

1. Úvod – elektromagnetické vlny

Historicky se při pokusech o pochopení fyzikální podstaty světla střídavě prosazovaly dva základní koncepty – částicový a vlnový. V 17. století Sir Isaac Newton (1643-1727), který podstatně přispěl k rozvoji řady vědních oborů včetně optiky, předpokládal, že se světlo skládá z jednotlivých částic. Ve stejné době rozvinul Christiaan Huygens (1629-1695) vlnovou teorii světla. Postupně po bouřlivých diskusích začal vlnový model světla převažovat nad modelem částicovým. K tomu výrazně přispěl Thomas Young (1801) (1773-1829) svým slavným dvojitěrbínovým experimentem, kterým vysvětlil interferenci světla. Vlnový model definitivně potvrdil James Clerk Maxwell (1831-1879), který formuloval základní rovnice pro teorii elektromagnetického pole (1865) a rovněž predikoval existenci elektromagnetických vln, které se šíří rychlostí světla. O propojení vlastností světla s elektromagnetickou teorií a o propagaci této myšlenky se zasloužilo více vědců. Zde jmenujme Paula Drude a jeho učebnici (1900). Otázka fyzikální podstaty světla se tedy jevila jako vyřešená a uzavřená. Postupně se však objevovaly výsledky nových experimentů, které se pomocí pouhé vlnové teorie nedařilo objasnit. Mezi ně patřilo zejména měření spektra záření černého tělesa a existence prahu energie elektronů emitovaných z látky po ozáření světlem – vnější fotoelektrický jev. Přitom energie jednotlivých vyletujících elektronů závisí na frekvenci dopadajícího záření a nikoli na dopadajícím výkonu (Philipp Lenard 1902). Na dopadajícím výkonu závisí počet vyletujících elektronů. V souladu s Planckovou hypotézou objasňující zákonitosti tepelného záření byly vlastnosti fotoelektrického jevu vysvětleny předpokladem, že světlo předává energii látce po dále nedělitelných porcích – kvantech, Albert Einstein (1905), Nobelova cena 1921. Vzhledem k tomu, že zjevně některé experimentální výsledky lze dobře popsat vlnovým modelem a jiné modelem částicovým (kvantovým), pracujeme s tzv. modelem vlnově-částicového dualismu, který tuto skutečnost vystihuje. Hypotézu o vlnově – částicové dualitě (platící obecně, nejen pro elektromagnetické vlny – fotony) formuloval Louis-Victor de Broglie (1924), Nobelova cena 1929. Po vzniku kvantové mechaniky (1925) se začala rozvíjet i kvantová teorie elektromagnetického pole, jejíž součástí je kvantová optika.

Fyzikální realita „světla“ je velmi složitá. K vysvětlení vybraných jevů se užívají více či méně složité modely. Základním „objektem“, se kterým budeme v našich představách pracovat, je monochromatická, postupná, homogenní, neflumená, určitým způsobem polarizovaná rovinná vlna, vysvětlení pojmů je v **Dodatku 1.1**. Takový silně idealizovaný fiktivní „objekt“ by měl trvat nekonečně dlouho a tedy by měl být nekonečný ve směru šíření a časově dokonale stabilní (monochromaticnost). Homogenita vlny (ve významu konstantní amplituda podél vlnoplochy) vede k požadavku na nekonečnost ve směrech kolmých na směr šíření. Několik poznámek k těmto podmínkám je v **Dodatku 1.2**.

V tomto kurzu „Optika“ budeme používat převážně popis založený na klasické elektrodynamice, tj. na Maxwellových rovnicích. Pouze v závěru kurzu se dotkneme jevů, které v první polovině 20. století vedly k představám o energetických kvantech.

V této úvodní kapitole především shrneme některé vybrané poznatky z kurzu „Elektrina a magnetismus“, na které v „Optice“ navážeme.

V dodatcích jsou uváděna některá shrnutí, dále témata rozšiřující základní text a některá odvození. Budeme používat diferenciální operátory v kartézské souřadné soustavě, jejichž přehled je v matematickém dodatku **M**.

1.1 Maxwellovy rovnice

Při popisu světla jako elektromagnetické vlny vyjdeme z Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru ve volném prostoru, ve kterém se mohou nacházet volné náboje a volné proudy. Tučně budeme značit vektorové veličiny. První divergenční rovnici zapišme jako

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}, \quad (1.1)$$

což rozepsáno do kartézských složek je

$$\frac{\partial E_x(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z, t)}{\partial z} = \frac{\rho(x, y, z, t)}{\varepsilon_0}$$

V dalším budeme $(\mathbf{r}, t) = (x, y, z, t)$ většinou vynechávat, protože se bude jednat o lokální vztahy.

Zde ρ je hustota náboje (rozměr A s m^{-3}). Rovnice 1.1 ukazuje, že elektrické náboje jsou zdrojem vektorového elektrického pole $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Přesněji řečeno jedná se o část elektrického pole označovanou jako pole zřídlové. Siločáry jsou orientované křivky vycházející z kladných nábojů a končící na záporných, přičemž vektory \mathbf{E} jsou k těmto křivkám tečné.

Další divergenční rovnice je

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.2)$$

Rovnice 1.2 říká, že neexistují žádné magnetické náboje, ze kterých by vycházely siločáry magnetického pole, magnetické siločáry jsou uzavřené křivky. Siločárou označujeme křivku, ke které je pole (v daném případě vektor \mathbf{B}) v daném místě tečnou.

Faradayův zákon elektromagnetické indukce zní

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Rovnice 1.3 je formulací Faradayova zákona elektromagnetické indukce, tedy že časová změna magnetické indukce $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ vyvolává pole elektrické. Ta popisuje tu část elektrického pole, kterou můžeme charakterizovat jako pole vírové, jehož siločáry jsou uzavřené křivky.

Čtvrtou rovnicí, která kompletuje popis elektromagnetického pole je rovnice popisující Ampérův zákon, která v době, kdy se touto problematikou Maxwell začal zabývat, byla známa ve tvaru pro stacionární pole

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1.4)$$

kde \mathbf{j} je vektor hustoty elektrického proudu vyvolaného pohybem nábojů (rozměr A m^{-2}). Tato rovnice by byla pro nestacionární pole v rozporu s rovnicí kontinuity elektrického proudu (tj. se zákonem zachování elektrického náboje)

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.5)$$

S využitím rovnice 1.4 a známé vektorové identity $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ dostáváme

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

což je v rozporu s rovnicí 1.5. Maxwell proto při své práci nad sjednocením teorie elektromagnetického pole doplnil rovnici 1.5 o další člen, který uvedený rozpor odstranil:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.6)$$

Výraz

$$\mathbf{j}_{Max} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.7)$$

představuje tzv. **Maxwellův posuvný proud**.

Hodnoty konstant jsou

permitivita vakua $\varepsilon_0 \cong 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$ a permeabilita vakua $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \cong 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ m kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$.

Doplnění Ampérova zákona o Maxwellův posuvný proud se ukázalo jako jedním z klíčových kroků pro odvození vlnové rovnice z Maxwellových rovnic. To bylo velmi významnou podporou názoru, že světlo je elektromagnetické vlnění.

Uvedený diferenciální tvar Maxwellových rovnic je vhodný pro objemové hustoty. Plošné, lineární či bodové rozložení náboje vyžaduje doplnění, které zde nebudeme diskutovat. Podobně je tomu s proudem tekoucím v ploše nebo po křivce.

Maxwellovy rovnice doplníme o silové působení polí na diskrétní náboje q pohybující se rychlostí \mathbf{v}_q vyjádřené Lorentzovou silou

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_q \times \mathbf{B}).$$

Diferenciálnímu tvaru Maxwellových rovnic obsahujících objemové hustoty náboje a proudu ovšem lépe odpovídá objemová hustota Lorentzovy síly (síla působící na jednotku objemu)

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_E + \mathbf{f}_B = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Příslušné jednotky objemové hustoty síly jsou N m^{-3} .

1.2 Vlnová rovnice

Aplikujeme-li operátor rotace na rovnici 1.3, dostaneme

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{B})}{\partial t} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}, \quad (1.8)$$

Nejprve se omezíme na **případ vakua**, kdy je $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$. Pak je $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ a z rovnic 1.8 a 1.3 dostaneme

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

Připomeňme, že zápis 1.9 zastupuje 3 rovnice pro jednotlivé složky. V kartézském souřadném systému můžeme rozepsat

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Tato rovnice je analogická **vlnové rovnici** známé z mechaniky

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.10)$$

kde \mathbf{u} je výchylka mechanické vlny a v je její fázová rychlost.

Porovnáním rovnic 1.9 a 1.10 dostaneme

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad (1.11)$$

kde dosazením dostaneme rychlost šíření vlny ve vakuu $c \cong 2.997 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

V 19. století již bylo z řady experimentů zřejmé, že světlo má vlnovou, elektromagnetickou povahu. Jedním z pozorovaných jevů, které naznačovaly nějakou souvislost mezi magnetismem a světlem, byl Faradayův jev, který byl později vysvětlen jako kruhový dvojlom indukovaný magnetickým polem. Rovněž byla poměrně dobře známá rychlost šíření světla. Ale teprve odvození vlnové rovnice 1.9 z Maxwellových rovnic jasně ukázalo, že světlo má charakter elektromagnetického vlnění s rychlostí šíření c ve vakuu, která souhlasila s experimentálně známou rychlostí šíření světla.

1.2.1 Jednorozměrná vlnová rovnice

Nyní ukážeme, že každá funkce $f(z \pm vt)$ je řešením jednorozměrné vlnové rovnice.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (1.12)$$

Označme $\xi = z - vt$. Tento případ popisuje postupnou vlnu šířící se v kladném směru osy z . Pak je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

a dosazením do 1.12 dokážeme platnost tohoto vztahu. Analogickým postupem lze ukázat platnost vlnové rovnice i pro případ $\xi = z + vt$, tedy pro postupnou vlnu šířící se v záporném směru osy z .

Každé řešení vlnové rovnice se nazývá vlnou. Pro základní popis šíření a interakce světla s látkami je nejvýznamnější postupná harmonická rovinná vlna, kterou lze zapsat např. jako

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos [k(z \pm vt)] \quad (1.13)$$

pro případ šíření ve směru osy z . \mathbf{E}_0 je amplituda vlny. Zvolíme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ a nazveme jej velikost vlnového vektoru. Pro faktor k je vhodné volit jednotky rad m^{-1} (případně $^\circ \text{m}^{-1}$) což zajišťuje, že argument funkce \cos je úhel. V soustavě SI je často úhel považován za bezrozměrný a pak je rozměr k m^{-1} . Potom se ovšem neodlišují jednotky veličin vlnové délky $\frac{1}{\lambda}$ a vlnový vektor. Podobná situace je mezi frekvencí $\frac{1}{T}$ (jednotky $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$) a kruhovou frekvencí $\omega = \frac{2\pi}{T}$, jednotky rad s^{-1} , v SI též s^{-1} .

Dalšími úpravami vztahu 1.13 dostaneme alternativní formy zápisu

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kz \pm kvt) &= \mathbf{E}_0 \cos\left(kz \pm \frac{2\pi vt}{\lambda}\right) = \mathbf{E}_0 \cos\left(kz \pm \frac{2\pi t}{T}\right) = \\ &= \mathbf{E}_0 \cos(kz \pm \omega t), \end{aligned} \quad (1.14)$$

kde $T = \frac{\lambda}{v}$ je perioda vlny (doba kmitu) a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je úhlová frekvence.

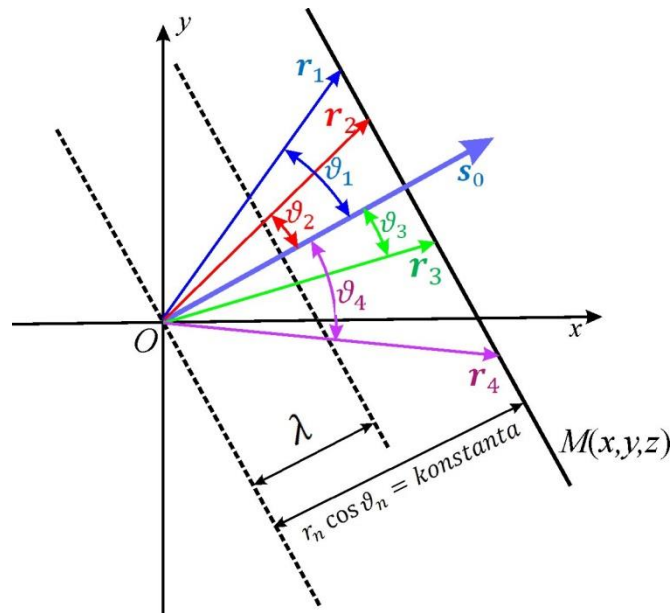
1.2.2 Vlna v třírozměrném prostoru

V obecném 3D případě lze harmonickou rovinnou vlnu zapsat ve formě

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta). \quad (1.15)$$

Argument $\Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta$ se nazývá **fáze** vlny. Veličina $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}_0$ se nazývá **vlnový vektor** a \mathbf{s}_0 je jednotkový vektor ve směru \mathbf{k} , δ je počáteční náběh fáze vlny v bodě $\mathbf{r} = 0$ a v čase $t = 0$.

Položíme-li $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = konst.$, představuje množina polohových vektorů \mathbf{r} rovinu kolmou na směr šíření daný vektorem \mathbf{k} (resp. jednotkovým vektorem \mathbf{s}_0) – obr. 1.1. Vlně popsané vztahem 1.15 se proto říká **rovinná vlna**. Faktor $\pm \omega t$ popisuje šíření vlny v čase ve směru vektoru \mathbf{k} (znaménko -) nebo proti jeho směru (znaménko +).



Obr. 1.1 Znárodnění řezů rovinných vlnoploch pro vlnu s vlnovým vektorem $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0) = k \mathbf{s}_0$. Čárkovaně je zakreslena vlnoplocha procházející počátkem souřadné soustavy a vlnoplocha vzdálená od počátku o vlnovou délku λ . Barevně jsou zakresleny čtyři polohové vektory reprezentující obecný polohový vektor bodu na vlnoploše M . Vzdálenost různých bodů vlnoplochy M od počátku v jednom libovolném čase splňuje podmínku $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i = k_x x_i + k_y y_i = k r_i \cos \vartheta_i = vt$. Vlnová délka je $\lambda = vT$, T je doba kmitu.

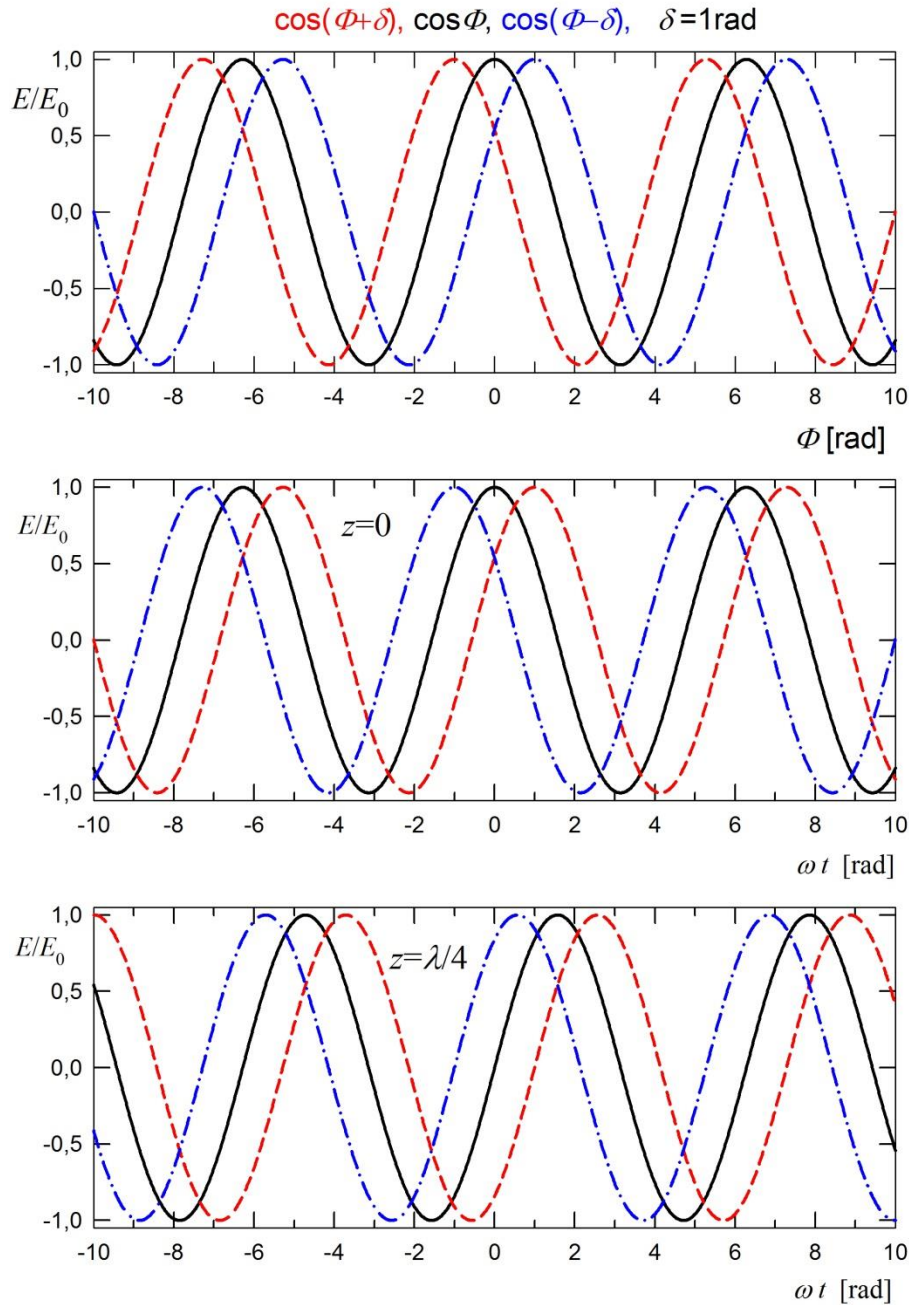
S využitím komplexní proměnné lze rovnici 1.15 zapsat jako

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta)}. \quad (1.16)$$

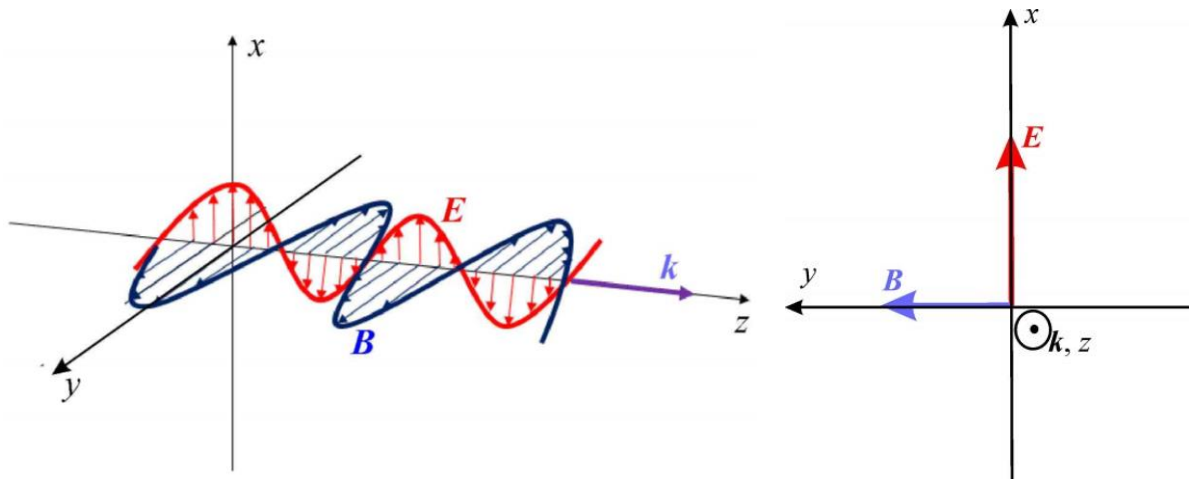
V tomto případě je amplituda \mathbf{E}_0 reálná. Náběh fáze $\pm \delta$ je možné zahrnout do amplitudy, která se tím stane komplexní

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_0 e^{\pm i\delta}. \quad (1.17)$$

Základní pravidla pro užívání komplexního formalismu pro popis monochromatické vlny jsou v **Dodatku 1.3**.



Obr. 1.2 V horní části obrázku jsou znázorněny závislosti poměru $\frac{E}{E_0}$ na fázi $\Phi = kz - \omega t = \frac{2\pi}{\lambda}z - \frac{2\pi}{T}t$ (černě), na fázi $\Phi + \delta$ (červeně) a na fázi $\Phi - \delta$ (modře). Prostřední část zachycuje časovou závislost $\frac{E}{E_0}(t)$ v místě $z=0$ a spodní část časový průběh v místě $z = \frac{\lambda}{4}$, kam maxima doběhnou zpožděně o $\frac{T}{4}$. Prohození pořadí křivek červená – černá – modrá je způsobeno záporným znaménkem u ωt .



Obr. 1.3. Vzájemná orientace vektorů v postupné, lineárně polarizované, rovinné vlně v jeden časový okamžik. Důkaz toho, že oba vektory kmitají ve fázi, bude proveden v další části (rovnice 1.34, 1.35)

1.2.3 Vlnová rovnice v materiálovém prostředí

Obecně při interakci elektromagnetické vlny s látkou dochází k mnoha procesům, jako je natáčení elektrických a magnetických dipólů v látce přítomných, k vzájemnému posuvu kladných a záporných iontů a dalším. Uvedené procesy však bývají spojeny s pohybem poměrně hmotných objektů a jsou efektivně excitovány elektrickým a magnetickým polem vlny při frekvencích obvykle nižších než odpovídá optickému oboru. Při průchodu elektromagnetické vlny v optickém oboru spektra reaguje materiálové prostředí v mnoha případech převážně na elektrickou složku vlny vytvářením dipólů vychylováním elektronových oblaků z rovnovážných poloh. Dominanci působení elektrické složky lze ukázat z Lorentzovy síly porovnáním velikosti elektrické a magnetické složky

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}),$$

kde \mathbf{v}_e je rychlost elektronu a

$$|\mathbf{F}_B| = |qv_e B \sin \alpha|, \quad |\mathbf{F}_B|_{max} = |qv_e B|, \quad |\mathbf{F}_E| = |qE|.$$

Dále využijeme vztahu $B = \frac{E}{v}$, kde v je rychlost šíření elektromagnetické vlny v látce a pro poměr sil dostaneme

$$\frac{|\mathbf{F}_B|_{max}}{|\mathbf{F}_E|} = \frac{v_e}{v}.$$

Obvykle je rychlost elektronu mnohem menší než rychlost šíření elektromagnetické vlny. Pak můžeme při popisu interakce elektromagnetického záření s látkou magnetickou část interakce

v řadě případů v oboru optických frekvencí zanedbat. Budeme v následujícím textu užívat **aproximaci „nemagnetického“ prostředí** $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cong \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$.

Když látka reaguje na elektrickou část Lorentzovy síly coulombickou interakcí, dochází ke vzniku různých dipólů (např. dipól vzniklý vzájemným posunem záporně nabitého elektronového obalu vzhledem ke kladně nabitému atomovému jádru, posunem kladných a záporných nábojů v materiálech s iontovou nebo částečně iontovou vazbou apod. Pole v látce se v prostoru na nanoskopických vzdálenostech rychle mění. „Mikroskopické“ Maxwellovy rovnice jsou též známy jako **Lorentzovy rovnice**, které formálně popisují působení lokálních polí na částice tvořící látku. Vhodným časovým a prostorovým zprůměrováním polí vystupujících v Lorentzových rovnicích můžeme rozmazat atomární strukturu látky a dostaneme tak fenomenologický **model spojitého prostředí**, který popisuje pole makroskopicky. V dalším použijeme tento fenomenologický popis na případ elektromagnetických vln. Jedním z výsledků je závislost rychlosti šíření monochromatické vlny na permitivitě materiálu $\varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)$ a případně na permeabilitě $\mu_0 \mu_r(\omega)$. **Mikroskopický** model šíření elektromagnetických vln v látce je podstatně složitější a je založen na interferenci dopadající vlny a kulových vln vyzařovaných mikroskopickými vybuzenými kmitajícími dipóly, přičemž všechny tyto komponenty se šíří rychlostí c a výsledná (experimentálně měřitelná) rychlost složené vlny je výsledkem interference těchto složek.

Shrnutí **Maxwellových rovnic v modelu spojitého prostředí** a podmínek na rozhraní dvou prostředí je uvedeno v **Dodatku 1.4**. K jejich odvození a k odvození vlnové rovnice se vztahují následující úpravy. Rozepíšeme Maxwellovy rotační rovnice

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.18)$$

a v aproximaci nemagnetického prostředí je

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \\ &= \mu_0 \mathbf{j}_f + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_{Max}) = \mu_0 \mathbf{j}_f + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Hustotu elektrického proudu \mathbf{j} jsme rozdělili na proud volných nosičů \mathbf{j}_f a polarizační proud vyvolaný časovou změnou vektoru polarizace $\mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$.

Označili jsme

$$\mathbf{j}_P + \mathbf{j}_{Max} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Spojením členů obsahujících proudové hustoty Maxwellova posuvného proudu \mathbf{j}_{Max} a polarizačního proudu jsme dospěli k veličině elektrická indukce $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$.

Aplikací operátoru rot na Maxwellovu rovnici dostaneme

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{B})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_f}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}, \quad (1.20)$$

kde

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f + \rho_p). \quad (1.21)$$

Elektrický náboj ρ jsme rozdělili na náboj volných nosičů ρ_f a polarizační (vázaný) náboj ρ_p . Z rovnice 1.20

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\operatorname{grad} \rho_f}{\varepsilon_0} + \frac{\operatorname{grad} \rho_p}{\varepsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_f}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (1.22)$$

Abychom spojili ρ_p a \mathbf{P} , napíšeme rovnici kontinuity pro náboje spojené s polarizací

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_p = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (1.23)$$

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}$$

a dostáváme vlnovou rovnici

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_f}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \rho_f. \quad (1.24)$$

Rovnice 1.24 je obecnou vlnovou rovnicí vyplývající z Maxwellových rovnic a zdůrazněme, že není vázána na materiálové vztahy a tedy neobsahuje materiálové parametry typu susceptibilita, permitivita, permeabilita či vodivost, které jsou přinejmenším frekvenčně závislé. Podobně můžeme diskutovat magnetické veličiny. Rovnici 1.24 pak můžeme upravovat s přihlédnutím k předpokladům o materiálových vztazích. Poznamenejme, že nenulový volný proud \mathbf{j}_f může téci i v elektricky neutrálním prostředí, kde $\rho_f = \rho_f^+ - |\rho_f^-| = 0$, když hustoty kladných a záporných nábojů jsou nenulové a mohou přispívat k nenulovému proudu.

V dalším budeme obvykle předpokládat homogenní, izotropní prostředí¹ a slabé působící elektrické pole, pokud nebude řečeno jinak. Dále můžeme předpokládat

- a) materiál „bez paměti“ (tj. s okamžitou odezvou, z čehož plyne bez frekvenční závislosti susceptibility χ), tj. materiál bez disperze a beze ztrát; často užíváno v úvodních a obecných textech;

¹ Homogenní prostředí znamená, že materiálové parametry nezávisí na poloze. Izotropní zde znamená, že parametry důležité pro šíření vln nezávisí na směru šíření vlny.

- b) realisticky předpokládáme, že všechny veličiny se mění harmonicky s kruhovou frekvencí ω , tj. $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{H} \propto e^{-i\omega t}$, jsou monochromatické. Tehdy můžeme předpokládat jednoduchý lineární vztah mezi vektory polarizace a elektrického pole

$$\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t),$$

kde susceptibilita $\chi(\omega)$ je skalární veličinou a vektory $\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t)$ jsou rovnoběžné. Ve vztazích, kde vystupují frekvenčně závislé parametry (jako $\chi(\omega)$, $\varepsilon_r(\omega)$, $\sigma(\omega)$) je zapotřebí pracovat s monochromatickými složkami pole.

Vlastnosti látek absorbujících elektromagnetickou energii jsou téměř výhradně popisovány komplexními parametry, jako jsou již zmíněné susceptibilita, permitivita nebo vodivost. Z této skutečnosti plyne důležitost komplexního formalismu i při popisu vln, pro které je základním východiskem komplexní index lomu. Např. fázový posuv mezi vektory $\mathbf{P}_\omega(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t)$ lze popsat tak, že $\chi(\omega)$ je komplexní. „Nemagnetické“ prostředí je popsáno vztahem

$$\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}, t).$$

Uvedený typ materiálového vztahu dostaneme v kapitole „Absorpce a disperze“ a v Lorentzově modelu, který uvažuje látku jako soubor harmonických oscilátorů.

Dále můžeme předpokládat i lineární vztah mezi proudem \mathbf{j}_f a elektrickým polem (Ohmův zákon) s vodivostí $\sigma(\omega)$ jako koeficientem úměrnosti

$$\mathbf{j}_{f\omega} = \sigma(\omega) \mathbf{E}_\omega.$$

Jakmile do vlnové rovnice umístíme frekvenčně závislé materiálové parametry $\chi(\omega)$, $\varepsilon_r(\omega)$, $\sigma(\omega)$, popisujeme monochromatický děj. Chceme-li popisovat obecnější závislosti, musíme časové průběhy rozdělit na monochromatické. K tomu slouží matematický aparát Fourierových transformací, který spočte „váhové“ koeficienty pro jednotlivé monochromatické složky, viz-matematický **dodatek M**. Např. pokud popisujeme šíření nějakých pulzů látkovým prostředím, provedeme fourierovský spektrální rozklad vlny vstupující do prostředí, jednotlivé spektrální složky (monochromatické vlny) necháme nezávisle na sobě projít prostředím a na výstupu tyto složky sečteme. Právě spojení Fourierových transformací s vlastnostmi monochromatických vln je účinným nástrojem pro řešení mnoha úloh.

Vraťme se k vlnové rovnici pro případ dielektrika bez volných nábojů a proudů ($\rho_f = 0$, $\mathbf{j}_f = \mathbf{0}$), pro který dostaneme

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\text{grad } \rho_p}{\varepsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \text{grad div } \mathbf{P} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (1.25)$$

Pokud je $\text{grad div } \mathbf{P} = 0$, rovnici 1.25 můžeme dále upravit

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.26)$$

Tento případ nastává např. pro izotropní lineární prostředí bez volných nábojů a bez volných proudů, kdy materiálový vztah můžeme přepsat jako

$$\mathbf{P}_\omega = \mathbf{D}_\omega - \varepsilon_0 \mathbf{E}_\omega = \mathbf{D}_\omega - \frac{\mathbf{D}_\omega}{1 + \chi(\omega)} = \mathbf{D}_\omega \frac{\chi(\omega)}{1 + \chi(\omega)}$$

a z podmínky $\text{div } \mathbf{D} = 0$ dostaneme $\text{div } \mathbf{P} = 0$. Příklad kdy $\text{grad div } \mathbf{P} \neq 0$ je důležitý v anizotropních materiálech, kdy vektory \mathbf{D} a \mathbf{P} nejsou rovnoběžné.

S využitím vztahů $\mathbf{P}_\omega = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_\omega$, kde $\varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega)$, dostaneme pro lineární, izotropní a monochromatický případ

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}_\omega - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \chi(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial t^2} &= \Delta \mathbf{E}_\omega - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial t^2} = \\ &= \Delta \mathbf{E}_\omega - \frac{1}{v(\omega)^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Pro fázovou rychlost šíření vlny v homogenním, izotropním, neabsorbujícím a nemagnetickém dielektriku ($\mu_r = 1$) pak zřejmě platí

$$v(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r(\omega)}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}} = \frac{c}{n(\omega)}, \quad (1.28)$$

kde jsme zavedli **index lomu** jako poměr mezi rychlostí šíření elektromagnetické vlny ve vakuu a v látce popsané reálnou relativní permitivitou ε_r . Indexu lomu je přímo úměrná i velikost vlnového vektoru a nepřímo úměrná vlnová délka v materiálu

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)} = \frac{c}{v(\omega)}, \quad k(\omega) = \frac{n(\omega) \omega}{c}, \quad \lambda_{\text{látka}}(\omega) = \frac{\lambda_{\text{vakuum}}(\omega)}{n(\omega)}. \quad (1.29)$$

V dalším textu budeme pro zkrácení zápisu označovat $\lambda_{\text{látka}} = \lambda$, $\lambda_{\text{vakuum}} = \lambda_0$.

Dále ukážeme, že v **homogenní² rovinné vlně** platí vzájemná kolmost vektorů \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{k} (resp. \mathbf{s}_0).

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{r} - \frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{r} - \frac{\lambda}{T} t \right) = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{r} - vt). \quad (1.30)$$

Označme $\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{r} - vt = \xi$. Dále předpokládejme, že máme elektromagnetickou vlnu popsanou nějakými funkcemi argumentu ξ , tj. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\xi)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\xi)$. Podstatná je závislost složek pole na jediném argumentu ξ , tedy v ploše $\xi = \text{konst.}$ jsou i tyto složky konstantní, vlna je homogenní.

Vzhledem k tomu, že $\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{r} = s_{0x}x + s_{0y}y + s_{0z}z$, platí

² Pojem homogenní vlna označuje, že amplituda kmitů je stejná po celé vlnoploše, kde je z definice stejná také fáze.

$$\frac{\partial}{\partial x} = s_{0x} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = s_{0y} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = s_{0z} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \\ &= \left(s_{0y} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - s_{0z} \frac{\partial E_y}{\partial \xi}, \quad s_{0z} \frac{\partial E_x}{\partial \xi} - s_{0x} \frac{\partial E_z}{\partial \xi}, \quad s_{0x} \frac{\partial E_y}{\partial \xi} - s_{0y} \frac{\partial E_x}{\partial \xi} \right) = \\ &= \mathbf{s}_0 \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Rovnici 1.32 pak můžeme psát jako

$$\mathbf{s}_0 \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.33)$$

Její časovou integraci v pevném místě $d\xi = -v dt$ dostaneme

$$\mathbf{s}_0 \times \mathbf{E} = v\mathbf{B}. \quad (1.34)$$

Z této rovnice plyne pro velikosti vektorů

$$E = vB. \quad (1.35)$$

Dále je zřejmé, že oba vektory kmitají ve fázi.

přičemž ve vakuu je $v = c$. Integrační konstantu jsme bez újmy na obecnosti položili rovnou nule, protože představuje konstantní příspěvek \mathbf{B}_0 k magnetickému poli \mathbf{B} , který nemá žádný vliv na šíření elektromagnetické vlny, protože $\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = 0$.

Rovnici 1.34 nejprve skalárně vynásobíme vektorem \mathbf{s}_0 . Dostaneme

$$\mathbf{s}_0 \cdot (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{E}) = v \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.36)$$

což plyne z vektorové identity $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$). Tedy platí, že $\mathbf{s}_0 \perp \mathbf{B}$.

Nyní rovnici 1.34 vynásobíme skalárně vektorem \mathbf{E} a dostaneme

$$\mathbf{E} \cdot (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{E}) = v \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.37)$$

tedy $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

Analogicky vede Maxwellova rovnice v homogenním izotropním nemagnetickém dielektriku

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.38)$$

ke vztahu

$$\mathbf{s}_0 \times \mathbf{B} = -\frac{1}{v} \mathbf{E}. \quad (1.39)$$

Vynásobíme-li rovnici 1.39 skalárně \mathbf{s}_0 dostaneme

$$\mathbf{s}_0 \cdot (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} = -\frac{1}{v} \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{E}, \quad (1.40)$$

tedy

$$\mathbf{s}_0 \perp \mathbf{E}. \quad (1.41)$$

Varianta výše uvedeného popisu, ve které místo jednotkového vektoru \mathbf{s}_0 vystupuje přímo vlnový vektor $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n \mathbf{s}_0$, je v Dodatku 1.4. To lze s výhodou aplikovat při užití komplexního formalismu.

Ze vztahů 1.36, 1.37 a 1.40 je tedy zřejmé, že vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{s}_0 jsou v rovinných homogenních vlnách navzájem kolmé a tvoří pravotočivý systém. Tento závěr platí v případě platnosti vlnové rovnice 1.27, tedy pro homogenní, izotropní, nemagnetické prostředí bez volných nábojů a proudů, což samozřejmě zahrnuje i vakuum.

Vztah 1.35 můžeme upravit

$$E = vB = v\mu_0 H = \frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r}} H = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} H = ZH, \quad (1.42)$$

kde Z je impedance prostředí. Pro vakuum platí

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad (1.43)$$

$$E = cB = c\mu_0 H = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H = Z_0 H,$$

kde impedance vakua je $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 377 \Omega$.

Protože rovinné homogenní vlny jsou používány v mnoha modelech pro popis různých jevů spojených s elektromagnetickými vlnami, může vzniknout dojem, že příčnost je obecnou vlastností těchto vln. Není tomu tak. Ve vodivých nebo nehomogenních prostředích, kdy je nutno použít obecnějších tvarů vlnové rovnice 1.24 nebo 1.25, jsou možné situace rozmanitější a složitější. Vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{s}_0 nemusí být obecně navzájem kolmé ani v izotropním materiálu, dokonce ani ve vakuu. Důležitou roli hrají okrajové podmínky pro řešení vlnových rovnic, např. evanescentní vlny v popisu totální reflexe (kapitola „Odraz a lom“.

1.2.4 Helmholtzova rovnice

V prostoru bez zdrojů vlnění pro monochromatické vlny platí Helmholtzova homogenní rovnice (tj. s nulovou pravou stranou).

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0. \quad (1.44)$$

Ověření pro rovinnou vlnu je uvedeno v **Dodatku 1.5**.

1.3 Energie postupné rovinné monochromatické vlny

V další části se budeme zabývat energií, kterou nese elektromagnetická vlna. Objemovou hustotu elektrické energie v neabsorbujícím prostředí (\mathbf{E} a \mathbf{D} kmitají ve fázi) můžeme psát jako

$$u_E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) E^2(\mathbf{r}, t). \quad (1.45)$$

Ve vakuu je $\varepsilon_r = 1$ a $u_E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t)$, (jednotky J m^{-3}). V dalším budeme zdůraznění lokálnosti (\mathbf{r}, t) opět vynechávat.

Podobně pro magnetickou složku v „nemagnetickém“ materiálu platí (stejně jako ve vakuu)

$$u_B = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

V lineárním „nemagnetickém“ prostředí je

$$B = \frac{E}{v(\omega)} = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \mu_0} E,$$

$$B^2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \mu_0 E^2,$$

z čehož dostaneme

$$u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) E^2 = u_E.$$

Ve vakuu a v neabsorbujícím dielektriku nese tedy elektrická a magnetická část vlny stejnou energii. Celkově tedy pro hustotu energie vlny dostaneme

$$u = u_E + u_B = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) E^2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) v(\omega) EB. \quad (1.46)$$

V oboru optických frekvencí ($\sim 10^{15} \text{s}^{-1}$) mají praktický význam časové střední hodnoty u , tj. $\langle u \rangle_T$, protože žádný detektor nemá tak rychlou časovou odezvu, aby změny v čase mohl sledovat. Detektor tedy sleduje časové střední hodnoty energie záření, které na něj dopadá. Středování je možné provádět pro periodické děje přes periodu vlny T nebo obecněji přes časovou konstantu odezvy detektoru.

V případě postupné, netlumené, monochromatické, **lineárně polarizované** (kapitola „Polarizace rovinné monochromatické vlny“), rovinné vlny pak můžeme psát

$$\langle u_E(z, t) \rangle_T = \langle u_B(z, t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) dt = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2, \quad (1.47)$$

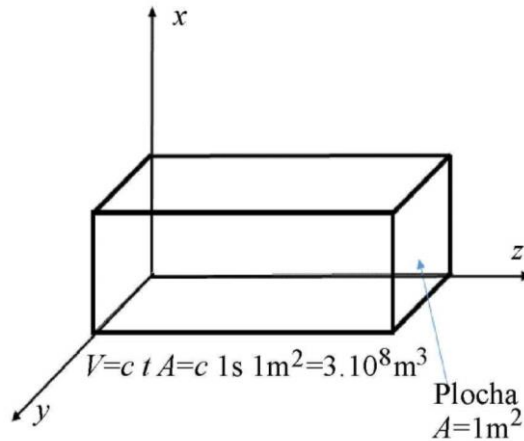
(viz **Matematický dodatek M**) a celkově pro hustotu energie záření pro tento typ vlny

$$U = \langle u \rangle_T = \langle u_E \rangle_T + \langle u_B \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n^2 E_0^2. \quad (1.48)$$

Vedle objemové hustoty energie má v případě postupných vln význam i výkon dopadající na jednotku plochy.

Předpokládejme, že postupná monochromatická lineárně polarizovaná rovinná vlna se šíří ve vakuu ($\varepsilon_r = 1$) ve směru z rychlostí c . Plochou $A = 1\text{m}^2$ umístěnou kolmo na osu z proteče za $t = 1\text{s}$ energie vlny s objemovou hustotou u obsažená v objemu $V = Act$ (obr. 1.4), tedy energie

$$\langle u c \rangle_T = \langle \varepsilon_0 E^2 c \rangle_T = \left\langle \varepsilon_0 \frac{E^2}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right\rangle_T = \left\langle \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} E^2 \right\rangle_T = \left\langle \frac{1}{Z_0} E^2 \right\rangle_T = \frac{1}{2Z_0} E_0^2. \quad (1.49)$$



Obr.1.4 Objem V , ve kterém se nachází záření, které projde plochou 1m^2 za 1s . Postupná rovinná vlna se šíří ve směru osy z .

Vypočtěme nyní Poyntingův vektor (John Poynting, 1883) \mathbf{S} a jeho časovou střední hodnotu pro lineárně polarizovanou vlnu.

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad S = E H = \frac{E B}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c}, \quad (1.50)$$

$$\langle S \rangle_T = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\mu_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 = \frac{1}{2Z_0} E_0^2 = \langle u c \rangle_T. \quad (1.51)$$

Podobně v homogenním, izotropním, neabsorbujícím, „nemagnetickém“ prostředí můžeme v případě šíření monochromatické rovinné vlny rychlostí $v = \frac{c}{n}$ psát pro střední hodnotu součinu

$$\begin{aligned}\langle uv(\omega) \rangle_T &= \langle \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) E^2 v \rangle_T = \langle \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{E^2}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0}} \rangle_T = \left\langle \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)}{\mu_0}} E^2 \right\rangle_T = \\ &= \left\langle \frac{1}{Z} E^2 \right\rangle_T = \frac{1}{2Z(\omega)} E_0^2.\end{aligned}\quad (1.52)$$

Pro velikost Poyntingova vektoru můžeme napsat

$$S = EH = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 v(\omega)} = \frac{E^2 n(\omega)}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c n(\omega) E^2 \quad (1.53)$$

a pro časovou střední hodnotu lineárně polarizované vlny

$$\begin{aligned}\langle S \rangle_T &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 v(\omega)} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \mu_0}}{\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n(\omega) E_0^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)}{\mu_0}} E_0^2 = \frac{1}{2} n(\omega) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 = \frac{1}{2Z(\omega)} E_0^2 = \langle uv(\omega) \rangle_T.\end{aligned}\quad (1.54)$$

Veličinu $I = \langle S \rangle_T$ budeme dále též nazývat **intenzita** vlny. Poznamenejme, že v literatuře se stejným názvem i symbolem označuje často i hustota energie záření (vztah 1.48), případně hustota elektrické energie (vztah 1.45).

Poyntingův vektor má fyzikální význam energie, která proteče v postupné rovinné vlně plochou $A = 1\text{m}^2$ za 1s, tedy plošné hustoty výkonu v jednotkách W m^{-2} .

Poyntingův vektor pro homogenní tlumenou vlnu v absorbujícím prostředí je probrán v **Dodatku 1.6**.

1.4 Tlak světelného záření

Dalším projevem světla je tlak, kterým působí na předměty. K odvození jeho velikosti je možné použít jak vlnový, tak částicový model světla. Protože odvození tlaku světla z vlnového modelu je náročnější a méně názorné, využijeme v tomto případě částicový model. V rámci tohoto modelu předpokládáme, že světlo se skládá z fotonů – kvant, každý s energií $\mathcal{E} = h\nu = \hbar\omega$ a hybností $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{\mathcal{E}}{c}$. Budeme předpokládat úplnou absorpci dopadajících fotonů v látce a tedy i úplné předání hybnosti fotonů látce.

Velikost Poyntingova vektoru S představuje energii, která prochází jednotkovou plochou za jednotku času. Stejný výkon můžeme připsat N_f fotonům, které jsou absorbovány ve stejné ploše za stejný čas. Pro případ, kdy světlo popisujeme jako soubor fotonů, můžeme tedy psát

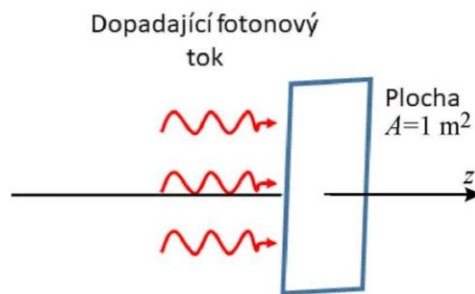
$$S = N_f \varepsilon. \quad (1.55)$$

Stejný počet fotonů při absorpci předá jednotkové ploše hybnost

$$N_f p = N_f \frac{\varepsilon}{c} = \frac{S}{c} = \mathbb{P}. \quad (1.56)$$

Tlak \mathbb{P} jakožto síla působící na jednotku plochy je dán změnou hybnosti (pro každý foton z hodnoty $\frac{\varepsilon}{c}$ na nulu) dopadajících částic na jednotku plochy za jednotku času ($\mathbb{P} = \frac{N_f p}{\Delta t}$, kde $\Delta t = 1$ s).

Vztah 1.56 platí v případě úplné absorpce dopadajících fotonů a jejich hybnosti látkou. V případě dokonalého zrcadlového odrazu je předaná hybnost dvojnásobná (odražené fotony odnášejí hybnost opačného znaménka, tj. nastává změna hybnosti z $\frac{\varepsilon}{c}$ na $-\frac{\varepsilon}{c}$).

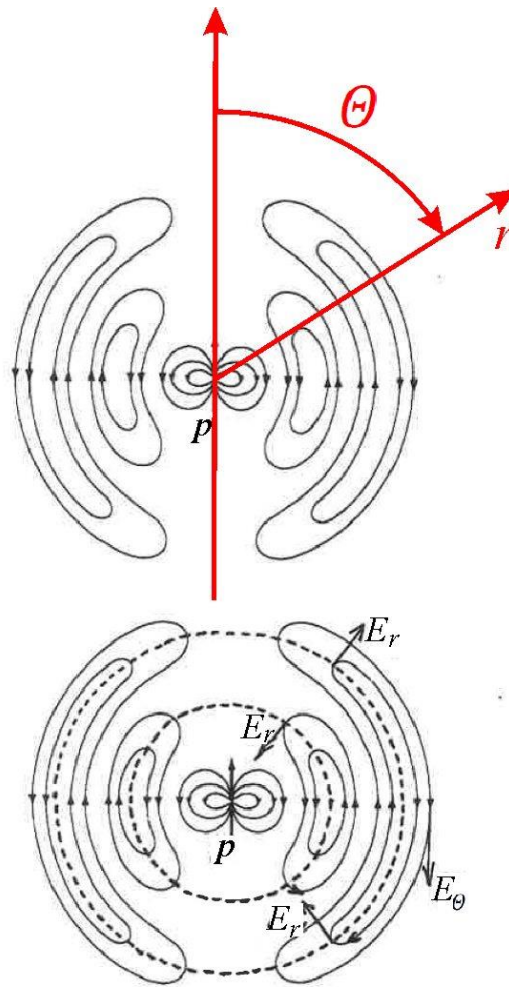


Obr. 1.5 Tlak světla

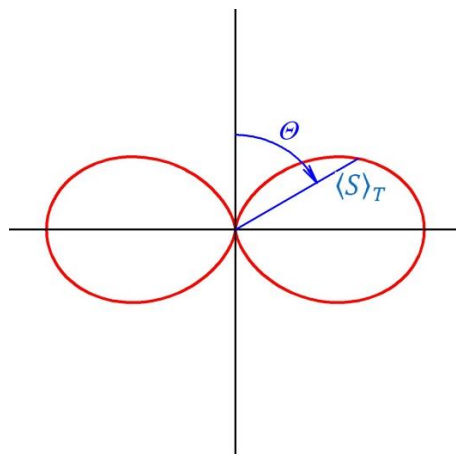
1.5 Kulová vlna

Popis vln s vlnoplochami různými od rovinných je podstatně složitější než popis homogenní rovinné vlny. Jako příklad zde popíšeme kulovou vlnu (tj. vlnu s kulovými vlnoplochami) vyzařovanou malým kmitajícím dipólem tvořeným dvojicí nábojů $\pm q$ ($p(t) = ql e^{-i\omega t} = p_0 e^{-i\omega t}$ -záření Hertzova dipólu) Ta představuje nejjednodušší kulovou vlnu, která vyhovuje Maxwellovým rovnicím ve volném prostoru. –**Dodatek 1.7.**

Na obr. 1.6 jsou nakresleny elektrické siločáry v jednom okamžiku v okolí kmitajícího Hertzova dipólu. V průběhu času se z dipólu odtrhávají v rytmu kmitání dipólu uzavřené smyčky siločar, které odnášejí energii ve směru od dipólu. Na obr. 1.7 je nakreslen vyzařovací diagram, tj. úhlová závislost radiální složky Poyntingova vektoru ve sférických souřadnicích $\langle S_r \rangle_T(\theta)$ tak, že délky úseček vycházející z počátku jsou úměrné velikosti $\langle S_r \rangle_T(\theta)$.



Obr. 1.6 Plné čáry naznačují siločáry elektrického pole Hertzova dipólu v jednom okamžiku v kulové souřadné soustavě r, θ, α zakreslené v řezu $\alpha = 0$. Ve spodní části jsou čárkovaně zakresleny řezy kulovými vlnoplochy, na kterých je v daný okamžik $E_\theta = 0$, takže v tomto okamžiku je tam pole longitudinální $\mathbf{E} \parallel r$.



Obr. 1.7 Řez vyzářovacím diagramem Hertzova dipólu. Délka úsečky ve směru určeném úhlem θ je úměrná střední hodnotě velikosti Poyntingova vektoru do tohoto směru. Diagram je osově symetrický kolem „svislé“ osy ($\theta = 0$).

Z obrázku je patrné, že Hertzův dipól nevyzařuje do směru kmitání dipólu a maximální výkon vyzařuje do směrů kolmých. Vlny, které jsou produkovány pohybem nábojů v objemech větších (srovnatelných s vlnovou délkou či ještě větších) mají strukturu podstatně komplikovanější.

Celkový výkon vyzařovaný do všech směrů stabilně kmitajícím Hertzovým dipólem dostaneme úhlovou integrací (viz **Dodatek 1.7**)

$$P_{tot} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

Energii potřebnou k udržení kmitů lze dodávat např. vnější vlnou. To je princip klasického vysvětlení Rayleighova rozptylu světla. Tak se vysvětluje modrá barva a polarizační vlastnosti světla z modré oblohy, kdy sluneční záření rozkmitává dipóly koncentračních (tlakových) nehomogenit vzduchu rozměrů podstatně menších než je vlnová délka. Toto sluneční buzení určuje směry kmitů těchto dipólů, které pak vyzařují a díky úměrnosti na ω^4 je rozptyl nejvíce účinný v modré části spektra.

Kulové vlny podstatně složitějších úhlových závislostí vysílají objekty rozměrů srovnatelných s vlnovou délkou. Příkladem je Mieův rozptyl na dielektrických kuličkách mikronových rozměrů. V kontrastu s modrým světlem jasné oblohy dostáváme bílé rozptýlené světlo oblaků (rozptyl na vodních kapičkách).

1.5.1 Skalární kulová vlna

Jak z předchozího můžeme nahlédnout, je popis pomocí vektorových vln mnohdy hodně složitý. V některých případech si můžeme vypomoci aproximacemi, které zanedbávají vektorový charakter elektromagnetického pole. Tyto aproximace jsou obvykle použitelné jen v nějaké části prostoru. Pro skalární aproximace je důležitá skalární vlnová rovnice v neabsorbujícím prostředí bez zdrojů

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (1.57)$$

Nejjednodušším řešením skalární vlnové rovnice je skalární, kulová a kulově symetrická vlna se středem v $\mathbf{r} = 0$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{f(r \pm vt)}{r}, \quad r = |\mathbf{r}|. \quad (1.58)$$

Ověření, že ψ je řešením vlnové rovnice, lze nalézt v **Dodatku 1.8**. Speciálním případem řešení je harmonická kulová vlna se středem v počátku souřadné soustavy

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{A}{r} \cos[k(r \pm vt)], \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{A}{r} e^{ik(r \pm vt)}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Funkce s fází $k(r - vt)$ představuje expandující kulovou vlnu. S rostoucím časem t vždy kladná hodnota r musí též narůstat, aby nějaká hodnota fáze představující určitou vlnoplochu kulové vlny zůstala konstantní. Podobně funkce s fází $k(r + vt)$ představuje sbíhavou kulovou vlnu. A je amplituda v jednotkové vzdálenosti $r = 1$. Amplituda kulové vlny klesá s faktorem $\frac{1}{r}$.

Je třeba zdůraznit, že neexistuje kulově symetrická elektromagnetická vlna, která by splňovala vektorovou vlnovou rovnici 1.9 pro \mathbf{E} (vakuum) nebo její variantu pro materiálové prostředí, resp. analogické rovnice pro vektor \mathbf{B} . Důvodem je to, že kulová symetrie není slučitelná s vektorovým charakterem polí \mathbf{E} a \mathbf{H} (resp. \mathbf{B}) v celém prostoru.

Kulovou vlnu tedy využíváme pouze jako skalární aproximaci reálných polí. Je vhodná pro aproximaci elektromagnetické kulové vlny v omezeném prostoru, např. pro úzký interval úhlů θ kolem směru $\theta \approx \frac{\pi}{2}$, kde skalární aproximace bývá doplněna i o aproximaci kulové vlny vlnou parabolickou. Dalším typickým příkladem je skalární aproximace laserových svazků, např. gaussovského svazku.

Dodatky ke kapitole 1

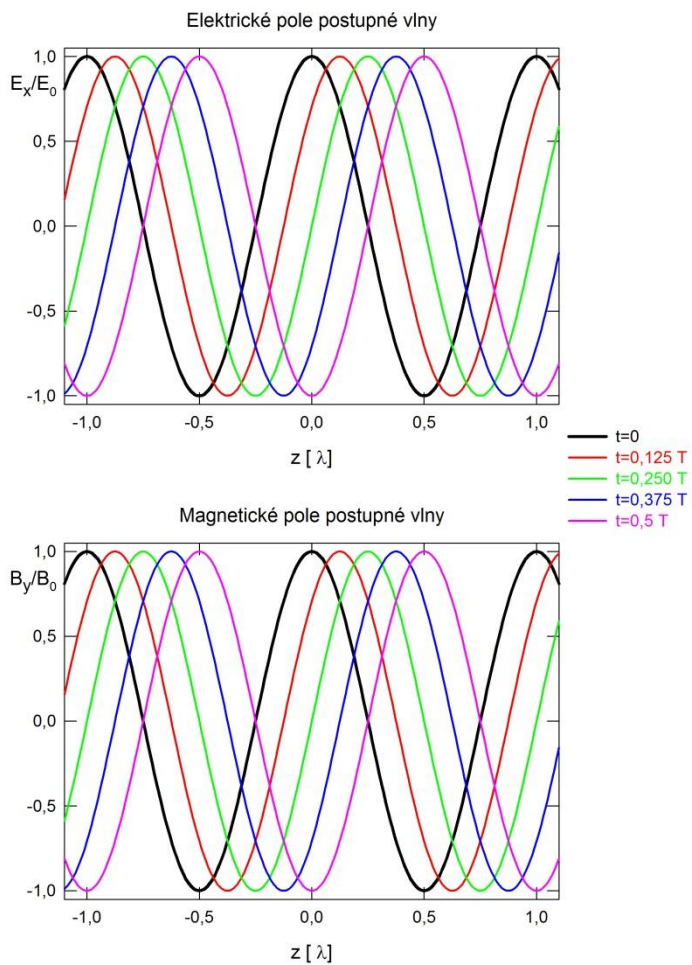
Následující dodatky jsou věnovány podrobnějšímu popisu vlastností elektromagnetických vln. Svým rozsahem přesahují text úvodní kapitoly a některé z nich využijeme až v dalších kapitolách, kde se budeme věnovat popisu složitějších fyzikálních situací, např. odrazu a lomu na rozhraní dvou prostředí, anizotropnímu prostředí nebo absorbujícímu prostředí.

Dodatek 1.1 Vysvětlení přívlasků určujících vlastnosti vln

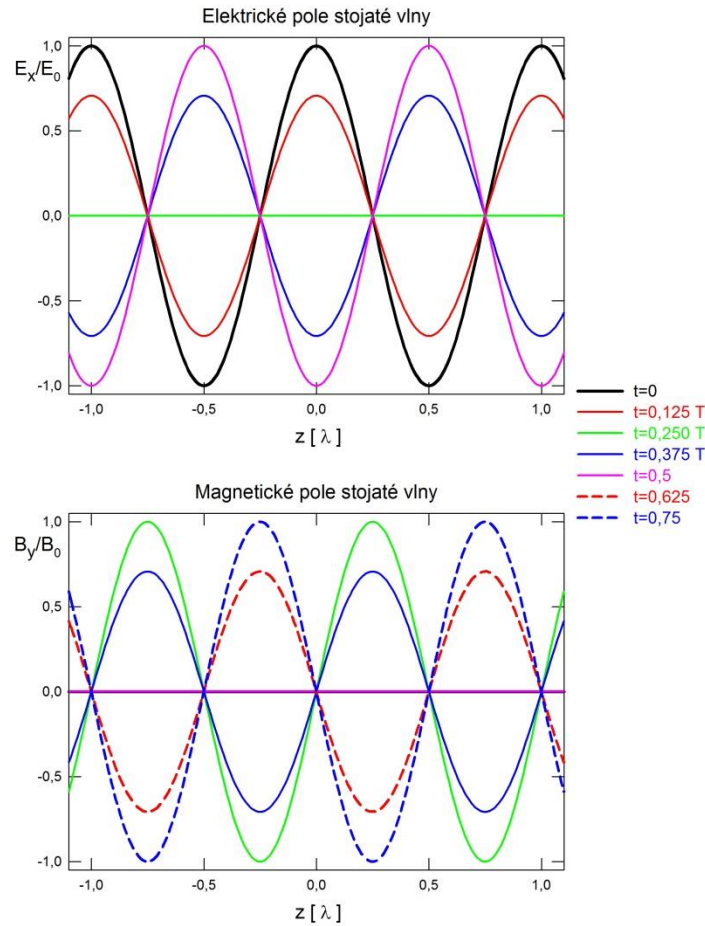
Monochromatická: časové závislosti jsou vyjádřeny za pomoci jedné doby kmitu T , frekvence $\frac{1}{T}$, kruhové frekvence $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a to pomocí výrazů obsahujících $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ nebo v komplexním formalismu $e^{-i\omega t}$.

Rovinná: plochy konstantní fáze jsou roviny. V případě kulové vlny jsou vlnoplochy kulové.

Postupná: nese výkon ve směru reálné části vlnového vektoru, má nenulovou střední hodnotu Poyntingova vektoru. Maxima elektrického pole se posouvají fázovou rychlostí. Jejím protikladem je stojatá vlna, která má v prostoru uzly a kmitny. Uzly a kmitny pro elektrické pole jsou prostorově posunuty oproti uzlům a kmitnám magnetického pole. Stojatá vlna vzniká interferencí proti sobě běžících postupných vln. Téměř stojatá vlna vzniká v rezonátorech, např. v rezonátorech laserů.



Obr. 1.8 Prostorová závislost elektrického a magnetického pole postupné vlny pro časy $t = 0; 0,125T; 0,250T; 0,375T$ a $0,5T$. Elektrické a magnetické pole kmitají ve fázi a amplituda nezávisí na prostorové souřadnici.



Obr. 1.9 Prostorová závislost elektrického a magnetického pole stojaté vlny pro časy $t = 0; 0,125T; 0,250T; 0,375T; 0,5T; 0,625T$ a $0,75T$. Elektrické a magnetické pole kmitají posunutě fázově v čase i prostoru. Amplituda kmitů je prostorově závislá. V případě elektrického pole stojaté vlny (horní obrázek) je křivka pro $t = 0,250T$ totožná s křivkou pro $t = 0,75T$ stejně jako jsou totožné křivky pro $t = 0,125T$ a $0,625T$. V případě magnetického pole (dolní obrázek) jsou totožné křivky pro $t = 0$ a $t = 0,5T$ a křivky pro $t = 0,125T$ a $0,375T$.

Postupná vlna

$$\frac{E_x}{E_0} = \frac{B_y}{B_0} = \cos(kz - \omega t)$$

Stojatá vlna (složení dvou postupných vln běžících proti sobě)

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{E_0} &= \cos(kz - \omega t) + \cos(-kz - \omega t) = 2 \cos kz \cos \omega t, \\ \frac{B_y}{B_0} &= \cos(kz - \omega t) - \cos(-kz - \omega t) = 2 \sin kz \sin \omega t. \end{aligned}$$

Otočení znaménka u magnetického pole běžícího ve směru $-z$ je dáno vzájemnou orientací elektrického, magnetického pole a vlnového vektoru $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$. V postupné

vlně kmitají \mathbf{E} a \mathbf{B} v každém místě ve fázi, v čistě stojaté vlně jsou v prostoru i čase fázově posunuty o $\pi/2$.

Homogenní: plochy konstantní amplitudy jsou totožné s rovinami konstantní fáze (vlnoplochy). Opakem jsou vlny nehomogenní, kde ve vlnoploše se amplituda mění.

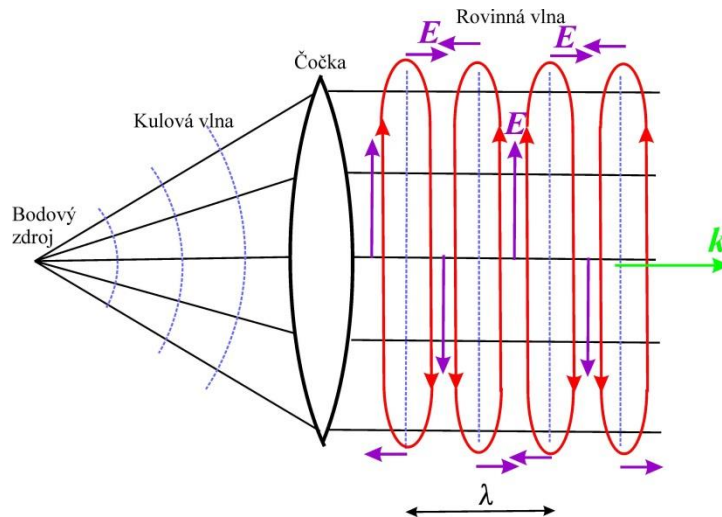
Netlumená: amplituda vlny se nemění ve směru šíření. Opakem je vlna tlumená, kdy ve směru šíření amplituda klesá.

Polarizovaná: lineární polarizace znamená, že vektor elektrického pole kmitá v různých místech v jedné rovině. Další možností polarizace monochromatické vlny je kruhová nebo eliptická. Pojem nepolarizované světlo je statistický pojem vztahující se ke směsi různých vln. Pojem jedna monochromatická nepolarizovaná vlna nedává dobrý smysl.

Dodatek 1.2 Poznámky k monochromatickým homogenním vlnám

O nespelnitelnosti nekonečnosti v prostoru a čase není třeba dlouze diskutovat. Konečnost v čase znamená porušení monochromatickosti, jak plyne z Fourierovy analýzy. To však není hlavní praktický důvod nemonochromatickosti. Tím je podstata zdrojů záření, které máme k dispozici. Jako ideální zdroj bychom mohli požadovat stabilně kmitající dipól vysílající stabilní kulové vlny, které vhodným způsobem převedeme na vlny rovinné. Takový ideálně kmitající dipól v optickém oboru nemáme.

Existující zdroje záření je vhodné si představit jako soubory mnoha „elementárních“ zdrojů (např. zakmitávajících elektronů v atomech) které emitují kratší či delší pulzy ($< 10^{-9}$ s) na různých frekvencích. **Tepelné zdroje** (žárovka,...) se vyznačují velkou chaotičností „elementárních“ zdrojů a širokým oborem vyzařovaných frekvencí, tj. velmi nízkým stupněm koherence. Stupeň koherence je jedním ze základních statistických charakteristik a bude pojednán v souvislosti se schopností záření interferovat v kapitole „Interference a koherence.“ Spektrální šířku a stupeň koherence lze měnit za pomoci zařízení typu monochromátor a interferenční filtry, tedy zařízení využívající vhodným způsobem interference.



Obr. 1.10 Znárodnění modelu získání rovinných vln. Černě jsou vyznačeny paprsky, modře vlnoplochy, červeně uzavřené siločáry elektrického pole. Pro rovinnou vlnu jsou znázorněny vlnoplochy, pro které je okamžitá velikost příčné pole nulová a v okrajových částech svazku je podélné pole maximální. Obrázek je velmi schématický, rozměry čočky v řádu cm, vlnová délka řádově 10^{-7} m. Rovněž poměry na okrajích svazku jsou podstatně komplikovanější z důvodu jevu difrakce světla, ale pravidlo uzavřenosti siločar v prostředí bez elektrických nábojů musí být splněno.

Náhodná a časově proměnná orientace „elementárních“ zdrojů znamená i náhodnou polarizaci emitovaných pulzů a úhlového rozdělení vyzařovaného výkonu. Polarizaci lze měnit za pomoci polarizátorů (krystalové, dichroické, mřížkové, odrazové) a fázových destiček.

Lasery jsou naproti tomu zdroje, ve kterých je statistika „záblesků“ ovládána pomocí jevu stimulované emise, která je řízena polem vlny ve vhodném rezonátoru (tedy za pomoci interference). Takto vyvolané pulzy jsou velmi blízkých frekvencí a jsou dobře synchronizovány. Parametry látky, ve které ke stimulované emisi dochází, a parametry rezonátoru, ve kterém je látka umístěna, určují frekvenci a šířku frekvenčního pásma emitovaného záření, tedy mj. i stupeň koherence.

Popis světelného svazku pomocí fikce monochromatických vln je v mnoha případech použitelný. Pro realističtější pojednání o svazcích vycházejících z laserů nebo monochromátorů či interferenčních spektrálních filtrů se užívá pojem **kvazimonochromatického** záření, v jehož spektru se vyskytují příspěvky od blízkých frekvencí. Je-li „nějak“ vhodně definovaná spektrální šířka $\Delta\omega$, mluvíme o kvazimonochromatickém záření, pokud $\Delta\omega/\omega \ll 1$.

Prostorová omezenost je základní překážkou pro splnění požadavku homogenity vlny. Jak plyne z Maxwellových rovnic ve volném prostoru bez nábojů $\text{div } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, je požadavek homogenity spojen s příčností vlny $\mathbf{E} \perp \mathbf{s}_0$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{s}_0$, kde \mathbf{s}_0 je jednotkový vektor ve směru šíření. Názorně to ukazuje podmínka uzavřenosti siločar ve volném prostoru. Zvláště zřejmé je porušení příčností u úzkých svazků produkovaných např. laserem či v oblasti ohnisek obecně. Modelovým „vyřešením“ složitosti směrů

vektorů pole v úzkých svazcích je prostě používání **skalární aproximace** vektorového elektromagnetického pole, ve které o směrech \mathbf{E}, \mathbf{B} vůbec neuvažujeme. Se skalární aproximací se můžeme setkat v případě paraxiálních aproximací, kdy uvažujeme pole jen v příčně velmi omezeném prostoru nebo při složitých konfiguracích pole, které jsou pro vektorový popis příliš komplikované, např. ve skalární teorii difrakce.

Dodatek 1.3 Maxwellovy rovnice v modelu spojitého prostředí

Shrňme Maxwellovy rovnice v modelu spojitého prostředí. Základní veličiny při tomto popisu jsou

Veličina	Jednotky
intenzita elektrického pole \mathbf{E}	$\text{V m}^{-1} = \text{m kg s}^{-3} \text{A}^{-1}$
elektrická indukce \mathbf{D}	$\text{C m}^{-2} = \text{m}^{-2} \text{s A}$
elektrická polarizace \mathbf{P}	$\text{C m}^{-2} = \text{m}^{-2} \text{s A}$
magnetická indukce \mathbf{B}	$\text{T} = \text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$
intenzita magnetického pole \mathbf{H}	A m^{-1}
magnetizace \mathbf{M}	A m^{-1}

permitivita vakua $\epsilon_0 \cong 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$

permeabilita vakua

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \cong 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ m kg s}^{-2} \text{A}^{-2}$.

Základní materiálové vztahy jsou

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t),$$

přičemž závislosti polarizace \mathbf{P} na elektrickém poli \mathbf{E} a závislosti magnetizace \mathbf{M} na magnetickém poli mohou být velmi rozmanité a dosti komplikované: mohou být nelokální v čase i nelokální v prostoru, mohou být nelineární, vektory \mathbf{P} a \mathbf{E} mohou být nekolineární, mohou záviset na teplotě, na vnějších polích (mechanická deformace, stacionární elektrické nebo magnetické pole) atd.

Obvyklý tvar Maxwellových rovnic v modelu spojitého prostředí je

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_f(\mathbf{r}, t),$$

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_f(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad)$$

kde ρ_f a \mathbf{j}_f jsou objemové hustoty volných nábojů a proudů, které nejsou implicitně zahrnuty ve veličinách \mathbf{P} a \mathbf{M} . S uvedenými Maxwellovými rovnicemi pro objem souvisí i podmínky na rozhraní dvou materiálů (včetně rozhraní látka – vakuum), které budeme potřebovat v kapitole věnované odrazu a lomu elektromagnetické vlny na rozhraní 2 materiálů. V platnosti zůstávají hraniční podmínky, které odvodíme v kapitole 3- Odraz a lom.

$$\mathbf{v}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_{sf},$$

$$\mathbf{v}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0,$$

$$\mathbf{v}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0,$$

$$\mathbf{v}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_{sf},$$

kde \mathbf{v}_{12} je jednotkový vektor kolmý na rozhraní a směřující z prostředí 1 do prostředí 2, ρ_{sf} je plošná hustota volného povrchového náboje (jednotky A s m⁻²), \mathbf{j}_{sf} je vektor hustoty volného proudu v rovině rozhraní (jednotky A m⁻¹). První dvě rovnice udávají podmínky pro normálové složky vektorů, třetí a čtvrtá rovnice se týkají tečných složek. Pro nás bude v kapitole „Odraz a lom“ důležitá spojitost tečných složek vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H} na rozhraní bez volného proudu.

Dodatek 1.4 Maxwellovy rovnice a vlnová rovnice pro monochromatické rovinné vlny v komplexním formalismu

Předpokládejme všechny „vlnové“ veličiny vystupující v Maxwellových rovnicích ve tvaru monochromatické, homogenní rovinné vlny.

- a) Začněme s případem **izotropní neabsorbující** látky, kdy tyto veličiny kmitají ve fázi a vlna není tlumená (její amplituda nezávisí na \mathbf{r}, t).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n \mathbf{s}_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r} \mathbf{s}_0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

Zde se jedná o variantu popisu přes jednotkový vektor \mathbf{s}_0 , který byl již uveden v základním textu, rovnice 1.30 až 1.41. Provedme v komplexním oboru totéž, co bude v **Dodatku 1.5** věnovanému ověření Helmholtzovy rovnice spočteno v reálném oboru. Např.

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -i\omega E_x, \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 E_x,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} &= ik_x E_x, & \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} &= -k_x^2 E_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= ik_y E_x, & \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} &= -k_y^2 E_x, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= ik_x E_y, & \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} &= -k_x k_y E_y\end{aligned}$$

atd.

Tímto způsobem můžeme stanovit vztahy pro operátory působící na vektory

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = i(k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z) = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{E},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \\ &= i \left[\frac{\partial}{\partial x} (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z), \frac{\partial}{\partial y} (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z), \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. \frac{\partial}{\partial z} (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z) \right] = \\ &= \left[-k_x (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z), -k_y (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z), \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. -k_z (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z) \right]\end{aligned}$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = -\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}),$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} &= \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \\ &= \left[(-k_x^2 E_x - k_y^2 E_x - k_z^2 E_x), (-k_x^2 E_y - k_y^2 E_y - k_z^2 E_y), (-k_x^2 E_z - k_y^2 E_z - k_z^2 E_z) \right] = \\ &= -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) E_x, -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) E_y, -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) E_z = \\ \Delta \mathbf{E} &= -k^2 \mathbf{E} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i(k_y E_z - k_z E_y), & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i(k_z E_x - k_x E_z), \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i(k_x E_y - k_y E_x),\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

Maxwellovy rovnice pro model spojitého prostředí lze pro rovinné monochromatické vlny napsat v neabsorbujícím prostředí bez volných nábojů a proudů

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$i \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 & i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} & i\mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} & i\mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega \mathbf{D}
 \end{aligned}$$

Pokud se zabýváme řešením vlnové rovnice pro rovinné vlny

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P}$$

můžeme napsat

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E} - \mu_0 \omega^2 \mathbf{P} + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{P}) = 0$$

V izotropním prostředí je $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E} \parallel \mathbf{D} \perp \mathbf{k}$ a tedy poslední člen je nulový. V lineárním izotropním prostředí dostaneme pro velikost vlnového vektoru v souladu s předchozími poznatky

$$\begin{aligned}
 k^2 E - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 (1 + \chi) E &= 0, \\
 k = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{(1 + \chi)} \omega &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\omega}{c} n(\omega).
 \end{aligned}$$

- b) **V anizotropním prostředí** nejsou vektory \mathbf{P} a \mathbf{D} obecně rovnoběžné. V neabsorbující látce bez volných nábojů je $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{D}$ a zůstává $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$. Chceme napsat vlnovou rovnici jen s vektorem \mathbf{E} . Protože

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{P} = \operatorname{div} \mathbf{D} - \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}$$

Dalším krokem je rozdělení tenzorových vztahů

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j$$

vhodnou transformací souřadné soustavy. V „nové“ souřadné soustavě je tenzor susceptibility diagonální, takže

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ii} E_i$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E} - \mu_0 \omega^2 \mathbf{P} = \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}),$$

což v kartézských složkách je

$$k^2 E_x - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 E_x (1 + \chi_{11}) = k_x (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z)$$

$$k^2 E_y - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 E_y (1 + \chi_{22}) = k_y (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z)$$

$$k^2 E_z - \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 E_z (1 + \chi_{33}) = k_z (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z)$$

Tyto rovnice představují výchozí bod pro popis šíření rovinných vln v anizotropním, homogenním a neabsorbujícím prostředí.

- c) V **absorbujícím prostředí** lze postupovat obdobně s tím, že vlnový vektor je komplexní. Uvažujme stacionární případ, kdy amplituda nabíhající vlny je v daném místě konstantní, ale v prostoru se její amplituda mění. Nejprve se podívejme na popis **homogenní, tlumené** rovinné vlny. Pro velikosti reálné a imaginární složky komplexního vlnového vektoru lze napsat

$$\tilde{\mathcal{K}} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I, \quad \mathbf{k}_R \parallel \mathbf{k}_I,$$

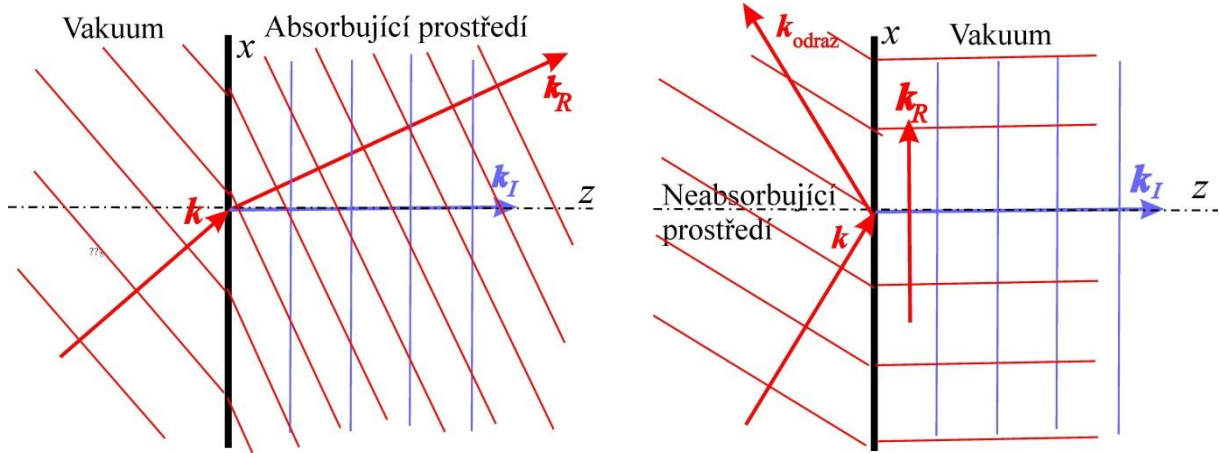
$$\begin{aligned} k_R + ik_I &= \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{(1 + \chi_R + i\chi_I)} \omega = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_R + i\varepsilon_I} = \\ &= \frac{\omega}{c} [n(\omega) + i\kappa(\omega)], \end{aligned}$$

což lokálně způsobí fázový posuv mezi veličinami pole a při šíření v prostoru útlum. Taková vlna vznikne např. při **kolmém dopadu** záření na rovinné rozhraní mezi neabsorbujícím prostředím 1 (např. vakuum) a absorbujícím prostředím 2. Lineárně polarizovaná vlna v prostředí 2 ($z > 0$) je

$$\begin{aligned} E_{2x}(z, t) &= E_{0x}(z=0) e^{i\tilde{\mathcal{K}}z} e^{-i\omega t} = E_{0x}(z=0) e^{ik_R z} e^{ik_I z} e^{-i\omega t} = \\ &= E_{0x}(z=0) e^{i\frac{\omega}{c}nz} e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z} e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

V případě homogenních vln jsou směry vektorů \mathbf{k}_R a \mathbf{k}_I rovnoběžné a ve výše uvedeném příkladu to jsou vektory $(0, 0, k_R)$ a $(0, 0, k_I)$.

- d) Složitější je případ **nehomogenních vln**, které vznikají např. při šikmém vstupu do absorbujícího prostředí nebo jako evanescentní vlna při totálním odrazu. Pak roviny konstantní amplitudy, na které je kolmý vektor \mathbf{k}_I , a roviny konstantní fáze (vlnoplochy), na které je kolmý vektor \mathbf{k}_R , nejsou rovnoběžné, a tedy nejsou rovnoběžné ani zmíněné vektory. Rovněž polarizační stav je odlišný od lineární nebo eliptické polarizace u vln homogenních.



Obr.1.11 Příklady nehomogenních vln. Reálné části vlnových vektorů jsou zakresleny červenými šipkami, imaginární části modrými šipkami. Vlnoplochy jsou zakresleny červeně a plochy konstantní amplitudy modře. Vlevo: tlumená nehomogenní vlna vzniká při šikmém dopadu do absorbujícího prostředí. Vektor \mathbf{k}_R je kolmý na vlnoplochy, vektor \mathbf{k}_I je kolmý na plochy konstantní amplitudy, které jsou rovnoběžné s rozhraním. Vpravo: netlumená nehomogenní vlna vzniká při totální reflexi na rozhraní mezi prostředím s reálným indexem lomu n_1 a prostředím s menším reálným indexem lomu $n_2 < n_1$ při dostatečně velkém úhlu dopadu z prostředí n_1 . V tomto případě jsou vlnové vektory $\mathbf{k}_R, \mathbf{k}_I$ na sebe kolmé. Vlna běží podél rozhraní a její amplituda se nemění se souřadnicí x . Směrem z do prostředí 2 (na obr. vakuum) její amplituda klesá. Evanescentní vlna bude podrobněji popsána v kapitole „Odraž a lom“.

V případě totální reflexe je nehomogenita vlny způsobena podmínkami na rozhraní, kdy vlna dopadající z prostředí 1 vyvolá na rozhraní periodicitu podmínek takovou, že je menší než vlnová délka dané frekvence v prostředí 2. Pro informaci, jak takové pole vypadá, napíšeme jeho složky

Polarizace s

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 & E_y &= E_{0y} \tilde{t}_s e^{-k_I z} e^{ik_R x} e^{-i\omega t} & E_z &= 0 \\
 D_x &= 0 & D_y &= \frac{k_R^2 - k_I^2}{\mu_0 \omega} E_y & D_z &= 0 \\
 B_x &= -\frac{ik_I}{\omega} E_y & B_y &= 0 & B_z &= \frac{k_R}{\omega} E_y \\
 \langle S_x \rangle_T &= \frac{1}{2} E_0^2 \tilde{t}_p \tilde{t}_p^* \frac{k_I}{\mu_0 \omega} e^{-2k_I z} & \langle S_y \rangle_T &= 0 & \langle S_z \rangle_T &= 0
 \end{aligned}$$

Polarizace p

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{k_I}{ik_R} E_z & E_y &= 0 & E_z &= E_0 \tilde{t}_p e^{-k_I z} e^{ik_R x} e^{-i\omega t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_x &= \frac{k_R^2 - k_I^2}{\mu_0 \omega} E_x & D_y &= 0 & D_z &= \frac{k_R^2 - k_I^2}{\mu_0 \omega} E_z \\
 B_x &= 0 & B_y &= \frac{k_I^2 - k_R^2}{\omega k_R} E_z & B_z &= 0 \\
 \langle S_x \rangle_T &= \frac{1}{2} E_0^2 \tilde{t}_p \tilde{t}_p^* \frac{k_R^2 - k_I^2}{\mu_0 \omega k_R} e^{-2k_I z} & \langle S_y \rangle_T &= 0 & \langle S_z \rangle_T &= 0
 \end{aligned}$$

E_0 je amplituda vlny v prostředí 1 dopadající na rozhraní. Komplexní koeficienty \tilde{t}_s a \tilde{t}_p jsou transmisní koeficienty rozhraní. Velikosti vlnových vektorů jsou určeny indexy lomu obou prostředí a úhlem dopadu θ_i na rozhraní z prostředí 1

$$k_R = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \theta_i, \quad k_I = \frac{\omega}{c} n_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1}$$

Právě k_R ukazuje periodicitu na rozhraní vnučenou vlnou šířící se v prostředí 1. Protože $k_R > k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$, kde λ_2 je vlnová délka odpovídající „řádné“ vlně, která se může volně šířit v objemu prostředí 2, vzniká u rozhraní v prostředí 2 zmíněná evanescentní vlna. Vzhledem k tomu, že směr šíření je ve směru osy x , a to jak z hlediska směru šíření vlnoploch (tj. směr vektoru k_R) tak i s ohledem na směr Poyntingova vektoru, jsou x – ové složky vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} složkami podélnými; toto vlnění není příčné.

Dodatek 1.5 Ověření Helmholtzovy rovnice

Zde pouze ukažme, že rovinná monochromatická vlna v homogenním neabsorbujícím prostředí

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta)$$

splňuje Helmholtzovu rovnici bez zdroje vlnění (nulová pravá strana). Spočtěme časové derivace a pak je dosadíme do vlnové rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mathbf{E}_0 (\pm \omega) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta),$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mathbf{E}_0 \omega^2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta).$$

Dosazením do rovnice 1.27 dostaneme

$$\Delta \mathbf{E} = -\frac{1}{v^2} \mathbf{E}_0 \omega^2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta) = -\frac{\omega^2}{v^2} \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}.$$

Pro kontrolu můžeme přímo spočítat vektor $\Delta \mathbf{E}$ o složkách

$$\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -E_{0x} k_x \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta),$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -E_{0x} k_y \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta), \dots$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = -E_{0x} k_x^2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta),$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -E_{0x} k_y^2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta), \dots$$

$$\Delta E_x = -E_{0x} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t \pm \delta) = -k^2 E_x,$$

a podobně

$$\Delta E_y = -k^2 E_y, \quad \Delta E_z = -k^2 E_z,$$

$$\Delta \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}$$

Helmholtzova rovnice ovšem platí i pro jiné monochromatické vlny, nejen pro rovinné, např. pro skalární kulovou vlnu viz **Dodatek 1.8**

Dodatek 1.6 Střední hodnota Poyntingova vektoru v neabsorbujícím prostředí

Výpočet časové střední hodnoty velikosti Poyntingova vektoru $\langle S \rangle_T$ provedme v komplexním zápisu. Pro jednoduchý případ, že \mathbf{E} a \mathbf{H} kmitají ve fázi (nenastává absorpce) je

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_T &= \langle \text{Re} \{ \tilde{\mathbf{E}} \} \times \text{Re} \{ \tilde{\mathbf{H}} \} \rangle_T = \\ &= \left\langle \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}}^*) \times \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{H}}^*) \right\rangle_T = \\ &= \frac{1}{4} \langle \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* + \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{E}}^* \times \tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{E}}^* \times \tilde{\mathbf{H}}^* \rangle_T \end{aligned}$$

Střední hodnota harmonické funkce přes periodu je nulová

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}} \rangle_T &\propto \langle e^{-2i\omega t} \rangle_T = \langle \cos 2\omega t \rangle_T - i \langle \sin 2\omega t \rangle_T = 0, \\ \langle \tilde{\mathbf{E}}^* \times \tilde{\mathbf{H}}^* \rangle_T &\propto \langle e^{2i\omega t} \rangle_T = \langle \cos 2\omega t \rangle_T + i \langle \sin 2\omega t \rangle_T = 0.\end{aligned}$$

Naproti tomu pro součin s jedním členem komplexně sdruženým je

$$|\langle \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \rangle_T| = |\langle \tilde{\mathbf{E}}^* \times \tilde{\mathbf{H}} \rangle_T| = E_0 H_0 \neq 0,$$

takže

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S} \rangle_T &= \frac{1}{4} \langle \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* + \tilde{\mathbf{E}}^* \times \tilde{\mathbf{H}} \rangle_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \tilde{\mathbf{E}}^* \times \tilde{\mathbf{H}} \} = \\ &= \frac{1}{2} E_0 H_0 \mathbf{s}_0 = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 c} E_0^2 \mathbf{s}_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n E_0^2 \mathbf{s}_0.\end{aligned}$$

Podobným postupem pro celkovou hustotu elektrické energie v neabsorbujícím prostředí platí (vektory \mathbf{E} a \mathbf{D} kmitají ve fázi) dostaneme

$$\langle u \rangle_T = \langle u_E \rangle_T + \langle u_B \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2.$$

$$\langle |\mathbf{S}| \rangle_T = \langle u \rangle_T \frac{c}{n} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n^2 \frac{c}{n} E_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n E_0^2$$

Zdůrazňeme, že výše uvedené platí pro homogenní rovinné vlny v neabsorbujícím prostředí.

Dodatek 1.7 Hertzův dipól

Nechť dipól $p(t) = ql e^{-i\omega t} = p_0 e^{-i\omega t}$ tvořený dvojicí nábojů $\pm q$ kmitá s velmi malou amplitudou prostorové výchylky $l \ll \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$ ve směru $\theta = 0$. Lze odvodit, že složky elektromagnetického pole ve volném prostoru v kulových souřadnicích r, θ, α jsou

$$\begin{aligned}E_r(r, \theta, \alpha, t) &= \frac{p_0}{2\pi\varepsilon_0} \cos \theta \left(\frac{1}{r^3} - i \frac{k}{r^2} \right) e^{i(kr - \omega t)}, \\ E_\theta(r, \theta, \alpha, t) &= \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0} \sin \theta \left(\frac{1}{r^3} - i \frac{k}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) e^{i(kr - \omega t)}, \\ E_\alpha(r, \theta, \alpha, t) &= 0, \\ B_r(r, \theta, \alpha, t) &= 0, \\ B_\theta(r, \theta, \alpha, t) &= 0,\end{aligned}$$

$$B_\alpha(r, \theta, \alpha, t) = \frac{p_0}{4\pi c \epsilon_0} \sin \theta \left(-i \frac{k}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) e^{i(kr - \omega t)}.$$

Na obr. xx je zakreslen průběh elektrických siločar v jednom okamžiku. Časový vývoj probíhá tak, že od kmitajícího dipólu se postupně oddělují uzavřené smyčky siločar, které se při šíření do prostoru s vyšším r rozpínají a pole s rostoucím r slábnou.

Je zřejmé, že s rostoucí vzdáleností r od kmitajícího dipólu slábnou nejpomaleji příčné složky

$$E_\theta(r, \theta, \alpha, t) \rightarrow \frac{-p_0}{4\pi \epsilon_0} \sin \theta \frac{k^2}{r} e^{i(kr - \omega t)},$$

$$B_\alpha(r, \theta, \alpha, t) \rightarrow \frac{p_0}{4\pi c \epsilon_0} \sin \theta \frac{k^2}{r} e^{i(kr - \omega t)}.$$

V časově středovaném Poyntingově vektoru se uplatňují právě tyto složky (bez ohledu na r)

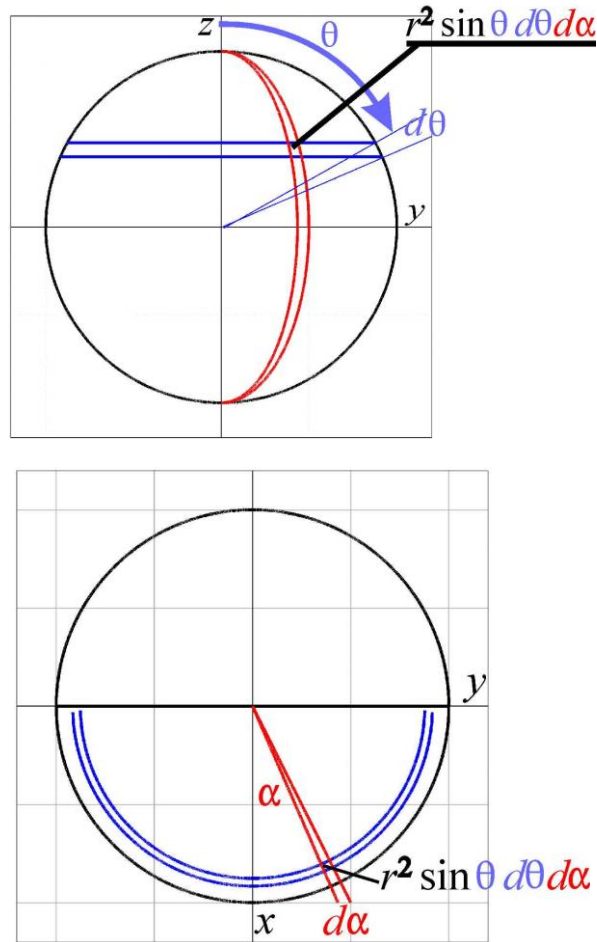
$$\langle S_r \rangle_T = \frac{1}{2} E_\theta H_\alpha^* = \frac{1}{2} \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c^5 \epsilon_0^2 \mu_0} \sin^2 \theta \frac{1}{r^2} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0} \sin^2 \theta \frac{1}{r^2}$$

$$\langle S_\theta \rangle_T = 0$$

$$\langle S_\alpha \rangle_T = 0$$

Zopakujme vztah pro Poyntingův vektor

$$\langle S_r(r, \theta, \alpha) \rangle_T = \frac{1}{2} E_\theta H_\alpha^* = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0} \sin^2 \theta \frac{1}{r^2}$$



Obr. 1.12 Kulové souřadnice pro integraci vyzařovaného výkonu

Výkon vyzařovaný do všech směrů

$$\langle P \rangle_T = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \langle S_r(r, \theta, \alpha) \rangle_T r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\alpha = 2\pi \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0} \frac{r^2}{r^2} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta &= \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta - \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = [-\cos \theta]_0^{\pi} - \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \\ &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \quad \text{použita substituce } \cos \theta = t, \quad d\theta = \frac{dt}{-\sin \theta}. \end{aligned}$$

$$\langle P \rangle_T = \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi c^3 \epsilon_0} \frac{4}{3} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi c^3 \epsilon_0} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}.$$

Dodatek 1.8 Skalární kulová harmonická vlna splňuje skalární vlnovou rovnici

Obvykle uváděný vzorec pro Laplaceův operátor v kulových souřadnicích působící na skalární funkci $\varphi(r, \Theta, \alpha)$ je

$$\Delta \varphi(r, \Theta, \alpha) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

POZOR: tento vztah **nelze použít** pro složky vektoru v kulových souřadnicích (r, Θ, α) , na rozdíl od vyjádření v kartézských souřadnicích (x, y, z) , kdy se výrazy pro Laplaceův operátor působící na skalární funkci a Laplaceův operátor působící na složky vektoru shodují.

Pokud se zabýváme kulově symetrickou vlnou $\varphi(r)$, je nenulový pouze první člen.

Ověřme, že skalární kulově symetrická harmonická vlna

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} = \varphi(r) e^{-i\omega t}$$

vyhovuje vlnové rovnici

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = A e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} e^{ikr} \right) = A e^{-i\omega t} \left(\frac{-1}{r^2} e^{ikr} + \frac{ik}{r} e^{ikr} \right),$$

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = A e^{-i\omega t} (-e^{ikr} + r i k e^{ikr}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) &= A e^{-i\omega t} [-i k e^{ikr} + i k e^{ikr} + r (i k)^2 e^{ikr}] \\ &= -A e^{-i\omega t} r k^2 e^{ikr} \end{aligned}$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -k^2 \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}.$$

Protože fázová rychlost je $v = \frac{\omega}{k}$, je splněna vlnová rovnice a samozřejmě i Helmholtzova rovnice

$$\psi(r, t) = \frac{-\Delta\psi}{k^2} = \frac{-1}{\omega^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},$$

$$\Delta\psi = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$\Delta\psi = -k^2\psi.$$

Odvození tvaru $\Delta\varphi(r)$ v kulově symetrickém případě z $\Delta\varphi(x, y, z)$:

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2} 2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \\ &= \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{-2x \frac{1}{2} x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \frac{d\varphi}{dr} = \\ &= \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{x^2}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{d\varphi}{dr}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(3 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \right) \frac{d\varphi}{dr} = \\ &= \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr}. \end{aligned}$$

Z obvykle uváděného vztahu dostáváme totéž

$$\Delta\varphi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \left(2r \frac{d\varphi}{dr} + r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} \right) = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr}.$$

Hustotu energie vlny (udávanou v jednotkách J m^{-3}) budeme dále zkráceně nazývat intenzitou vlny. Je třeba poznamenat, že tento pojem se v literatuře používá často i pro časovou střední hodnotu Poyntingova vektoru (vztah 1.54 – v jednotkách W m^{-2}). Z hlediska popisu interferenčních jevů je použití pojmu intenzita pro hustotu energie obecnější, protože umožňuje popis interference i v případě stojatého vlnění, kdy je časová střední hodnota Poyntingova vektoru nulová (např. v případě stojatých vln se energie nikam nešíří, pouze lokálně osciluje její hustota).