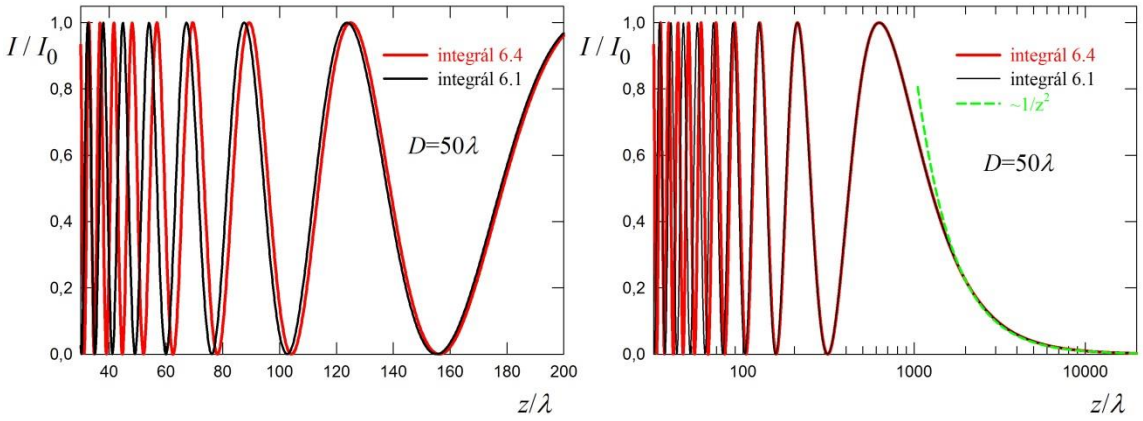
$$= \frac{-2\pi i}{\lambda z} e^{ikz} E_0 \frac{z}{k} \left[ e^{\frac{ik\xi}{2z}} \right]_0^{D^2/4} = -iE_0 e^{ikz} \left( e^{\frac{ikD^2}{8z}} - 1 \right) =$$

$$= iE_0 e^{ikz} \left( 1 - e^{\frac{ikD^2}{8z}} \right).$$

Hustota elektrické energie na ose apertury pak je

$$I(0,0,z) \propto E(0,0,z)\, E^*(0,0,z) = 2E_0^2 \left( 1 - \cos \frac{kD^2}{8z} \right)$$

Výsledkem je intenzita, která osciluje mezi 0 a maximální hodnotou úměrnou $E_0^2$.




Obr 6.44, opakování obr.6.6 Intenzita difrakčního obrazu na ose kruhové apertury, vše bez započtení směrového faktoru. V levé části (menší vzdálenost od apertury) jsou patrné odchylky ve výsledcích výpočtu integrálů podle Fresnelovy aproximace (vztah 6.4) a výpočtu integrálu 6.1). Na ose se tedy v oblasti Fresnelovy difrakce střídají s rostoucí vzdáleností od apertury maxima a minima intenzity (světlé a tmavé body). V oblasti Fraunhoferovy aproximace (pravá část obrázku) je na ose apertury světlý bod, jehož intenzita postupně klesá jako $\propto {}^{1}/_{z^2}$.

## Difrakce na ose kruhové apertury ve Frauenhoferově aproximaci

Výpočet na ose kruhové apertury o průměru $D$ můžeme provést podobně, jako jsme postupovali v případě Fresnelovy aproximace. Vyjdeme z rovnice 6.6 a dostaneme (na ose apertury je $x, y = 0$)

$$E(0,0,z) \cong \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} \iint_{aper} E_0 \; dXdY = \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} \rho \, d\rho \, d\varphi$$

$$E(0,0,z) \cong \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} E_0 2\pi \int_0^{\frac{D}{2}} \rho \, d\rho = \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} E_0 2\pi . \frac{D^2}{8} = \frac{-i}{\lambda z} e^{ikz} E_0 \pi \frac{D^2}{4}$$

a příslušná hustota elektrické energie je

$$I(0,0,z) \propto E(0,0,z)\, E^*(0,0,z) = \frac{1}{\lambda^2 z^2} E_0^2 \pi^2 \frac{D^4}{16}.$$

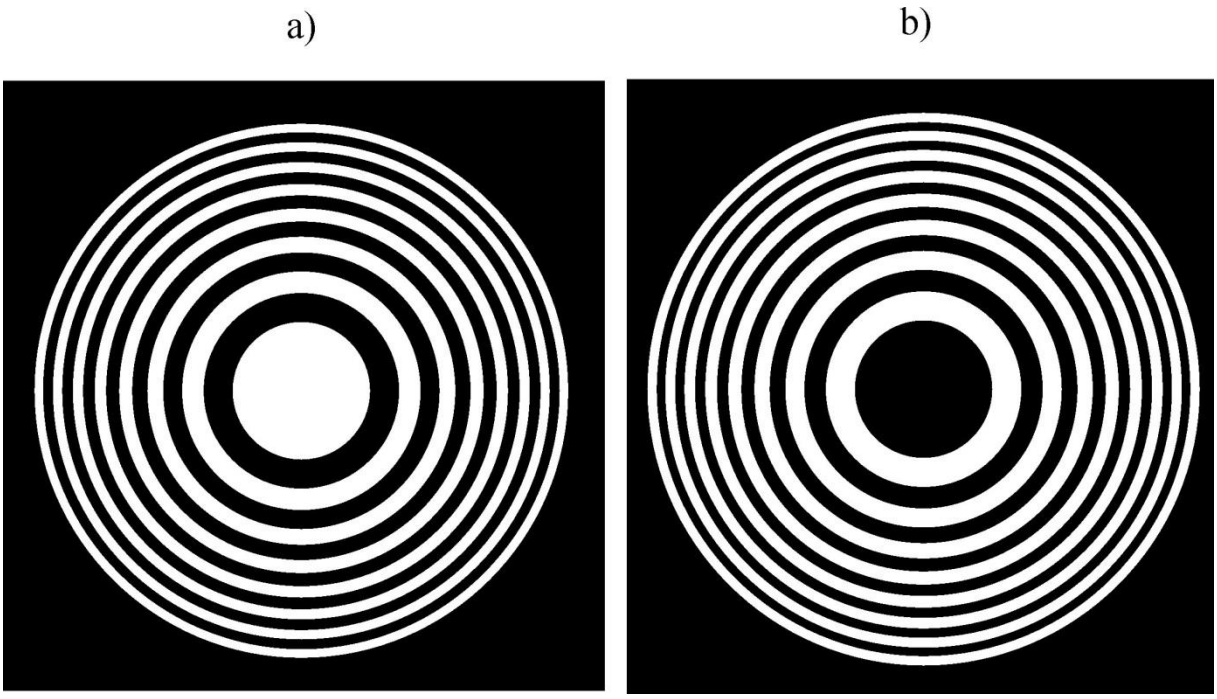
## Dodatek 6.6 Fresnelovy zónové desky (zonální mřížky)

Binární amplitudové Fresnelovy zónové desky jsou tvořeny kruhově symetrickými aperturami, přičemž se střídají propustná a nepropustná mezikruží tak, že odpovídají sudým a lichým Fresnelovým zónám. Na struktuře kruhově symetrické mřížky dochází k difrakci. Příslušný difrakční obrazec v případě dopadu rovinné vlny na zónovou destičku v bodě pozorování $P$ a jeho okolí je dán splněním podmínek pro rozměry Fresnelových zón pro danou vzdálenost bodu $P$ od destičky. Pokud např. celou plochu kruhové apertury vyplňuje první Fresnelova zóna, je intenzita v bodě $P$ velká. Pokud by apertura byla vyplněna prvními dvěma zónami, je naopak intenzita velmi malá, protože se příspěvky od obou zón navzájem téměř odečtou. Pokud zakryjeme jen liché/sudé zóny, intenzita v místě $P$ je relativně velká, protože příspěvky těchto zón se skládají konstruktivně.

Pokud chceme, aby lokální maximum intenzity nastalo ve vzdálenosti $f_{ZP}$, je potřeba, aby poloměry hranic zón Fresnelovy desky splňovaly podmínku

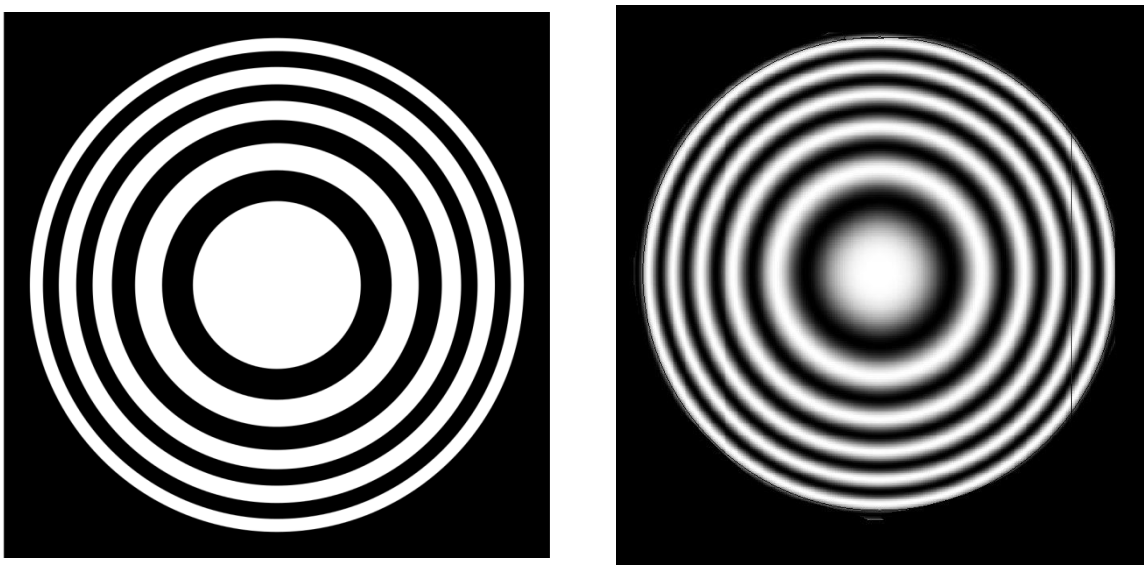
$$r_m = \sqrt{m\lambda f_{ZP} + \frac{1}{4}m^2\lambda^2},$$

kde $f_{ZP}$ je analogií ohniskové vzdálenosti čočky. Podstatný rozdíl oproti čočce spočívá v tom, že obecně binární zónová deska (ostré střídání zóna propouští / nepropouští) je multifokální, další maxima se objevují ve vzdálenostech $f_{ZP}/3, f_{ZP}/5, f_{ZP}/7, \ldots$

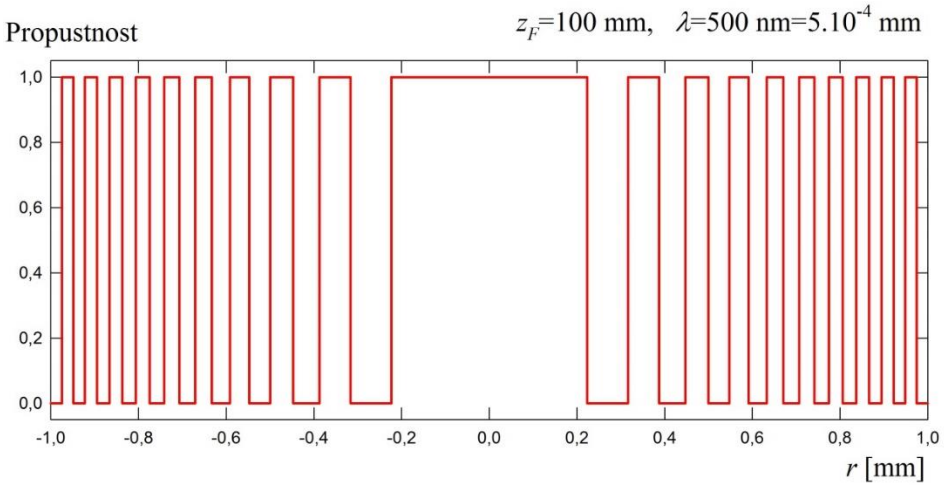



Obr. 6.45 Fresnelova zónová deska a) lichá (pozitivní, je propustná pro liché zóny), b) sudá (negativní). Tmavé oblasti vyznačují plochy stínítka v apertuře, přes které neprochází světlo.

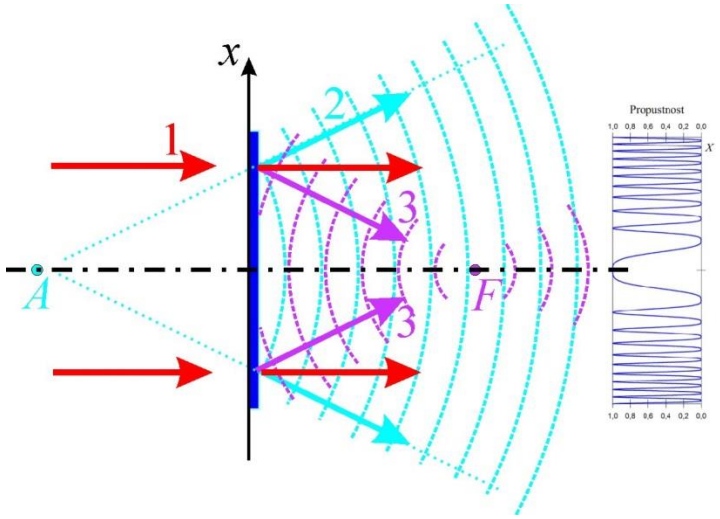
Tato „nadbytečná“ ohniska lze omezit „kosinovou“ modulací propustnosti, jak naznačeno v pravé části obrázku 6.46. Výsledkem difrakce rovinné vlny na takové modulované struktuře jsou rovinná procházející vlna a 2 hlavní difraktované vlny, mezi které se rozdělí dopadající zářivý výkon: vlna za deskou divergující a vlna konvergující do zde uvažovaného ohniska, obr. 6.48. Divergující vlna souvisí s tím, že taková modulovaná struktura je vlastně hologramem bodového zdroje, který vznikne interferencí kulové vlny a referenční rovinné vlny. Při osvětlení takového hologramu rovinnou vlnou dostaneme zmíněné difraktované divergující a konvergující vlny.



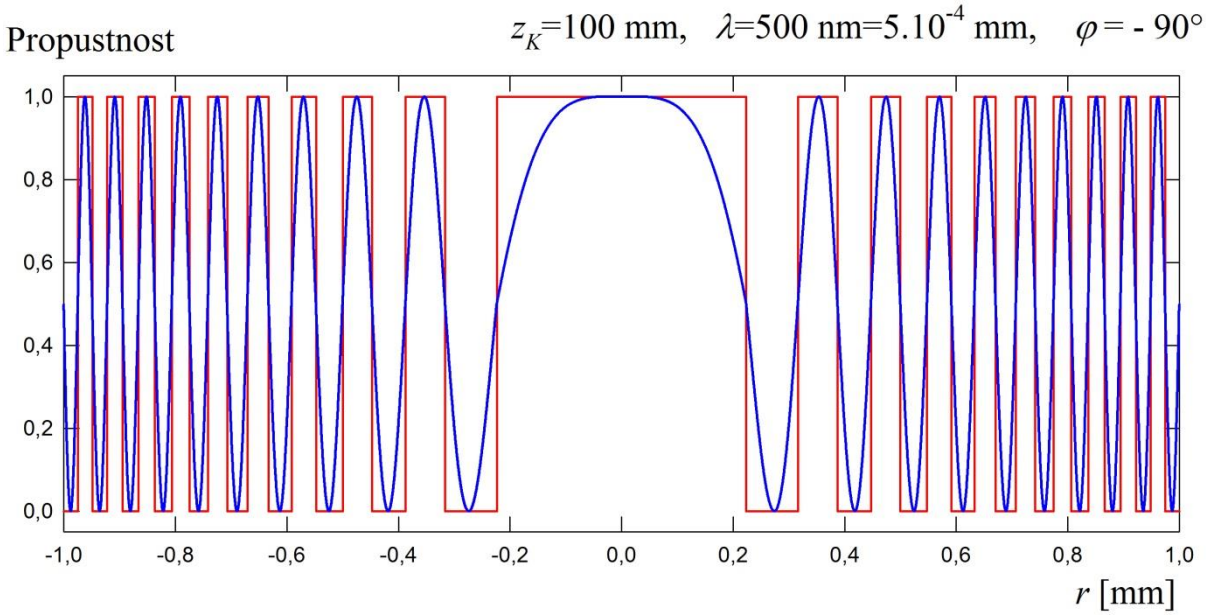
Obr. 6.46 Ukázka „binární“ a „kosinově“ modulované Fresnelovy desky https://en.wikipedia.org/wiki/Zone_plate




Obr 6.47 Radiální závislost propustnosti Fresnelovy zónové desky se základní ohniskovou vzdáleností $z_F = 10$ cm spočtená podle vztahu $r_m = \sqrt{m\lambda z_F + \frac{1}{4}m^2\lambda^2}$.




Obr. 6.48 Difrakce rovinné vlny na kruhově symetrické mřížce s kosinově modulovanou propustností Fresnelových zón. 1 dopadající rovinná vlna, 2 divergující kulová vlna tvořící virtuální obraz bodu $A$ (holografický obraz bodu $A$), 3 konvergující kulová vlna směřující do reálného ohniska $F$. Vpravo je naznačena propustnost zónové desky (tj. hologramu bodu $A$).



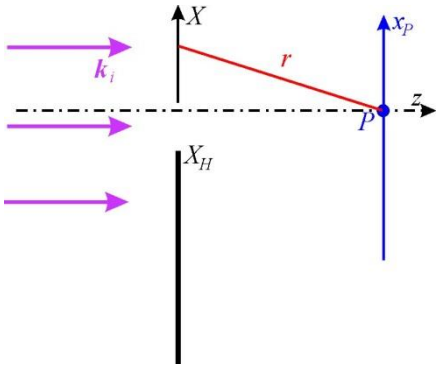

Obr 6.49 Radiální závislost propustnosti kosinově modulované zónové desky s ohniskovou vzdáleností $z_F = 10$ cm.

Zónové desky lze použít při zobrazování, podobně jako čočky. V tomto případě se ovšem jedná o difrakci dopadajících kulových vln na struktuře zonální desky. Rozlišení u zobrazení čočkou souvisí s jejím užitečným průměrem, jak jsme viděli v části 6.5, rovnice 6.20. Velmi podobně je limita rozlišení při zobrazení zónovou deskou dána počtem užitých zón, tedy průměrem zóny s největším $m$. V hlavním ohnisku je intenzita zhruba 10x menší než v ohnisku ideální čočky

stejného průměru a stejné ohniskové vzdálenosti. Koeficient barevné vady zonálních mřížek má opačné znaménko oproti skleněným čočkám, čehož lze využít ke kompenzaci barevné vady. Zajímavou variantou k amplitudovým zonálním mřížkám (střídání propustné a nepropustného mezikruží) jsou fázové mřížky, kdy nepropustná oblast je nahrazena mezikružím, ve kterém se obrací fáze (např. tloušťkou průhledného materiálu). Intenzita v hlavním ohnisku tak vzroste čtyřnásobně.

Fokusační vlastnosti pro zobrazování jsou využívány zejména ve spektrálních oborech, kde nejsou k dispozici vhodné materiály pro výrobu čoček ani není vhodné (nebo nelze) použít zrcadla. K takovým oblastem patří např. ultrafialová a rentgenová oblast. Fokusace pomocí zonálních desek je možno využít i pro jiné než elektromagnetické vlny, např. de Broglieovy vlny spojené s pohybujícími se nenabitými částicemi jako jsou neutrony nebo neutrální heliové atomy. Nabité částice lze snadněji fokusovat elektrickými a magnetickými poli.

## Dodatek 6.7 Fresnelova difrakce na hraně




Obr. 6.50 Základní geometrie pro popis difrakce na hraně. Nepropustné stínítko má tvar poloroviny s hranou rovnoběžnou s osou $y$. Ve směru osy $z$ dopadá do referenční roviny $X, Y, 0$ monochromatická rovinná vlna. Difrakční obrazec budeme zkoumat tak, že bod pozorování bude pevný a budeme postupně sjíždět s polohou hrany $X_H$.

Pro zjednodušení budeme uvažovat jen případ, kdy na aperturní rovinu dopadá kolmo monochromatická rovinná vlna, ačkoli standardně bývá diskutován případ dopadající kulové vlny. Difrakční integrál bez směrového faktoru, pro $E(X, Y, 0) = E_0$ a bod pozorování $P(0,0,z)$ je

$$E_P = \frac{-i}{\lambda} E_0 \int_{Y=-\infty}^{\infty} \int_{X_H}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} \, dX \, dY.$$

Ve Fresnelově aproximaci s použitím parabolických vln a pro $r \cong z\left(1 + \frac{X^2+Y^2}{2z^2}\right)$ je

$$E_P = \frac{-i}{\lambda z}\, E_0 e^{ikz} \int_{Y=-\infty}^{\infty} \int_{X_H}^{\infty} e^{ik\frac{X^2}{2z}}\, e^{ik\frac{Y^2}{2z}}\, dX\, dY.$$

Směřujeme k použití speciálních funkcí zvaných Fresnelovy integrály, k čemuž se hodí substituce

$$e^{ik\frac{X^2}{2z}} = e^{i\frac{\pi}{2}u^2}, \qquad u = X\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}, \qquad du = dX\sqrt{\frac{2}{\lambda z}},$$

$$e^{ik\frac{Y^2}{2z}} = e^{i\frac{\pi}{2}v^2}, \qquad v = Y\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}, \qquad dv = dY\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}.$$

$$E_P = \frac{-i}{\lambda z}\,\frac{\lambda z}{2} E_0 e^{ikz} \int_{u_H}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\, du \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}v^2}\, dv.$$

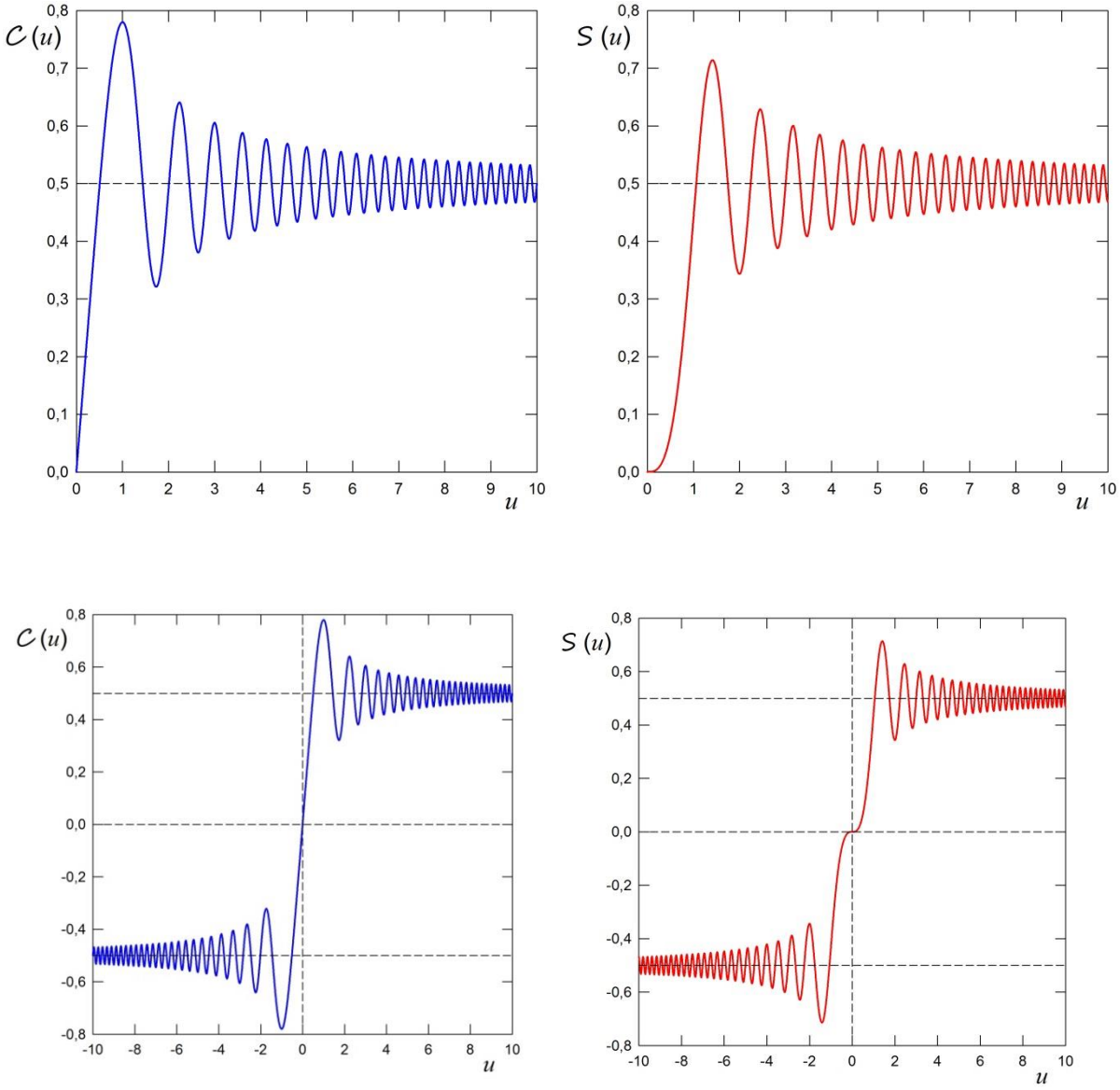
***Fresnelovy integrály a Cornuova spirála***

Fresnelovy integrály byly spočteny a tabelovány ve tvaru (zde $u, w$ jsou bezrozměrné proměnné)

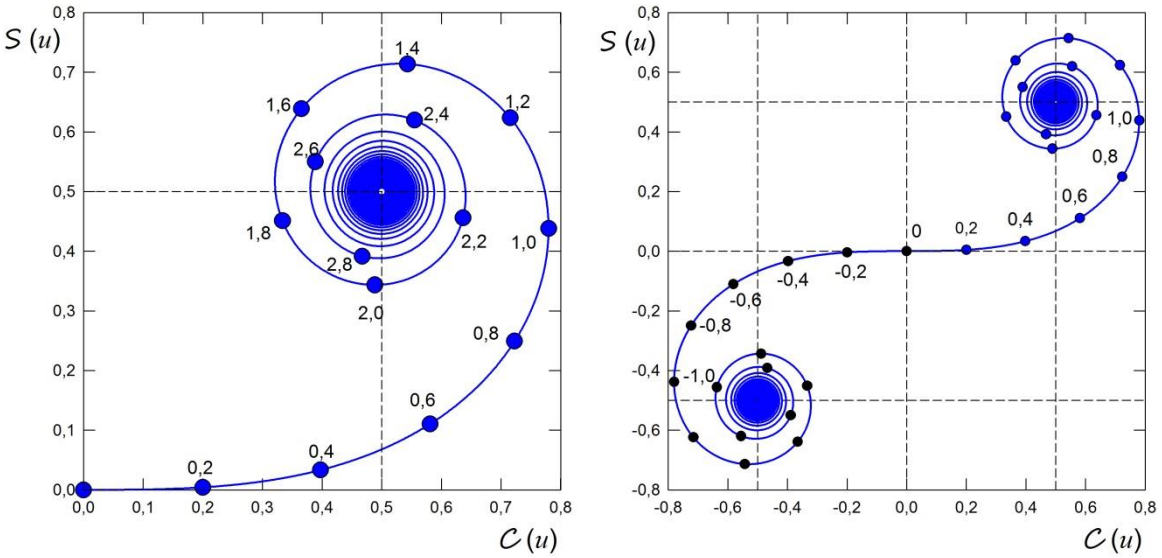
$$\mathcal{C}(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2}w^2\right) dw, \qquad \mathcal{S}(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2}w^2\right) dw,$$

takže

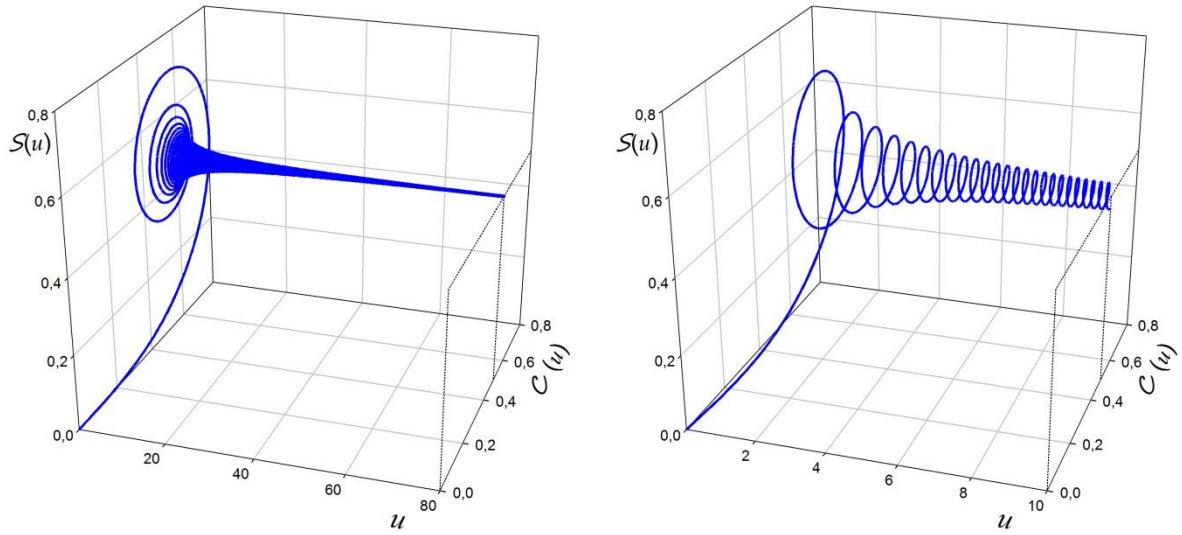
$$\int_{u_1}^{u_2} e^{i\frac{\pi}{2}w^2}\, dw = \mathcal{C}(u_2) - \mathcal{C}(u_1) + i\mathcal{S}(u_2) - i\mathcal{S}(u_1).$$




Obr. 6.51 Grafy Fresnelových integrálů $\mathcal{C}(u)$ a $\mathcal{S}(u)$.




Obr. 6.52 2D diagram Fresnelových integrálů ve tvaru Cornuovy spirály. Čísla u bodů označují hodnotu parametru $x$; vlevo pro kladná $x$, vpravo pro kladná i záporná $x$.




Obr. 6.53 3D diagram Fresnelových integrálů ve tvaru natažené Cornuovy spirály

Intenzita záření v bodě $P$ je obecně úměrná

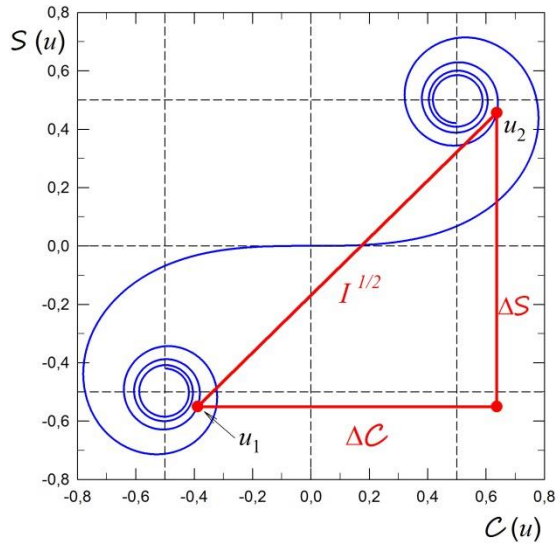
$$E_P E_P^* = -iE_0\, e^{ikz}\,[\mathcal{C}(u_2) - \mathcal{C}(u_1) + i\mathcal{S}(u_2) - i\mathcal{S}(u_1)] \times$$
$$\times\, iE_0\, e^{-ikz}\,[\mathcal{C}(u_2) - \mathcal{C}(u_1) - i\mathcal{S}(u_2) + i\mathcal{S}(u_1)] \times$$
$$\times\,[\mathcal{C}(v_2) - \mathcal{C}(v_1) + i\mathcal{S}(v_2) - i\mathcal{S}(v_1)] \times$$

$$\times [\mathcal{C}(v_2) - \mathcal{C}(v_1) - i\mathcal{S}(v_2) + i\mathcal{S}(v_1)] =$$

$$= E_0^2 \{[\mathcal{C}(u_2) - \mathcal{C}(u_1)]^2 + [\mathcal{S}(u_2) - \mathcal{S}(u_1)]^2\} \times$$

$$\{[\mathcal{C}(v_2) - \mathcal{C}(v_1)]^2 + [\mathcal{S}(v_2) - \mathcal{S}(v_1)]^2\}.$$

V grafickém vyjádření je intenzita difraktovaného záření úměrná 2. mocnině součinu vzdáleností bodů na Cornuově spirále, které odpovídají parametrům $u_2, u_1;\ v_2, v_1$.




Obr. 6.54 Znázornění souvislosti intenzity záření a bodů v diagramu Cornuovy spirály: $I \propto (\Delta\mathcal{C})^2 + (\Delta\mathcal{S})^2$.

***Aplikace na difrakci na hraně***

V našem případu hrany pro integrál ve směru $Y$ dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}v^2}\, dv = \mathcal{C}(\infty) - \mathcal{C}(-\infty) + i\mathcal{S}(\infty) - i\mathcal{S}(-\infty) =$$

$$= 0{,}5 - (-0{,}5) + 0{,}5i + 0{,}5i = 1 + i,$$

$$[\mathcal{C}(v_2) - \mathcal{C}(v_1)]^2 + [\mathcal{S}(v_2) - \mathcal{S}(v_1)]^2 = 2.$$

Pro diskusi o integrálu ve směru $X$ vyjděme ze stavu, kdy stínítko zakrývá celou rovinu, tj $X_H = \infty$. Pak je $\int_{\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\, du = 0$

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\, du = \mathcal{C}(\infty) - \mathcal{C}(\infty) + i\mathcal{S}(\infty) - i\mathcal{S}(\infty) = 0{,}5 - 0{,}5 + 0{,}5i - 0{,}5i = 0$$

a v místě $P$ je tma. S klesajícím $X_H = u_H\sqrt{\frac{\lambda z}{2}}$ se na Cornuově spirále vzdalujeme od bodu (0,5; 0,5) odpovídajícímu $u_2 = \infty$ tak, že vzdálenost mezi tímto bodem a bodem zachycujícím aktuální posici hrany zpočátku monotónně přibývá, a to až do $u_H = -1{,}217$. Pak následuje pokles a nastupují oscilace podle

$$E_P(u_H) = \frac{-i}{2}\,E_0 e^{ikz}\int_{u_H}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\,du \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}v^2}\,dv =$$

$$= -i\,\frac{1+i}{2}\,E_0 e^{ikz}\int_{u_H}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\,du = \frac{1-i}{2}\,E_0 e^{ikz}\int_{u_H}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\,du =$$

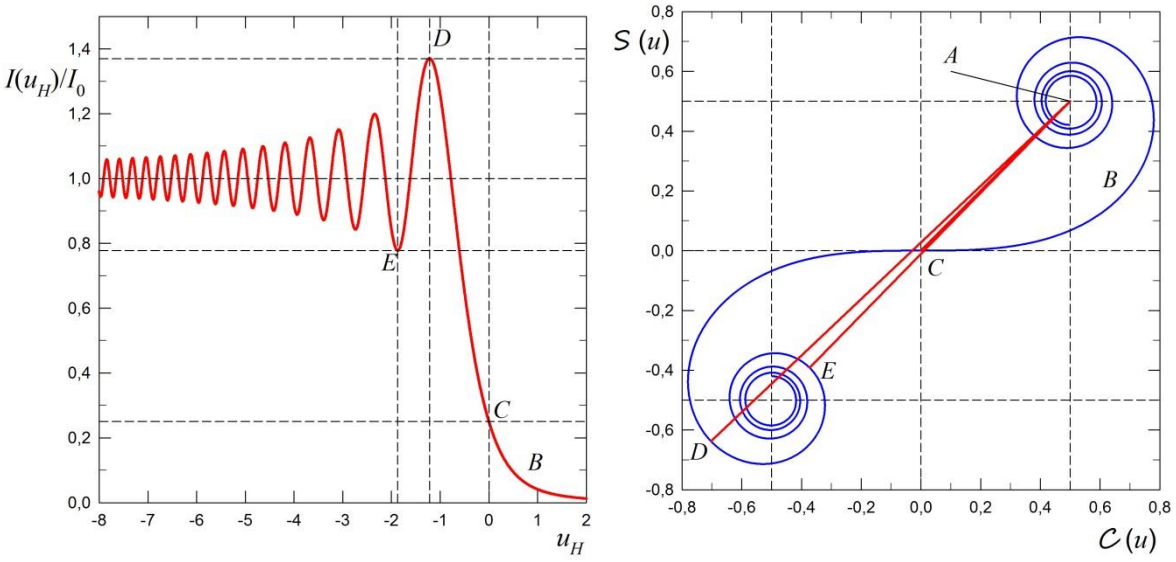
$$= \frac{1-i}{2}\,E_0 e^{ikz}\,\{[0{,}5-\mathcal{C}(u_H)]+i[0{,}5-\mathcal{S}(u_H)]\}.$$

Odpovídající intenzita

$$E_P(u_H)E_P^*(u_H) = \frac{1-i+1+i}{4}\,E_0^2\,\{[0{,}5-\mathcal{C}(u_H)]^2+[0{,}5-\mathcal{S}(u_H)]^2\} =$$

$$= \frac{1}{2}E_0^2\,\{[0{,}5-\mathcal{C}(u_H)]^2+[0{,}5-\mathcal{S}(u_H)]^2\}.$$

Geometrický význam ve vztahu ke Cornuově spirále je patrný, když si uvědomíme, že $[0{,}5-\mathcal{C}(u_H)]^2+[0{,}5-\mathcal{S}(u_H)]^2$ je 2. mocnina vzdálenosti bodu $[\mathcal{C}(u_H),\mathcal{S}(u_H)]$ od bodu $[0{,}5;0{,}5]$. Tato mocnina je úměrná intenzitě záření v bodě $P$, když hrana je v poloze $X_H = u_H\sqrt{\frac{\lambda z}{2}}$. Názorně je to ukázáno na obr. 6.55.




Obr. 6.55 Závislost intenzity difrakčního obrazce na relativní vzájemné poloze hrany neprůhledné poloroviny $u_H$ a bodu pozorování $P$. Vpravo příslušný diagram s použitím Cornuovy spirály.

Význačné body jsou zakreslené v obr. 6.55. Vzájemná poloha bodu $P$ a hrany viz obr. 6.50.

| Bod | $u_H$ | $\mathcal{C}(u_H)$ | $\mathcal{S}(u_H)$ | $I(u_H)/I_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\infty$ | 0,5 | 0,5 | 0 | stínítko přes celou rovinu |
| $B$ | $> 0$ | $> 0$ | $> 0$ | $< 0{,}25$ | hrana výše než bod $P$ |
| $C$ | 0 | 0 | 0 | 0,25 | hrana ve výšce bodu $P$ |
| $D$ | -1,218 | -0,7035 | -0,6369 | 1,37 | 1.difrakční maximum |
| $E$ | -1,872 | -0,3730 | -0,3913 | 0,78 | 1.difrakční minimum |
| $F$ | $-\infty$ | -0,5 | -0,5 | 1 | prostor bez stínítka |

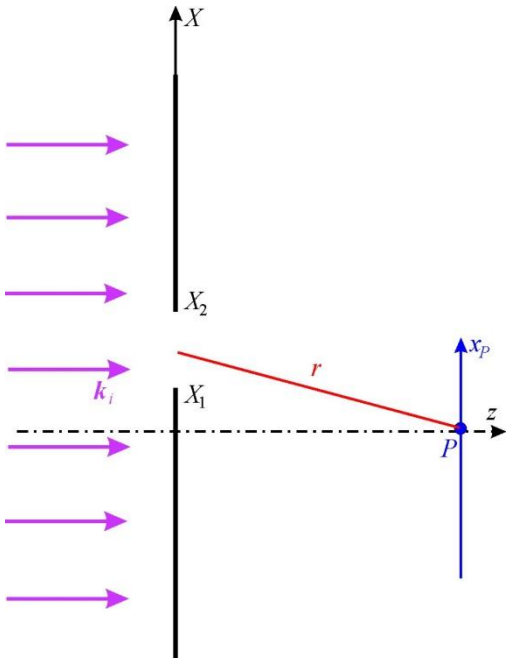
Jestliže odsuneme hranu do $-\infty$ (čili celý prostor je volný, bez překážky), je

$$\mathcal{C}(u_H) = \mathcal{S}(u_H) = -0{,}5,$$

$$E_P(u_H)E_P^*(u_H) == \frac{1}{2}E_0^2\,\{1+1\} = E_0^2.$$

Takže i tento postup založený na Fresnelově aproximaci difrakčního integrálu (integrace parabolických vln) bez směrového faktoru dává správný výsledek pro šíření rovinné vlny volným prostorem. V **Dodatku 6.3** jsme dospěli ke stejnému výsledku ze zcela jiných předpokladů: difrakční integrál (skládání deformovaných kulových vln se směrovým faktorem $\cos\vartheta$) bez aproximací.

## Dodatek 6.8 Fresnelova difrakce na štěrbině




Obr. 6.56 Základní geometrie pro popis difrakce na štěrbině. V nepropustném stínítku je obdélníková apertura s hranami rovnoběžnými s osou $y$. Ve směru osy $z$ dopadá do referenční roviny $X, Y, 0$ monochromatická rovinná vlna. Difrakční obrazec budeme zkoumat tak, že bod pozorování $P$ bude pevný a budeme postupně sjíždět s polohou středu štěrbiny $X_M = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$.

Výpočet rozložení intenzity v obrazci Fresnelovy difrakce na štěrbiněě je založen na výše uvedeném výrazu

$$I_P(u_1, u_2) \propto E_0^2 \{[\mathcal{C}(u_2) - \mathcal{C}(u_1)]^2 + [\mathcal{S}(u_2) - \mathcal{S}(u_1)]^2\} \times$$
$$\times \{[\mathcal{C}(v_2) - \mathcal{C}(v_1)]^2 + [\mathcal{S}(v_2) - \mathcal{S}(v_1)]^2\},$$

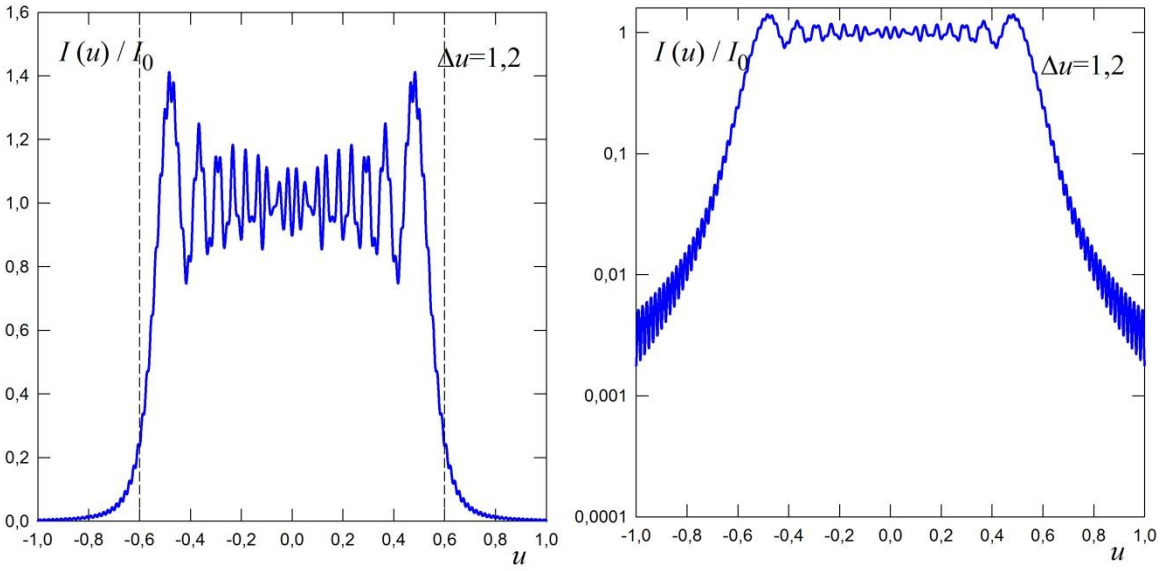
kde je

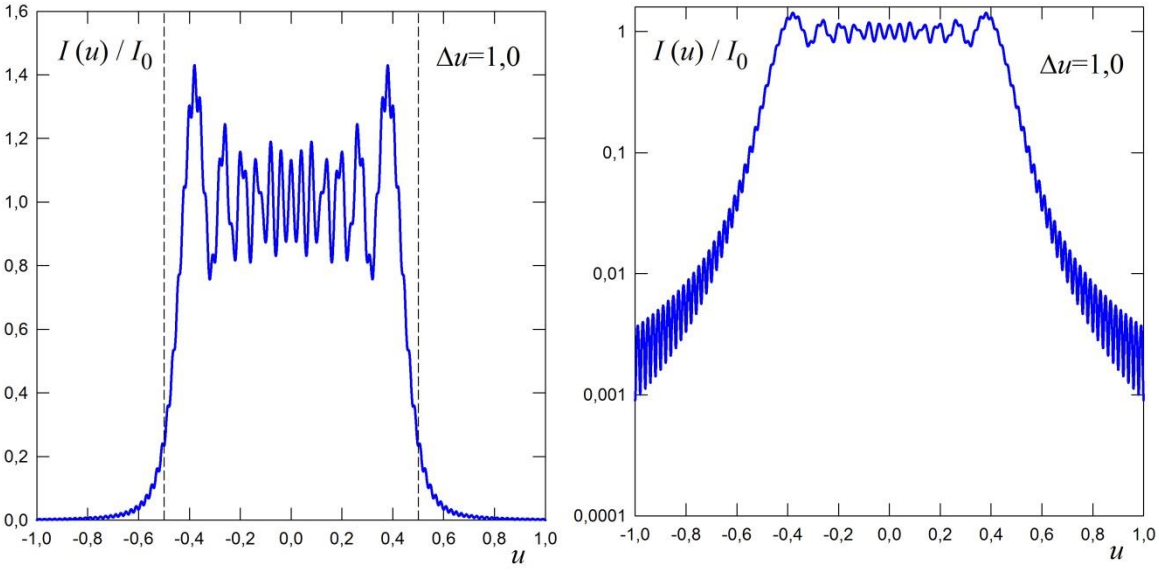
$$u_1 = X_1\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}, \qquad u_2 = X_2\sqrt{\frac{2}{\lambda z}},$$

$$v_1 = -\infty, \qquad v_2 = \infty,$$

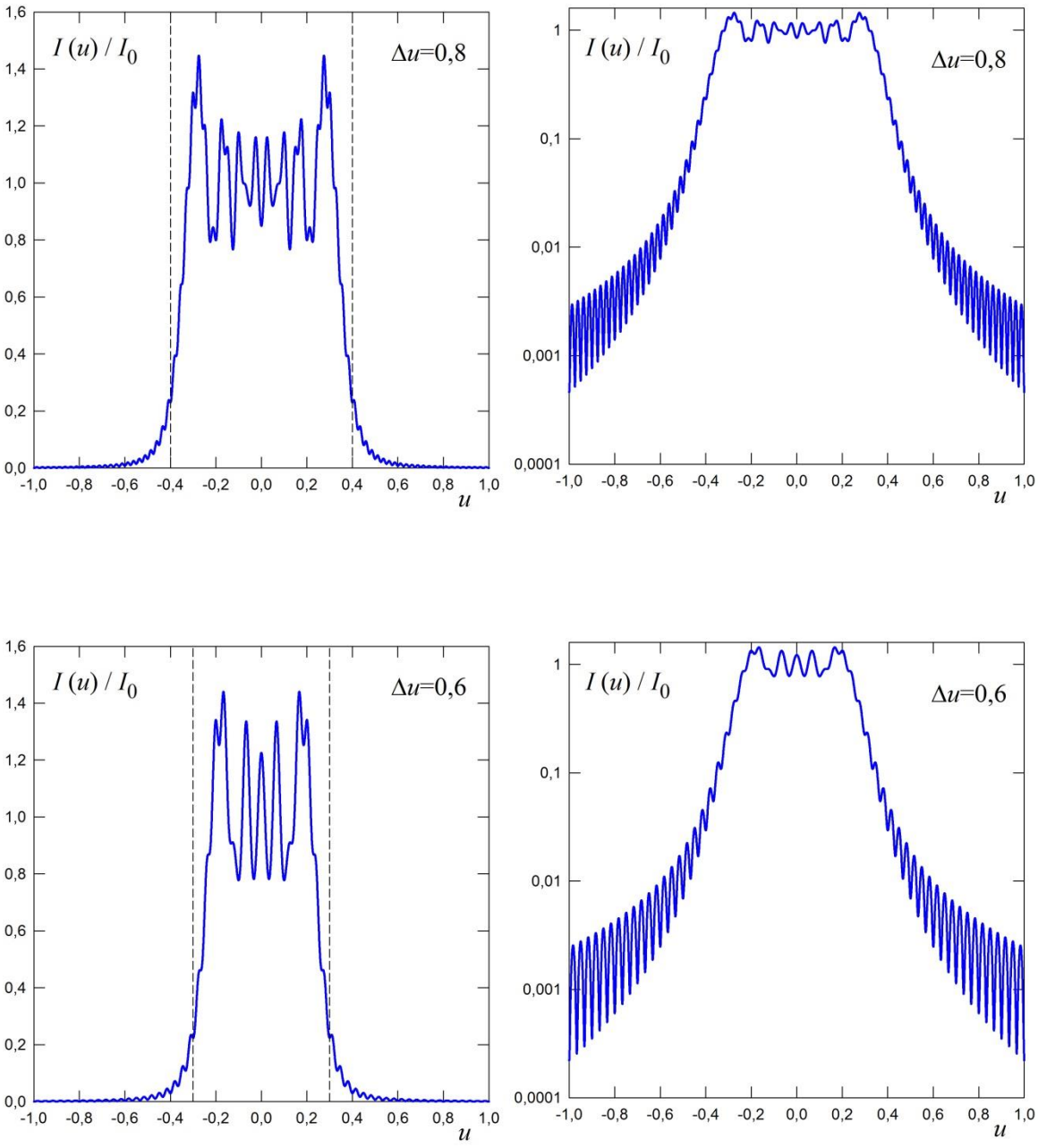
$$[\mathcal{C}(v_2) - \mathcal{C}(v_1)]^2 + [\mathcal{S}(v_2) - \mathcal{S}(v_1)]^2 = 2.$$

Šířka štěrbiny je $X_2 - X_1 = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\,(u_2 - u_1) = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\,\Delta u.$

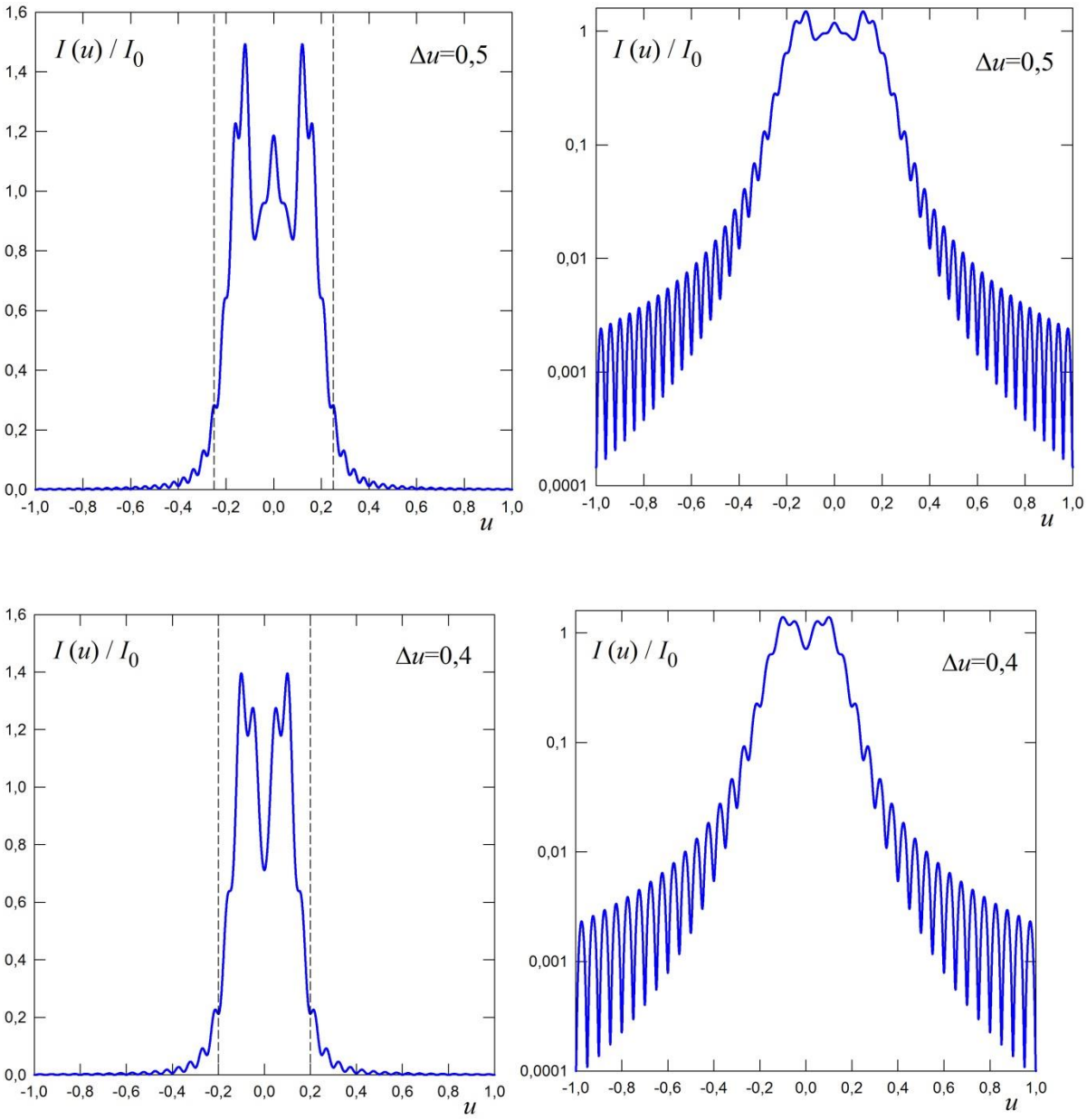


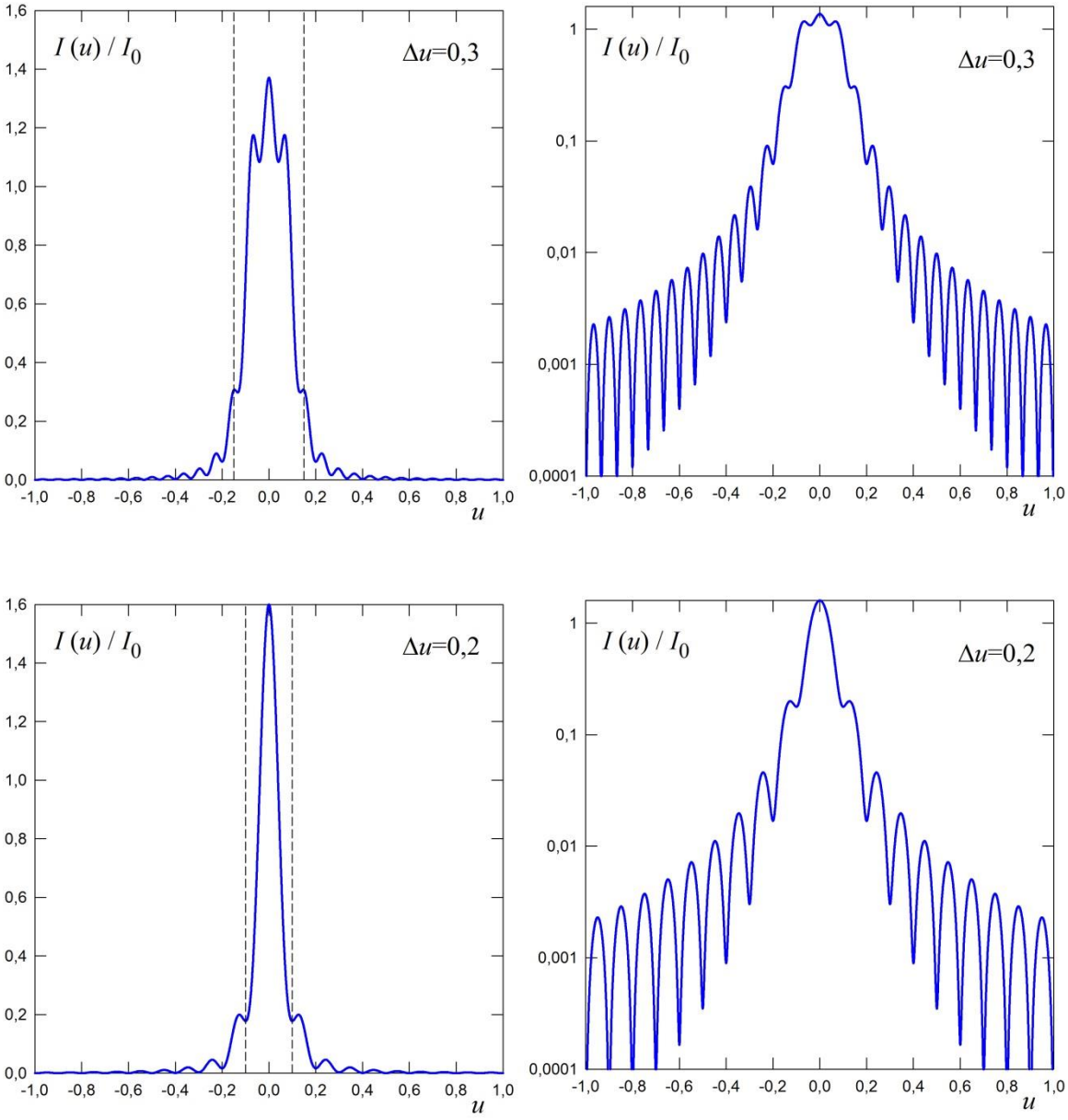

Obr. 6.57a Rozložení intenzity v řezech obrazců Fresnelovy difrakce na štěrbinách několika šířek $X_2 - X_1 = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\,\Delta u$.



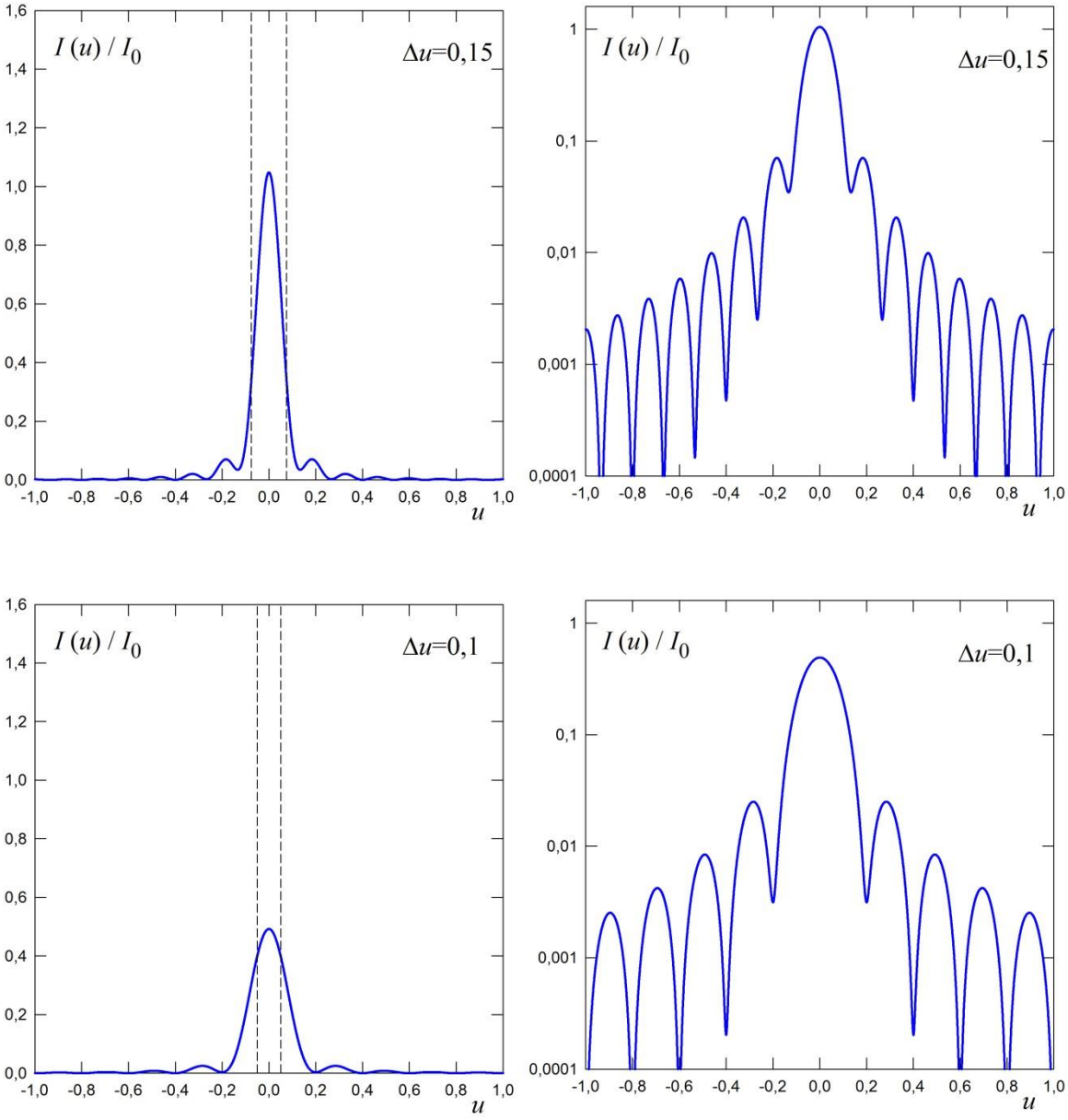

Obr. 6.57b Rozložení intenzity v řezech obrazců Fresnelovy difrakce na štěrbinách několika šířek $X_2 - X_1 = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\,\Delta u$.




Obr. 6.57c Rozložení intenzity v řezech obrazců Fresnelovy difrakce na štěrbinách několika šířek $X_2 - X_1 = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\,\Delta u$.




Obr. 6.57d Rozložení intenzity v řezech obrazců Fresnelovy difrakce na štěrbinách několika šířek $X_2 - X_1 = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\,\Delta u$.




Obr. 6.57e Rozložení intenzity v řezech obrazců Fresnelovy difrakce na štěrbinách několika šířek $X_2 - X_1 = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\,\Delta u$.

Se zužováním štěrbiny (při zachování vlnové délky a polohy místa pozorování je patrné postupné „vytékání“ zářivého výkonu do oblasti geometrického stínu. Pro velmi široké štěrbiny je celkový charakter podobný složení dvou obrazců difrakcí na hranách, ovšem s „bohatšími“ oscilacemi a to i v oblasti geometrického stínu. Se zužováním štěrbin oscilace v obrazci jsou „chudší“ a obrazce začínají připomínat Fraunhoferovu difrakci.

## Dodatek 6.9 Difrakce na $N$ aperturách

Dále provedeme výpočet difrakce na $N$ identických difrakčních aperturách v jedné rovině. Předpokládejme, že máme $N$ identických apertur se stejným rozložením elektrického pole $E(X_0, Y_0, 0)$. Každá individuální apertura má určitou polohu v difrakční masce. Nechť je poloha $n$-té apertury určena souřadnicemi $(X_n, Y_n, 0)$. Elektrické pole uvnitř $n$-té apertury můžeme psát jako

$$E(X - X_n, Y - Y_n, 0).$$

Rozložení elektrického pole v rámci všech apertur je pak

$$E(X, Y, 0) = \sum_{n=1}^{N} E(X - X_n, Y - Y_n, 0).$$

Dále vypočteme Fraunhoferův difrakční obraz pro uvedený soubor apertur v paraxiální aproximaci

$$E(x, y, z) \cong$$

$$\cong \frac{-i}{\lambda z}\, e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY\; E(X - X_n, Y - Y_n, 0) e^{-ik\frac{xX+yY}{z}}.$$

Zavedeme nové proměnné $X' = X - X_n$, $Y' = Y - Y_n$ a dostaneme

$$E(x, y, z) \cong$$

$$\cong \frac{-i}{\lambda z}\, e^{ikz} e^{ik\frac{(x^2+y^2)}{2z}} \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} dX' \int_{-\infty}^{\infty} dY'\; E(X', Y', 0) e^{-ik\frac{x(X'+X_n)+y(Y'+Y_n)}{z}}.$$

Vytkneme faktor $e^{-ik\frac{xX_n+yY_n}{z}}$ před integrál, což vede ke vztahu

$$E(x, y, z) \cong \sum_{n=1}^{N} e^{-ik\frac{xX_n+yY_n}{z}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{-1}{\lambda z} e^{ikz} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}} \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY\, E(X, Y, 0) e^{-ik\frac{xX+yY}{z}} \right\} = F_N\, f_1,$$

kde jsme pro zjednodušení zaměnili symboly $X'$ a $Y'$ za $X$ a $Y$. Výraz ve složené závorce $f_1$ představuje difrakční obrazec jedné apertury umístěné v poloze $X = 0$ a $Y = 0$.

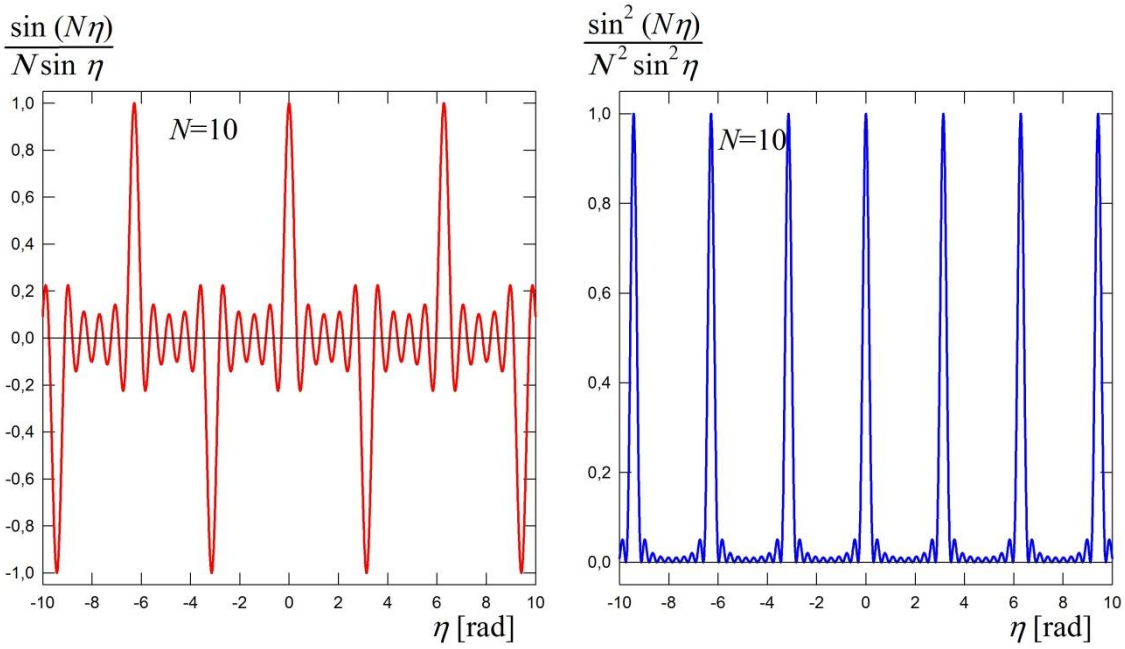
Při výpočtu difrakce na souboru identických difrakčních apertur tedy stačí vypočítat difrakční obraz jedné apertury a tento výsledek vynásobit sumou přes všechny apertury (výraz před složenou závorkou). To je prakticky velmi důležitý výsledek rozdělující úlohu

- na určení difrakce od 1 štěrbiny $f_1$ (tedy složitý integrační úkol s mnohými aproximacemi), kterou nemusíme znát dostatečně přesně; např. reálně používané

mřížky pro spektroskopické účely obvykle nesplňují dříve uvedené předpoklady Fraunhoferovy difrakce;
- na poměrně jednoduchou úlohu součtu konečného počtu členů $F_N$ (interferenční část úlohy).

Právě z tohoto součtu $F_N$ lze odvodit zákonitosti, které nejsou vázány na konkrétní funkci $f_1$. Patří sem velmi důležitá mřížková rovnice pro difrakční mřížky a z ní plynoucí některé vlastnosti těchto mřížek.

## Dodatek 6.10 Vlastnosti součtu $N$ rovinných vln s paralelními vlnovými vektory a konstantním fázovým posuvem $\eta$




Obr. 6.58 Grafy funkcí $\frac{\sin(N\eta)}{N\sin\eta}$ a $F_N(\eta)=\frac{\sin^2(N\eta)}{N^2\sin^2(\eta)}$ pro $N=10$

Funkce $\frac{\sin(N\eta)}{N\sin\eta}$ je periodická s periodou $2\pi$. Funkce $F_N(\eta)=\frac{\sin^2(N\eta)}{N^2\sin^2(\eta)}$ je periodická s periodou $\Delta\eta=\pi$. Její hlavní maxima nastávají při nulovém jmenovateli a s použitím l'Hospitalova derivačního pravidla je

$$\lim_{\eta\to m\pi}\frac{\sin^2(N\eta)}{N^2\ \sin^2(\eta)}=1.$$

Nulové body této funkce jsou

$$\sin N\eta = 0, \qquad \text{přičemž} \;\; \sin\eta \neq 0,$$

$$\eta = \pi\, {}^{p}/_{N}, \qquad \eta \neq m\pi, \;\; p, m \text{ celá čísla}, \;\; {}^{p}/_{N} \text{ číslo necelé.}$$

Vyjádřeno přes úhel difrakce $\vartheta$ (pak již funkce není periodická)

$$\frac{I}{I_0}(\vartheta) = \frac{\sin^2\left(N\,\pi\,\frac{h}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{N^2\,\sin^2\left(\,\pi\,\frac{h}{\lambda}\sin\vartheta\right)}.$$

Nulové hodnoty čitatele a zároveň jmenovatele nastávají pro

$$\frac{\pi h}{\lambda}\sin\vartheta_{MAX\,m} = \pi m, \;\; \sin\vartheta_{MAX\,m} = \frac{m\lambda}{h},$$

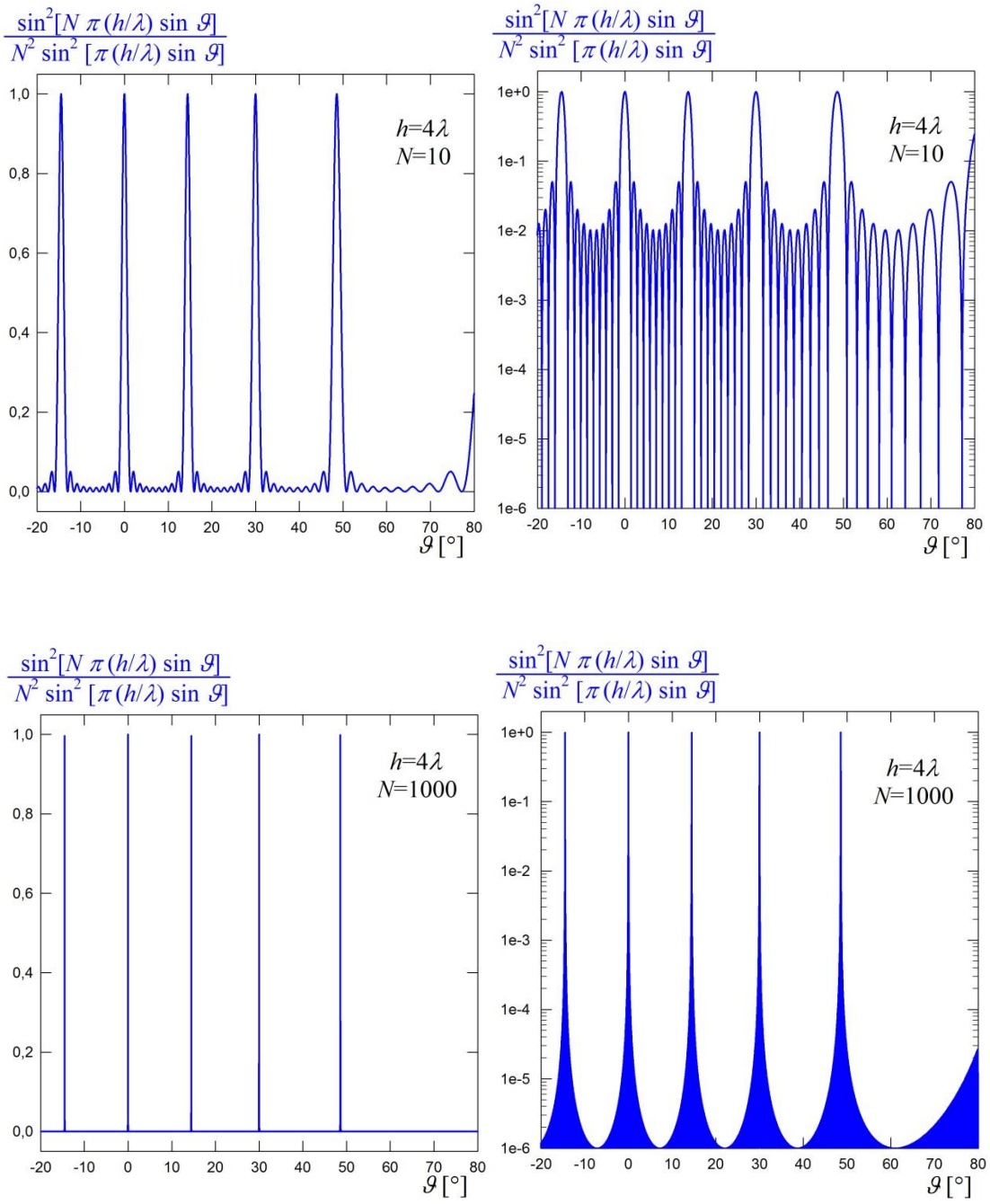
$$\vartheta_{MAX\,m} = \arcsin\frac{m\lambda}{h},$$

kde do směru $\vartheta_{MAX\,m}$ směřuje hlavní interferenční maximum řádu $m$.

| Čitatel | | Jmenovatel | | $F_N(\eta)$ |
|---|---|---|---|---|
| $N\eta = p\pi$ | $\sin p\pi = 0$ | $\eta \neq m\pi$, | $\sin m\pi \neq 0$ | $F_N(\eta) = 0$ |
| $N\eta = p\pi = Nm\pi$ | $\sin p\pi = 0$ | $\eta = m\pi$, | $\sin m\pi = 0$ | $F_N(\eta) \to 1$ |
| $N\eta \neq p\pi$ | $\sin p\pi \neq 0$ | $\eta \neq m\pi$, | $\sin m\pi \neq 0$ | $F_N(\eta)$ |
| $N\eta \neq p\pi$ | $\sin p\pi \neq 0$ | $\eta = m\pi$, | $\sin m\pi = 0$ | nemůže nastat |

Pro obvyklé mřížky s úzkými štěrbinami jsou $N$ a $p$ veliká čísla, $m$ je několik jednotek. Nulové body nejbližší $m$-tému maximu nastávají pro $p = Nm + 1$.

Pokud přes difrakční mřížku současně přechází světlo s vlnovými délkami $\lambda_1$ a $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$, jejich difrakční obrazy jsou posunuty (obr. 6.27). Jako kritérium rozlišitelnosti dvou vlnových délek v $m$-tém difrakčním řádu stanovíme, že $m$-té maximum odpovídající vlnové délce $\lambda_2$ ($N.m$-tý nulový bod čitatele funkce $F_N(\eta)$ ) odpovídá $(N.m + 1)$-tému nulovému bodu difrakčního obrazu pro vlnovou délku $\lambda_1$. Při tomto posunu difrakčních obrazů tedy sobě odpovídají $Nm$-tý nulový bod pro $\lambda_2$ a $(Nm + 1)$-tý nulový bod pro $\lambda_1$. Můžeme tedy psát




Obr. 6.59 Grafy funkcí $F_N(\vartheta) = \frac{\sin^2\left(N\,\pi\frac{h}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{N^2\,\sin^2\left(\pi\frac{h}{\lambda}\sin\vartheta\right)}$ pro $N = 10$ a $N = 1000$. S rostoucím $N$ se hlavní maxima zužují, počet vedlejších maxim mezi sousedními hlavními maximy roste jako $(N-2)$ a jejich výška se snižuje.

$$Nm\lambda_2 = Nm(\lambda_1 + \Delta\lambda) = (Nm+1)\lambda_1$$

$$Nm\,\Delta\lambda = \lambda_1$$

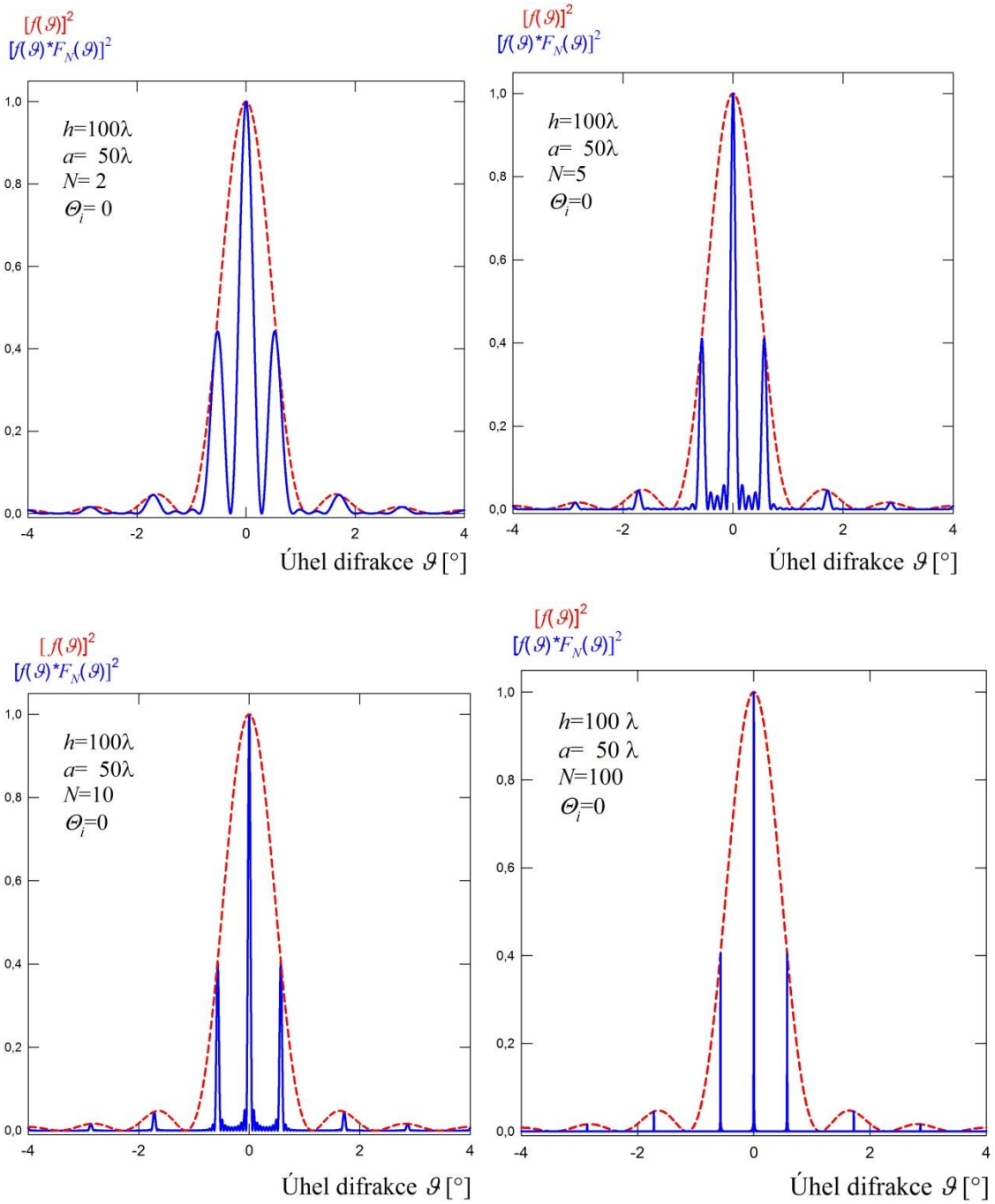
Dále definujeme **difrakční limitu spektrální rozlišovací schopnosti** difrakční mřížky v $m$-tém difrakčním řádu jako

$$R_{Dm} = |\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda}| = Nm$$

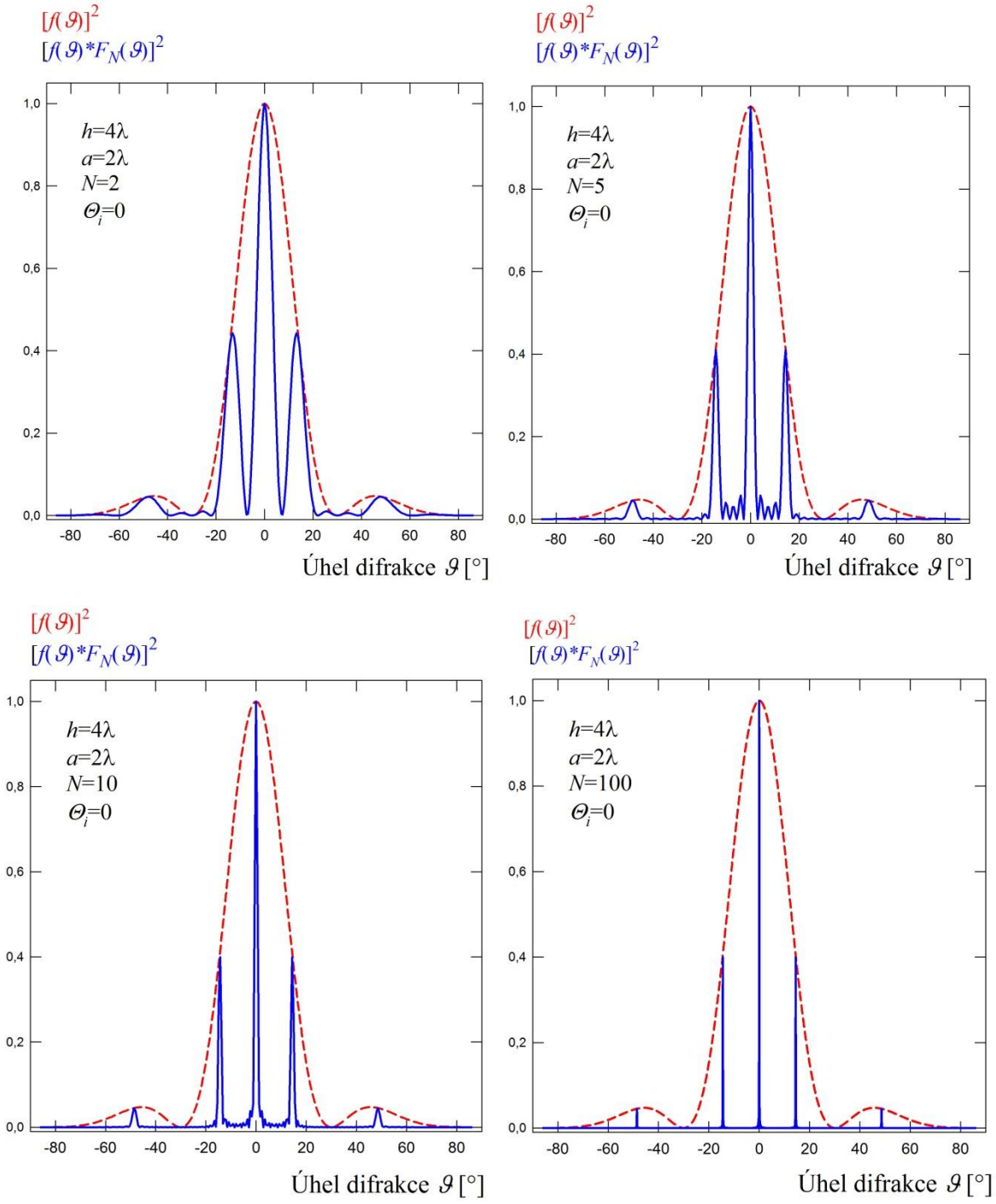
kde $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ je nejmenší rozdíl vlnových délek odpovídající maximům dvou spektrálních čar, které lze rozlišit (samozřejmě v praxi za předpokladu splnění řady dalších „nedifrakčních" podmínek). V případě difrakční mřížky $50 \times 50$ mm s 1000 vrypy na 1 mm ($h = 1$ µm, $N = 50\,000$) dostáváme v 1. řádu teoretickou difrakční limitu rozlišovací schopnosti $R_{D1} = 50\,000$ a pro $\lambda = 500$ nm rozlišení $\Delta\lambda = 10^{-2}$ nm. Všechny tyto úvahy jsou prováděny za předpokladu, že na mřížku dopadá jedna rovinná vlna s přesně definovaným úhlem dopadu $\theta_i$, $\Delta\theta_i = 0$.

Na dalších obrázcích (obr. 6.60 až 6.63) ukážeme normovanou závislost intenzity v uvedeném modelu jako součin úhlové závislosti difrakce $f_1(\vartheta)$ na jedné štěrbině a interferenční funkce $F_N(\vartheta)$ pro amplitudovou mřížku Na obr. 6.60 jsou zakresleny tyto funkce pro mřížku s relativně širokými štěrbinami, které splňují základní předpoklady našeho modelu skalární difrakce. Na obr. 6.61 jsou výsledky modelu, kde je splnění předpokladů modelu mnohem problematičtější, zejména z důvodu velkých úhlů difrakce a srovnatelnosti šířky difraktujících štěrbin s vlnovou délkou. V té souvislosti je třeba upozornit na rozdílnost vodorovných škál v obr. 6.60 a obr. 6.61. Nicméně v případě obr. 6.61 se jedná o šířky typické pro spektroskopické aplikace, ovšem běžně realizované jako difrakční mřížky na odraz. Model ukazuje některé základní kvalitativní charakteristiky a též ukazuje nevýhodnost jednoduchých amplitudových mřížek na průchod (transmisních) pro spektroskopické účely, protože většina výkonu neseného dopadajícím zářením je soustředěna do nultého maxima $\vartheta = \Theta_i$, ve kterém nedochází k rozdělení směrů maxim difrakce pro různé vlnové délky. Tento výkon je pro spektroskopii nevyužit a šikmý dopad to nezlepší.

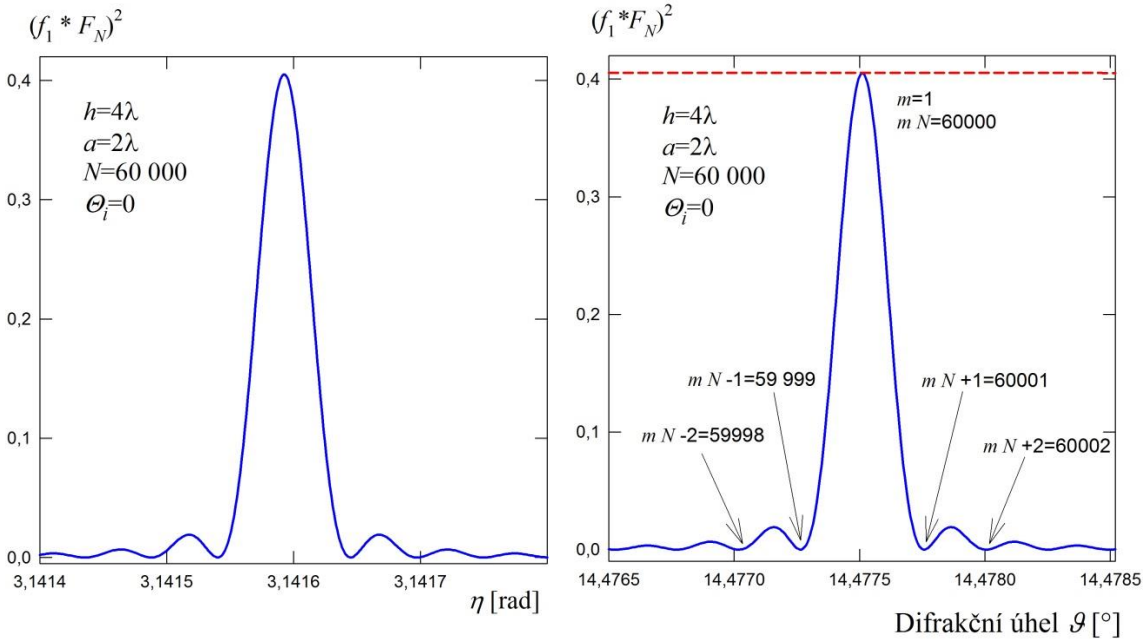
***Příklady součinů funkcí úhlové závislosti účinnost difrakce $f_1(\vartheta)$ a interferenčních funkcí $F_N(\vartheta)$.***



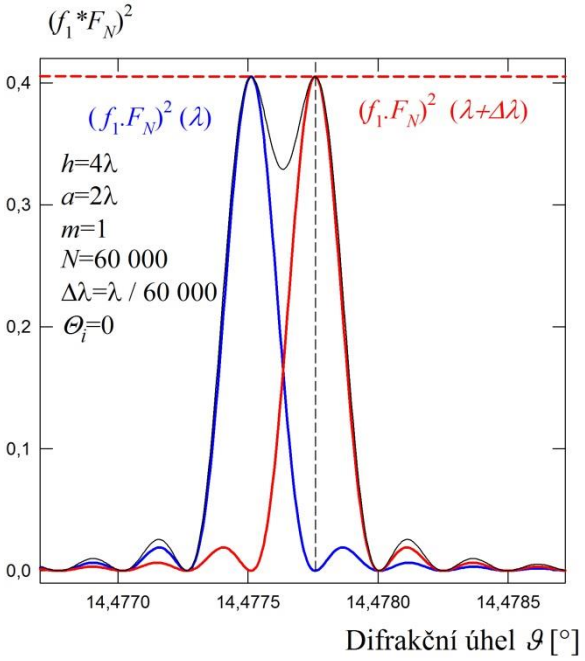

Obr. 6.60: Modelový průběh intenzity světla po difrakci na difrakční mřížce v závislosti na počtu štěrbin $N = 2, 5, 10, 100$ a pro šířku štěrbiny $a = h/2$. Červená přerušovaná křivka reprezentuje úhlovou závislost difrakční intenzity pro 1 štěrbinu $f^2(\vartheta) = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ která představuje obálku pro interferenci souboru identických štěrbin $\sim F_N^2$. Intenzita ve výsledném obrazci je úměrná součinu obou funkcí. Předpoklady našeho skalárního modelu Fraunhoferovy difrakce i paraxiální aproximace jsou splněny: široké štěrbiny (pro $\lambda = 500$ nm je $a = 25$ μm), malé úhly difrakce.




Obr. 6.61 Modelový průběh intenzity světla po difrakci na difrakční mřížce v závislosti na počtu štěrbin $N = 2, 5, 10, 100$ a pro šířku štěrbiny $a = h/2$. Červená přerušovaná křivka reprezentuje úhlovou závislost intenzity pro 1 štěrbinu $f^2(\vartheta) = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$, která představuje obálku interference od souboru identických štěrbin. Výsledný obrazec je úměrný součinu obou funkcí. Výpočet je proveden pro „spektroskopické parametry“ $a, h$ srovnatelné s vlnovou délkou. Předpoklady Fraunhoferovy aproximace nejsou splněny. Lze očekávat významné rozdíly modelu a vlastností reálných mřížek.




Obr. 6.62 Modelová závislost normované intenzity difraktované vlny $(f_1 F_N)^2$ v okolí 1. hlavního interferenčního maxima $m = 1$ pro mřížku s $N = 60\,000$. V pravé části jsou vyznačeny podmínky pro nulové body. V tomto úhlovém intervalu je závislost difrakční funkce $f_1$ (červená přerušovaná čára) zcela nepatrná.




Obr. 6.63, opakování obr. 6.34 Normovaná intenzita $(f_1 F_N)^2$ pro dvě vlnové délky $\lambda$ a $\lambda + \Delta\lambda$ stejných intenzit. Černá křivka je součet intenzit pro obě vlnové délky.

K popisu míry odklonu difrakčním prvkem v závislosti na vlnové délce dopadajícího záření se zavádí veličina nazývaná **úhlová disperze**

$$D_\vartheta = \left.\frac{d\vartheta}{d\lambda}\right|_{\Theta_i = konst}.$$

V případě difrakční mřížky získáme konkrétní vztah pomocí derivace mřížkové rovnice 6.30

$$h \cos \vartheta_m d\,\vartheta_m = m\, d\lambda, \qquad D_{\vartheta m} = \frac{d\,\vartheta_m}{d\lambda} = \frac{m}{h \cos \vartheta_m}.$$

Odklon difraktovaných paprsků o difrakční úhel $\vartheta$ má za následek posun difrakčních maxim prvního a vyšších řádů $(m = 1, 2 \ldots.)$ v ohniskové rovině čočky. Tento posun je charakterizován veličinou nazývanou **lineární disperze**, která vyjadřuje míru posunu difrakčního obrazce v závislosti na vlnové délce dopadajícího světla

$$D_l = \frac{dx_f}{d\lambda}$$

V aproximaci malých úhlů mezi směrem difrakce $\vartheta_m$ a osou fokusační optiky ohniskové vzdálenosti $f_{FO}$ můžeme psát při zobrazení

$$\tan \vartheta \approx \vartheta = \frac{x_f}{f_{FO}}$$

a

$$\frac{dx_f}{d\lambda} = f_{FO}\frac{d\vartheta_m}{d\lambda} = f_{FO} D_{\vartheta m}$$

Spektrální rozlišení difrakční mřížky je tím větší, čím je větší celkový počet vrypů v difrakční mřížce a čím vyšší je difrakční řád. Zdálo by se tedy, že je výhodnější v spektrálních přístrojích využívat vysokých difrakčních řádů. Ve skutečnosti je tato volba omezena dalším parametrem charakterizujícím difrakční mřížku, kterou je tzv. volný spektrální interval.

**Volný spektrální interval** je definován jako interval vlnových délek, pro které se difrakční obraz předmětu (např. vstupní štěrbina ve spektrometru) na výstupní štěrbině spektrometru nebo na detektoru pro daný řád $m$ ve vlnové délce $\lambda_2$ nepřekrývá s obrazem předmětu v řádu maxima $(m + 1)$ pro vlnovou délku $\lambda_1$. Pozorujeme-li spektrum záření, ve kterém jsou vlnové délky z intervalu $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ můžeme spektrum dobře zaznamenat, pokud difrakční úhel paprsku s vlnovou délkou $\lambda_2$ difraktovaného v $m$-tém řádu nepřesáhne difrakční úhel paprsku s vlnovou délkou $\lambda_1$ difraktovaného v řádu $m + 1$. Pro hraniční difrakční úhel $\vartheta_{Fsm}$ pak z mřížkové rovnice platí

$$h\,(\sin \vartheta_{Fsm} - \sin \theta_i) = m\,\lambda_2 = (m + 1)\,\lambda_1$$

Volný interval vlnových délek definujeme pro $m$-tý řád jako

$$F_{sm} = \lambda_2 - \lambda_1 = \left(\frac{m+1}{m} - 1\right)\lambda_1 = \frac{\lambda_1}{m}$$

S rostoucím řádem difrakce $m$ se volný spektrální interval zmenšuje.

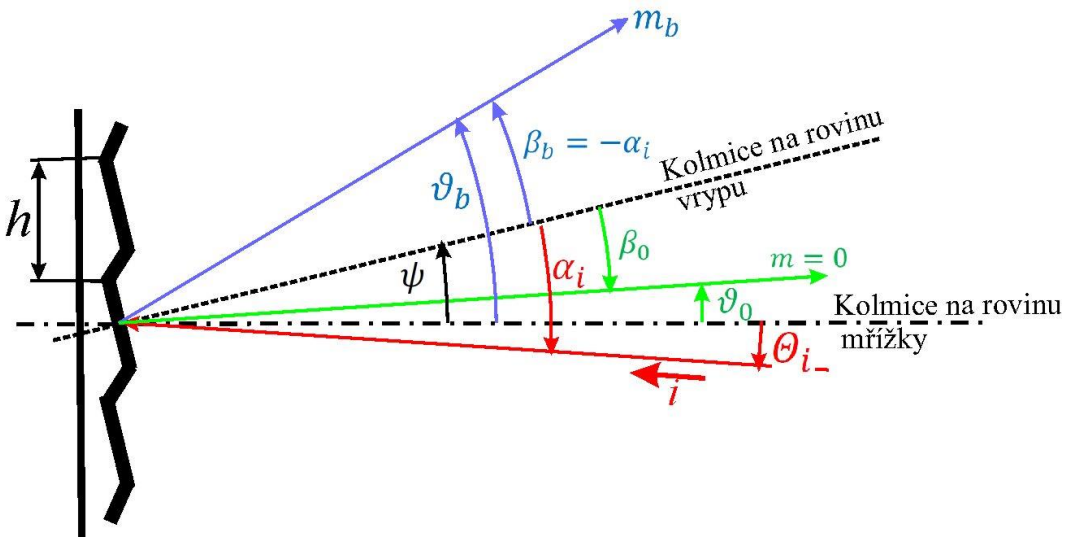
Jak je z uvedených vlastností amplitudových mřížek patrné, nejsou pro spektroskopii výhodné, zejména z důvodu rozložení zářivých výkonů do jednotlivých řádů. Nejvíc energie teče do nultého řádu, který je pro spektroskopii nevyužitelný. Výhodnější jsou mřížky, u nichž se periodicky nemění velikost propustnosti, ale periodicky se mění fázový posun působící na části rovinných vln. Za prvé nedochází k takovým ztrátám výkonu záření způsobeným absorpcí v neprůhledných oblastech mřížky a za druhé lze vhodnou volbou parametrů fázové modulace docílit toho, že většina dopadajícího zářivého výkonu je směrována do zvoleného (nenulového) řádu difrakce. Koncem 19. a v průběhu 20. století se rozšířilo používání mřížek s povrchovým reliéfem na odraz, o nichž je pojednáno v **Dodatku** 6.11. I nadále s pokrokem technologií jsou vyráběny další typy fázově modulovaných spektroskopických mřížek (např. 3D mřížky s modulací indexu lomu v objemu materiálu), které mohou pracovat v geometrickém uspořádání na průchod nebo na odraz s vysokou účinností.

## Dodatek 6.11 Trojúhelníkový model spektrometrické mřížky na odraz

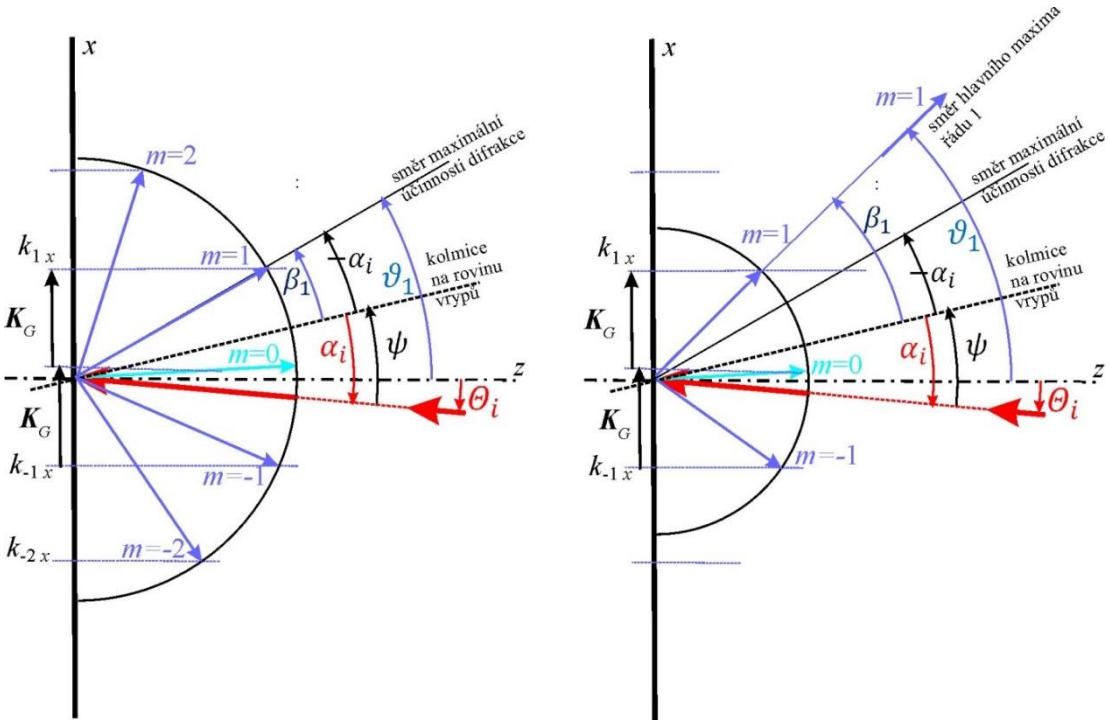
Amplitudová mřížka na průchod má vlastnosti, které se pro spektroskopické účely (rozklad polychromatického záření na kvazimonochromatické složky) nehodí. Využití dopadajícího výkonu pro rozklad je silně omezeno tím, že nejvíce dopadajícího výkonu teče do nultého řádu difrakce, ve kterém ke spektrálnímu rozkladu nedochází. Tyto nevýhody se snaží odstranit různé jiné typy mřížek. Historicky nejdůležitější jsou mřížky na odraz s povrchovým reliéfem. Vlnění odražené od povrchu mřížky zpět do prostoru dopadající vlny má dosti složitou strukturu. V tomto textu popíšeme kvalitativně základní představy trojúhelníkového modelu takové mřížky. K celkovému odraženému poli přispívají vlny různých interferenčních řádů difraktované

- na „delších“ úsecích povrchu mřížky (jednotlivých „zrcátkách“),
- na „kratších“ úsecích a
- navíc tyto soubory vln navzájem interferují.

U povrchu mřížky jsou pak lokalizovány evanescentní módy. V tomto textu velmi zjednodušeně pojednáme pouze o vlnách difraktovaných na delších úsecích povrchového reliéfu mřížky, které se mohou šířit do velkých vzdáleností od mřížky, obr. 6.64. Podobně jako v případě amplitudových mřížek na průchod se budeme zajímat o intenzitu v ohniskové rovině zobrazovacího systému. Pak se schéma pro maxima interferenčních funkcí difraktovaných rovinných vln zjednoduší na diagramy na obr. 6.65




Obr. 6.64 Základní model mřížky na odraz s povrchovým reliéfem.
$\Theta_i$ úhel dopadu dopadající vlny vzhledem ke kolmici na rovinu mřížky,
$\vartheta$ úhel difraktované vlny vzhledem ke kolmici na rovinu mřížky,
$\psi$ úhel mezi normálami k rovině mřížky a k rovině vrypu,
$\alpha_i$ úhel dopadu dopadající vlny vzhledem ke kolmici na rovinu vrypu,
$\beta$ úhel difraktované vlny vzhledem k normále na rovinu vrypu,
index $b$ („blaze“) znamená splnění podmínky maximální účinnosti difrakce $\beta_b = -\alpha_i$
„to blaze“ zářit, vzplát, planout, plápolat,... vyjadřuje maximální intenzitu při odrazu do takto označeného směru.




Obr. 6.65 Vlnové vektory dopadající a difraktovaných vln. Na obrázku vlevo je znázorněna situace, kdy v prvním řádu difrakce je splněna podmínka $\beta_1 = -\alpha_i$ pro maximální intenzitu difraktované vlny v prvním řádu. Pro jiné vlnové délky (na obr. vpravo kratší vlnové vektory) tato podmínka splněna není.

Intenzita difraktované vlny závisí na směrové závislosti difrakčního faktoru $f_1(\vartheta_m)$ do směru hlavního interferenčního maxima řádu $m$. Na obr. 6.64 je zakreslena situace pro maximální intenzitu v řádu difrakce $m_b = 1$, kdy podmínka $\beta_b = -\alpha_i$ vyjadřuje zrcadlový odraz na plošce vrypu.

***Skalární popis difrakce na ploše zrcátka***

Zcela obdobně jako jsme diskutovali difrakci na štěrbině můžeme dospět k úhlové závislosti difrakce na „zrcátku“ (vrypu mřížky) integrací příspěvků jednotlivých bodů v ploše zrcátka, přičemž budeme předpokládat velmi dlouhé, úzké plochy vrypu, takže zajímavé jsou řezy naznačené v obr. 6.66.

Zdroje elementárních vlnek vezmeme v pohyblivém bodě na ploše vrypu $X = (x_X, 0, -x_X \tan\psi)$. Dopadající vlnoplocha nedosáhne všechny body zrcátka ve stejný okamžik, takže elementární zdroje vlnek nekmitají ve fázi. Porovnejme fáze v bodě $X$ s fázemi ve středu zrcátka v bodě $O$.

Rovnice vlnoplochy procházející bodem $X$

$$z - z_X = -(x - x_X)\tan\Theta_i,$$

$$z + x_X \tan\psi = -(x - x_X)\tan\Theta_i,$$

$$x\tan\Theta_i + z + x_X(\tan\psi - \tan\Theta_i) = 0,$$

$$ax + bz + c = 0, \qquad a = \tan\Theta_i, \quad b = -1, \quad c = x_X(\tan\psi - \tan\Theta_i)$$

Vzdálenost vlnoploch je rovna vzdálenosti bodu $A$ od $O = (0,0,0)$ a lze ji spočítat dosazením souřadnic $O$ do rovnice vlnoplochy procházející bodem $X$ a použitím vztahu z analytické geometrie

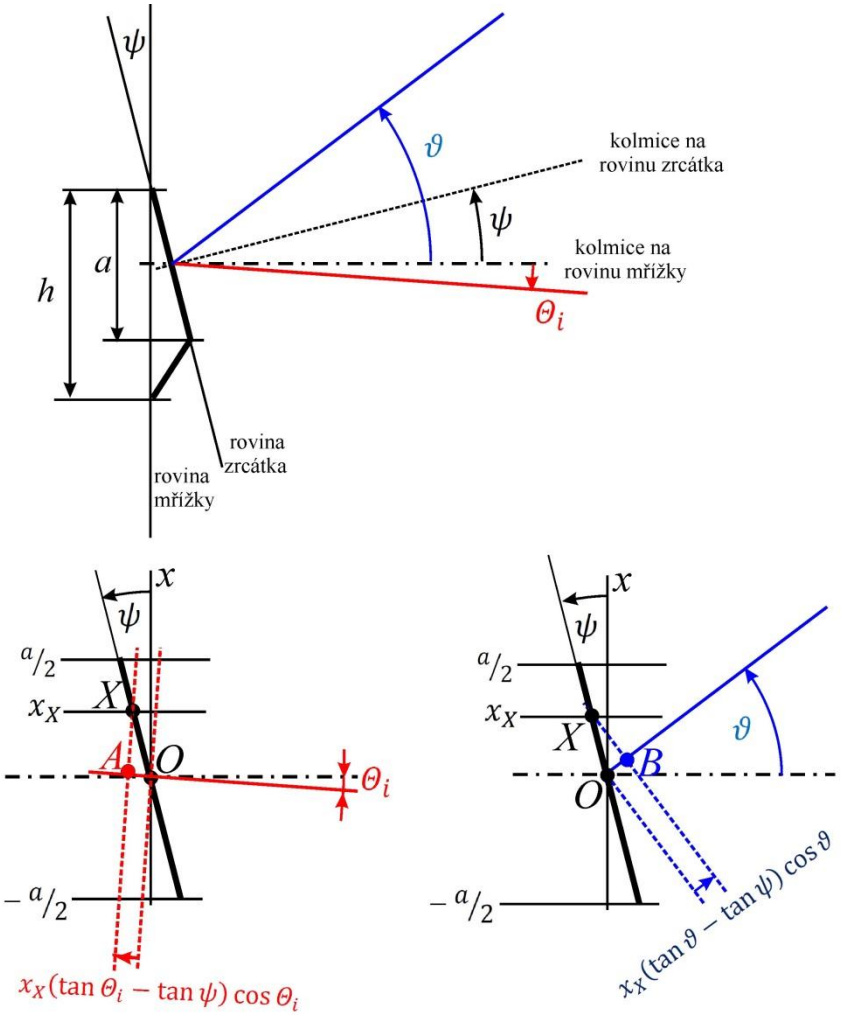
$$\overrightarrow{|AO|} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|x_X(\tan\Theta_i - \tan\psi)|}{\sqrt{1 + \tan^2\Theta_i}} =$$

$$= \frac{|x_X(\tan\Theta_i - \tan\psi)|}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\Theta_i + \sin^2\Theta_i}{\cos^2\Theta_i}}} = |x_X(\tan\Theta_i - \tan\psi)\cos\Theta_i|.$$

Znaménka v obr. 6.66 jsou $\Theta_i < 0$, $x_X > 0$ a $\psi > 0$, takže bez absolutních hodnot je v souhlase s obrázkem $\overrightarrow{AO} < 0$ , neboli $\overrightarrow{OA} > 0$ a vlnoplocha dospěje do bodů $A$ a $X$ současně a později než do bodu $O$. Fázový rozdíl mezi kmitáním v bodě $X$ a v bodě $O$ je

$$\Delta\varphi(\Theta_i, X) = \varphi(\Theta_i, X) - \varphi(\Theta_i, O) = \frac{\omega}{c} x_X(\tan\psi - \tan\Theta_i)\cos\Theta_i.$$

Pro uvedený příklad je $\Delta\varphi(\Theta_i, X) > 0$.




Obr. 6.66 Parametry pro skalární popis difrakce na jedné reflexní plošce mřížky

Další fázový posun nastane mezi vlnoplochami směřujícími do směru $\vartheta$ se zdrojem v bodě $X$ a bodě $O$. **Kdyby** celá plocha „zrcátka“ kmitala ve fázi, s použitím analogie předchozího postupu dostaneme pro „vzdálenost bodu $O$ od $B$

$$\overrightarrow{|BO|} = |x_X(\tan\psi - \tan\vartheta)\cos\vartheta|.$$

Znaménka v obr. 6.66 jsou $\vartheta > \psi > 0, x_X > 0$. V souhlase s obrázkem zjistíme, že vlnoplocha emitovaná z bodu $X$ dospěje do vzdáleného místa pozorování $P$ dříve než vlna emitovaná z bodu $O$, tedy dráha $XP$ je kratší než $OP$ a

$$\Delta\varphi(\vartheta, X) = \varphi(\vartheta, X) - \varphi(\vartheta, O) = \frac{\omega}{c} x_X(\tan\psi - \tan\vartheta)\cos\vartheta.$$

Pro uvedený příklad je $\Delta\varphi(\vartheta, X) < 0$.

Protože však body „zrcátka“ ve fázi nekmitají, celkový fázový rozdíl mezi vlnoplochami emitovanými z bodů X a O a směřujícími do směru $\vartheta$ je algebraický součet obou fázových posuvů

$$\Delta\varphi(\Theta_i, \vartheta, X) = \frac{\omega}{c} x_X[(\tan\psi - \tan\vartheta)\cos\vartheta + (\tan\psi - \tan\Theta_i)\cos\Theta_i] =$$

$$= -\frac{\omega}{c} x_X[\tan\Theta_i \cos\Theta_i + \tan\vartheta\cos\vartheta - \tan\psi\,(\cos\Theta_i + \cos\vartheta)] =$$

$$= -\frac{\omega}{c} x_X[\sin\Theta_i + \sin\vartheta - \tan\psi\,(\cos\Theta_i + \cos\vartheta)] = x_X\, u.$$

Příspěvek k poli v místě $P$ ve směru $\vartheta$ od místa na „zrcátku“ v bodě $X$

$$dE(P) \propto e^{iux_X}\, dx_X,$$

$$E(P) \propto \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{iux_X}\, dx_X = \frac{e^{\frac{iau}{2}} - e^{\frac{-iau}{2}}}{iu} = \frac{2i\sin\frac{au}{2}}{iu} =$$

$$= \frac{a\ \sin\frac{au}{2}}{\frac{au}{2}} = a\ \mathrm{sinc}\ \frac{au}{2}.$$

Intenzita ve vzdáleném místě $P$

$$E(P)\, E^*(P) \propto a^2\ \mathrm{sinc}^2\ \frac{au}{2}$$

má absolutní maximum pro $u = 0$. To znamená

$$\sin\Theta_i + \sin\vartheta = \tan\psi\,(\cos\Theta_i + \cos\vartheta),$$

$$2\sin\frac{\Theta_i + \vartheta}{2}\cos\frac{\Theta_i - \vartheta}{2} = \tan\psi\cos\frac{\Theta_i + \vartheta}{2}\ \cos\frac{\Theta_i - \vartheta}{2},$$

$$\tan\psi = \frac{\sin\frac{\Theta_i + \vartheta}{2}}{\cos\frac{\Theta_i + \vartheta}{2}},$$

$$\psi = \frac{\Theta_i + \vartheta}{2},$$

což je obyčejný zákon odrazu na „zrcátku“. Zcela obdobně jako pro amplitudovou mřížku závisí úhlová šířka rozložení difraktované intenzity na šířce „zrcátka“ $a$; čím je a užší, tím je rozložení difraktované intenzity širší.

Pro danou vlnovou délku $\lambda_{bm}$ lze nalézt takový úhel sklonu „zrcátka“ $\psi$ vůči rovině mřížky, že směr maximální účinnosti difrakce a směr interferenčního řádu $m$ určený mřížkovou rovnicí

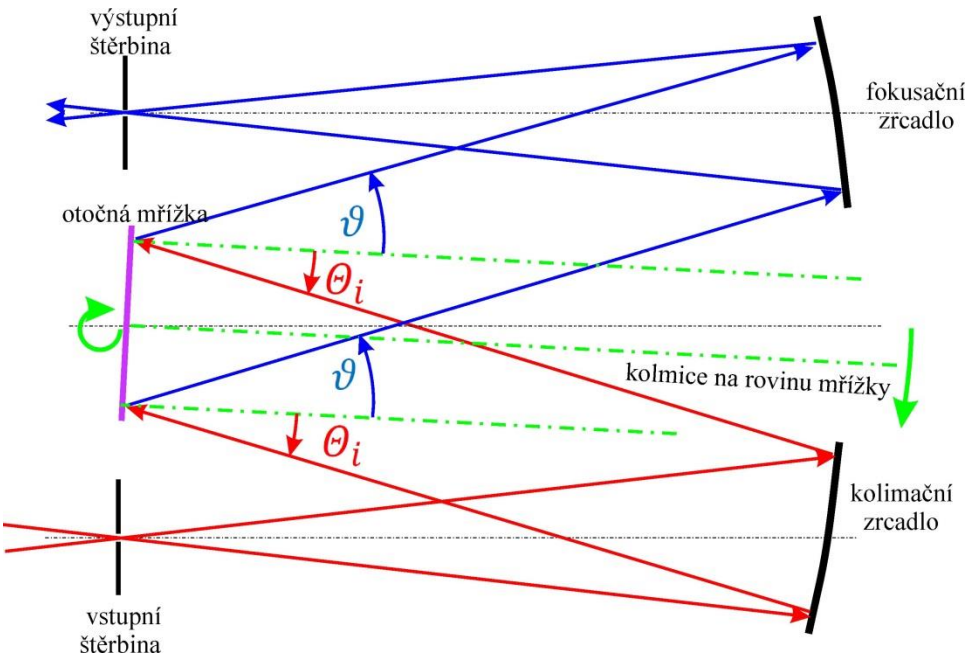
$$h(\sin\vartheta_m + \sin\Theta_i) = m\lambda_{bm}$$

se shodují. To znamená, že maximální účinnosti difrakce je pro vlnovou délku $\lambda_{bm}$ dosaženo tehdy, když směry maxima difrakčního faktoru $f_1$ a směr maxima interferenčního faktoru $F_N$

jsou totožné. Nultý řád $m = 0$ nastává pro $\vartheta_m = -\Theta_i$. To odpovídá odrazu na rovině mřížky. Stejně jako v případě transmisní amplitudové mřížky je nultý řád pro spektrometrii nepoužitelný

Do úlohy určení vhodného $\psi$ ještě navíc vstupuje podmínka vazby mezi úhly $\Theta_i$ a $\vartheta_m$, která je určena konstrukcí daného spektrometrického přístroje. Např. pro přístroje s pevnou polohou vstupní a výstupní štěrbiny, kde se vystupující vlnová délka mění otáčením mřížky, tedy současnou změnou úhlů $\Theta_i$ a $\vartheta_m$, dostaneme podmínku konstantního rozdílu těchto úhlů.

Jako příklad běžného přístroje je na obr. 6.67 schéma běžně nazývané monochromátor Czerny – Turner, kde zrcadla i mřížky jsou pevné a výběr vlnové délky vystupujícího záření se děje otáčením mřížky. Tak se mění oba úhly $\Theta_i$ i $\vartheta_m$, a to tak, že $\vartheta_m - \Theta_i$ je konstantní úhel (na obr. 6.67 je $\vartheta_m > 0, \Theta_i < 0$). Při návrhu geometrie povrchu mřížky (perioda $h$, šířka zrcátka $a$ a úhel $\psi$) je tedy potřeba zohlednit požadovanou vlnovou délku $\lambda_{bm}$ s maximální účinností difrakce, požadovaný interval vlnových délek (aby funkce $f_1(\Theta_i, \vartheta_m)$ měla v tomto intervalu dostatečnou velikost) a též podmínku vazby mezi úhly $\vartheta_m - \Theta_i = konstanta$.




Obr. 6.67 Schéma hojně užívaného monochromátoru typu Czerny – Turner. Červeně je zakreslen polychromatický vstupní svazek, modře kvazimonochromatický výstupní svazek. Zeleně je naznačeno otáčení mřížky při změně výstupní vlnové délky.