

Einsteinovy koeficienty, využití stimulované emise v laserech

Lorentzův model absorpce: deterministický popis (v modelu se nevyskytuje „pravděpodobnost“),

všechny oscilátory kmitají spolu a společně a zároveň z vlny odstraňují část přicházejícího výkonu vlny; i nepatrná část energie může být z vlny odebírána.

Pravděpodobnostní popis: oscilátory („atomy“) absorbují vlnové balíky nesoucí kvantum energie $h\nu$ s nějakou pravděpodobností.

Einsteinovy koeficienty (r. 1916): pravděpodobnosti pro 3 základní procesy:

absorpce kvanta $h\nu$

spontánní emise kvanta

stimulovaná emise kvanta.

Stimulovanou emisi kvant lze využít pro zesilování elektromagnetické vlny za splnění vhodných podmínek, především pro nastavení inverze obsazení stavů.

Za vhodných podmínek lze výběrem z náhodných fluktuací pole a zesilováním příslušné vlny (vln) získat zdroj záření s vysokým stupněm koherence, případně i s vysokou intenzitou záření – laser.

K tomu obvykle potřebujeme:

umístění aktivního prostředí do rezonátoru dostatečné kvality,
dostatečnou excitaci aktivního prostředí,

případná další opatření k výběru požadované frekvence záření,
např. spektrální závislost zrcadel tvořících rezonátor,
umístění disperzních nebo interferometrických prvků do
rezonátoru.

Přílohy: odvození Lorentzova tvaru absorpčního pásu z Lorentzova modelu,
odvození Lorentzova tvaru ze spektra exponenciálně tlumeného pulzu,
poznámka ke vztahu (15.13) v učebnici P. Malý, Optika

Absorpce, emise

Základní varianta Lorentzova modelu:

působení monochromatické vlny na „mechanický“
slušený oscilátor, v frekvenci

$$\ddot{x} + 2\pi\gamma\dot{x} + 4\pi^2\nu_0^2 x = \frac{q}{m} \mathcal{E}_0 e^{-2\pi i\nu t}$$

mechanická pružina vracejíci rychlostí do

rovnovážné polohy: síla $F = b \cdot x$,

kuhová frekvence vlnění (ne slumených) kmitů

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{m}}, \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{b}{m}}$$

Dipólový moment jednotkového objemu

$$P = N \cdot q \cdot x = \epsilon_0 \chi_\nu(\nu) \cdot \mathcal{E}_0 e^{-2\pi i\nu t}$$

s komplexními susceptibilitou

$$\begin{aligned} \chi_\nu(\nu) &= \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\nu_0^2 - \nu^2 + i\gamma\nu} \\ &= \frac{Nq^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m} \frac{\nu_0^2 - \nu^2 + i\gamma\nu}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \gamma^2 \nu^2} \end{aligned}$$

Komplexní index lomu $n(\nu) + ik(\nu) = \sqrt{1 + \chi_\nu(\nu)}$

Intenzita lineárně polarizované monochromatické
vlny po průchodu dráhy z poklesne:

$$I(z) \equiv \langle |\vec{S}| \rangle(z) = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n(\nu) \cdot \mathcal{E}_0^2 e^{-2 \frac{2\pi\nu}{c} \cdot k(\nu) \cdot z}$$

$$= I(z=0) \cdot e^{-\alpha(\nu)z} \quad \alpha \text{.. absorpční koeficient}$$

V dalsim budeme pouzivat Lorentzova tvar absorpčního pásu, a to i pro emisi.

$$\alpha_{\text{LORENTZ}} \sim \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\nu}{(\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2}$$

v normovaném tvaru.

Otvorení v rámci Lorentzova modelu a další varianta ke spektru exponenciálně tlumeného pulzu jsou v přílohách.

Některé „vlastnosti“ Lorentzova modelu:

- je deterministický - nepracuje s pravděpodob.
- z vlny může do systému oscilátorů přecházet libovolně malé množství energie, oscilátory se o ni svorně podělí

Ale: ukazuje se (již dávno), že

- absorpce i emise jsou statistické záležitosti popsatelné pravděpodobnostmi;
- přenos energie vlna \leftrightarrow systém oscilátorů (např. atomů)

se děje po kvantech

(\Leftarrow Planckův zákon, fotoefekt, stabilita atomů, čárová spektra atomů, ...)

Atomy mají ve stacionárních stavech ostré energetické hladiny elektronů.

Ty jsou "rozostřeny" vnějšími vlivy. Přechody mezi těmito hladinami mohou nastat i při prochu jiné energie kvanta než je $E_2 - E_1$

Základní "rozostření": elektrony na dané hladině "sebrávají" jin omezenou dobu, během které může docházet k vyzařování/absorpci
základní model:

přijímá energii a slaby (absorpcí)

či emise energie a excitovaného stavu atomu

lze popsat polem slumeného oscilátoru

$$E(t) = E_0 \cdot e^{-t/2\tau} e^{-2\pi i \nu t}$$

el. pole

"klasická" energie doznívá jako $e^{-t/\tau}$

$$\text{Fourierova transformace } FT\{E(t)\} \sim \frac{1}{1 + 4\pi^2 \tau^2 (\nu - \nu_0)^2}$$

Pro spektrální hustotu energie nesenou exponenciálně slumeným pulzem

$$E_\omega(\omega) \cdot E_\omega^*(\omega) \sim \frac{1}{1 + 16\pi^2 \tau^2 (\nu - \nu_0)^2}$$

půlka šířky spektrální závislosti $\sim 1/2$ výšky

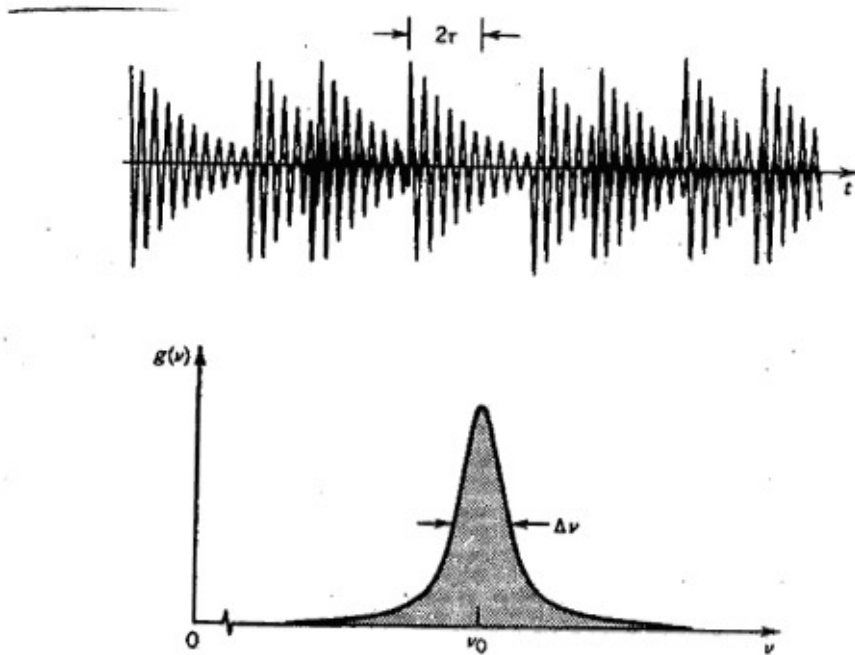
$$16\pi^2 \tau^2 (\nu - \nu_0)^2 = 1$$

$$\nu' - \nu_0 = \frac{1}{4\pi\tau}$$

plná šířka

$$\text{FWHM } \Delta\nu = 2(\nu' - \nu_0) = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Podrobněji v příloze



Obrázek 12.2-7 Emise vlnových balíků v náhodných časových okamžicích v atomárním systému s rozšířením spektrální čáry dobou života τ . Vysílané světlo má lorentzovskou spektrální hustotu se šířkou $\Delta\nu = 1/2\pi\tau$.

$e^{-t/2\tau}$ ubýváání amplitudy pole pulzu
 $e^{-t/\tau}$ ubýváání výkonu neseného pulzem

Normovaný tvar Lorentzova pásu

$$g(\nu) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\nu}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) d\nu = 1,$$

hodnota ν maxima

$$g(\nu_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4\Delta\nu}{\Delta\nu^2} = \frac{2}{\pi \cdot \Delta\nu}; \quad \Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Šířka spektrální „čáry“ (pásu) daná dobami života τ_1, τ_2 ve stavech, mezi nimiž přechod nastává:

$$\Delta\nu_{21} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)$$

Další mechanismy rozšiřující spektrální "čáry"
v absorpci či emisi

Atomy nejsou (v plynu) nehybné, ale pohybují se
a střídají se \Rightarrow omezení doby života
"atom" musí stihnout absorbovat / emitovat
energetický kvantum $h\nu$ za kratší dobu
než by vyplývalo z "vlastních dob života"
příslušných stavů

Střáčky: pružné (skokové změny ^(délka) kmitání)
nepružné (předčasné ukončení kmitání)
vede k Lorentzovskému rozšíření
(myšle uvedený tvar zůstane, zvětší se $\Delta\nu$)

Dopplerův posuv: posuv centrální frekvence ν_0
v důsledku pohybu

$$\nu_0 \rightarrow \nu_0 \pm \frac{v_{||}}{c} \cdot \nu_0 \quad v_{||} \text{ složka rychlosti}$$

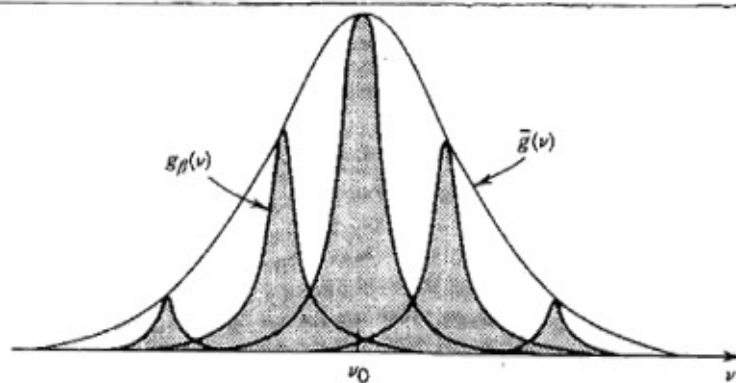
gaussovské rozdělení pravděpodobnosti rychlosti

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_v} \cdot \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right]$$

$$\sigma_v^2 = \frac{k_B \cdot T}{M} \quad M \text{ hmotnost atomu}$$

Pro $\Delta\nu \ll \nu_0 \cdot \sigma_v / c$ je tvar pásu gaussovský

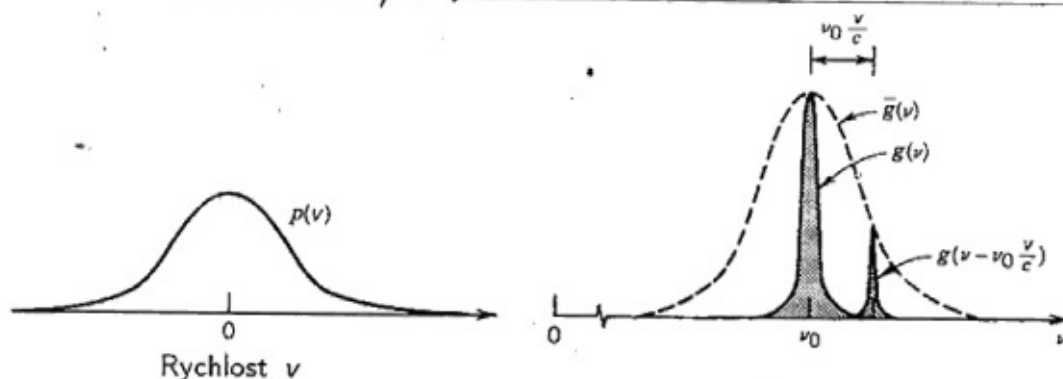
$$g(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_D} \exp\left[-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma_D^2}\right], \quad \sigma_D = \sigma_v \cdot \frac{\nu_0}{c}$$



Obrázek 12.2-9 Průměrná funkce tvaru nehomogenně rozšířené čáry souboru atomů.

V systému s nehomogenním rozšířením pásu jsou objekty (atomy, ...) s různými rezonančními frekvencemi. Každý atomový pás má svou charakteristiku, alespoň rezonanční frekvenci ν_{i0} a je rozšířen s nějakou pravděp. Obálka pak tvoří nehomogenně rozšířený pás.

Příklad: nehomogenní rozšíření Dopplerovým jevem v důsledku tepelného pohybu atomů v plynu.



Obrázek 12.2-11 Rozložení rychlostí a průměrný tvar čáry atomárního systému s dopplerovským rozšířením.

Popis emise / absorpce záření při přechodech pomocí Einsteinových koeficientů (rok 1916)

Koeficienty A_{21} , B_{12} , B_{21} jsou charakteristikami celého absorpčního / emisního pásu.

A_{21} spontánní emise,

B_{21} stimulovaná emise,

kteří dodávají energii do elektromagnet. pole

B_{12} absorpce odnímá energii elmag. poli.

Vše přechody mezi hladinami energie

E_1 a E_2 :

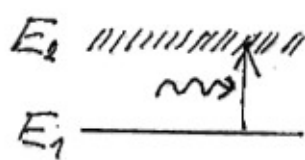
Při každém procesu se emituje / absorbuje kvantum energie $h\nu_{21} = E_2 - E_1$

Detašněji popisují spektrum součiny

$A_{21} \cdot g(\nu)$; $B_{21} \cdot g(\nu)$; $B_{12} \cdot g(\nu)$

kde $g(\nu)$ je normovaný tvar pásu, např. Lorentzův, Gaussův, Voigtův, atd.

Pro ilustraci jejich významu se hodí
 „dvouhladinový atom“ (nereálná fikce)



absorpce



A základní stav o energii E_1

A^* excitovaný stav o energii E_2

pravděpodobnost přechodu $\sim N_1 \cdot B_{12} \cdot \rho(\nu_{12})$

N_1 koncentrace atomů ve stavu A

$\rho(\nu_{12})$ spektrální hustota záření na frekvenci ν_{12}

B_{12} Einsteinův koeficient absorpce

změna objemu hladiny 1 $\frac{dN_1}{dt} = -B_{12} \cdot \rho \cdot N_1$
 způsobená absorpcí

rozměrově: $\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} = [B_{12}] \cdot \text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$

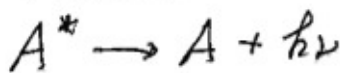
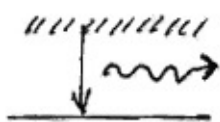
$$[B_{12}] = \text{J}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$$

spektrální hustota objemové hustoty energie pole

$$\int \rho_\nu d\nu = \rho \quad [\text{J} \cdot \text{m}^{-3}]$$

Hz, s^{-1}

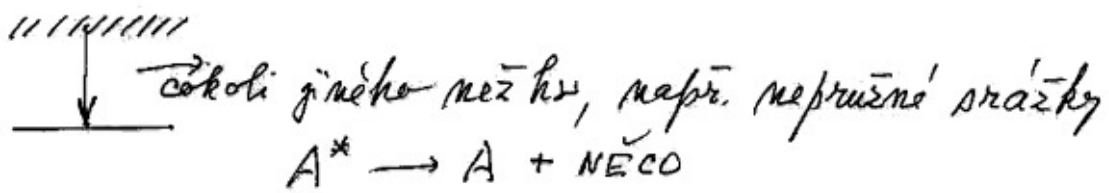
Emise spontánní radiace



$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21} N_2$$

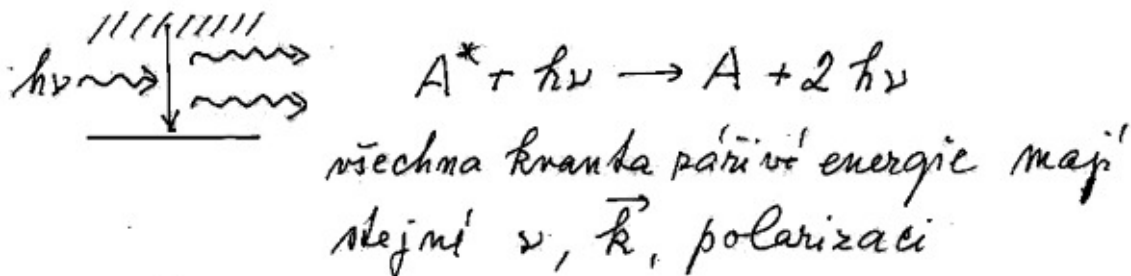
A_{21} Einsteinův koeficient spontánní emise $[\text{s}^{-1}]$

Nezářivý přechod (deexcitace)



$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{NR} N_2 \quad A_{NR} [s^{-1}]$$

Emise stimulovaná (zářivá)



$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21} \rho_\nu N_2$$

rozměr stejný jako absorpci B_{12} $[J^{-1} m^3 s^{-2}]$

V 2 hladinovém modelu rovnice pro časový vývoj
 obzvlášť jednoduché
 celková koncentrace atomů $N = N_1 + N_2$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} = B_{12} \rho_\nu(\nu_{12}) N_1 - A_{NR} N_2 -$$

$$-A_{21} N_2 - B_{21} \rho_\nu(\nu_{12}) N_2$$

absorpce, nezářivé přechody, spontánní emise,
 stimulovaná emise

Vztahy mezi Einsteinovými koeficienty
(v souladu s kvantovou mechanikou)

$$B_{12} = B_{21} = \frac{c^3 A_{21}}{8\pi h \nu^3} = \frac{\lambda^3}{8\pi h} \cdot A_{21}$$

Lze ukázat na modelu:

- stacionární stav $\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_1}{dt} = 0$
- ráření v rovnováze s 2 hladinovými atomy při teplotě T_{AT}

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} \cdot e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}$$

g_1, g_2 degenerační faktory atomových hladin
(kolik různých stavů má stejnou energii)

$$E_2 - E_1 = h\nu_{12} > 0$$

zde zjednotíme $g_1 = g_2$

hustota ráření při teplotě T_{AT} (Planckův z.)

$$\rho_{\text{PLAN}}(\nu_{12}) = \frac{8\pi h \nu_{12}^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu_{12}/k_B T} - 1}$$

Pro $A_{NR} = 0$:

$$\frac{dN_2}{dt} = 0 = (B_{12} N_1 - B_{21} N_2) \cdot \rho_{\text{PLANCK}}(\nu_{12}) - A_{21} N_2$$

$$(B_{12} N_1 - B_{21} N_2) \rho_{\text{PLANCK}}(\nu_{12}) = A_{21} N_2$$

$$\frac{8\pi h\nu_{12}^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu_{12}/k_B T} - 1} = \rho_{\text{PLANCK}}(\nu_{12}) = \frac{A_{21} N_2}{B_{12} N_1 - B_{21} N_2}$$

$$\frac{A_{21}}{B_{12} \frac{N_1}{N_2} - B_{21}} = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{\frac{h\nu_{12}}{k_B T}} - B_{21}} = \frac{8\pi h\nu_{12}^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{12}}{k_B T}} - 1}$$

Má-li to platit pro více teplot T , dostaneme

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu_{12}^3}{c^3} \quad B_{12} = B_{21}$$

Absorpce (kvasi)monochromatické vlny
v 2 hladinovém prostředí

intenzita záření vyjádřená přes objemovou hustotu fotonů

$$I = h\nu \cdot \Phi \quad \Phi \text{ fotonový tok}$$

počet fotonů za jednotku času
na jednotku plochy

$$I = c \cdot \underbrace{N_{\text{foton}} \cdot h\nu}_{\text{hustota energie na frekvenci}} \quad [m \cdot s^{-1} \cdot m^{-3} \cdot W \cdot s] = [W \cdot m^{-2}] \quad \checkmark$$

B_{12} celková pravděpodobnost pro přechody $1 \rightarrow 2$

$B_{12} \cdot g(\nu)$ to co je celková pravděpodobnost
(celý spektr. pás)
případně na frekvenci ν

absorpce: úbytek koncentrace fotonů
 = úbytek koncentrace atomů v základním stavu

$$-\frac{dN_{\text{foton}}}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} = \underbrace{B_{12} \cdot g(\nu)}_{\substack{\text{čísť pravděp.} \\ \text{připadající} \\ \text{na } \nu}} \cdot \underbrace{h\nu \cdot N_{\text{foton}}}_{\substack{\text{hustota} \\ \text{energie}}} \cdot \underbrace{N_1}_{\substack{\text{koncentrace} \\ \text{absorbentů}}}$$

vzdáhníme na vrstvičku tloušťky dz , objem $1 \times dz$

$$-\frac{dN_{\text{foton}}}{dt} \cdot dz = N_{\text{foton}} \cdot N_1 \cdot h\nu \cdot B_{12} \cdot g(\nu) dz$$

$$-dN_{\text{foton}} = \underbrace{\frac{dt}{dz}}_c \cdot dz \cdot N_{\text{foton}} \cdot N_1 \cdot h\nu \cdot B_{12} \cdot g(\nu)$$

c (přemějí $\frac{c}{m}$ index lomu)

$$-\frac{dN_{\text{foton}}}{dz} = \underbrace{\frac{1}{c} \cdot N_1 \cdot h\nu \cdot B_{12} \cdot g(\nu)}_{\alpha(\nu) \text{ absorpční koeficient}} \cdot N_{\text{foton}}$$

$$N_{\text{foton}}(z) = N_{\text{foton}}(z=0) \cdot e^{-\alpha(\nu) \cdot z} \quad | \cdot c \cdot h\nu$$

$$I(z) = I(z=0) \cdot e^{-\alpha(\nu) \cdot z}$$

α rozměrově

$$\frac{1}{c} \cdot N_1 \cdot h\nu \cdot \underbrace{B_{12}^{-1}}_{\substack{\text{m}^{-3} \text{ s} \\ \text{J}^{-1}}} \cdot g(\nu) \cdot \text{J} = \text{m}^{-1} \quad \checkmark$$

Absorpce + stimulovaná emise $B_{12} = B_{21}$
 zanedbává sponánní emise a nezářivé přechody

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\text{foton}}}{dz} &= -\frac{1}{c} N_1 \cdot h\nu \cdot B_{12} \cdot g(\nu) \cdot N_{\text{foton}} + \\ &+ \frac{1}{c} N_2 \cdot h\nu \cdot B_{21} \cdot g(\nu) \cdot N_{\text{foton}} = \\ &= \frac{1}{c} h\nu \cdot g(\nu) \cdot (N_2 - N_1) \cdot B_{12} \cdot N_{\text{foton}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{-\alpha(\nu)} \end{aligned}$$

Pro $N_2 < N_1$ je $\alpha > 0$, dochází k zeslabení plny,
 absorpce převládá nad stimulovanou emisí

Pro $N_2 > N_1$ je $\alpha < 0$, bez rávíst $\gamma = -\alpha$
 koeficient zesílení,
 dochází k zesílení plny, stim. emise převládá

Lze docílit ve stacionárním případě inverzní
 populace $N_2 > N_1$ třeba použitím silné plny
 rezonující mezi dvěma hladinami?

Odpověď: NEZDE, vždy absorpce převládá nad emisí,
 i když se absorpční koeficient zmenšuje:

$$\alpha(I) = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{satur.}}}} \quad \alpha_0 = \alpha(I \rightarrow 0)$$

$$\alpha(I_{\text{satur.}}) = \frac{\alpha_0}{2}$$

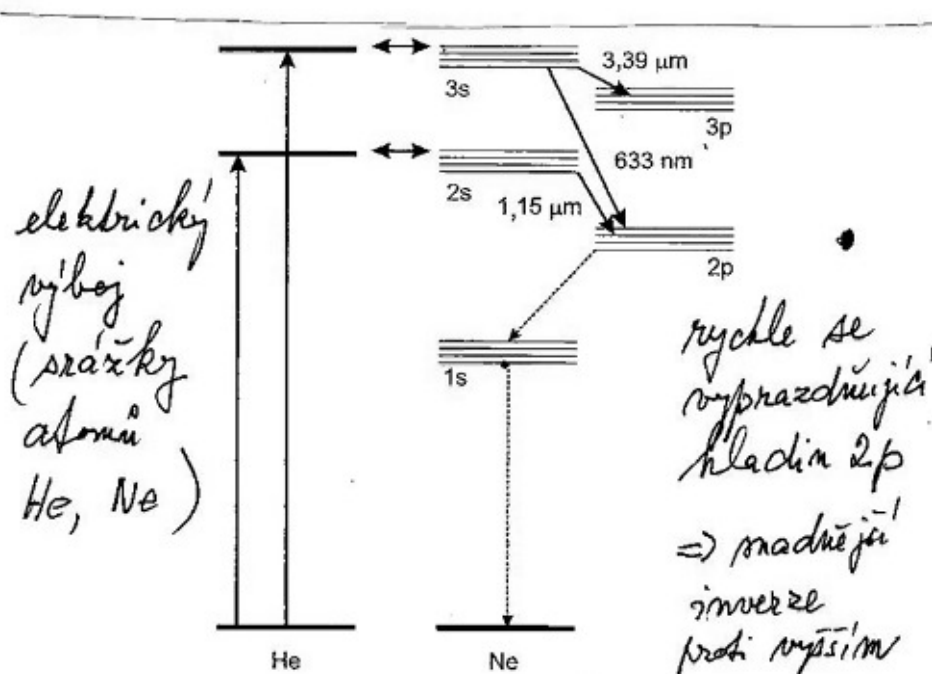
„saturace absorpce“

Tedy: monochromatické záření není schopno samo sebe zesílovat

Pro zesílení nutno použít jiné zdroje energie, které dostanou populaci stavů 1, 2 daleko od termodynamické rovnováhy $E_2/E_1 = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}$

- Systémy s více „důležitými“ hladinami
- Způsoby dodání výkonu k zajištění inverze populace:
 - el. výboj v plynech
 - luminescence v p-n přechodech v polovodičích
 - energie z chemických reakcí
 - záření z jiného zdroje

Příklad He-Ne laser



Obr. 15.5 Schéma energetických hladin He-Ne laseru. Čárkovaně jsou znázorněny nežádoucí přechody. Neznámější vlnová délka 632,8 nm je spojena s přechodem $3s_2 \rightarrow 2p_4$. Na obrázku jsou znázorněny jen tři nejdůležitější laserové přechody

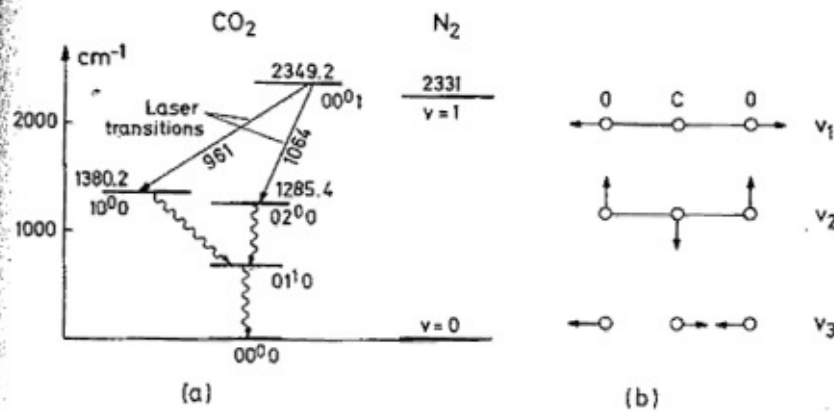


Fig.6.8a,b. Level diagram and laser transitions in the CO₂ molecule (a) and normal vibrations (b)

Laser CO₂ - N₂ pro infračervenou oblasť.
 Využíva molekulárnych kmitů.
 Jednotky pro energetické hladiny: plošty [cm⁻¹]
 plošed = $\frac{v}{c}$

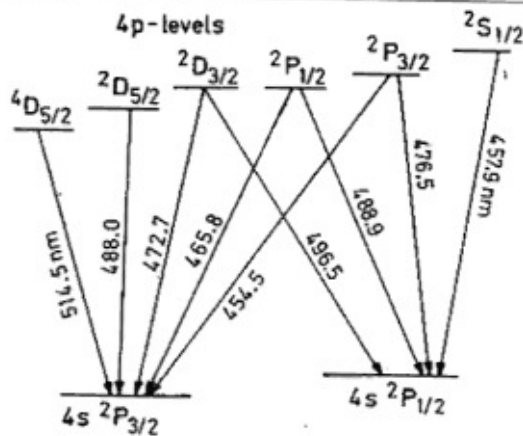
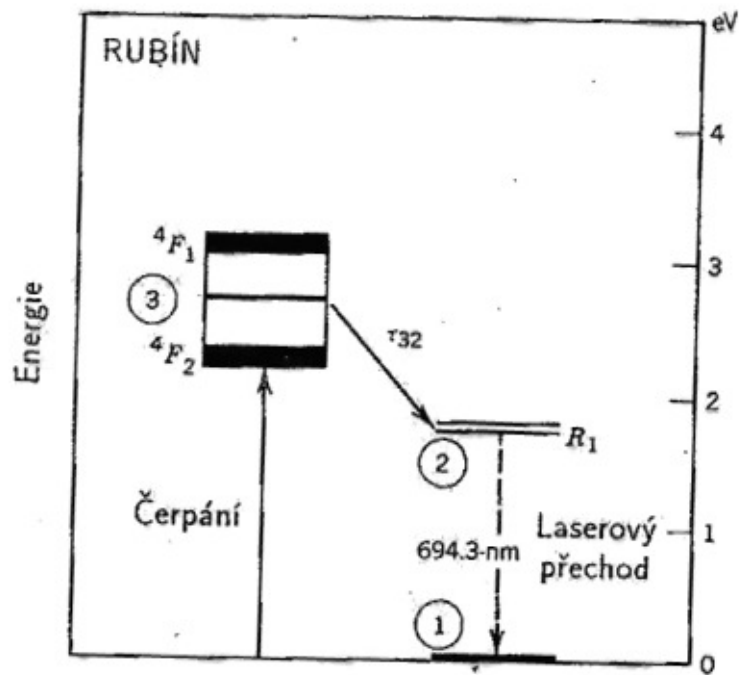


Fig.6.7. Energy level diagram and coupling of laser transitions in the argon-ion laser

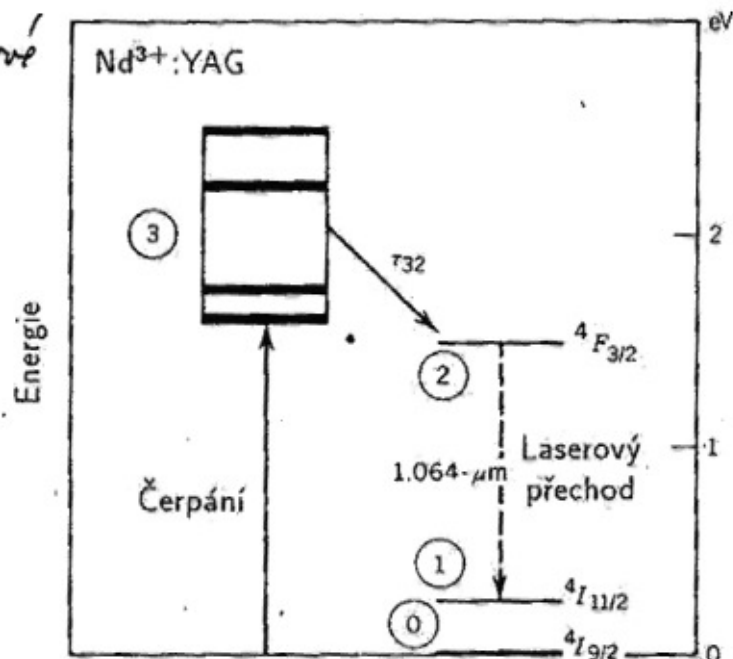
"Zelený" argonový laser.



Obrázek 13.2-9 Energetické hladiny, které se uplatňují v rubínu při laserovém přechodu o vlnové délce 694,3 nm v červené oblasti spektra.

*Tříhladinové schéma pro rubínový laser
 $\text{Cr}^{3+} : \text{Al}_2\text{O}_3$
 První laser v optickém oboru (1960)*

4 hladinové schéma



Obrázek 13.2-11 Energetické hladiny významné pro laserový přechod s vlnovou délkou 1,064 μm v $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$. Rozložení energetických hladin $\text{Nd}^{3+}:\text{sílo}$ je podobné, ale absorpční pásy jsou širší.

Umístění aktivního prostředí do rezonátoru.

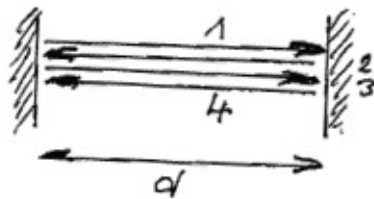
V laserech často rezonátory dlouhé a úzké
- přispívá k difrakční eliminaci nežádoucích módů.

Interference v rezonátoru musí způsobit vysokou intenzitu požadovaného módu v aktivním prostředí:

přibližně
$$\frac{dN_{\text{foton}}}{dz} = \frac{h\nu}{c} \cdot B_{12} \cdot g(\nu) \cdot \underbrace{(N_2 - N_1)}_{>0} \cdot N_{\text{foton}} \implies$$

inverze

což nastane při konstruktivní interferenci po dráze „tam a zpět“



1 se musí konstruktivně složit s 3
2 se 4

V přímém rezonátoru:

změna fáze vlny po uběhnutí dráhy $2d$

$$k \cdot 2d = 2 \cdot \frac{\omega}{c} \cdot d = 2 \cdot \frac{2\pi\nu}{c} \cdot d = 2 \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vak}}} \cdot d = 2\pi q$$

q celé číslo

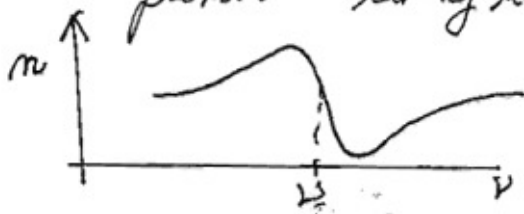
Jinak řečeno: vlnová funkce stojaté vlny má na krajích rezonátoru uzly.

„Povolení“ frekvence k rezonování

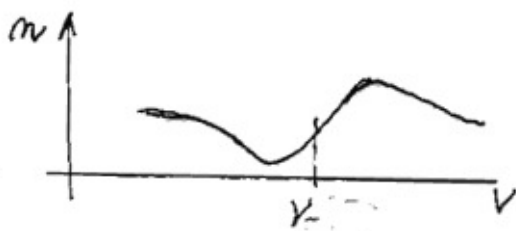
$$\nu_q = \frac{c}{2d} \cdot q \quad \text{obvykle } q \text{ velké číslo}$$

Po vložení látky je podmínka modifikována indexem lomu.

Navíc průběh indexu lomu n okolo rezonanční frekvence látky závisí na absorpci / emisi

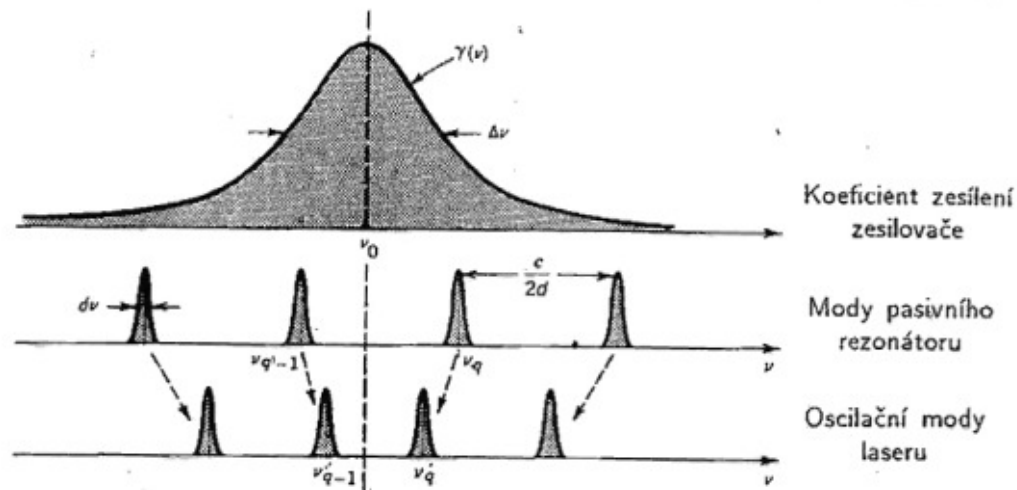


absorpce (oslabování)



emise (zosilování vlny)

Posun módů rezonátoru vlivem indexu lomu aktivního prostředí



Obrázek 14.1-4 Frekvence laserových oscilací leží blízko frekvencí módů pasivního rezonátoru; jsou slabě posunuté směrem k centrální rezonanční frekvenci ν_0 atomu.

Vlna v rezonátoru je nejen zesilována,
ale působí i ztrátové mechanismy:

- rozptyl a absorpce v objemu rezonátoru,
- ztráty na zrcátkách $R_1, R_2, \neq 1$
alespoň na 1 zrcátku je ztráta přinejmenším
- ztráta potřebujeme z rezonátoru vyvést světlo,
- difrakční ztráty

Vzdáleno na 1 oběh (dráha $2d$)

$$\text{ztráta} \sim R_1 \cdot R_2 \cdot \exp[-2\alpha_s d] = \exp[-2\alpha_{\text{eff}} d]$$

Nasazení laserování

zesílení při malé intenzitě světla $g_0(\nu) > \alpha_{\text{eff}}$
(koeficient zesílení)

\Rightarrow požadavek na prahovou inverzi stavů 2, 1

$$(N_2 - N_1)_{\text{PRAH}} = \frac{c \cdot \alpha_{\text{eff}}}{h\nu \cdot B_{12} \cdot g(\nu)}$$

při poměrně $g(\nu)$ je normovaný tvar spektrálního
pásmu pro přechody $1 \rightleftharpoons 2$; $\int g(\nu) d\nu = 1$

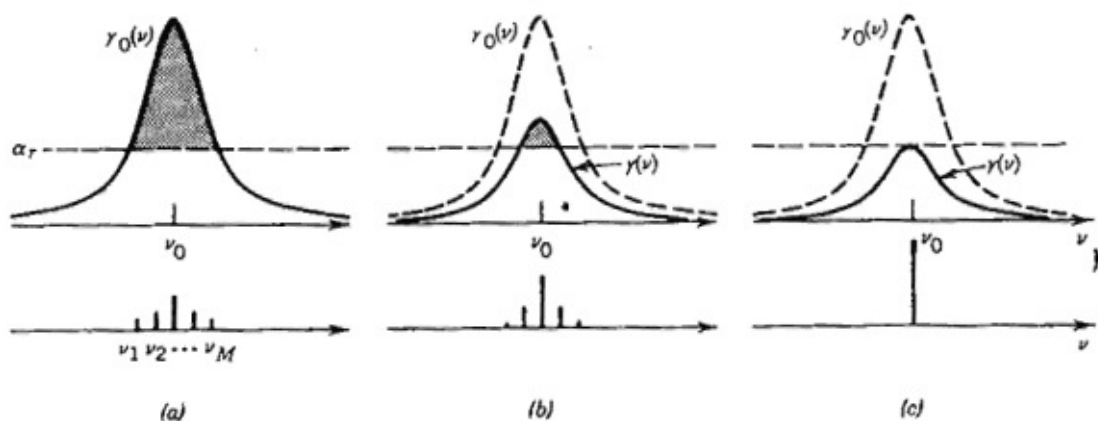
$B_{21} = B_{12}$ udává celkovou pravděpodobnost pro
přechody $1 \rightleftharpoons 2$.

S rostoucí hustotou fotonů v rezonátoru se snižuje koeficient zesílení γ ; při $\gamma(\nu) = \alpha_{\text{eff}}(\nu)$ nastane ustálený stav.



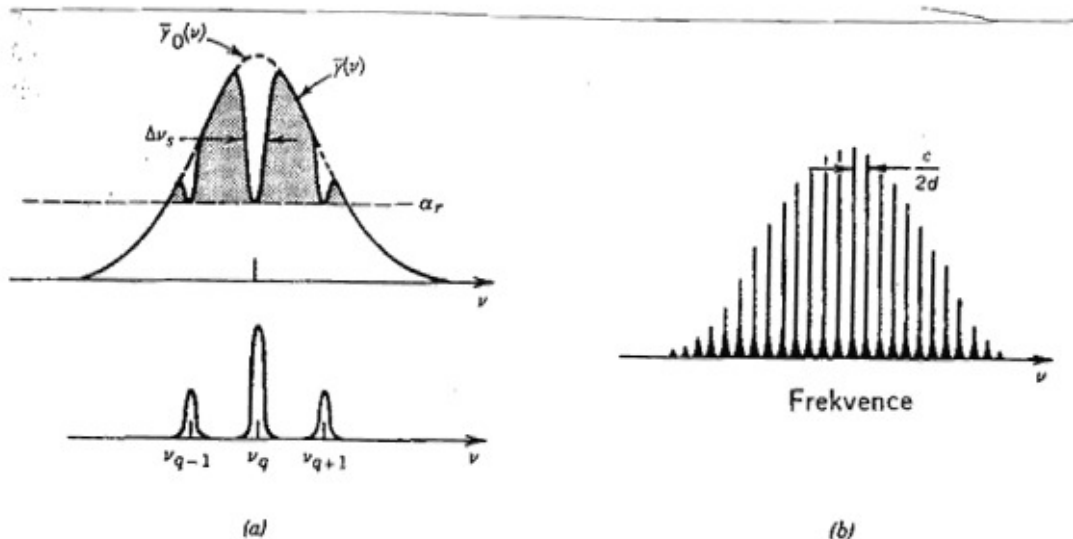
Obrázek 14.2-1 Určení stacionární hustoty fotonového toku ϕ . V okamžiku zahájení funkce laseru je $\phi = 0$, takže $\gamma(\nu) = \gamma_0(\nu)$. Jak oscilace v čase vzrůstají, rostoucí ϕ způsobuje následkem saturace zesílení pokles $\gamma(\nu)$. Když γ dosáhne α_r , hustota fotonového toku se přestane zvyšovat a je dosaženo stacionárních podmínek. Čím menší jsou ztráty, tím větší je hodnota ϕ .

V důsledku toho se redukuje počet zesilovaných módů ν_q . Příklad homogenního rozšíření:



Obrázek 14.2-5 Vývoj oscilací v prostředí s ideálním homogenním rozšířením. (a) Bezprostředně po zahájení činnosti laseru začínají růst všechny módy s frekvencemi $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_M$, pro něž koeficient zesílení převyšuje koeficient ztrát. Přitom nejrychleji rostou centrální módy. (b) Během krátké doby dojde k saturaci zesílení, takže centrální módy nadále rostou, zatímco okrajové, pro něž jsou ztráty větší než zisk, jsou tlumené a případně zanikají. (c) Nedochozí-li k vypalování prostorových děr, zůstane pouze jediný mód.

Případ nehomogenního rozšíření je složitější
a ve spektru zůstává více módů i
v ustáleném stavu.



Obrázek 14.2-7 (a) Laserové oscilace nastávají v prostředí s nehomogenním rozšířením přechodu v každém modu, který nezávisle vypaluje zářez v celkovém spektrálním profilu zesílení. Zesílení jednoho modu prostředím neovlivňuje zesílení ostatních módů. Centrální mody využívají příspěvků většího počtu atomů a proto obsahují více fotonů než mody okrajové. (b) Spektrum typického multimodového plynového laseru s nehomogenním rozšířením.

Lze vylepšit módovou selekcí:

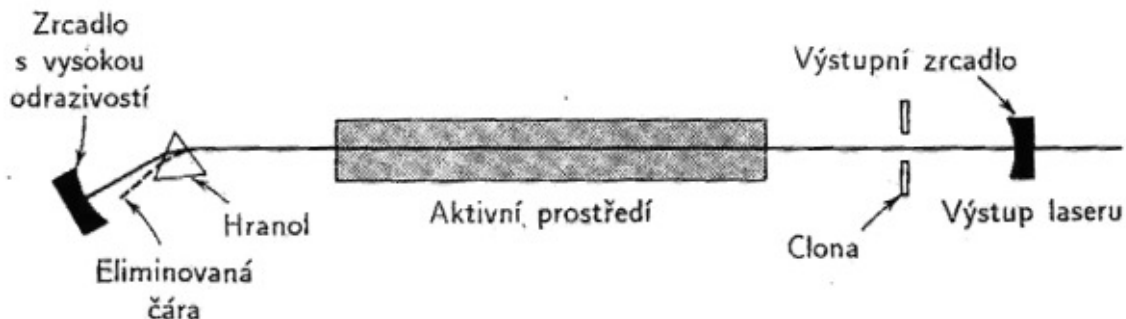
do rezonátoru se vloží prvek, který
reprodukuje ztráty v neregulárních módech.

V rezonátoru mohou vznikat i příčné módy
odlišné od $TEM_{00} \equiv$ gaussovský svazek.

Jednomódové - „nejčistší“ pro spektrální aplikace
(vysoký stupeň koherence)

Mnohamódové - užitečné pro dosažení vysokých
optických výkonů.

„Hrubý“ výběr pásu $1 \leftrightarrow 2$



Obrázek 14.2-12 Určitou atomovou čáru lze vybrat pomocí hranolu umístěného do rezonátoru. Selekcí příčných módů je možné provést prostorovou clonou přesného tvaru a velikosti.

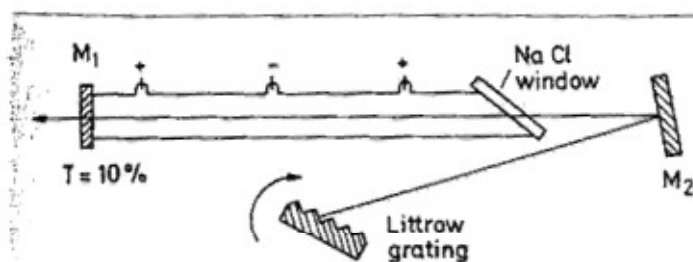
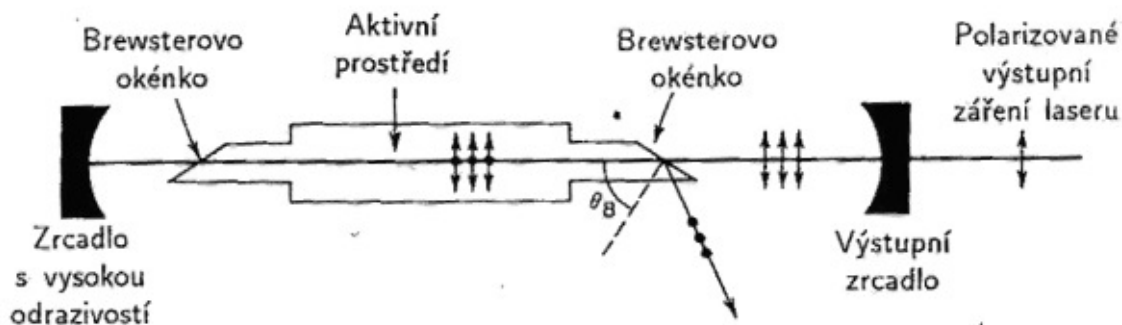
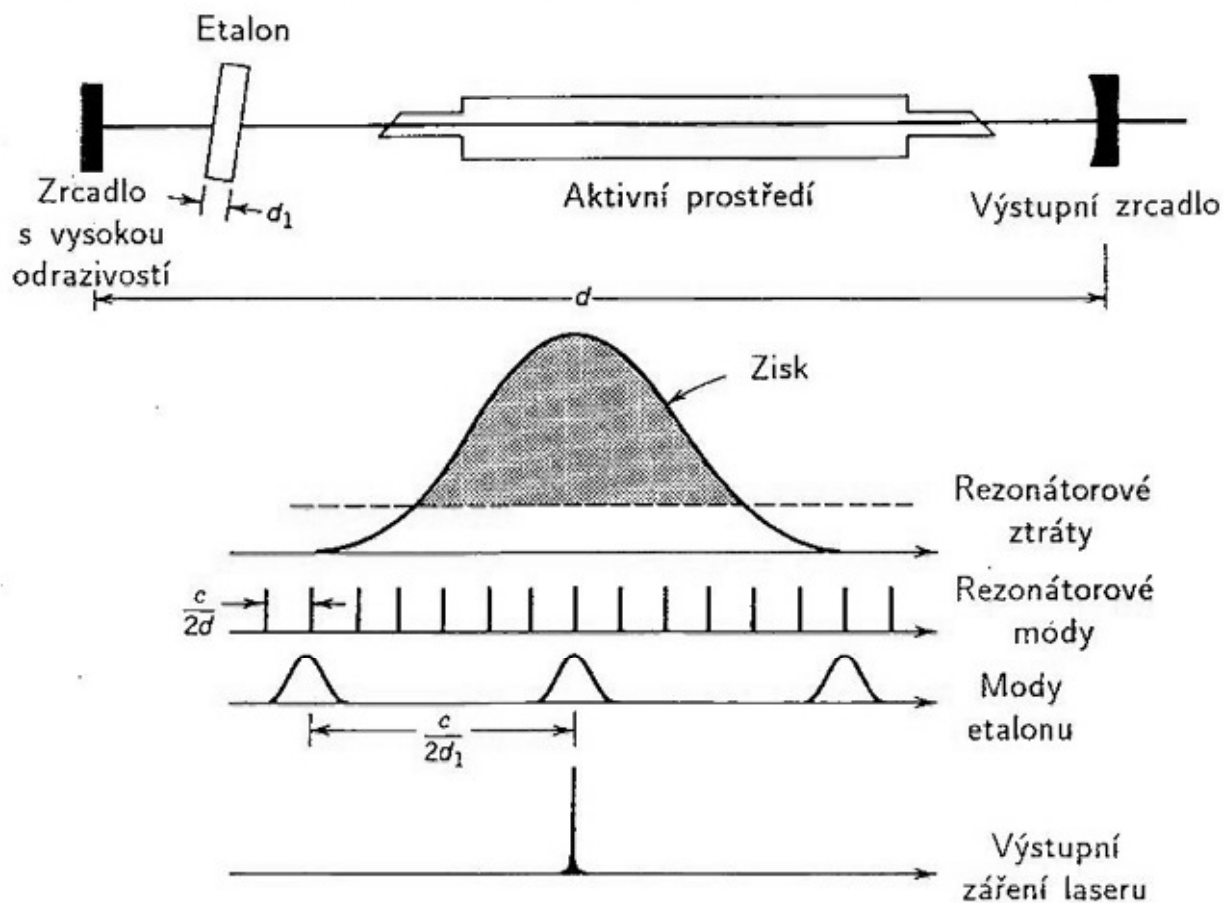


Fig.6.4. Selection of different rotational lines in a CO₂ laser by a Littrow grating

Použití „bezodrazových“ okének pro 1 polarizaci



Obrázek 14.2-13 Brewsterova okénka v plynovém laseru zajišťují lineárně polarizované záření laserového svazku. Světlo polarizované v rovině dopadu (vlna TM) prochází okénkem skloněným pod Brewsterovým úhlem bez reflexních ztrát. Kolmo polarizovaný mód (TE) má ztráty způsobené odrazem a následkem toho nezačne oscilovat.



Obrázek 14.2-14 Výběr podélných módů etalonem umístěným v rezonátoru. Oscilace nasadí na frekvencích koincidence rezonátorového a etalonového modu; oba módy musí samozřejmě ležet uvnitř spektrálního oboru, v němž zesílení prostředí převyšuje ztráty.

Využití interference v planoparalelní desce ("etalon") pro výběr módu.

Příloha 1

Odvození Lorentzova tvaru absorpčního pásu z Lorentzova modelu

V dalším budeme užívat "Lorentzův tvar absorpčního pásu",

ke odvození z Lorentzova modelu pro případ slabé absorpce (slabého klumení)

$$\chi_\nu(\nu) = \frac{Ng^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m} \left[\frac{\nu_0^2 - \nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \gamma^2 \nu^2} + \frac{i\gamma}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \gamma^2 \nu^2} \right] = \chi_R + i\chi_I$$

$$n(\nu) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 + \chi_R)^2 + \chi_I^2} + 1 + \chi_R \right]}$$

$$k(\nu) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 + \chi_R)^2 + \chi_I^2} - (1 + \chi_R) \right]}$$

aproximace $\chi_I \ll 1 + \chi_R$

$$n \doteq \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 + \chi_R)^2 + (1 + \chi_R)} \right]} = \sqrt{1 + \chi_R} = \sqrt{\epsilon_{R, \text{rel.}}}$$

$$k \doteq \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{n^4 + \chi_I^2} - n^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{2} n^2 \left[\sqrt{1 + \frac{\chi_I^2}{n^4}} - 1 \right]} \doteq$$

$$\doteq \sqrt{\frac{1}{2} n^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\chi_I^2}{n^4} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\chi_I^2}{n^2}} = \frac{\chi_I}{2n}$$

$$\chi_I = \frac{Ng^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m} \cdot \frac{\gamma \nu}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \gamma^2 \nu^2} \quad \text{aproximace } |\nu_0 - \nu| \ll \nu_0 + \nu$$

$$\doteq \frac{Ng^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m} \frac{\gamma \nu}{(\nu_0 + \nu)^2 (\nu_0 - \nu)^2 + \gamma^2 \nu^2} \doteq$$

$$\doteq \frac{Ng^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m} \frac{\gamma \nu}{4\nu^2 (\nu_0 - \nu)^2 + \gamma^2 \nu^2}$$

$$= \frac{Ng^2}{16\pi^2 \epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\nu} \frac{\gamma}{(\nu_0 - \nu)^2 + \gamma^2/4}$$

absorpční koeficient

$$\alpha(\nu) = \frac{4\pi\nu}{c} \cdot \kappa(\nu) \stackrel{!}{=} \frac{2\pi\nu}{cn} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \frac{Ng^2}{16\pi^2\epsilon_0 m} \cdot \frac{\gamma}{(\nu_0 - \nu)^2 + \gamma^2/4}$$
$$= \frac{Ng^2}{8\pi n c \epsilon_0 m} \cdot \frac{\gamma}{(\nu_0 - \nu)^2 + \gamma^2/4}$$

Lorentzův tvar absorpčního pásu

Normování na jednotkovou plochu pásu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \left[\frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}; \quad a = \gamma/2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{(\nu_0 - \nu)^2 + \gamma^2/4} d\nu = \frac{\gamma \cdot \pi}{\gamma/2} = 2\pi$$

Normovaný tvar: $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\gamma}{(\nu_0 - \nu)^2 + \gamma^2/4} = g(\nu)$

Výška v maximum $g(\nu_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4\gamma}{\gamma^2} = \frac{2}{\pi \cdot \gamma}$

Pro která ν dostaneme $1/2$ maxima?

$$(\nu_0 - \nu)^2 = \gamma^2/4$$

$$|\nu_0 - \nu| = \gamma/2$$


Plná šířka v $1/2$ výšce, FWHM

$$\Delta\nu = 2|\nu_0 - \nu| = \gamma$$

Příloha 2

Lorentzův tvar ze spektra tlumených oscilací

Odvození Lorentzova tvaru absorpčního pásu
ze spektra tlumených oscilací

↕  pole $\mathcal{E}(\vec{r}, t)$,
oscilátor

Tlumený oscilátor $\mathcal{E}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{2\tau}} \cdot e^{-2\pi i \nu_0 (t-t_0)}$
pro $t \geq t_0$ [$V \cdot m^{-1}$]

$\mathcal{E}(\vec{r}, t) = 0$ pro $t < t_0$

Fourierova transformace

$$\begin{aligned} FT\{\mathcal{E}(\vec{r}, t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t) \cdot e^{+2\pi i \nu t} dt = \\ &= \int_{t_0}^{\infty} \mathcal{E}_0 e^{-\frac{t-t_0}{2\tau}} \cdot e^{-2\pi i \nu_0 t} \cdot e^{2\pi i \nu_0 t_0} \cdot e^{2\pi i \nu t} dt \\ &= \mathcal{E}_0 \cdot e^{2\pi i \nu_0 t_0} \cdot \int_{t_0}^{\infty} e^{-\frac{t-t_0}{2\tau}} \cdot e^{2\pi i (\nu - \nu_0) t} dt \end{aligned}$$

substituce $t - t_0 = x$ $t = x + t_0$ $dt = dx$

$$FT\{\} = \mathcal{E}_0 e^{2\pi i \nu_0 t_0} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2\tau}} \cdot e^{2\pi i (\nu - \nu_0)(x+t_0)} dx$$

$$= \mathcal{E}_0 e^{2\pi i \nu_0 t_0} \cdot e^{2\pi i \nu t_0} \cdot e^{-2\pi i \nu_0 t_0} \cdot$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2\tau}} \cdot e^{2\pi i (\nu - \nu_0)x} dx =$$

$$= \mathcal{E}_0 e^{2\pi i \nu t_0} \frac{1}{2\pi i (\nu - \nu_0) - \frac{1}{2\tau}} \left[e^{-\frac{x}{2\tau}} \cdot e^{2\pi i (\nu - \nu_0)x} \right]_{x=0}^{x \rightarrow \infty}$$

$$FT\{\mathcal{E}(t)\} = \mathcal{E}_0 \cdot e^{2\pi i \nu t_0} \frac{(-1)(-1)}{2\pi i(\nu_0 - \nu) + \frac{1}{2\tau}} =$$

$$= \mathcal{E}_\nu(\nu, t_0) \quad [V \cdot m^{-1} \cdot s]$$

FT elektrického pole závisí na době spuštění pulzu t_0 .

Výkon protékající jednotkovou plochou ν místě \vec{r}

$$P(t) \doteq \frac{1}{2} c \epsilon_0 \mathcal{E}(\vec{r}, t) \cdot \mathcal{E}^*(\vec{r}, t)$$

Jednoduchou komplexní symboliku lze použít pro pomalé změny amplitudy nosné frekvence ν_0 .

Aj. pro malé slumění, dlouhé doby $\tau \gg \frac{1}{\nu_0}$

Pro přechody ve volných atomech dovolení ν elektrické dipólové aproximaci je řádově $\tau \sim 10^{-8} \text{ s}$, $\frac{1}{\nu_0} \sim 10^{-15} \text{ s}$, nerovnost bohatě splněna

$$P(t) \doteq \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\mathcal{E}_0|^2 \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad [W \cdot m^{-2}]$$

Spektrální hustota energie, která protěče jednotkovou plochou ν místě \vec{r} za dobu trvání pulzu

$$W_\nu(\nu) = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \cdot \mathcal{E}_\nu(\nu, t_0) \cdot \mathcal{E}_\nu^*(\nu, t_0)$$

což lze použít opět pro pomalu slumené kmity s malou spektrální šířkou kolem ν_0

Poznámka mimo:

Pro rychle slumené pulzy (obecněji pro rychle změnny neperiodické) je výhodno:

- buď pracovat s reálnými veličinami,
- nebo (v případě, že je výhodné pracovat s komplexními analytickými funkcemi) je třeba spojit reálné a imaginární části funkce Hilbertovými transformacemi.

Zpět k pomalému slumení:

spektrální hustota energie prošle je dvojnásobnou plochou

$$W_\nu(\nu) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\mathcal{E}_0|^2 \frac{1}{\frac{1}{2\tau} + 2\pi i(\nu_0 - \nu)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2\tau} - 2\pi i(\nu_0 - \nu)}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\mathcal{E}_0|^2 \frac{1}{\frac{1}{4\tau^2} + 4\pi^2(\nu_0 - \nu)^2}$$

Důležité: zde už nevystupuje čas t_0 .

Rozměrově

$$\underbrace{A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}}_{\mathcal{E}_0} \cdot \underbrace{m \cdot s^{-1}}_c \cdot \underbrace{V^2 \cdot m^{-2}}_{\mathcal{E}_0^2} ; \quad \mathcal{A}^2 = A \cdot V \cdot m^{-2} \cdot s^2 =$$

$$= W \cdot s \cdot m^{-2} \cdot \mathcal{A} = J \cdot m^{-2} \cdot \mathcal{A}$$

energie na jednotku plochy na spektrální interval 1 Hz

Celková energie prošla jednotkou plochy
za dobu trvání pulsu

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\vec{r}, t) \cdot \mathcal{E}^*(\vec{r}, t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_\nu(\vec{r}, \nu) \cdot \mathcal{E}_\nu^*(\vec{r}, \nu) d\nu$$

Parsevalův teorém ✓

Zavedeme spektrální síťku, pro Lorenzův tvar
se hodí $\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau}$, $\tau = \frac{1}{2\pi\Delta\nu}$

$$\frac{1}{\frac{4\pi^2 \Delta\nu^2}{4} + 4\pi^2 (\nu_0 - \nu)^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 + (\nu_0 - \nu)^2}$$

Chceme zavést normovaný tvar $g(\nu)$, $\int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) d\nu = 1$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{(\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2} = \frac{4}{4\pi^2 \Delta\nu^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{\frac{4(\nu_0 - \nu)^2}{\Delta\nu^2} + 1}$$

substituce $x^2 = \frac{4}{\Delta\nu^2} (\nu_0 - \nu)^2$

$$x = \frac{2}{\Delta\nu} (\nu - \nu_0) \quad dx = \frac{2}{\Delta\nu} \cdot d\nu$$

$$d\nu = \frac{\Delta\nu}{2} dx$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{4}{\Delta\nu^2} \cdot \frac{\Delta\nu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 \Delta\nu} \left[\arctan x \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2\pi^2 \Delta\nu} = \frac{1}{2\pi \Delta\nu} = \tau$$

Spektrální hustota energie

$$W_\nu(\nu) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\mathcal{E}_0|^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{2\pi \cdot \Delta\nu}{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 + (\nu - \nu_0)^2} \cdot \frac{1}{2\pi \Delta\nu}$$

$$g(\nu) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\nu}{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 + (\nu_0 - \nu)^2}$$

$$W_\nu(\nu) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\mathcal{E}_0|^2 \cdot \frac{1}{2\pi \Delta\nu} \cdot g(\nu)$$

normované při $g(\nu)$ [Δ] da' opět $\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \Delta$

Spektrální hustota nezávisí na době spuštění pulzu

Poznámka ke vztahům (15.13)
v učebnici P. Malý, Optika

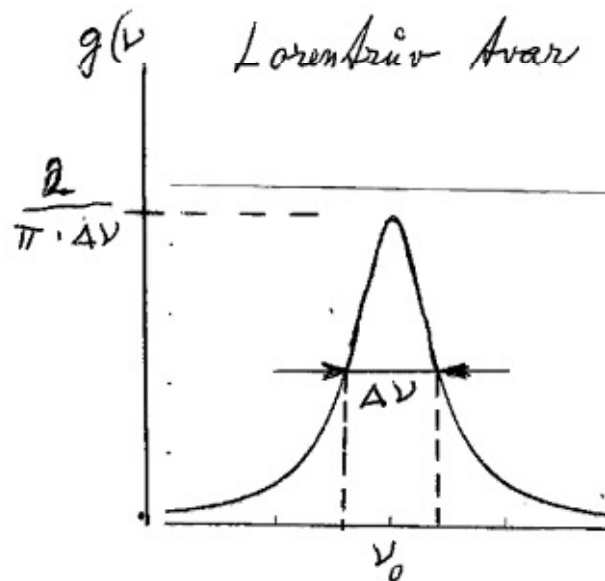
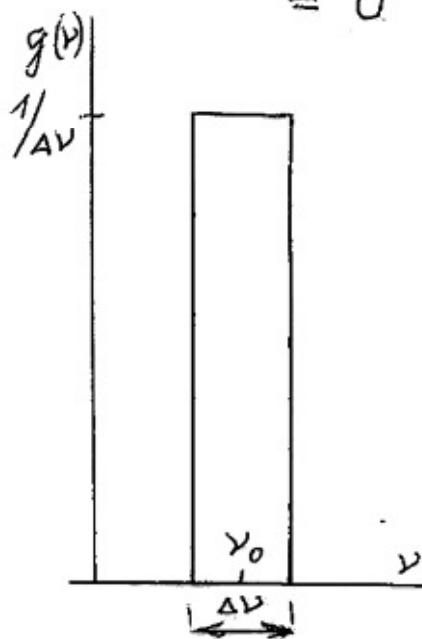
kde absorpční koeficient

$$\alpha = B_{21} (N_2 - N_1) \cdot \frac{h\nu}{c \cdot \Delta\nu}$$

To lze dostat aproximací Awaru pásem

$$g(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu} \quad \text{pro } \nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2} < \nu < \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$$

$$= 0 \quad \text{jinde}$$



Není vhodné pro popis
rychlou módu laseru.